МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЕЛЕКТРИКА і МАГНЕТИЗМ
Розв'язання задач з фізики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять, виконання розрахунково-графічних робіт
та самостійної роботи з фізики для студентів технічних спеціальностей
денної та заочної форм навчання

Обговорено і рекомендовано на засіданні
кафедри інформаційно-вимірювальних
технологій, метрології та фізики,
протокол №4 від 19.11.13 р.

Чернігів ЧНТУ 2014

Електрика і магнетизм. Розв’язання задач з фізики. Методичні вказівки до практичних занять, виконання розрахунково-графічних робіт та самостійної роботи з фізики для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання /Укл.: Ушаков В.Г., Тепла Т.М. – Чернігів: ЧНТУ, 2014. – 44 с.

Укладачі: Ушаков Віктор Григорович, кандидат технічних наук, старший викладач;
Тепла Тетяна Мирославна, асистент

Відповідальний за випуск: Приступа А. Л., завідувач кафедри інформаційно-вимірювальних технологій, метрології та фізики, кандидат технічних наук, доцент

Рецензент: Красножон А. В., кандидат технічних наук, старший викладач кафедри електричних систем і мереж Чернігівського національного технологічного університету

© ЧНТУ, 2014
© ІВТМФ, 2014

ЗМІСТ

Вступ

У даних методичних вказівках наведені рекомендації для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання щодо розв'язування задач з розділу «Електрика та магнетизм» курсу фізики під час самостійної роботи, при підготовці до практичних занять та виконання розрахунково-графічних робіт.

У *першому* розділі методичних вказівок містяться загальні вимоги і правила оформлення звітів про виконання лабораторних та розрахунково-графічних робіт згідно з ДСТУ 3008-95 (Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення).

В *другому* розділі наведені приклади розв'язування задач з розділів електростатика, постійний електричний струм, рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях, магнітостатика, електромагнітна індукція, енергія електромагнітного поля. Розглянуто застосування методів диференціального та інтегрального числення для розв'язування конкретних фізичних задач, а також сформульовано загальні рекомендації, які полегшують пошуки та реалізацію шляхів розв'язку.

У *третьому* розділі методичних вказівок запропоновані задачі для самоконтролю.

1. Загальні вимоги до виконання розрахунково-графічних робіт

Виконання розрахунково-графічних робіт з фізики передбачено відповідними робочими навчальними програмами підготовки студентів інженерних спеціальностей.

Розрахунково-графічні роботи передбачені в кожному навчальному семестрі і виконуються студентами під час самостійних занять. Варіанти завдань – індивідуальні.

Мета розрахунково-графічних завдань, разом з лекціями та практичними заняттями, полягає у поглибленні теоретичних знань, засвоєнні основних законів і принципів фізики та їх математичних формулювань. Виконуючи розрахунково-графічні роботи, студент має навчитися правильно усвідомлювати, моделювати та виражати фізичні ідеї, кількісно формулювати та розв'язувати фізичні задачі, вибирати і застосовувати раціональні математичні методи їх розв'язання, оцінювати порядки фізичних величин, аналізувати отримані результати, самостійно працювати з літературою, користуватися таблицями фізичних величин, довідниками тощо.

Виконану і оформлену розрахунково-графічну роботу студент подає на перевірку викладачеві і в разі позитивного результату перевірки захищає роботу в передбачені навчальними планами терміни.

Розрахунково-графічна робота оформлюється чорнилом (пастою) з одного боку аркуша формату А4 (297×210 мм). Поля: ліве – 25 мм, праве – не менше 10 мм, верхнє та нижнє – 20 мм.

Схеми, рисунки та графіки виконуються олівцем. Скорочення слів в тексті, крім загальноприйнятих, не дозволяється.

Перед розв'язуванням кожної задачі необхідно вказати задачник, з якого взята задача, та її номер. Умову задачі переписують із задачника повністю, без скорочень.

Розв'язування кожної задачі спочатку виконується у загальному вигляді і обов'язково супроводжується короткими поясненнями з посиланнями на відповідні закони, теореми, правила тощо. Позначення величин у розв'язку задачі і на рисунках або графіках повинні співпадати. Після отримання відповіді у загальному вигляді треба проаналізувати її правильність із загальних міркувань і в разі потреби перевірити розмірність результату.

