Міністерство освіти і науки України

Чернігівський національний технологічний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки до проведення
практичних занять для студентів усіх спеціальностей
за темою ”Застосування визначеного інтеграла”

Обговорено і затверджено на
засіданні кафедри вищої та
прикладної математики,
протокол № 7 від 17. 02. 2016 р.

ЧЕРНІГІВ ЧНТУ 2016

Вища математика. Методичні вказівки до проведення практичних занять для студентів усіх спеціальностей за темою ”Застосування визначеного інтеграла” / Укл.: Лапа Т.В., Мовша О.М., Синенко М.А.– Чернігів: ЧНТУ, 2016. – 32 с.

Укладачі: Лапа Тамара Володимирівна, асистент

Мовша Олена Миколаївна, асистент

Синенко Марина Анатоліївна, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Відповідальний за випуск: Балюнов Олексій Олександрович, завідувач кафедри вищої та прикладної математики, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: Лось Валерій Миколайович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики Чернігівського національного технологічного університету

Зміст

Вступ

Курс вищої математики разом із курсами інших загальноосвітніх дисциплін складає основу фундаментальної підготовки сучасних інженерів та економістів. Сучасне життя потребує від майбутніх фахівців оволодіти основними математичними навичками, які вони отримують, вивчаючи курс вищої математики в університеті.

Зрозуміло, що у навчанні математики задачам належить провідна роль як найкращому способу, що забезпечує міцність математичних знать. Вчителям на практичних заняттях бажано ілюструвати застосування математичних понять на конкретних задачах, пов'язаних з майбутньою спеціальністю студентів. Так, наприклад, для економічних спеціальностей доцільно розглядати математичні задачі з економічним змістом, а для студентів інженерних спейіальностей – задачі з фізичним змістом.

Дані методичні вказівки призначені для студентів денної та заочної форми навчання і містять основні теоретичні відомості, приклади розв''язання задач, завдання до індивідуальних розрахунково – графічних робіт з вищої математики за темою "визначений інтеграл ", яка передбачена робочими навчальними програмами підготовки студентів за певними спеціальностями та містять рекомендовану літературу з відповідної теми курсу.

1 Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ фігур

Площу довільної *плоскої* фігури в декартовій системі координат можна скласти з площ криволінійних трапецій, прилеглих до осі Ox чи Oy. Площа криволінійної трапеції, прилеглої до осі Ox (*рисунок 1.1*) і обмеженої зверху кривою $y = y(x)$ в межах від x_1 до x_2 дорівнюватиме визначеному інтегралу

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y dx. \tag{1.1}$$

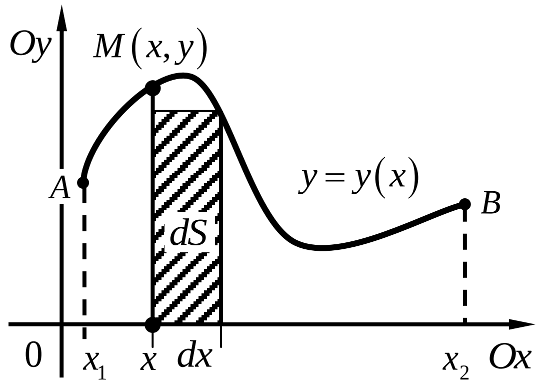

Рисунок 1.1− Обчислення площі трапеції прилеглої до Ox

Площа криволінійної трапеції, прилеглої до осі Oy, якщо вся трапеція розташована справа від осі Oy, відповідно визначається інтегралом

$$S = \int_{y_1}^{y_2} x dy. \tag{1.2}$$

<u>Приклад № 1.1:</u>

Знайти площу плоскої фігури (*рисунок 1.2*), обмеженої лініями $y^3 = x, \; y = 1, \; x = 8.$

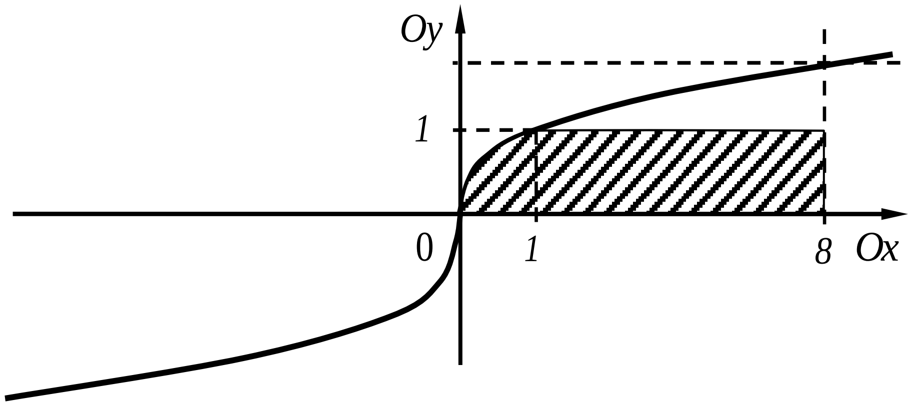

Рисунок 1.2 − До прикладу №1.1

Якщо обчислювати площу фігури інтегруванням по змінній *x*, то проміжок інтегрування доведеться розбивати на дві частини: сегмент $\left[0;1\right]$, де $f_1\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$ та $\left[1;8\right]$, де $f_2\left(x\right)=1$, і обчислювати два інтеграла:

$$S=\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx+\int_1^8 1\cdot dx.$$

