МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ ТОЧКИ І СИСТЕМИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

з теоретичної механіки
до виконання розрахунково-графічної роботи
для студентів напрямів підготовки
6.050502 – „Інженерна механіка ”, 6.050503 – „Машинобудування ”,
6.070106 – „Автомобільний транспорт ”, 6.050504 – „Зварювання ”,
6.060101 – „Будівництво ”

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри
теоретичної і прикладної механіки
Протокол № 1
від 04 вересня 2014 р.

Чернігів ЧДТУ 2014

Основні теореми динаміки точки і системи. Методичні вказівки з теоретичної механіки до виконання розрахунково-графічної роботи для студентів напрямів підготовки 6.050502 – „Інженерна механіка”, 6.050503 – „Машинобудування”, 6.070106 – „Автомобільний транспорт”, 6.050504 – „Зварювання”, 6.060101 – „Будівництво” / Укл. В.Ю.Грицюк. – Чернігів: ЧДТУ, 2014. – 31 с.

Укладач: Грицюк Віталій Юхимович, кандидат технічних наук, доцент

Відповідальний за випуск: Дубенець Віталій Георгійович, завідувач кафедри теоретичної і прикладної механіки, доктор технічних наук, професор

Рецензент: Горбатко Оксана Олександрівна, кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної і прикладної механіки Чернігівського національного технологічного університету

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Існують універсальні методи розв'язування задач динаміки матеріальної точки або механічної системи, але вони можуть бути досить трудомісткими. Застосування теорем динаміки помітно полегшують розв'язання. Ці теореми ретельно викладені у підручниках [1, 2]. Але засвоєння теорем і законів збереження, які витікають з них, викликає певні труднощі у студентів. У представленій роботі наведена методика, яка допоможе студентам полегшити справитися з цією проблемою.

1 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ ТОЧКИ І СИСТЕМИ

Основні теореми динаміки точки і системи, закони збереження, які витікають з теорем, представлені у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Основні теореми динаміки точки і системи, закони збереження

Теореми для точки	Теореми для системи
	Теорема про рух центра мас системи $M\,\bar{w}_C = \bar{R}^e$, (1.1) де M – маса *системи*, $\bar{w}_C$ – прискорення центра мас системи, $\bar{R}^e$ – головний вектор усіх зовнішніх сил, що діють на точки системи. Теорема про рух центра мас системи відіграє роль другого закону Ньютона *для системи*. Теорема застосовується для опису поступального руху системи або для опису поступальної частини плоско-паралельного руху системи.

Теоретична механіка є наукою про закони механічного руху з метою розробки методів розв'язування прикладних задач. *Динаміка* – це розділ теоретичної механіки, який розглядає рух тіл з урахуванням причин, які викликали цей рух. Причиною руху є сили.

Універсальний метод розв'язування задач динаміки полягає у складання диференційних рівнянь руху точки або системи, інтегруванні цих рівнянь, визначенні сталих інтегрування. Це дозволяє одержати закон руху точки або системи. Таким чином розв'язується обернена задача динаміки. Далі розв'язується пряма задача: знаючи закон руху, можна відповісти на поставлені в умові задачі питання.

Такий шлях розв'язування задачі динаміки точки проілюстрований у [3].

Навіть одержання рівнянь руху точки або системи може бути непростим етапом. Існують методи одержання рівнянь руху. Один із них описаний у [4].

Продовження таблиці 1.1

Закони збереження	Зауваження
Закон збереження руху центра мас системи: 1) якщо $\bar{R}^e = 0$, то $\bar{v}_C = const$, (1.2) 2) якщо $R_x^e = 0$, то $v_{Cx} = const$, (1.3) де $\bar{v}_C$ і v_{Cx} – швидкість центра мас системи і проекція цієї швидкості на вісь (на вісь x). *Внутрішні сили не можуть змінити рух центра мас системи* . Закон збереження руху центра мас системи застосовується у задачах, в яких за *лінійним переміщенням* однієї частини системи треба визначити *лінійне переміщення* іншої частини системи.	Математично другий закон Ньютона записується наступним чином $m\bar{w} = \bar{F}$, (1.4) де m – маса *точки*, $\bar{w}$ – прискорення точки, $\bar{F}$ – сила, що діє на точку. Рівняння (1.4) називається *основним* (або *головним*) рівнянням динаміки. Існує *загальне* рівняння динаміки, яке є математичним записом принципу Даламбера-Лагранжа [4].

Продовження таблиці 1.1

Теореми для точки	Теореми для системи
Теорема про зміну кількості руху точки: у диференційній формі $$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}, \quad (1.5)$$ де $m\bar{v}$ – кількість руху точки, $\bar{F}$ – рівнодійна сил, що діють на точку; в інтегральній формі $$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum \bar{S}_k, \quad (1.6)$$ де $\bar{S}_k$ – імпульс k-ї сили, що діє на точку за час t_1 (від початку часу $t_0 = 0$ до часу t_1), $m\bar{v}_1$ і $m\bar{v}_0$ – кількості руху точки у миті часу t_1 і t_0 відповідно. *Зміна кількості руху точки за деякий час дорівнює геометричній сумі імпульсів усіх сил, що діють на точку, за цей час.* Для розв'язування задач переважно застосовується інтегральна форма теореми. Теорему про зміну кількості руху точки зручно застосовувати у задачах, в яких мова йде про *час* (час знаємо або його треба знайти).	Теорема про зміну кількості руху системи: у диференційній формі $$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e, \quad (1.7)$$ де $\bar{Q}$ – кількість руху системи, $\bar{R}^e$ – головний вектор усіх зовнішніх сил, що діють на точки системи, в інтегральній формі $$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e, \quad (1.8)$$ де $\bar{S}_k^e$ – імпульс k-ї зовнішньої сили, що діє на точку, за час t_1 (від початку часу $t_0 = 0$ до часу t_1), $\bar{Q}_1$ і $\bar{Q}_0$ – кількості руху системи у миті часу t_1 і t_0 відповідно. *Зміна кількості руху системи за деякий час дорівнює геометричній сумі імпульсів усіх зовнішніх сил, що діють на точку, за цей час.* Для розв'язування задач переважно застосовується інтегральна форма теореми. Теорему про зміну кількості руху системи зручно застосовувати при поступальному русі системи у задачах, в яких мова йде про *час* (час знаємо або його треба знайти).

Продовження таблиці 1.1

Закони збереження	Зауваження
Закон збереження кількості руху системи 3) якщо $\bar{R}^e = 0$, то $\bar{Q} = const$, (1.9) 4) якщо $R_x^e = 0$, то $Q_x = const$, (1.10) де $\bar{Q}$ і Q_x – кількість руху системи і проекція кількості руху системи на вісь (на вісь x). *Внутрішні сили не можуть змінити кількість руху системи.* Закон збереження кількості руху системи застосовується у задачах, в яких за *зміною лінійної швидкості* однієї частини системи треба визначити *зміну лінійної швидкості* іншої частини системи.	Імпульс сили $$\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} dt. \qquad (1.11)$$ Якщо на протязі часу t_1 сила, що діє на точку, стала (за величиною і напрямком), то імпульс сили дорівнює добутку сили на час $$\bar{S} = \bar{F}\, t_1. \qquad (1.12)$$ Кількість руху системи за визначенням дорівнює векторній сумі кількостей руху усіх точок системи $$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k. \qquad (1.13)$$ Зручно кількість руху системи визначати наступним чином $$\bar{Q} = M \bar{v}_C, \qquad (1.14)$$ де M – маса системи, $\bar{v}_C$ – швидкість центра мас системи.