Виконуючи числові розрахунки, впевнитись, що всі величини при підстановці у формули виражені в одиницях СІ. Після виконання розрахунків перевірити, чи не суперечить отриманий результат здоровому глузду.

Якщо отримана відповідь задачі не збігається з відповіддю в задачнику, це треба відмітити окремо.

Для побудови графіків слід користуватися папером з масштабною сіткою (міліметрівка або аркуш в клітинку). При цьому слід насамперед раціонально вибрати масштаб, а саме –крива на графіку має бути не дуже крутою і не дуже пологою, бо такі криві важко сприймаються, а робота з ними ускладнюються. Потрібно намагатися використовувати всю площу графіка, тому в багатьох випадках відлік масштабних поділок на координатних осях доцільно починати не з нуля, а з деяких певних значень, які відповідають інтервалам зміни величин, що розглядаються. При виборі масштабу слід пам'ятати, що згідно з вимогами стандарту одна поділка масштабної шкали на графіках має відповідати лише *0,1; 0,2; 0,5* або *1; 2; 5*, або *10; 20; 50* і т.д. одиницям вимірюваної величини, але ні в якому разі не 2,5; 3; 4; 7 тощо. На шкалі, як правило, наносять лише "круглі" мітки. Наприклад, *0,5; 1; 1,5; 2* і т.д. На кінцях координатних осей (шкал) обов'язково вказують позначення відповідних величин і їх одиниці виміру.

Точки і лінії наносять на графік чітко і ясно олівцем, так як інакше помилково нанесену точку не можна усунути з графіка, не зіпсувавши його. Ніяких другорядних ліній і відміток, які пояснюють побудову точок, на графік наносити не можна, оскільки вони заважають користуватися графіком і аналізувати результати.

На титульній сторінці розрахунково-графічної роботи, форма якої наведена нижче (дивись *Додаток А*), вказуються розділ курсу, номер варіанту, прізвище та ініціали студента, номер групи, прізвище та ініціали викладача (керівника), а також дата, коли виконана робота була подана викладачеві на перевірку.

2. Приклади розв’язання задач

2.1 Принцип суперпозиції

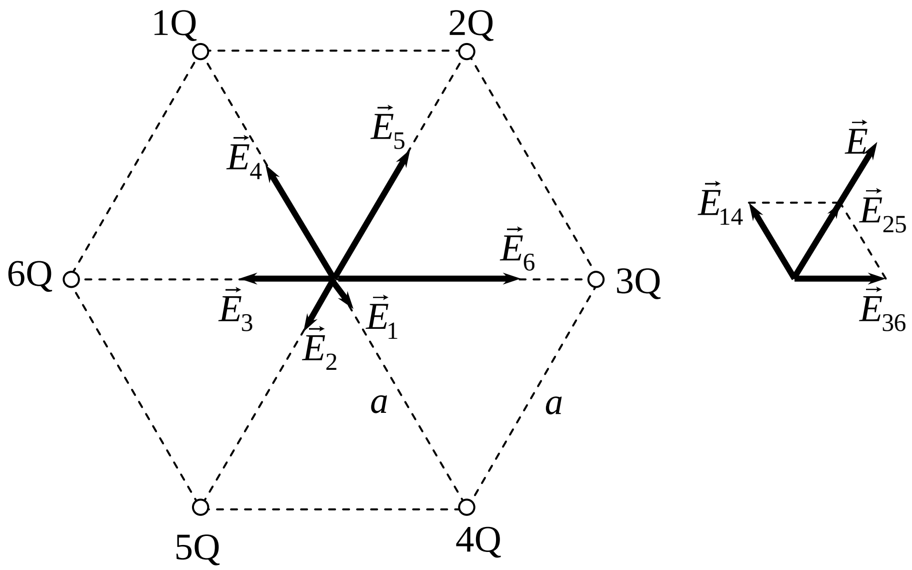
У вершинах правильного шестикутника зі стороною $a = 10$ см розташовані точкові заряди Q, $2Q$, $3Q$, $4Q$, $5Q$, $6Q$ $Q = 0.1$ мКл . Знайти напруженість електричного поля у центрі симетрії шестикутника.