В той же час для інтегрування по змінній *y* знадобиться один інтеграл:

$$S=\int_0^1\left(8-y^3\right)dy=\int_0^1 8dy-\int_0^1 y^3dy=8y\Big|_0^1-\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^1=8-\frac{1}{4}=7\frac{3}{4}.$$

Перехід до полярної системи координат

Іноді функція, що описує контур фігури, площу якої потрібно обчислити, має в декартових координатах складний вигляд і тому важко інтегрується. В той же час в полярній системі координат відповідне рівняння має простий вигляд. В таких випадках для обчислення площі фігури доцільно перейти саме до полярних координат.

Площа криволінійної фігури (сектора в межах зміни кута φ від α до β) в полярній системі координат виражається формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^{2}(\varphi)\,d\varphi,\quad \alpha\le\varphi\le\beta. \tag{1.3}$$

<u>Приклад № 1.2:</u>

Обчислити площу фігури (*рисунок 1.3*), заданої в полярній системі координат рівнянням $\rho=a\left|\cos 2\varphi\right|$.

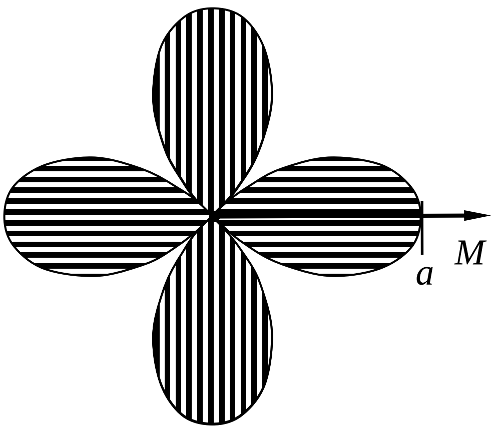

Рисунок 1.3 − До прикладу №1.2

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\rho(\varphi)\right)^2 d\varphi=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(a\cos 2\varphi\right)^2 d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}\cos^2 2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{4}\int_{0}^{2\pi}\left(1+\cos 4\varphi\right)d\varphi=\frac{a^2}{4}\int_{0}^{2\pi}d\varphi+$$

$$+\frac{a^2}{4}\int_{0}^{2\pi}\cos 4\varphi d\varphi=\frac{a^2}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi}+\frac{a^2}{4}\frac{\sin 4\varphi}{4}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\pi a^2}{2}.$$

Інтегрування функцій, заданих параметрично

Для обчислення площі фігури, обмеженої функцією, заданою параметричними рівняннями вигляду $x=x(t),\ \ y=y(t)$, перетворимо *формулу*, записану в декартових координатах, на формулу для обчислення інтегралу функції, заданої параметрично, виконавши заміну змінних та меж інтегрування:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}ydx=\int_{x(t_1)}^{x(t_2)}y(t)\,dx(t)=\int_{x(t_1)}^{x(t_2)}y(t)\,x'(t)\,dt. \tag{1.4}$$

При обчисленні площі фігури, заданої параметричними рівняннями, необхідно звертати особливу увагу на область зміни незалежної змінної – параметра t.

Приклад № 1.3:

Обчислити площу фігури, заданої параметричними рівняннями:

$x = t^2 - 1,\ y = t^3 - t;\ 0 \le t \le 2\pi.$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt = \int_{0}^{2\pi} \left(t^3 - t\right)2tdt = \int_{0}^{2\pi} \left(2t^4 - 2t^2\right)dt = 2\int_{0}^{2\pi} t^4 dt - 2\int_{0}^{2\pi} t^2 dt =$$

$$= \frac{2t^5}{5}\Big|_0^{2\pi} - \frac{2t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{2(2\pi)^5}{5} - \frac{2(2\pi)^3}{3} = \frac{64\pi^5}{5} - \frac{16\pi^3}{3} = \frac{192\pi^5 - 80\pi^3}{15}.$$

2 Знаходження об'ємів тіл

Обчислення об'ємів тіл обертання

Якщо тіло утворюється обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $aABb$ (*рисунок 2.1*), то довільний його плоский переріз, перпендикулярний до осі Ox, буде круг, радіус якого дорівнює ординаті кривої $y = f(x)$. Площа перерізу $S(x)$, що відповідає абсцисі x дорівнює $\pi y^2(x)$. А весь об'єм тіла обертання визначається формулою:

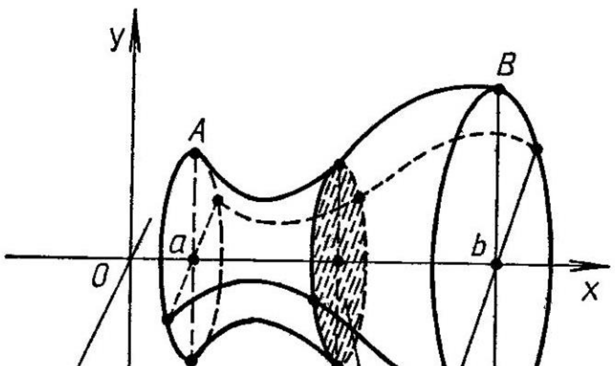

Рисунок 2.1 – Утворення тіла обертанням кривої навколо осі Ox

$$V = \pi\int_{a}^{b} y^2(x)dx, \qquad (a \le b). \qquad (2.1)$$

Якщо тіло утворюється обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції, прилеглої до осі Oy, то:

$$V = \pi\int_{a}^{b} x^2(y)dy, \qquad (a \le b). \qquad (2.2)$$

Тобто, в кожному з випадків інтегрування проводять *вздовж осі обертання*.

Приклад № 2.1:

Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1,\ y=2,\ y=-2.$

Залежність $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ − є гіперболою, що за умовою задачі обертається навколо осі Oy. В результаті одержуємо поверхню обертання, яка в курсі аналітичної геометрії отримала назву однопорожнинного гіперболоїда обертання. Щоб знайти об'єм тіла, обмеженого цією поверхнею та двома площинами $y=2,\ y=-2$, (*рисунок 2.2*), візьмемо інтеграл по змінній y. Для цього виразимо змінну x через y:

$$x=\pm\sqrt{9+\frac{9y^2}{4}}.$$

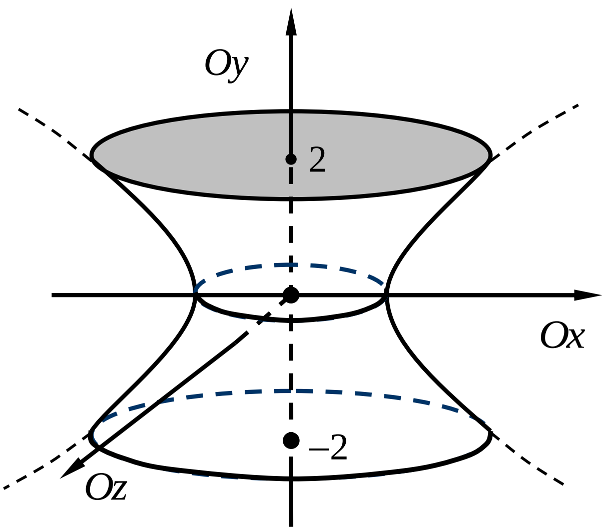

Рисунок 2.2 − До прикладу №2.1

Скориставшись парністю функції x = x(y), отримаємо:

$$V=\pi\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{9+\frac{9y^2}{4}}\right)^2dy=2\pi\int_0^2\left(9+\frac{9y^2}{4}\right)dy=2\pi\int_0^2 9dy+2\pi\int_0^2\frac{9y^2}{4}dy=$$

$$=18\pi\int_0^2 dy+\frac{9}{2}\pi\int_0^2 y^2dy=18\pi y\Big|_0^2+\frac{3\pi y^3}{2}\Bigg|_0^2=36\pi+12\pi=48\pi.$$

3 *Обчислення довжин дуг в різних системах координат*

Нехай в декартовій системі координат задана неперервна й диференційована функція $y=f\left(x\right)$. Загальна довжина дуги AB кривої між вертикалями $x=a,\quad x=b$ визначається за однією з формул:

$$L_{AB}=\int_{(A)}^{(B)}dl=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\int_{y_A}^{y_B}\sqrt{1+\left(x'\right)^2}dy=\int_{t_A}^{t_B}\sqrt{\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2}dt\,. \qquad (3.1)$$

Якщо ж плоска крива задана в полярній системі координат рівнянням $\rho=\rho\left(\varphi\right)$, то, переходячи до полярних координат отримаємо:

$$L_{AB}=\int_{(A)}^{(B)}dl=\int_{\varphi_A}^{\varphi_B}\sqrt{\rho^2+\left(\rho'\right)^2}d\varphi. \qquad (3.2)$$

<u>Приклад № 3.1:</u>

Обчислити довжину дуги кривої:

$$y=\frac{1}{3}\left(x-3\right)\sqrt{x},\ 0\le x\le 2.$$

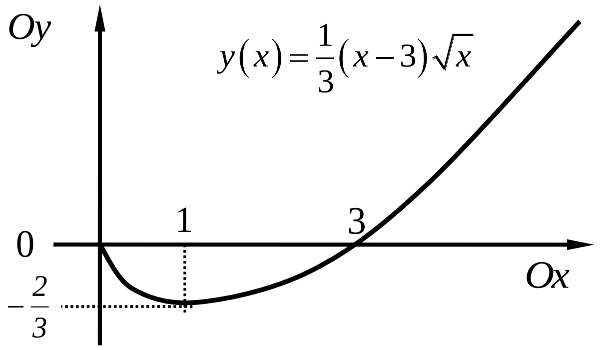

Рисунок 3.1 − До прикладу №3.1

Графік заданої кривої наведено на *рисунку 3.1*. Довжину дуги знаходимо за *формулою (3.1)*. Знайдемо похідну: $y' = \frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{x-3}{3\cdot 2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{x-3}{6\sqrt{x}}.$