Продовження таблиці 1.1

Теореми для точки	Теореми для системи
Теорема про зміну моменту кількості руху точки відносно центра у диференційній формі $$\frac{d}{dt}(\bar{M}_O(m\bar{v})) = \bar{M}_O(\bar{F}), \qquad (1.15)$$ де $\bar{M}_O(m\bar{v})$ – момент кількості руху точки відносно центра O, $\bar{M}_O(\bar{F})$ – момент сили відносно центра O. Теорема про зміну моменту кількості руху точки відносно осі у диференційній формі $$\frac{d}{dt}(M_x(m\bar{v})) = M_x(\bar{F}), \qquad (1.16)$$ де $M_x(m\bar{v})$ – момент кількості руху точки відносно осі x, $M_x(\bar{F})$ – момент сили відносно центра осі x. Ці теореми застосовують для опису криволінійного руху точки. Можна ці теореми записати й в інтегральній формі, але вони фактично не застосовується при розв’язуванні задач.	Теорема про зміну кінетичного моменту системи відносно центра у диференційній формі $$\frac{d}{dt}\bar{K}_O = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^e), \qquad (1.17)$$ де $\bar{K}_O$ – кінетичний момент системи відносно центра O, $\sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^e)$ – головний момент зовнішніх сил, що діють на точки системи, відносно центра O. Теорема про зміну кінетичного момента системи відносно осі у диференційній формі $$\frac{d}{dt}(K_x(m\bar{v})) = \sum M_x(\bar{F}_x^e), \qquad (1.18)$$ де $K_x(m\bar{v})$ – кінетичний момент системи відносно осі x, $\sum M_x(\bar{F}_x^e)$ – головний момент зовнішніх сил відносно осі x. Ці теореми застосовують для опису обертального руху системи або для опису обертальної частини плоско-паралельного руху системи. Можна ці теореми записати й в інтегральній формі, але вони фактично не застосовується при розв’язуванні задач.

Продовження таблиці 1.1

Закони збереження	Зауваження
Закон збереження кінетичного моменту системи відносно центра: якщо $\sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) = 0$, то $\bar{K}_O = const$. (1.19) Закон збереження кінетичного моменту системи відносно осі: якщо $\sum M_x(\bar{F}_k^e) = 0$, то $K_x = const$. (1.20) *Внутрішні сили не можуть змінити кінетичний момент системи.* Закон збереження кількості руху системи застосовується у задачах, в яких за *зміною кутової швидкості* однієї частини системи треба визначити *зміну кутової швидкості* іншої частини системи.	Момент кількості руху точки відносно центра або відносно осі визначають таким же чином, як визначають момент сили відносно центра або відносно осі. Кінетичний момент системи відносно центра дорівнює векторній сумі моментів кількостей руху усіх точок системи відносно цього центра. Кінетичний момент системи відносно осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів кількостей руху усіх точок системи відносно цієї осі. Кінетичний момент системи відносно осі зручно визначати наступним чином $K_x = I_x \omega$, (1.21) де I_x – осьовий момент інерції системи відносно осі x, ω – кутова швидкість обертання системи відносно цієї осі. Внутрішні сили не можуть змінити кінетичний момент системи, але можуть змінити осьовий момент інерції системи. Якщо збільшується осьовий момент інерції системи, то зменшується кутова швидкість обертання. Якщо зменшується осьовий момент інерції системи, то збільшується кутова швидкість обертання.

Продовження таблиці 1.1

Теореми для точки	Теореми для системи
Теорема про зміну кінетичної енергії точки у диференційній формі $$d\frac{mv^2}{2}=dA, \qquad (1.22)$$ де $\frac{m\bar{v}^2}{2}=\frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія точки, $\bar{v}$ і v – швидкість і величина швидкості руху точки, dA – елементарна робота сил, що діють на точку (робота сил, що діють на точку на нескінченно малому переміщенні точки); в інтегральній формі $$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A, \qquad (1.23)$$ де v_1 і v_0 – величини швидкостей точки у кінці переміщення і на початку переміщення точки, A – робота сил, що діють на точку, на цьому переміщенні. *Зміна кінетичної енергії точки на деякому переміщенні цієї точки дорівнює роботі усіх сил, що діють на точку, на цьому переміщенні.* Для розв'язування задач переважно застосовується інтегральна форма теореми. Теорему про зміну кінетичної енергії точки зручно застосовувати у задачах, в яких мова йде про *шлях* (шлях знаємо або його треба знайти).	Теорема про зміну кінетичної енергії системи у диференційній формі $$dT=dA^e+dA^i, \qquad (1.24)$$ де T – кінетична енергія системи, dA^e і dA^i – елементарна робота усіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точку (робота сил, що діють на точку на нескінченно малому переміщенні точки); в інтегральній формі $$T_1-T_0=A^e+A^i, \qquad (1.25)$$ де T_1 і T_0 – кінетична енергія системи величини швидкостей точки у кінці переміщення і на початку переміщення системи, A^e і A^i – робота усіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точки системи, на цьому переміщенні. *Зміна кінетичної енергії системи на деякому переміщенні цієї системи дорівнює роботі усіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему, на цьому переміщенні.* Для розв'язування задач переважно застосовується інтегральна форма теореми. Теорему про зміну кінетичної енергії точки зручно застосовувати у задачах, в яких мова йде про *шлях* (шлях знаємо або його треба знайти). Зручно застосовувати у задачах, в яких треба визначити залежність швидкості точок системи від пройденого шляху. Теорему можна застосовувати і для визначення прискорень точок системи, але для визначення прискорень існують більш зручні методи.

Продовження таблиці 1.1

Закони збереження	Зауваження
Закон збереження кінетичної енергії системи – не існує.	Кількість руху точки і кінетична енергія точки є мірою вимірювання руху точки. Кінетична енергія тіла при поступальному русі $$T=\frac{Mv_C^2}{2}, \qquad (1.26)$$ при обертальному русі тіла $$T=\frac{I_z\omega^2}{2}, \qquad (1.27)$$ при плоско-паралельному русі тіла $$T=\frac{Mv_C^2}{2}+\frac{I_{zC}\omega^2}{2}, \qquad (1.28)$$ де M, I_z та I_{zC} – відповідно маса тіла, осьовий момент інерції тіла відносно осі обертання z та осьовий момент інерції відносно осі z_C, яка перпендикулярна до площині руху тіла і проходить через центр мас тіла C, v_C та ω – швидкість центра мас тіла і кутова швидкість обертання тіла. Якщо сила стала за величиною і напрямком, то робота сили на лінійному переміщенні s_1 дорівнює $$A=F_\tau s_1, \qquad (1.29)$$ де F_τ – дотична складова сили. Робота сили дорівнює нулю, якщо 1) точка прикладання сили не рухається, 2) сила, яка діє на точку, і лінійне переміщення точки взаємно перпендикулярні. Якщо момент, що діє на тіло, сталий, то робота моменту M_z на кутовому переміщенні φ_1 тіла відносно осі обертання z дорівнює $$A=M_z\varphi_1, \qquad (1.30)$$

Продовження таблиці 1.1

Закони збереження	Зауваження
Закон збереження механічної енергії точки або системи $E = T + \Pi = const$. (1.31) *При русі точки або системи під дією потенціальних сил у будь яку мить руху механічна енергія залишається сталою.* Точка або система, для яких виконується закон збереження механічної енергії називаються *консервативними*. Закон збереження механічної енергії зручно застосовувати у задачах, в яких описується перехід кінетичної енергії у потенціальну і перехід потенціальної енергії у кінетичну. Існує більш загальний закон – закон збереження енергії.	Механічна енергія точки або системи $E = T + \Pi$, (1.32) де T і Π – кінетична і потенціальна енергії точки або системи. Сили ваги і сили пружності є потенціальними силами. Потенціальна енергія сили ваги G точки (вісь z спрямована догори) $\Pi = Gz$, (1.33) де z – координата точки. Потенціальна енергія лінійної сили пружності $F = -cx$ (відлік від стану недеформованої пружини,) $\Pi = cx^2/2$, (1.34) де c – жорсткість пружини, яка показує величину силу, необхідну для деформації пружини на одиницю довжини.