Розв’язання:

Електричне поле $\vec{E}$ у центрі симетрії шестикутника створюється системою шести точкових зарядів. Згідно з принципом суперпозиції напруженість цього поля буде дорівнювати векторній сумі полів, утворених в цій самій точці кожним окремим зарядом системи за відсутністю решти зарядів. Відомо, що модуль (величина) вектора напруженості поля позитивного точкового заряду на відстані r від заряду $E\ r\ = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, а поле напрямлене від заряду вздовж лінії, що сполучає заряд і точку спостереження. З формули видно, на однакових відстанях від заряду напруженість поля пропорційна величині заряду. У правильному шестикутнику відстані від вершин до центру симетрії однакові. Отже у нашому випадку

$$E_1 : E_2 : E_3 : E_4 : E_5 : E_6 = 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6,$$

де через $E_1, E_2, ..., E_6$ позначені напруженості полів від кожного точкового заряду, починаючи з першого (найменшого).



а) – напруженості полів шести точкових зарядів

б) – спрощена картина полів шести точкових зарядів

Рисунок 2.1 – Суперпозиція електричних полів системи шести точкових зарядів

На *рисунку 2.1, а* показані поля від усіх зарядів системи зі збереженням масштабу. Очевидно $E_1\ a\ = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$.

Для знаходження векторної суми цих полів звернімо увагу на те, що поля від зарядів, розташованих у протилежних вершинах шестикутника, мають протилежні напрямки $\vec{E}_1 \uparrow\downarrow \vec{E}_4$; $\vec{E}_2 \uparrow\downarrow \vec{E}_5$; $\vec{E}_3 \uparrow\downarrow \vec{E}_6$ і тому частково компенсують одно одне. До того ж помічаємо, що у кожному з цих випадків при додаванні полів (відніманні модулів) отримаємо однаковий результат:

$$E_{41} = E_4 - E_1 = 3E_1; \qquad E_{52} = E_5 - E_2 = 3E_1; \qquad E_{63} = E_6 - E_3 = 3E_1.$$

Це дозволяє замінити суперпозицію (векторну суму) шести різних за величиною полів $\vec{E}_1, ..., \vec{E}_6$ суперпозицією трьох однакових за величиною полів $\vec{E}_{41}, \vec{E}_{52}$ та $\vec{E}_{63}$, напрями яких показано на *рисунку 2.1, б*. Діагональ ромба з кутом при вершині 60° дорівнює його стороні. Отже $\vec{E}_{41} + \vec{E}_{63} = \vec{E}_{52}$, а результуюча напруженість поля системи зарядів $E = 2E_{52} = 6E_1$. Тобто модуль результуючого поля

$$E = 6\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{3Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

Після виконання підрахунків отримаємо $E = 540\ кВ/м$.

Відповідь: $E = \dfrac{3Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2} = 540\ кВ/м$.

2.2 Електричний дипольний момент

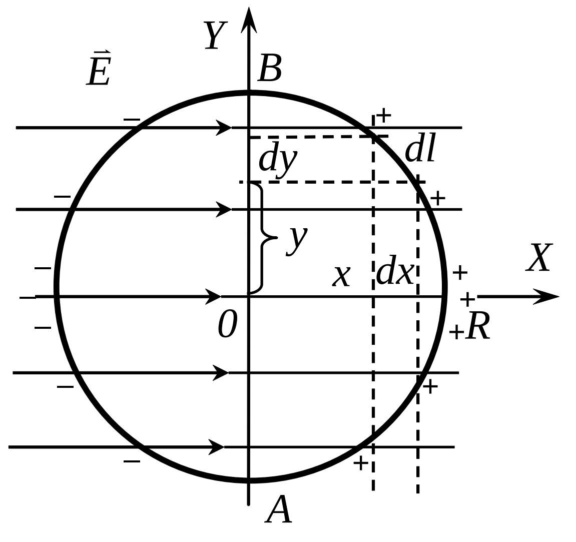


Рисунок 2.2.1 – Металеве кільце в однорідному електричному полі

У однорідному електричному полі, напрямленому вздовж осі X, розміщено металеве кільце радіуса R так, що площина кільця паралельна лініям поля. Внаслідок дії електричного поля на вільні заряди провідника на кільці з'являються надлишкові різнойменні заряди (*рисунок 2.2.1*), лінійна густина яких змінюється за залежністю

$$\tau\ x,y\ = \tau_0\frac{x}{R}.$$

Знайти:

а) величину додатного заряду на кільці;

б) дипольний момент кільця.