Інтегруємо:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{x-3}{6\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{\frac{9(x^2+2x+1)}{36x}}\,dx = \int_0^2 \sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}}\,dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^{\frac{1}{2}}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_0^2 = \left.\frac{\sqrt{x^3}}{3}\right|_0^2 + \left.\sqrt{x}\right|_0^2 = \frac{5\sqrt{2}}{3}.$$

<u>Приклад № 3.2:</u>

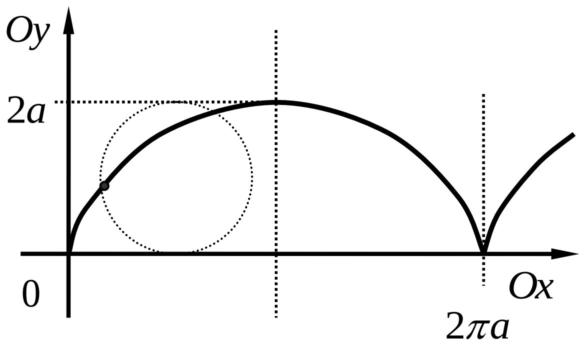

Рисунок 3.2− Одна арка циклоїди

Обчислити довжину дуги, заданої параметричними рівняння

$$\begin{cases} x = a\left(t - \sin t\right), & 0 \le t \le 2\pi, \\ y = a\left(1-\cos t\right). & при \quad a > 0. \end{cases}$$

Функціональна залежність, задана в умові задачі, зображує ділянку циклоїди (*рисунок 3.2)*. Знайдемо похідні обох параметричних складових по параметру t: $x' = a(1-\cos t)$, $y' = a\sin t$. Підставимо значення x' і y' у *формулу (3.1)*:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = \int_{0}^{2\pi} a\sqrt{1-2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt$$

$$= \int_{0}^{2\pi} a\sqrt{1-2\cos t + 1}\,dt = \int_{0}^{2\pi} a\sqrt{2-2\cos t}\,dt = \int_{0}^{2\pi} a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = \int_{0}^{2\pi} 2a\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_{0}^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_{0}^{2\pi}$$

$$= -4a\cos\pi + 4a\cos 0 = 4a + 4a = 8a.$$

<u>Приклад № 2.7:</u>

Знайти довжину кривої, рівняння якої в полярній системі координат має вигляд $\rho = 3(1+\sin\varphi)$

Задана крива називається *кардіоїдою* (*рисунок 3.3*) і довжина дуги такої кривої, заданої в полярній системі координат, обчислюється за *формулою (3.2)*. Знайдемо похідну заданої залежності $\rho = \rho(\varphi)$ по аргументу φ, підставимо значення ρ и ρ' у *формулу* і обчислимо інтеграл.

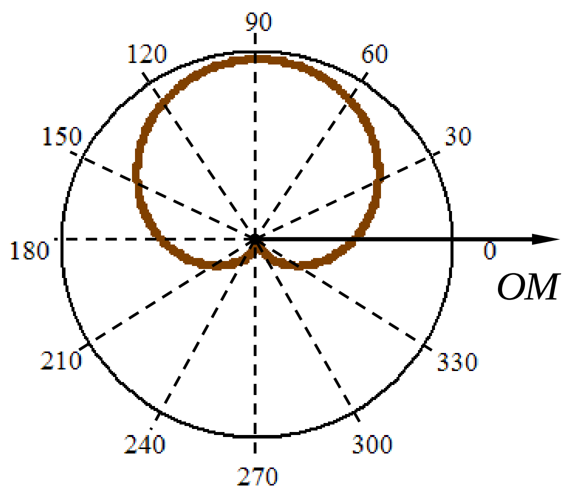

Рисунок 3.3– Кардіоїда в полярній системі координат

$$L=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(3(1+\sin\varphi)\right)^2+(3\cos\varphi)^2}d\varphi=3\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\sin\varphi}d\varphi=$$

$$=3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin\varphi}d\varphi=3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}d\varphi=3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}d\varphi=$$

$$=6\int_0^{2\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=-6\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=12\sqrt{2}.$$

4 *Обчислення площі поверхні обертання*

Розглянемо поверхню, утворену обертанням плоскої дуги кривої *АВ* навколо осі Ox (*рисунок 4.1, а*). Загальна площа поверхні, утвореної обертанням дуги *АВ*, визначається за формулою:

$$S=\int_{(A)}^{(B)}dS=2\pi\int_{x_A}^{x_B}xdl\,, \qquad (4.1)$$

де (*А*) і (*В*) − значення обраної змінної інтегрування в точках *А* і *В*, dl − диференціал дуги кривої.