Як свідчить досвід викладання курсу „Теоретична механіка”, наведена таблична форма дозволяє студентам легше запам’ятати, засвоїти навчальний матеріал. Виявляється певна системність представленого матеріалу.

До деякої міри саме заради цієї таблиці написані дані методичні вказівки.

Конспективний характер тексту застосований свідомо. При необхідності можна скористатися розширеним викладанням, наведеним у підручниках [1, 2].

2 ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ

Задача 1. На кормі і носу човна сидять на відстані l один від одного дві людини (рисунок 2.1 а). На кормі човна – хлопець, маса якого M_1; на носу човна – дівчина, маса якої M_2; маса човна складає M_3. Визначити, куди і на скільки переміститься човен, якщо люди поміняються місцями.

Човен знаходить на озері (течії нема); опором руху човна можна нехтувати.

Ця задача взята з [2].

Розв’язок.

Розробляємо розрахункову схему. Одержуємо систему трьох точок (рисунок 2.1 б). Рух системи поступальний. Записуємо теорему про рух центра мас системи (1.1)

$$M\,\bar{w}_C = \bar{R}^e, \tag{2.1}$$

де M – маса *системи,*

$\bar{R}^e$ – головний вектор усіх зовнішніх сил, що діють на точки системи.

Рух системи відбувається горизонтально (здовж осі x). Проектуємо векторне рівняння (2.1) на вісь x

$$M\,w_{Cx} = R_x^e. \tag{2.2}$$

Показуємо зовнішні сили. Це сили ваги хлопця, дівчини і човна $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$ і $\bar{G}_3$. Це активні сили. У центрі ваги системи C, який співпадає з центром мас системи, показуємо опорну реакцію $\bar{N}$. Сили взаємодії між людьми і човном не показуємо, бо це є внутрішні сили системи.

Усі зовнішні сили, які діють на систему вертикальні, тому $R_x^e = 0$. Тому $v_{Cx} = const$. Для даної системи виконується закон збереження руху центра мас системи (1.3).

За умовою задачі $v_{Cx} = 0$ (течії нема), тому

$$x_{Cx} = const. \tag{2.3}$$

Для самої системи положення центра мас змінилося, бо змінилося положення мас системи M_1 і M_2. Для виконання умови (2.3) уся система повинна пересунутися.

Визначимо центр мас для початкового положення системи x'_{Cx} (рисунок 2.1 б) і для конечного положення x''_{Cx} (рисунок 2.1 в). Величина переміщення системи дорівнює a, спрямовуємо це переміщенні праворуч (у додатному напрямку осі x). Одержуємо

$$x'_{Cx} = \frac{M_1 x'_1 + M_2 x'_2 + M_3 x'_3}{M_1 + M_2 + M_3}, \tag{2.4}$$

$$x''_{Cx} = \frac{M_1 x''_1 + M_2 x''_2 + M_3 x''_3}{M_1 + M_2 + M_3}, \tag{2.5}$$

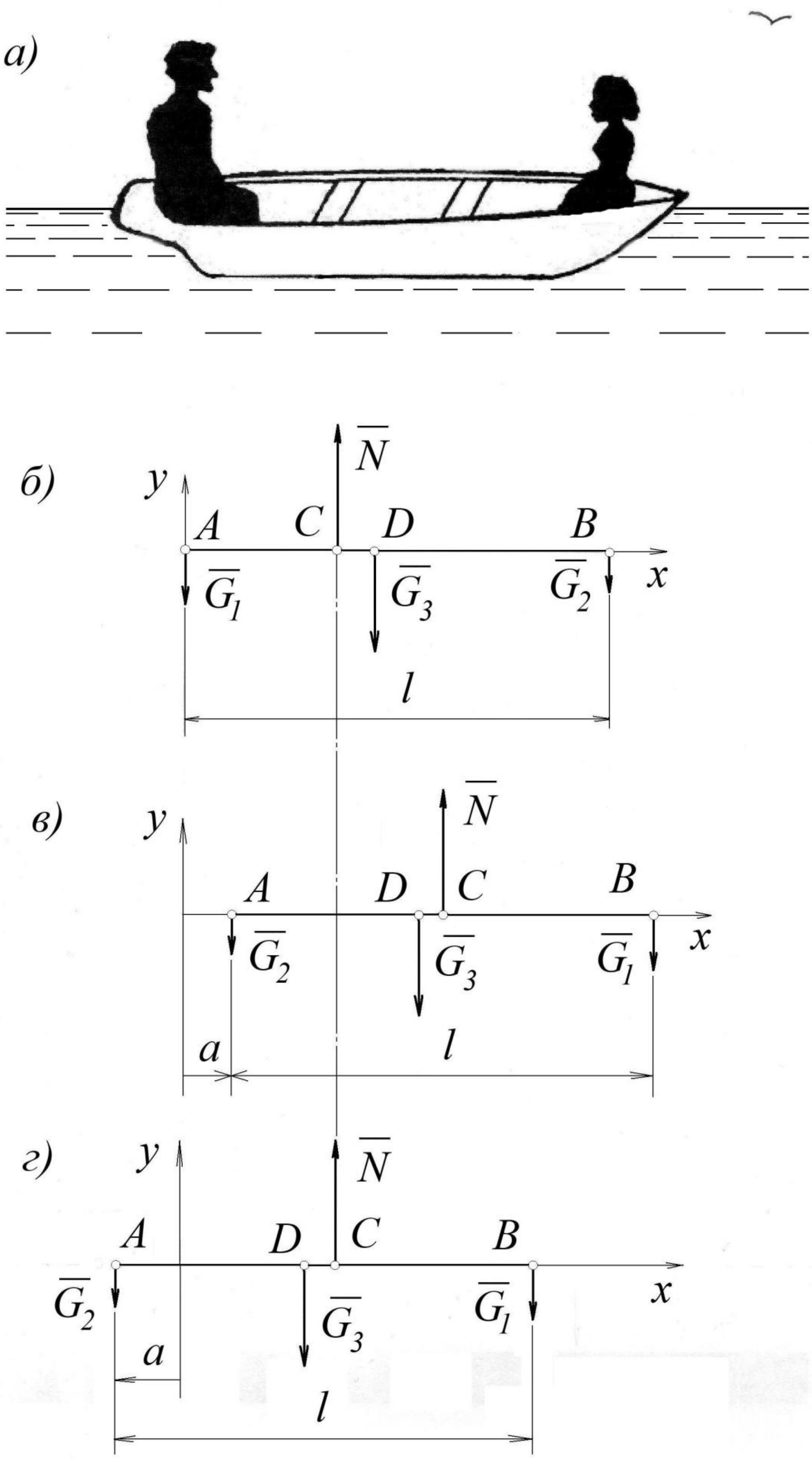

Рисунок 2.1

де x_1', x_2', x_3' та x_1'', x_2'', x_3'' – відповідні координати мас.