Розв'язання:

Задачу можна розв'язувати як у декартових, так і у полярних координатах.

1-й спосіб (декартова система)

А) За умовою задачі лінійна густина заряду на кільці $\tau(x,y)$ залежить лише від змінної x, отже, заряди розподілені на кільці симетрично відносно осі X, причому додатний заряд буде розташований на правій стороні кільця, а від'ємний – на лівій (*рисунок 2.2.1*). Для знаходження величини цього заряду проінтегруємо лінійну густину заряду по правому півкільцю:

$$Q_+ = \int\limits_{ARB} dQ = \int\limits_{ARB} \tau(x,y)\, dl .$$

Таке інтегрування можна провести як по змінній x, так і по змінній y. У першому випадку при інтегруванні слід врахувати, що у межах від x до $x+dx$ знаходяться дві ділянки півкільця довжиною dl з додатним зарядом. У другому ж випадку така пересторога є зайвою, оскільки у межах від y до $y+dy$ знаходиться одна така елементарна ділянка (*рисунок 2.2.1*).

Будемо вважати $x>0; y>0$, тобто обмежимось першим сегментом координатної площини. З рівняння кола з центром у початку координат: $x^2+y^2=R^2$ знайдемо залежність $y(x)=\sqrt{R^2-x^2}$. Довжина елементарної дуги $dl=\sqrt{1+(y_x')^2}\cdot dx$. Підставивши у це співвідношення значення похідної: $y_x'=-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, отримаємо $dl=\dfrac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

Переходимо до інтегрування:

$$Q_+ = \int\limits_{ARB} \tau(x,y)\, dl = 2\int\limits_{RB} \tau(x,y)\, dl = 2\int\limits_0^R \tau_0 \frac{x}{R}\cdot\frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}} = 2\tau_0 \int\limits_0^R \frac{xdx}{\sqrt{R^2-x^2}} = 2\tau_0 R .$$

Аналогічним чином розв'язуємо задачу інтегруванням по змінній y: $x(y)=\sqrt{R^2-y^2}$; $x_y'=-\dfrac{y}{\sqrt{R^2-y^2}}$; $dl=\dfrac{Rdy}{\sqrt{R^2-y^2}}$ і, нарешті, виразивши залежність лінійної густини заряду на кільці через змінну y: $\tau(x,y)=\tau_0\dfrac{x}{R}=\tau_0\dfrac{\sqrt{R^2-y^2}}{R}$, виконуємо інтегрування:

$$Q_+ = \int\limits_{ARB} \tau(x,y)\,dl = \int\limits_{-R}^{R} \tau_0 \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R} \cdot \frac{Rdy}{\sqrt{R^2-y^2}} = \tau_0 \int\limits_{-R}^{R} dy = 2\tau_0 R\,.$$

2-й спосіб (полярна система координат)

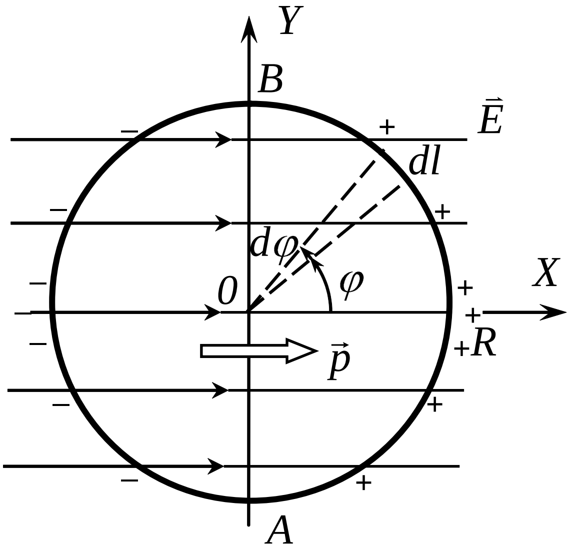


Рисунок 2.2.2 – Розв'язування задачі у полярних координатах

Перейдемо у формулах до полярних координат, скориставшись співвідношеннями $x=\rho\cos\varphi; y=\rho\sin\varphi$. Отримаємо:

– рівняння кола $\rho = R$;
– залежність лінійної густини заряду на провіднику $\tau(\varphi) = \tau_0 \cos\varphi$;
– довжина елементарної дуги $dl = R \cdot d\varphi$.

При інтегруванні вздовж правої сторони кільця кут φ (*рисунок 2.2.2*) буде, зростаючи, змінюватись від $\varphi_1 = -\pi/2$ (нижня межа) до $\varphi_2 = +\pi/2$ (верхня межа інтегрування).

Отже

$$Q_+ = \int\limits_{ARB} \tau(\varphi)\,dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_0 \cos\varphi \cdot R d\varphi = \tau_0 R \int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\varphi d\varphi = 2\tau_0 R\,.$$

Б) Вектор дипольного моменту системи зарядів, розподілених в деякій області D, за умови, що алгебраїчна сума усіх зарядів системи дорівнює нулю, розраховується за формулою $\vec{p}_E = \int\limits_D \vec{r} dQ$ або, у нашому випадку, $\vec{p}_E = \int\limits_{\text{По кільцю}} \vec{r} dQ$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від початку координат до точки, в нескінченно малому околі якої розташований заряд dQ. Зважаючи на симетричне розташування зарядів відносно осі X, напрям вектора $\vec{p}_E$ буде збігатися з напрямом осі X (*рисунок 2.2.2*). Тому модуль вектора дипольного моменту буде дорівнювати його проекції на вісь X, тобто $p_E = p_{EX} = \int\limits_{\text{По кільцю}} x dQ$.

Виконаємо розрахунки у полярній системі координат. Для цього виразимо: $x = R\cos\varphi$; $\tau(\varphi) = \tau_0 \cos\varphi$; $dl = R \cdot d\varphi$ і, відповідно, заряд $dQ = \tau(\varphi)\,dl = \tau_0 \cos\varphi \cdot R d\varphi$. Переходимо до інтегрування:

$$p_E = \int\limits_{\text{По кільцю}} x\tau(\varphi)\,dl = \int\limits_0^{2\pi} R\cos\varphi\cdot\tau_0\cos\varphi\cdot R d\varphi = \tau_0 R^2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \pi\tau_0 R^2 .$$

Радимо отримати цей результат, виконавши інтегрування у декартових координатах.

Відповідь: а) $Q_+ = 2\tau_0 R$; *б)* $\vec{p}_E = \pi\tau_0 R^2\cdot\vec{i}$.

2.3 Еквіпотенціальна поверхня

Поле утворено двома точковими зарядами *+2Q* та *–Q*, розташованими на відстані *d = 12 см* один від одного. Знайти геометричне місце точок на площині, для котрих потенціал дорівнює нулю, тобто $\varphi(x,y)=0$. Написати рівняння лінії нульового потенціалу.

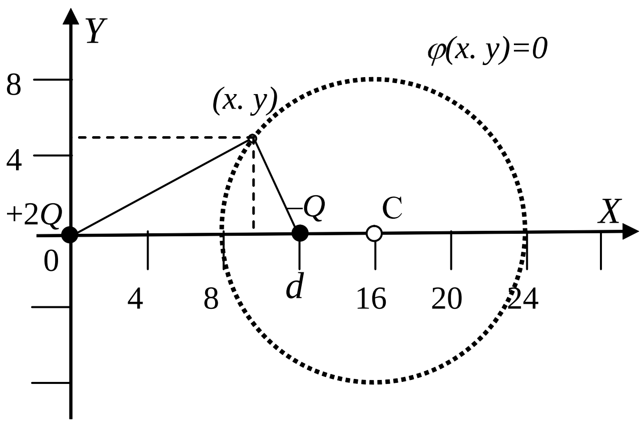


Рисунок 2.3 – Розрахунок еквіпотенціальної поверхні поля, утвореного двома точковими зарядами

Розв’язання:

Розташуємо заряд $+2Q$ в початку системи координат, а заряд $-Q$ на осі X , на відстані d від початку координат (*рисунок 2.3*).