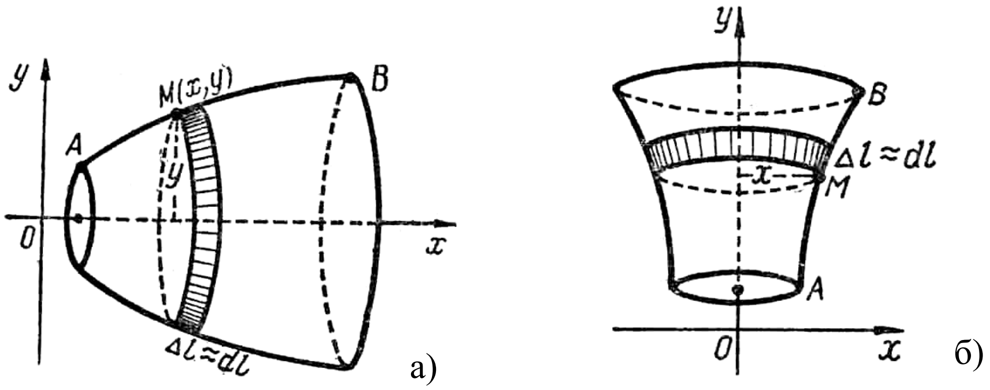

Рисунок 4.1 – Обчислення площі поверхні тіла, утвореного обертанням кривої АВ: а) – навколо осі Ox; б) – навколо осі Oy,

При обертанні дуги кривої *АВ* навколо осі Oy (*рисунок 4.1, б*) маємо відповідно

$$S=\int_{(A)}^{(B)} dS=2\pi\int_{y_A}^{y_B} ydl\,. \tag{4.2}$$

Як і при обчисленні об’ємів тіл обертання, при обчисленні площ поверхонь обертання інтегрування виконують вздовж відповідної осі обертання.

5 Знаходження маси та центра мас тіла за допомогою визначеного інтеграла

Для матеріальної дуги *AB* у вигляді плоскої кривої прямокутні координати центра мас (x_c, y_c) визначають за формулами:

$$x_c=\frac{m_y}{m}=\frac{\int_{(A)}^{(B)}\tau\, xdl}{\int_{(A)}^{(B)}\tau dl};\qquad y_c=\frac{m_x}{m}=\frac{\int_{(A)}^{(B)}\tau\, ydl}{\int_{(A)}^{(B)}\tau dl}, \tag{5.1}$$

де $\tau=\tau(x,y)$ − лінійна густина дуги; m − загальна маса дуги *AB*; m_x, m_y − статичні моменти дуги відносно осей *Ox* та *Oy* відповідно; dl − диференціал довжини дуги; *(A), (B)* − значення змінної інтегрування в точках *A* і *B*.

Для плоскої матеріальної фігури у вигляді криволінійної трапеції, прилеглої до осі *Ox*, координати центра мас (x_c, y_c) визначають за формулами:

$$x_c=\frac{m_y}{m}=\frac{\int_a^b\sigma\, xydx}{\int_a^b\sigma ydx},\qquad y_c=\frac{m_x}{m}=\frac{\int_a^b\sigma y^2dx}{\int_a^b\sigma ydx}, \tag{5.2}$$

де $\sigma=\sigma(x,y)$ – поверхнева густина фігури; m – її загальна маса.

Якщо матеріальна крива чи плоска фігура є однорідними, тобто величини τ та σ сталі, *формули (5.1)* та *(5.2)* спрощуються, адже сталий множник τ або σ виноситься за знаки інтегралів і скорочується. Центр мас однорідної матеріальної лінії або плоскої фігури, яка має вісь симетрії, буде розташований на осі симетрії.

Приклад № 5.1:

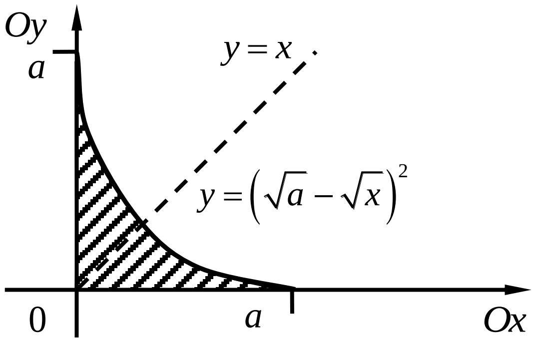

Рисунок 5.1 − До прикладу №5.1

Знайти центр мас однорідної фігури (пластинки), обмеженої кривою $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ та координатними осями.