На підставі (2.3) $x_{Cx}' = x_{Cx}''$, тоді

$$M_1 x_1' + M_2 x_2' + M_3 x_3' = M_1 x_1'' + M_2 x_2'' + M_3 x_3''. \qquad (2.6)$$

Конкретизуємо праву частину рівняння (2.6)

$$M_1 x_1' + M_2 x_2' + M_3 x_3' = M_1(x_1' + a + l) + M_2(x_2' + a - l) + M_3(x_3' + a). \qquad (2.7)$$

Звідси

$$a = \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2 + M_3} l. \qquad (2.8)$$

Проаналізуємо одержаний результат.

Звичайно $M_2 \angle M_1$, тоді $a \angle 0$. Це означає, що переміщення системи відбувається ліворуч (проти напрямку осі x), як це показано на рисунку 2.1 г. Тим самим досягається виконання умови (2.3).

Коефіцієнт перед l показує, яку долю від l складає переміщення a.

Якщо маса човна велика, то переміщення системи досить мале.

Якщо маси людей однакові, то система рухатися не буде.

Задача 2. Трамвай рухається по горизонтальному шляху із швидкістю 36 км/год. Під час гальмування сила опору руху складає 0,3 ваги вагона. Визначити час гальмування і гальмовий шлях.

Це задача 27.5 з [5].

Розв'язок.

Моделюємо трамвай матеріальною точкою (рисунок 2.2). На точку діють сила ваги $\bar{G}$, нормальна складова опорної реакції $\bar{N}$ і сила опору руху $\bar{F}$.

У мить початку гальмування швидкість $v(0) = v_0 = 36\ км/год = 10\ м/с$, у мить зупинки руху швидкість точки $v(t_1) = v_1 = 0\ м/с$.

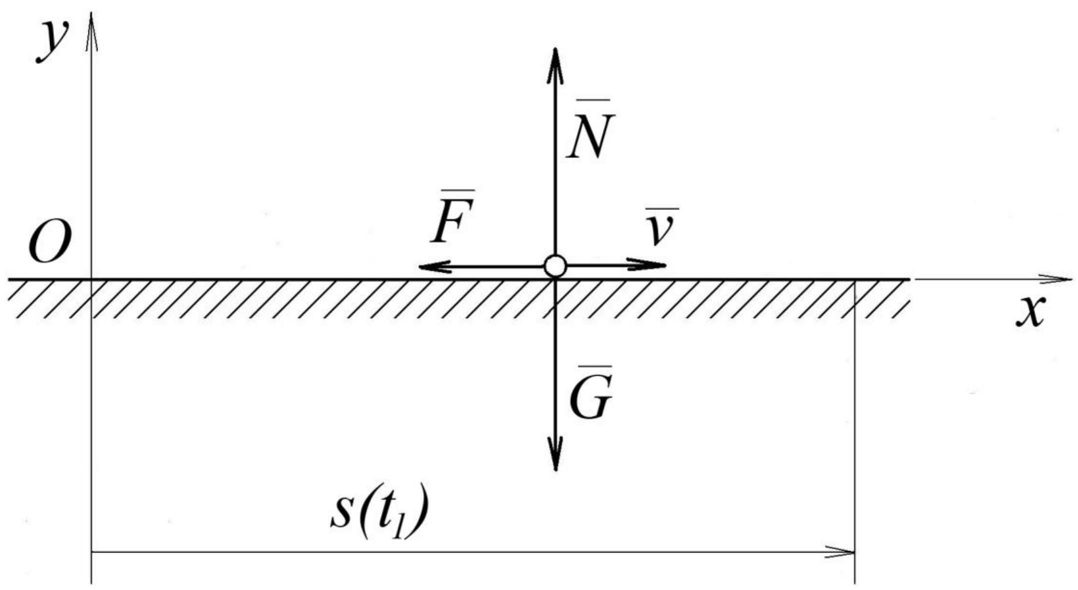

Рисунок 2.2

Для визначення часу гальмування t_1 застосуємо теорему про зміну кількості руху точки (1.6)

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum \bar{S}_k, \tag{2.9}$$

Рух відбувається вздовж осі x, спроектуємо на цю вісь векторне рівняння (2.8)

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx}, \tag{2.10}$$

$$\sum S_{kx} = -Ft_1 = -0{,}3G = -0{,}3mg, \tag{2.11}$$

де g – прискорення земного тяжіння.

Тоді одержуємо

$$m0 - mv_0 = -0{,}3mgt_1, \tag{2.12}$$

звідки

$$t_1 = \frac{v_0}{0.3g} = \frac{10}{0{,}3 \cdot 9{,}81} = 3{,}40 \ с.$$

Для визначення гальмового шляху $s(t_1) = s_1$ застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії точки (1.23)

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \tag{2.13}$$

$$A = -Fs_1 = -0{,}3Gs_1 = -0{,}3mgs_1. \tag{2.14}$$

Тоді одержуємо

$$\frac{m0_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -0{,}3mgs_1, \tag{2.15}$$

звідки

$$s_1 = \frac{v_0^2}{2 \cdot 0{,}3 \cdot g} = \frac{10^2}{2 \cdot 0{,}3 \cdot 9{,}81} = 17{,}0 \ м.$$

Приклад застосування теореми про зміну кінетичної енергії системи наведений у [6].

Задача 3. По нахиленій площині, кут нахилу якої до горизонту $\alpha = 30^O$, спускається тіло без початкової швидкості. Визначити за який час тіло пройде шлях довжиною $l = 39{,}2$ *м*, якщо коефіцієнт тертя ковзання $f = 0{,}2$.

Це задача 28.2 з [5].

Розв'язок.

Моделюємо тіло матеріальною точкою (рисунок 2.3).). На точку діють сила ваги $\bar{G}$, нормальна складова опорної реакції $\bar{N}$ і сила тертя ковзання $\bar{F}_T$.

Визначимо величину силу тертя ковзання. Рух вздовж осі y не відбувається. Тому складаємо рівняння рівноваги

$$\sum F_y = 0, \qquad N - G\cos\alpha = 0, \tag{2.16}$$

з якого

$$N = G\cos\alpha = mg\cos\alpha. \tag{2.17}$$

Величина сили тертя ковзання

$$F_T = fN = fmg\cos\alpha. \tag{2.18}$$

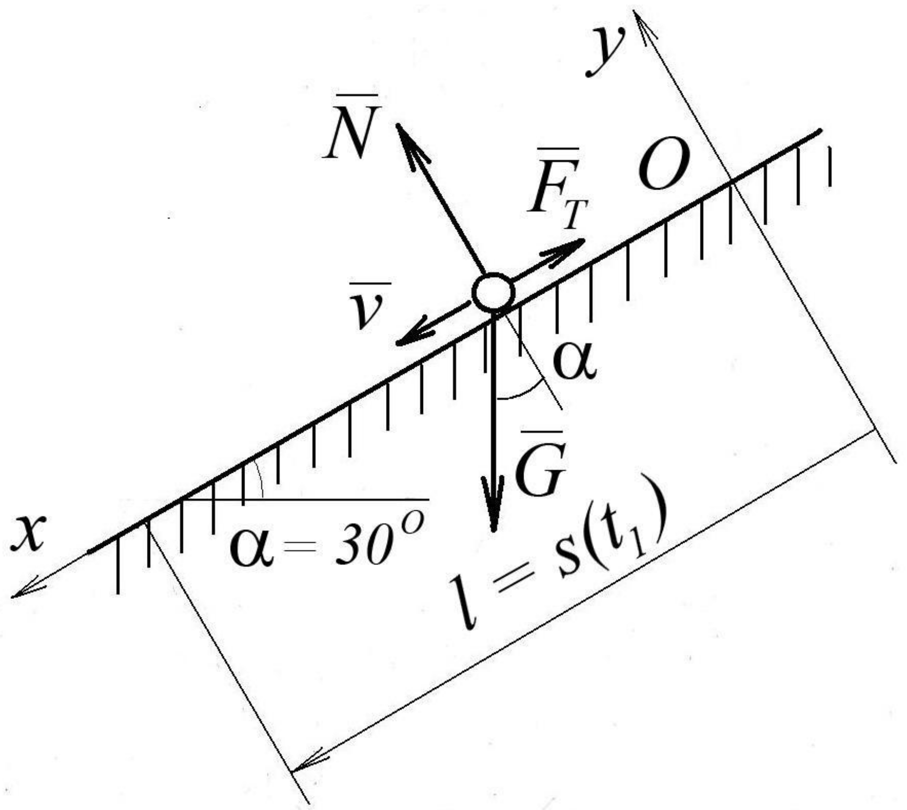

Рисунок 2.3

Ця задача цікава тим, що треба одночасно застосовувати теорему про зміну кількості руху точки і терему про зміну кінетичної енергії точки