У кожній точці простору потенціал поля, утвореного системою зарядів, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, утвореній в цій точці кожним зарядом системи окремо: $\varphi(x,y)=\varphi_+(x,y)+\varphi_-(x,y)$. Беручи до уваги знаки потенціалів (знаки зарядів), складемо рівняння лінії нульового потенціалу:

$$k\frac{2Q}{\sqrt{x^2+y^2}} - k\frac{Q}{\sqrt{(d-x)^2+y^2}} = 0 .$$

Після очевидних спрощень і перетворень отримаємо

$$4\left[(d-x)^2+y^2\right] = x^2+y^2 ;$$

$$4d^2-8xd+4x^2+4y^2 = x^2+y^2 ;$$

$$3x^2+3y^2-8xd+4d^2=0 ;$$

$$\left(x^2-\frac{8}{3}xd\right)+y^2+\frac{4}{3}d^2=0 .$$

Вираз у дужках доповнюємо до повного квадрату:

$$\left(x^2-\frac{8}{3}xd+\frac{16}{9}d^2\right)+y^2-\frac{16}{9}d^2+\frac{4}{3}d^2=0 ;$$

$$\left(x-\frac{4}{3}d\right)^2+y^2=\frac{4}{9}d^2 ; \qquad \left(x-\frac{4}{3}d\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}d\right)^2 .$$

Це рівняння кола радіусом $R=\frac{2}{3}d=8$ см і центром у точці $C\left(\frac{4}{3}d;\ 0\right)=C(16;0)$. або $(x-16)^2+y^2=8^2$.

Відповідь: $\left(x-\frac{4}{3}d\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}d\right)^2$.

Зауваження. Така сама картина спостерігатиметься у будь-якій площині, що містить в собі вісь *X*. Тому, взагалі кажучи, тут буде еквіпотенціальна поверхня – сфера нульового потенціалу $\varphi(x,y,z)=0$, рівняння якої

$$\left(x-\frac{4}{3}d\right)^2+y^2+z^2=\left(\frac{2}{3}d\right)^2.$$

2.4 Напруженість і потенціал електричного поля

Вектор напруженості деякого електричного поля змінюється за залежністю $\vec{E}(x,y)=ay\cdot(y-2x)\cdot\vec{i}+ax\cdot(2y-x)\cdot\vec{j}$. Знайти потенціал $\varphi(x,y)$ поля.

Розв'язання.

Потенціал може бути введений лише у таких полях, де сили, що діють на частинки (заряди), є консервативними. Тому спочатку впевнимося, що дане поле є потенціальним, тобто $rot\,\vec{E}=0$:

$$rot\,\overline{E}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ ay(y-2x) & ax(2y-x) & 0\end{vmatrix}=$$

$$=0\cdot\bar{i}+0\cdot\bar{j}+(2ay-2ax-2ay+2ax)\cdot\bar{k}=0.$$

Зв'язок між складовими вектора $\vec{E}(x,y)$ та потенціалом $\varphi(x,y)$ в кожній точці поля має вигляд

$$E_X(x,y)=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad E_Y(x,y)=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

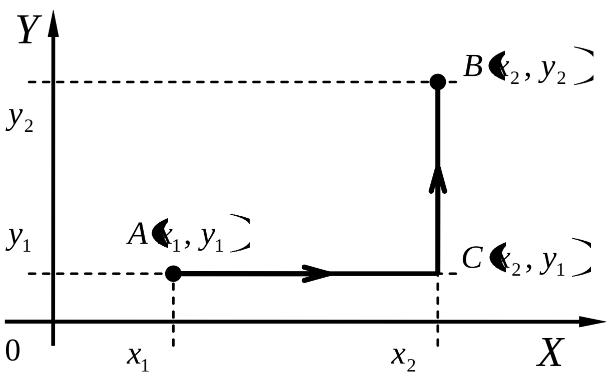


Рисунок 2.4 – Шлях інтегрування для обчислення потенціалу

У нашому випадку $E_X(x,y)=ay(y-2x)$;

$$E_Y(x,y)=ax(2y-x).$$

У потенціальному полі різницю потенціалів між двома точками *A* та *B* можна виразити через криволінійний інтеграл 2-го роду:

$$\varphi_A-\varphi_B=\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{l}.$$