Задана однорідна фігура симетрична відносно бісектриси першого координатного кута, тому $x_c = y_c$. Спочатку перетворимо рівняння кривої до вигляду $y = y(x)$ та зобразимо фігуру в декартових координатах (*рисунок 5.1*):

$$\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}, \quad y=\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 = a-2\sqrt{a}\sqrt{x}+x.$$

$$m_y=\int_a^b \sigma xy dx=\sigma\int_0^a x\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx=\sigma\int_0^a\left(ax-2\sqrt{ax^3}+x^2\right)dx=$$

$$=\sigma\left(\frac{1}{2}ax^2-\frac{4}{5}\sqrt{a}\sqrt{x^5}+\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^a=\frac{\sigma a^3}{30};$$

$$m =\int_a^b \sigma y dx=\sigma\int_0^a\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx=\sigma\int_0^a\left(a-2\sqrt{ax}+x\right)dx=$$

$$=\sigma\left(ax-\frac{4}{3}\sqrt{a}\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^a=\frac{\sigma a^2}{6}.$$

Врахувавши симетрію фігури відносно бісектриси кута xOy, дістанемо відповідь: $x_c = y_c = \dfrac{a}{5}.$

6 Задачі з економічним змістом.

Наведемо приклади деяких економічних задач, які можна розглянути при застосуванні теми ’’ Визначений інтеграл ’’ на практичних заняттях з вищої математики для студентів економічних спеціальностей. Відомо, що економічний зміст визначеного інтеграла полягає в тому, що він чисельно дорівнює обсягу виробленої продукції деяким підприємством або фірмою з продуктивністю праці *f=f(t)* за інтервал часу [0; T] , тобто $q=\int_0^T f(\tau)\,d\tau$. Отже, на практиці доцільно розглянути, наприклад, наступні задачі.

Приклад № 6.1:

Продуктивність праці деякого підприємства протягом робочого дня описується функцією:

$$f(t)=\begin{cases} -2t^2+9t, & 0\le t\le 4, \\ 0\,, & 4<t<5, \\ -2t^2+26t-30, & 5\le t\le 8, \end{cases}$$

де *t* - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, виробленої за весь робочий день.

Обсяг продукції, виробленої за весь робочий день, розглядають як суму обсягів продукції, що виробляються протягом 4 годин роботи до обідньої перерви й 3 годин роботи після перерви. Отже, шуканий обсяг продукції q дорівнює

$$\int_0^4 (9t-2t^2)dt+\int_5^8 (26t-2t^2-30)dt=\left(9\frac{t^2}{2}-2\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^4+\left(26\frac{t^2}{2}-2\frac{t^3}{3}-30t\right)\Big|_5^8=188\frac{1}{3}$$

умовних одиниць.

Приклад № 6.2:

За даними чистими інвестиціями *I(t)* = 6000 $\sqrt{t}$ визначити приріст капіталу за 4 роки, а також з’ясувати через скільки років він становив 108000 умов. грош. од., якщо функція інвестицій залишиться незмінною.

Відомо, що капітал *K= K(t)* збільшується за одиницю часу *t* на обсяг чистих інвестицій *I= I(t)* , і чисті інвестиції – це похідна від капіталу за часом *t* , тобто *I= K'(t).* Приріст капіталу за інтервал часу від *α* до *β* обчислюється за формулою *ΔK= K(β)- K(α)*, а оскільки *K= K(t)* є первісною для функцій *I= I(t)*, то *ΔK=* $\int_{\alpha}^{\beta} I(t)\,dt$. Отже, для нашої задачі приріст капіталу за інтервал часу від *α=0* до *β=4*:

ΔK= K(4)- K(0)= $\int_0^4 6000\sqrt{t}dt = 6000\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\,|_0^4 = 4000\sqrt{t^3}\,|_0^4 = 32000$ умов. грош. од.

Якщо ж функція інвестицій залишиться незмінною, то приріст капіталу за умовою задачі становить *ΔK=* $\int_0^T \boldsymbol{I(t)dt} = \int_0^T 6000\sqrt{t}dt$. Обчислимо визначений інтеграл і знайдемо *T:* $4000\sqrt{t^3}\,|_0^T = 4000\sqrt{T^3}$, $4000\sqrt{T^3} = 108000$, *T=9.*

Отже, потрібно 9 років, щоб приріст капіталу досяг 108000 умов. грош. од.

Рекомендована література

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 446с.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1969. – 736 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988. – 432с.
4. Гусак А.А. Высшая математика. – Минск: Издательство Белорус. университета, 1983. – 460с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2: Учеб. пособие для студентов втузов. – М.: Высшая школа, 1980. – 365с.
6. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: Учеб. пособие для втузов. Ч 2. – М.: Высшая школа, 1985. – 207с.

7. Задорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 460с.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1988. – 223с.
9. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике: Типовые расчёты. – М.: Высшая школа, 1983. – 176с.
10. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1973. – 640с.
11. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2ч. – К.: Техніка, 2000. – 592с.
12. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика / Под ред. П.Ф. Овчинникова. – К.: Вища школа, 1987. – 552с.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2т. – М.: Наука, 1985, Т.1. – 432с.
14. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, В.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 462с.
15. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие в 3 ч. Ч.1 / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть: Под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 270с.

Додаток
Варіанти завдань до розрахунково-графічної роботи

Варіант 1

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y = x^3$**,** $y = 1$**,** $x = 0$;

б) $\rho = 1 - \cos\varphi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y = x\sqrt{x},\ 0 \le x \le 9$.

3. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0x фігури, обмеженої кривими $y = 1 - x^2,\ y = 2 + x^2,\ x = 1,\ x = -1.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t)=\frac{2}{3t+5}+3$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за першу годину робочого дня.

Варіант 2

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$;

б) $x=2\cos t$, $y=\sin t$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y^2=(x+1)^3$, $-1\le x\le 4$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0x фігури, обмеженої кривими $y=1+x$, $y=1+2x$, $x=2$.

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t)=12-\sqrt{x+3}$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.

Варіант 3

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y=(x+1)^2$ та $y^2=x+1$;

б) $\rho=\cos 2\varphi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y=\ln\cos x$, $0\le x\le \pi/3$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0x фігури, обмеженої кривими $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t)=\frac{3}{4t+5}+5$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня.

Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 4 години робочого дня.

Варіант 4

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3;$

б) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = 9x,\ 0 \le x \le 4$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0x фігури, обмеженої кривими $y = 3 - x^2/2,\ y = 1.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = 10t - 2t^2 + 3$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.

Варіант 5

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y = \sqrt{x}/2,\ x = 16,\ 2xy = 1;$

б) $\rho = 1 + \sin\varphi.$

2. Обчислити довжину дуги кривої $y = 2(e^x + e^{-x}),\ 0 \le x \le 1$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0y фігури, обмеженої кривими $y = x^2,\ y = 8,\ x = 0.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = \dfrac{4}{t+5} + 3$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня.

Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 2 години робочого дня.

Варіант 6

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y = 32 - x^2$**,** $y = -4x$;

б) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le \pi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln(1 - x^2)$, $-1/2 \le x \le 1/2$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0x фігури, обмеженої кривими $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$.

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = 16 - 4\sqrt{x+3}$, де t - час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 3 години робочого дня.

Варіант 7

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y = 2\sqrt{x}$**,** $y = 3 - x$**,** $y = 0$;

б) $\rho = 2 + \cos\varphi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = (x+3)^3$, $-3 \le x \le 1$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0x фігури, обмеженої кривими $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = 10t - 2t^2 + 1$, де t - час, що відлічується від початку робочого дня.

Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.

Варіант 8

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y = 4 - x^2$**,** $y = x^2 - 2x$;

б) $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y = -\ln\cos x,\ 0 \le x \le \pi/6$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0у фігури, обмеженої кривими $y = x - 1,\ 2y = x - 1,\ y = 2.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = \dfrac{6}{2t+3} + 1,$ де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 4 години робочого дня.

Варіант 9

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y = x^2,\ y = 4 - x^2$;

б) $\rho = 3\sin 2\varphi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = 16x,\ 0 \le x \le 9$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0у фігури, обмеженої кривими $x = \sqrt[3]{y-2},\ x = 1,\ y = 1.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією

$f(t) = \dfrac{5}{4t+1} + 2$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 2 години робочого дня.

Варіант 10

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y = 4x + x^2$, $y = x + 4$;

б) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $\pi/3 \le t \le \pi/2$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y = (e^x + e^{-x})/2$, $0 \le x \le 2$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0у фігури, обмеженої кривими $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = 10t - 2t^2 + 5$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 3 години робочого дня.

Варіант 11

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій :

а) $y = \sqrt{x}/2$, $y = 5 - x$, $x = 0$;

б) $\rho = 1 + \cos\varphi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln 5 - \ln 2x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0х фігури, обмеженої кривими $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$.

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = 8t - t^2 + 2$, де t - час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.

Варіант 12

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y = 2 - 2x^2$, $y = -1 - x$;

б) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x,\ 0 \le x \le 8/9$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0x фігури, обмеженої кривими $y = 0,\ y = \sqrt{x-1},\ y = 1,\ x = 1/2.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = 10 - 3\sqrt{x+2}$, де t - час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за першу годину робочого дня.

Варіант 13

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій :

а) $x = (y-2)^3$ та $x = 4y - 8$;

б) $\rho = \cos 3\varphi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln \cos x,\ 0 \le x \le \pi/3$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0x фігури, обмеженої кривими $y = 5x - x^2 - 6,\ y = 0.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = 9t - t^2 + 1$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 2 години робочого дня.

Варіант 14

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $x = y^2 + 1$**,** $x + y = 3$;

б) $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = (x-1)^3$, $1 \le x \le 5$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0у фігури, обмеженої кривими $y = x^2$, $y^2 = x - 2$, $y = 0$, $y = 1$.

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = \dfrac{4}{2t+3} + 1$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за за весь восьмигодинний робочий день.

Варіант 15

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $x = 4 - y^2$**,** $x - y + 2 = 0$;

б) $\rho = 2(1 - \sin\varphi)$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln\sin x$, $\pi/3 \le x \le 2\pi/3$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0х фігури, обмеженої кривими $y = 2x - x^2$, $y = 2 - x$.

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t)=\frac{5}{6t+3}+1$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 3 години робочого дня.

Варіант 16

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y=(x-2)^3$ та $y=4x-8$;

б) $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $0\le t\le 2\pi/3$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y^2=4x,\ 0\le x\le 9$.

3. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0y фігури, обмеженої кривими $y=x^2,\ y=1,\ x=3.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t)=9-2\sqrt{x+2}$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.

Варіант 17

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y=1-x^2$ та $y=2x-2$;

б) $\rho=2(1-\cos\varphi)$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y=3(e^x+e^{-x}),\ 0\le x\le 1$.

3. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0x фігури, обмеженої кривими $y=(x-1)^2,\ y=0,\ x=0,\ x=2.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t)=16t-2t^2+1$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 3 години робочого дня.

Варіант 18

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y=4-x^2$ та $y=x^2-2x$;

б) $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $0\le t\le 2\pi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y=\ln(1-x^2),\ -1/4\le x\le 1/4$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0х фігури, обмеженої кривою $(x-1)^2+y^2=1.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t)=\dfrac{2}{3t+1}+5$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за першу годину робочого дня.

Варіант 19

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y=\sqrt{x}$**,** $y=x^3$;

б) $\rho=3\cos 2\varphi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y=\ln 7-\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0х фігури, обмеженої кривими $y=2,\ x=1,\ y=\sqrt{x}.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t)=\frac{1}{3t+2}+7$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 4 години робочого дня.

Варіант 20

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y^2=x+1,\ y^2=9-x$;

б) $x=2\cos t$, $y=5\sin t$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y^2=(x+2)^3,\ -2\le x\le 2$.

3. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0y фігури, обмеженої кривими $x=0,\ x=\sqrt{y-1},\ x=1,\ y=1/2.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t)=9t-2t^2+4$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.

Варіант 21

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y^2=4x,\ \ x^2=4y$;

б) $\rho=3(1+\sin\varphi)$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y=\ln\cos x+2,\ 0\le x\le\pi/6$.

3. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0x фігури, обмеженої кривими $x=y^2,\ x=8,\ y=0.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = 7 - 2\sqrt{x+1}$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 4 години робочого дня.

Варіант 22

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y = x^2$**,** $y = 2 - x^2$;

б) $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $\pi/3 \le t \le \pi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = 36x,\ 0 \le x \le 1$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0у фігури, обмеженої кривими $y = e^{1-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = \dfrac{2}{4t+5} + 3$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за першу годину робочого дня.

Варіант 23

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $xy = 6$**,** $x + y = 7$;

б) $\rho = \sin 2\varphi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y = 3 + (e^x + e^{-x})/2,\ 0 \le x \le 2$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0у фігури, обмеженої кривими $x = 3 - y^2/2,\ x = 1.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = 11t - 2t^2 + 4$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.

Варіант 24

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $x = 4 - y^2$ та $x = y^2 - 2y$;

б) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $\pi \le t \le 2\pi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin\ x,\ 0 \le x \le 7/9$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0х фігури, обмеженої кривими $x = y^2,\ x = 4,\ y = 0.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = \dfrac{1}{4t + 5} + 3$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за першу годину робочого дня.

Варіант 25

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y = 11 - x^2$**,** $y = -10x$;

б) $\rho = 3 + \sin\varphi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln(x^2 - 1),\ 2 \le x \le 3$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0х фігури, обмеженої кривими $y = x^3,\ x = 1,\ y = 0.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t)=5-\sqrt{x+2}$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.

Варіант 26

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y=3\sqrt{x}$, $xy=3$, $x=4$;

б) $x=\cos t$, $y=3\sin t$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y^2=(x-2)^3,\ 2\le x\le 6$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0у фігури, обмеженої кривою $x^2+(y-2)^2=1$.

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t)=\dfrac{1}{4t+7}+3$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 2 години робочого дня.

Варіант 27

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $y=(x-1)^2$, $y^2=x-1$;

б) $\rho=1-\sin\varphi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y=1-\ln\sin x,\ 0\le x\le \pi/3$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0у фігури, обмеженої кривими $y=x^2+1,\ y=x,\ x=0,\ x=1.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t)=\dfrac{2}{4t+9}+7$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 3 години робочого дня.

Варіант 28

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій :

а) $x=\sqrt{4-y^2}$, $x=0$, $y=1$;

б) $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, $\pi/2\le t\le\pi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y=\ln(1+x),\ 0\le x\le 1$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0у фігури, обмеженої кривими $y=e^{2-x},\ y=0,\ x=0,\ x=2.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t)=15t-3t^2+4$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.

Варіант 29

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій :

а) $xy=2$, $y=7\mathbf{e}^x$, $y=2$, $y=7$;

б) $\rho=\sin 3\varphi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le 15/16$.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0х фігури, обмеженої кривими $y=xe^x,\ y=0,\ x=1.$

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = 4 - \sqrt{x+1}$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за першу годину робочого дня.

Варіант 30

1. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій:

а) $xy = 1$, $y = x^2$, $y = 2$, $x = 0$;

б) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le \pi / 2$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

3. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі 0у фігури, обмеженої кривими $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $x = 0$.

4. Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією $f(t) = 7 - \ln(t+2)$, де t - час , що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.