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx}, \tag{2.19}$$

$$\frac{mv_{1x}^2}{2} - \frac{mv_{0x}^2}{2} = \sum A. \tag{2.20}$$

Проекція на вісь x суми імпульсів усіх сил, які діють на точку за час t_1, дорівнює

$$\sum S_{kx} = F_x t_1, \tag{2.21}$$

робота усіх сил, які діють на точку на переміщенні l, дорівнює

$$\sum A = F_x l, \tag{2.22}$$

де проекція усіх сил, які діють на точку, на вісь x, дорівнює

$$F_x = G\sin\alpha - F_T = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha = mb, \qquad b = g(\sin\alpha - f\cos\alpha). \tag{2.23}$$

Тоді з рівнянь (2.19) і (2.20), враховуючи початкову умову $v_{0x} = 0$, одержуємо

$$m v_{1x} - m0 = mbt_1, \tag{2.24}$$

$$\frac{mv_{1x}^2}{2} - \frac{m0}{2} = mbl. \tag{2.25}$$

Звідси

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{b}} = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 39{,}2}{9{,}81(\sin 30^O - 0{,}2\cdot\cos 30^O)}} = 4{,}95\ c.$$

Застосування теореми про зміну кінетичної енергії системи ретельно проілюстровано у [6].

Задача 4. Фізичний маятник (рисунок 2.4) відхилений на кут φ_0 і відпущений без початкової швидкості. Визначити залежність кутової швидкості руху фізичного маятника від положення маятника. Сили опору руху не враховувати.

Це задача з [2].

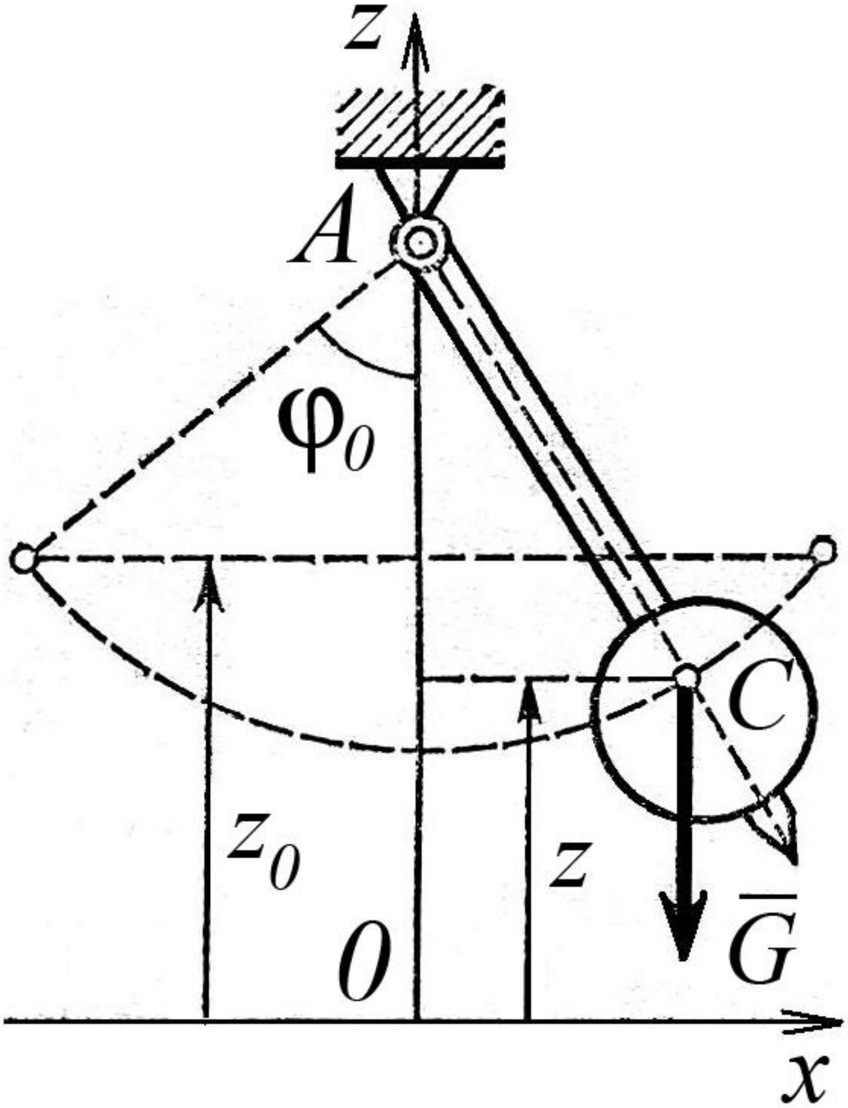

Рисунок 2.4

Розв'язок. Силу ваги G системи зосереджуємо у центрі ваги системи C. У початкову мить потенціальна енергія, яку визначаємо за допомогою формули (1.33) $\Pi_0 = Gz_0$, максимальна, а кінетична енергія мінімальна $T_0 = 0$. У наступну довільну мить руху потенціальна енергія системи зменшується $\Pi = Gz$, а кінетична енергія системи, яку визначаємо за допомогою формули (1.27) $T = \frac{I_{yA}\omega^2}{2}$, збільшується . Це відбувається до стану рівноваги системи. Потім потенціальна енергія системи збільшується, а кінетична енергія системи зменшується. Це відбувається до крайнього правого положення системи (рисунок 2.4). Відбувається коливальний процес без розсіяння енергії. Для даної системи справедливий закон збереження механічної енергії системи (1.31) $\Pi_0 + T_0 = \Pi + T = const$. Тоді

$$Gz_0 + 0 = Gz + \frac{I_{yA}\omega^2}{2}, \tag{2.26}$$

де I_{yA} – осьовий момент інерції системи відносно осі обертання y, яка перпендикулярна площині руху системи і проходить через точку A,
ω – кутова швидкість обертального руху маятника.

З (2.25) одержуємо залежність кутової швидкості ω від положення системи, яке описується координатою z,

$$\omega = \sqrt{\frac{2G(z_0 - z)}{I_{yA}}}. \tag{2.27}$$

Зауваження. У даній роботі не ставиться за мету продемонструвати застосування усіх теорем динаміки і законів збереження, показаний *підхід* до застосування цих теорем і законів.