Такий інтеграл має однакові значення незалежно від шляху, по якому виконується інтегрування. Тому для обчислення інтеграла зручно обрати шлях, який складається з двох ділянок, на кожній з яких одна з координат – x або y змінюється, а друга – лишається сталою (*рисунок 2.4*):

Дійсно, якби інтегрування виконувалось по довільній кривій, то, враховуючи очевидні співвідношення:

$$\vec{E}(x,y)=E_X(x,y)\cdot\vec{i}+E_Y(x,y)\cdot\vec{j} \quad \text{та} \quad d\vec{l}=dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j},$$

вираз під інтегралом (скалярний добуток $\vec{E}\cdot d\vec{l}$) треба було б подати у вигляді:

$$\vec{E}(x,y)d\vec{l}=\left(E_X(x,y)\cdot\vec{i}+E_Y(x,y)\cdot\vec{j}\right)\cdot\left(dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j}\right)=$$
$$=E_X(x,y)\cdot dx+E_Y(x,y)\cdot dy.$$

Якщо ж замість довільного шляху інтегрування обрати такий, як показано на *рисунку 2.4*, то на першій ділянці AC буде змінюватись тільки координата x (тобто $dy=0$), а на другій ділянці CB – тільки координата y (тобто $dx=0$). Інтеграл розпадається на два:

$$\varphi_A-\varphi_B=\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{x_1}^{x_2}E_x(x,y_1)dx+\int_{y_1}^{y_2}E_y(x_2,y)dy.$$

Виконуємо інтегрування:

$$\varphi_A-\varphi_B=\int_{x_1}^{x_2}ay_1(y_1-2x)dx+\int_{y_1}^{y_2}ax_2(2y-x_2)dy=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left(ay_1^2-2axy_1\right)dx+\int_{y_1}^{y_2}\left(2ax_2y-ax_2^2\right)dy=$$

$$=ay_1^2(x_2-x_1)-ay_1(x_2^2-x_1^2)+ax_2(y_2^2-y_1^2)-ax_2^2(y_2-y_1)=$$
$$=\left(-ax_1y_1^2+ax_1^2y_1\right)-\left(-ax_2y_2^2+ax_2^2y_2\right)=\varphi(x_1,y_1)-\varphi(x_2,y_2).$$

Таким чином, ми показали, що значення криволінійного інтеграла на шляху AB дорівнює різниці значень функції

$$\varphi(x,y)=-axy^2+ax^2y+C=axy(x-y)+C$$

в початковій $A(x_1,y_1)$ та кінцевій $B(x_2,y_2)$ точках шляху інтегрування.

Ця функція і буде потенціалом поля, заданого умовою задачі.

Відповідь: $\varphi(x,y)=axy(x-y)+C.$

2.5 Рівняння Пуассона

Потенціал у деякій області простору залежить лише від координати x і визначається за формулою $\varphi(x) = -\dfrac{ax^2}{2} + C$. Знайти густину зарядів, які створюють це поле.

Розв'язання.

Розподіл зарядів знайдемо за допомогою рівняння Пуассона $\Delta\varphi = -\dfrac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon\varepsilon_0}$, яке в одномірному випадку (залежності лише від однієї координати) має вигляд:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Підставивши у ліву частину рівняння задану залежність $\varphi(x)$, одержимо

$$\rho(x) = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}ax^2 + C\right)\right) = \varepsilon\varepsilon_0 a\,.$$

Відповідь: $\rho(x) = a\varepsilon\varepsilon_0 = const$.

2.6 Потік вектора E через бічну поверхню циліндра

Точковий заряд Q знаходиться в центрі основи прямого кругового циліндра висотою h, радіус основи a. Знайти потік вектора $\vec{E}$ через бічну поверхню циліндра.

Розв'язання.