3 КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Наведіть визначення статичної і динамічної задач.
2. Дайте поняття про моменти інерції механічної системи і про радіус інерції системи. Запишіть формули для визначення осьових моментів інерції деяких конкретних тіл.
3. Сформулюйте теорему Гюйгенса-Штейнера про осьовий момент інерції відносно паралельних осей.
4. Сформулюйте і запишіть теорему про рух центра мас механічної системи.
5. Поясніть роль теореми про рух центра мас системи у теоретичній механіці.
6. Сформулюйте і запишіть закон збереження руху центра мас механічної системи.
7. Поясніть, у яких задачах застосовується закон збереження руху центра мас системи.
8. Сформулюйте і запишіть теорему про зміну кількості руху матеріальної точки.
9. Поясніть, у яких задачах і чому застосовується теорема про зміну кількості руху точки.
10. Сформулюйте і запишіть теорему про зміну кількості руху механічної системи.
11. Поясніть, у яких задачах і чому застосовуються теореми про зміну кількості руху точки і системи.
12. Сформулюйте і запишіть закон збереження кількості руху механічної системи.
13. Поясніть, у яких задачах застосовується закон збереження кількості руху механічної системи.
14. Запишіть формули для визначення кількості руху механічної системи.
15. Запишіть формули для визначення момента кількості руху матеріальної точки відносно центра та осі.
16. Сформулюйте і запишіть теорему про зміну момента кількості руху точки відносно центра та осі.
17. Запишіть формули для визначення кінетичного момента механічної системи відносно центра та осі.
18. Сформулюйте і запишіть теорему про зміну кінетичного момента механічної системи відносно центра та осі.
19. Сформулюйте і доведіть закон збереження кінетичного момента механічної системи.
20. Поясніть, у яких задачах застосовується закон збереження кінетичного момента механічної системи.
21. Сформулюйте і запишіть теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки у диференційній та інтегральній формах.
22. Наведіть формули для визначення кінетичної енергії тіла при поступальному, обертальному і плоскопаралельному рухах.
23. Сформулюйте і запишіть теорему про зміну кінетичної енергії системи ми).

24. Поясніть, у яких задачах і чому застосовуються теореми про зміну кінетичної енергії точки і системи.
25. Сформулюйте і запишіть закон збереження механічної енергії точки або системи, наведіть визначення консервативної механічної системи.
26. Поясніть, у яких задачах застосовується закон збереження механічної енергії точки або системи.

4 СТРУКТУРА РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Розрахунково-графічні роботи є суттєвим етапом самостійної роботи студентів. Вони продовжують аудиторні практичні заняття, дозволяють глибше засвоїти навчальний матеріал, сприяють вмінню і навичкам виконання проектних робіт у майбутній фаховій діяльності.

Оформлення розрахунково-графічних робіт виконується згідно з вимогами стандарту [7].

Приклад оформлення титульного аркушу, наведений у додатку Б. Титульний аркуш одночасно у даній розрахунково-графічній роботі відіграє роль й обкладинки.

Далі наведемо назви розділів роботи.

1. Умова задачі.
2. Розв’язок задачі.

Перелік посилань.

Обчислення виконуються до третьої або четвертої значущої цифри.

Якщо є можливість або необхідність, одержані результати розрахунків аналізуються, формулюються висновки.

Готова розрахунково-графічна робота захищається студентом шляхом відповіді студентом на питання, задані викладачем по самій роботі і по темі, якій присвячена дана робота.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Павловський М. А. Теоретична механіка. К.: Техніка, 2002. – 510 с.

2. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. школа, 1986. – 416 с.

3. Динаміка матеріальної точки. Методичні вказівки з теоретичної механіки до проведення практичного заняття і виконання розрахунково-графічної роботи для бакалаврів за напрямами підготовки “Інженерна механіка”, “Машинобудування”, “Автомобільний транспорт”, “Зварювання”, / Укл. В.Ю.Грицюк. – Чернігів: ЧДТУ, 2011. – 20 с.

4. Застосування загального рівняння динаміки. Методичні вказівки з теоретичної механіки до проведення практичних занять і розрахунково-графічної роботи для студентів напрямів підготовки 6.050502 – „Інженерна механіка ”, 6.050503 – „Машинобудування ”, 6.070106 – „Автомобільний транспорт”, 6.050504 – „Зварювання” / Укл. В.Ю.Грицюк. – Чернігів: ЧДТУ, 2012. – 18 с.

5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

6. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи. Методичні вказівки з теоретичної механіки до проведення практичних занять і розрахунково-графічної роботи для студентів напрямів підготовки 6.050502 – „Інженерна механіка ”, 6.050503 – „Машинобудування”, 6.070106 – „Автомобільний транспорт”, 6.050504 – „Зварювання ” / Укл. В.Ю.Грицюк. – Чернігів: ЧДТУ, 2011. – 22 с.

7. ДСТУ 3008–95. Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення. – К.: Держстандарт України, 1995. – 38 с.

Додаток А
(довідковий)

Завдання розрахунково-графічної роботи з теми „Застосування тереми про зміну кінетичної енергії механічної системи”

Механічна система під дією сил ваги приходить у рух із стану спокою; початкове положення системи показано на рисунку А.1. Враховуючи тертя ковзання тіла 1 (варіанти 1 – 3, 5, 6, 8 – 12, 17 – 23, 28 – 30) та опір коченню тіла 3, яке котиться без ковзання (варіанти 2, 4, 6 – 9, 11, 13 – 15, 20, 21, 24,27, 29), нехтуючи іншими силами опору і масами ниток, які вважаються недеформівними, визначити швидкість тіла 1 у ту мить, коли пройдений цим тілом шлях буде дорівнювати s.

У завданні прийняті наступні позначення: m_1 , m_2 , m_3 , m_4 – маси тіл 1, 2, 3, 4; R_2 , r_2 , R_3 , r_3 – радіуси великих і малих кіл; i_{2x} , i_{3x} – радіуси інерції тіл 2 і 3 відносно центральних осей, які перпендикулярні до аркуша; α, β – кути нахилу площин до горизонту; f – коефіцієнт тертя ковзання; k – коефіцієнт тертя кочення.

Необхідні для розв’язування дані наведені у таблицях А.1 та А.2. Блоки і котки, для яких радіуси інерції у таблиці не вказані, вважати суцільними однорідними циліндрами.

Нахилені ділянки ниток паралельні відповідним нахиленим площинам.

Таблиця А.1 – Дані варіантів завдань

Номер варіанта	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	i_{3x}	α	β
	кг				см		см		град	
1	m	$4m$	$^1/_5m$	$^4/_3m$	–	–	–	–	60	–
2	m	$^1/_2m$	$^1/_3m$	–	–	30	–	20	30	45
3	m	m	$^1/_{10}m$	m	–	–	–	–	45	–
4	m	$2m$	$40m$	m	20	40	18	–	–	–
5	m	$2m$	m	–	20	15	18	–	60	–
6	m	$3m$	m	–	–	28	–	–	30	45
7	m	$2m$	$2m$	–	16	25	14	–	30	–
8	m	$^1/_2m$	$^1/_3m$	–	–	30	–	–	30	45
9	m	$2m$	$9m$	–	–	30	–	20	30	–
10	m	$^1/_4m$	$^1/_4m$	$^1/_5m$	–	–	–	–	60	–
11	m	$^1/_2m$	$^1/_4m$	–	–	30	–	25	30	45
12	m	$^1/_2m$	$^1/_5m$	m	30	–	20	–	30	–
13	m	$2m$	$5m$	$2m$	30	20	26	–	30	–
14	m	$^1/_2m$	$5m$	$4m$	–	25	–	–	–	–
15	m	$^1/_2m$	$4m$	$^1/_2m$	20	15	18	–	60	–
16	m	$^1/_{10}m$	$^1/_{20}m$	$^1/_{10}m$	10	12	–	–	–	–
17	m	$^1/_4m$	$^1/_5m$	$^1/_{10}m$	20	–	15	–	60	–
18	m	$3m$	m	–	35	15	32	–	60	–
19	m	$^1/_3m$	$^1/_{10}m$	m	24	–	20	–	60	–
20	m	$2m$	$20m$	–	20	15	16	–	30	–

Продовження таблиці А.1

Номер варіанта	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	i_{3x}	α	β
	кг				см		см		град	
21	m	m	$2m$	–	20	20	16	–	30	45
22	m	$^1/_2m$	$^1/_4m$	–	20	10	–	–	60	–
23	m	m	$^1/_{10}m$	$^4/_5m$	20	–	18	–	30	–
24	m	$3m$	$20m$	–	20	30	18	–	–	–
25	m	$^1/_3m$	$^1/_4m$	–	16	20	–	–	–	–
26	m	$^1/_2m$	m	$^1/_3m$	30	–	20	–	–	–
27	m	m	$6m$	$^1/_2m$	20	20	16	–	30	–
28	m	$2m$	$3m$	–	20	–	14	–	60	–
29	m	$^1/_4m$	$^1/_8m$	–	–	35	–	–	15	30
30	m	$^1/_2m$	$^3/_{10}m$	$^3/_2m$	26	20	20	18	30	–

Таблиця А.2 – Дані варіантів завдань

Номер варіанта	f	k, см	s, м	Зауваження
1	0,10	–	2	
2	0.22	0,20	2	
3	0,10	–	2	
4	–	0,30	0,1π	Масами ланок *AB*, *BC* і повзуна ***B*** нехтувати
5	0,12	–	0,28π	
6	0,10	0,28	1,5	
7	–	0,20	2	
8	0,15	0,20	1,75	
9	0,12	0,25	1,5	
10	0,10	–	3	
11	0,17	0,20	2,5	
12	0,20	–	2,5	
13	–	0,24	2	
14	–	0,20	2	Маси кожного з чотирьох коліс однакові
15	–	0,25	1,5	
16	–	–	0,05π	Масою водила нехтувати
17	0,10	–	0,16π	Шатун 3 розглядати як тонкий однорідний стержень
18	0,15	–	0,2π	Масою водила нехтувати
19	0,15	–	1,5	
20	0,10	0,20	0,2π	Масами ланок *AB*, *BC* і повзуна ***B*** нехтувати

Продовження таблиці А.2

Номер варіанта	f	k, см	s, м	Зауваження
21	0,20	0,32	1,2	
22	0,17	–	$0{,}1\pi$	Масою водила нехтувати
23	0,10	–	1	
24	–	0,60	$0{,}08\pi$	Масами ланок ***AB***, ***BC*** і повзуна ***B*** нехтувати
25	–	–	$0{,}04\pi$	Масою водила нехтувати
26	–	–	$0{,}6\pi$	Маси і моменти інерції блоків 2 і 5 однакові Шатун 3 розглядати як тонкий однорідний стержень
27	–	0,20	2	
28	0,10	–	$0{,}1\pi$	Шатун 3 розглядати як тонкий однорідний стержень
29	0,20	0,20	2,4	
30	0,12	–	2	

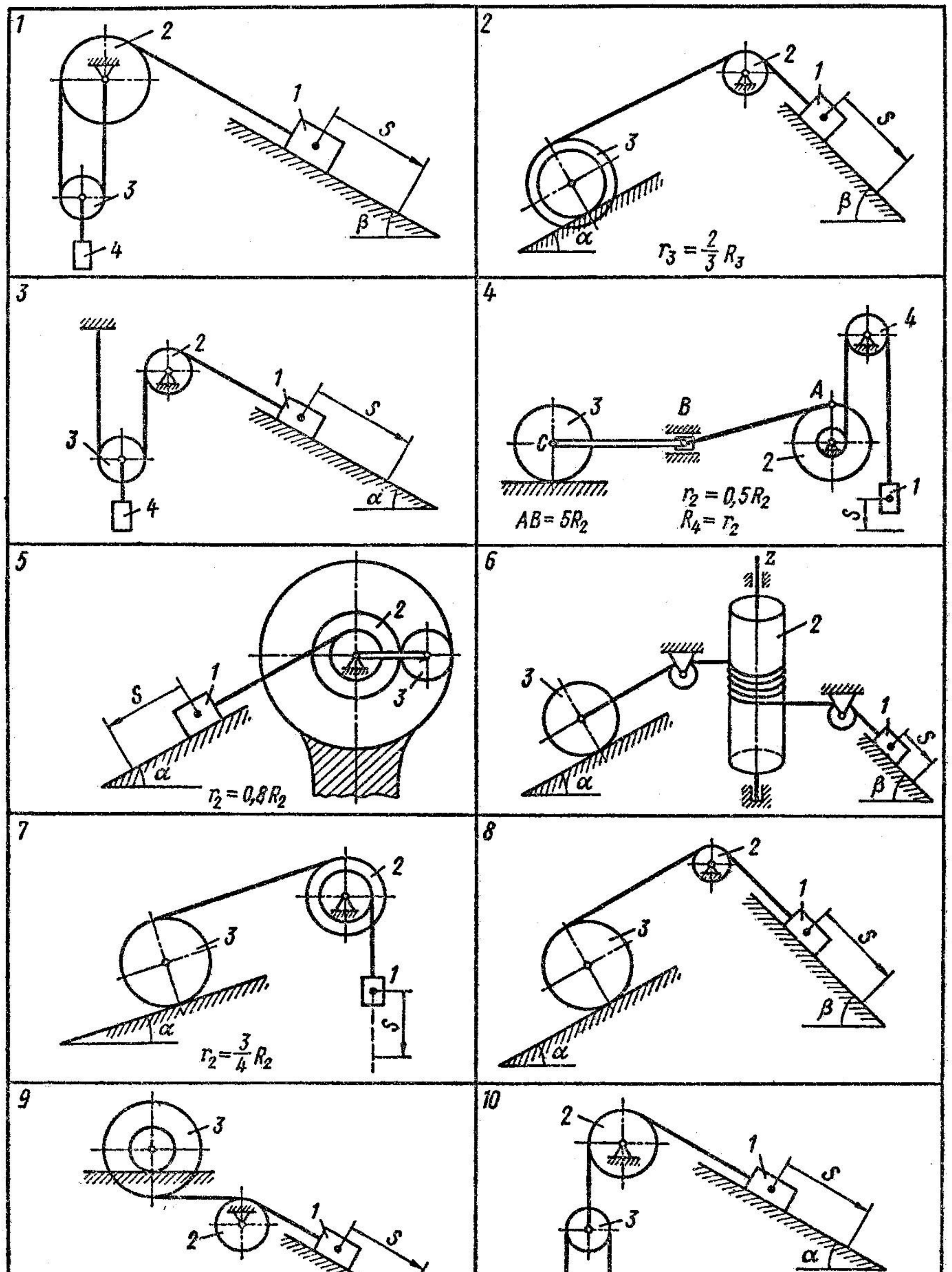

Рисунок А.1, аркуш 1

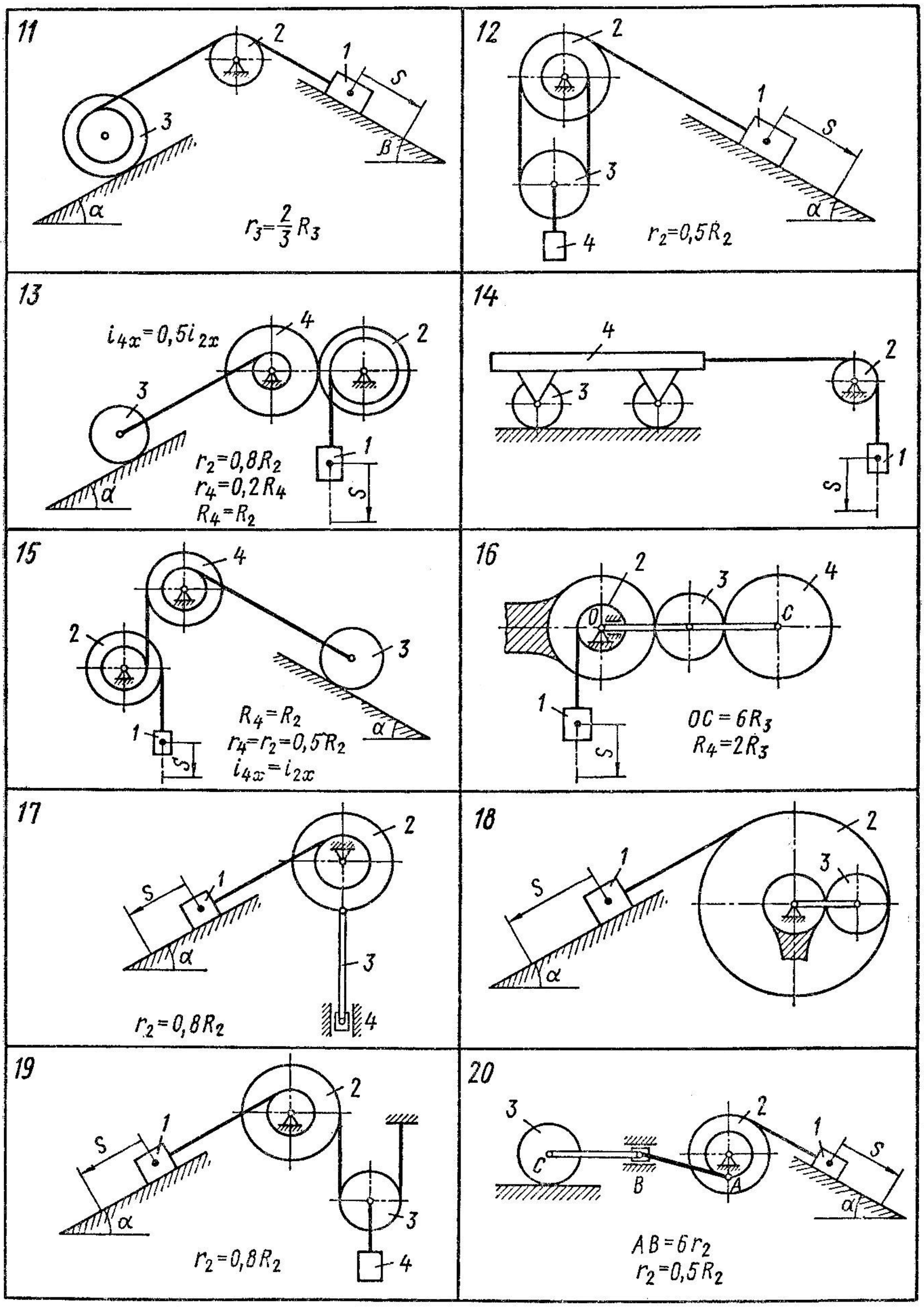

Рисунок А.1, аркуш 2

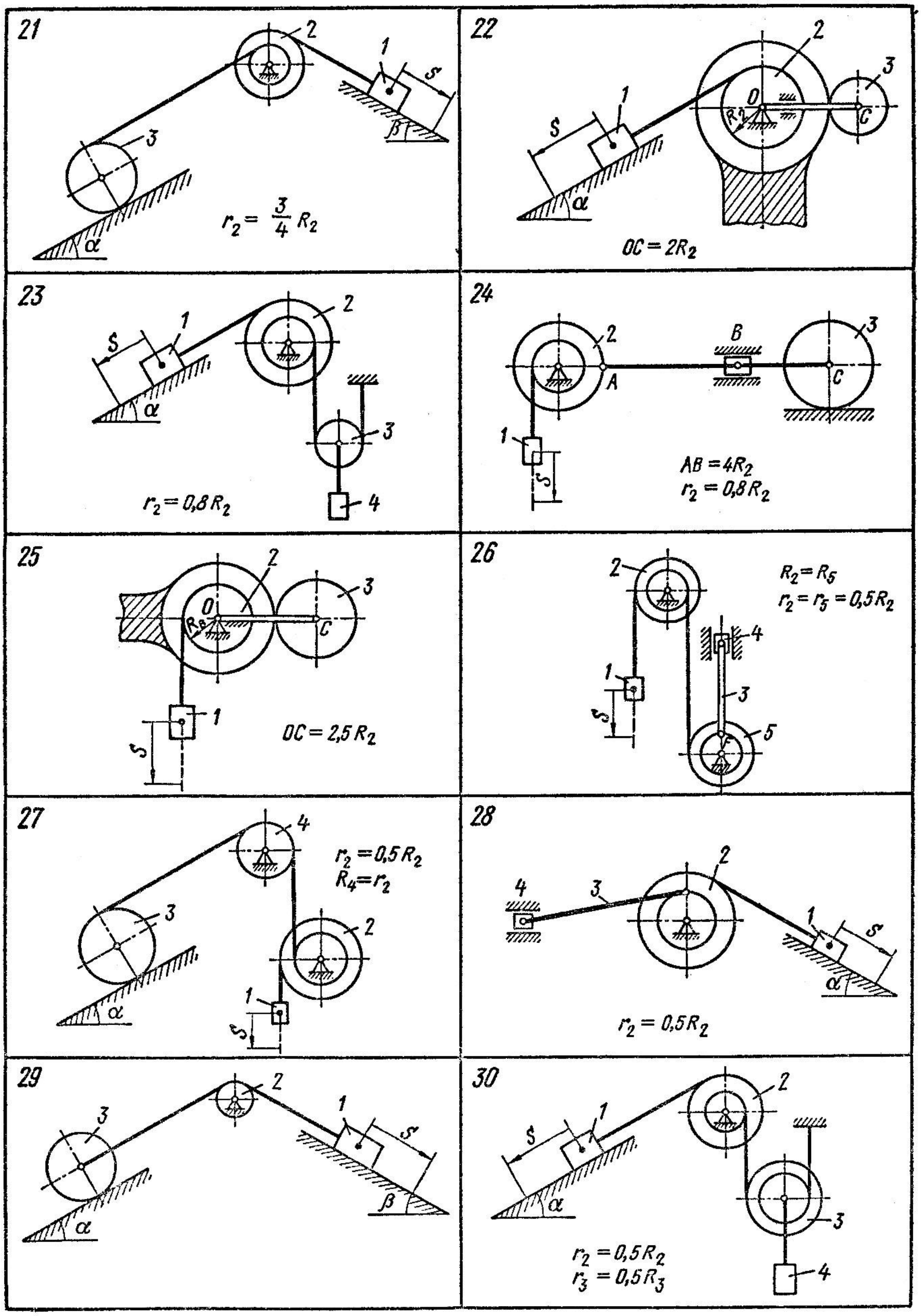

Рисунок А.1, аркуш 3

Додаток Б
(довідковий)

Титульний аркуш розрахунково-графічної роботи

Міністерство науки і освіти України

Чернігівський національний технологічний університет

Кафедра теоретичної і прикладної механіки

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ
ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Розрахунково-графічна робота з теоретичної механіки

Керівник	(підпис) (дата)	В. Ю. Грицюк
Виконав студент групи ІМ-101	(підпис) (дата)	І. С. Шевченко

Чернігів 2014