За означенням, потік вектора $\vec{E}$ через елементарну площадку dS дорівнює

$$d\Phi = (\vec{E},\vec{n})\,dS = E\cos\alpha \cdot dS, \qquad (2.6.1)$$

де α – кут між вектором $\vec{E}$ та нормаллю $\vec{n}$ до площадки. Будемо розглядати площадку dS у вигляді вузької кільцевої смуги, яка проходить по поверхні циліндра на відстані y від основи (*рисунок 2.6*). Ширину смуги приймемо за dy. В межах цієї площадки величину і напрям напруженості поля ($E(y)$ та кут α) можна вважати сталими. Враховуючи, що $E(y)$ дорівнює модулю поля точкового заряду Q на відстані r, запишемо

$$E(y) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + y^2)}. \qquad (2.6.2)$$

Площу обраної елементарної площадки dS та $\cos\alpha$ виразимо через радіус циліндра a, координату y та ширину смуги dy:

$$dS = 2\pi a \cdot dy; \qquad \cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}. \tag{2.6.3}$$

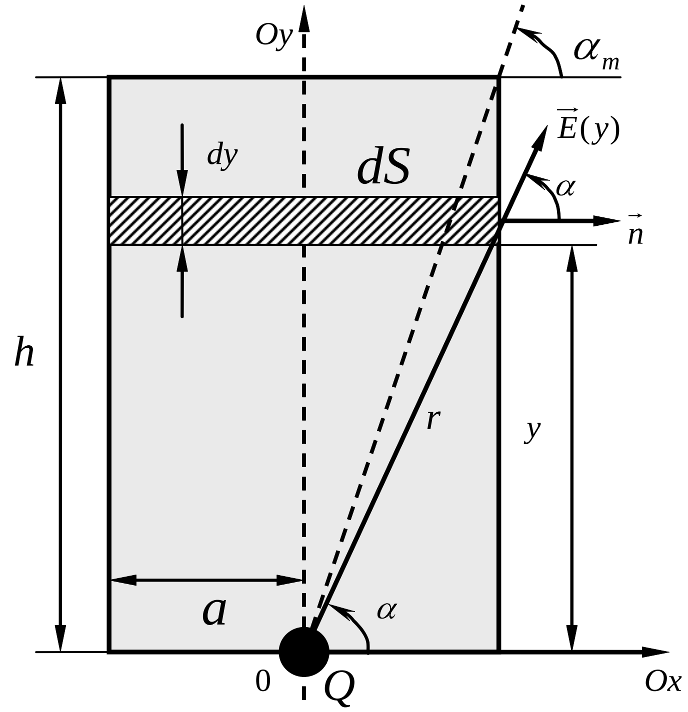


Рисунок 2.6 – До розрахунку потоку вектора $\vec{E}$ через бічну поверхню циліндра.

Підставивши вирази (2.6.2) і (2.6.3) у формулу (2.6.1), знайдемо елементарний потік вектора $\vec{E}$ через площадку dS:

$$d\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + y^2)} \cdot \frac{a}{(a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot 2\pi a \cdot dy = \frac{Qa^2}{2\varepsilon_0} \frac{dy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.6.4}$$

Потік через бічну поверхню циліндра знайдемо інтегруванням формули (2.6.4) по змінній y в межах від основи циліндра ($y = 0$) до його висоти $y = h$:

$$\Phi = \frac{Qa^2}{2\varepsilon_0} \cdot \int_0^h \frac{dy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.6.5}$$

Для обчислення інтеграла скористаємося заміною змінної інтегрування:

$$y = a \cdot tg\alpha, \Rightarrow dy = \frac{a \cdot d\alpha}{\cos^2\alpha}, \tag{2.6.6}$$

тобто перейдемо від змінної інтегрування y до змінної α.

Підставивши співвідношення (2.6.6) у підінтегральну функцію (2.6.5) і виконавши тригонометричні та алгебраїчні спрощення, отримаємо:

$$\Phi=\frac{Qa^2}{2\varepsilon_0}\cdot\int_0^{\alpha_m}\frac{a\cdot d\alpha}{a^3\cdot\left(1+tg^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\cos^2\alpha}=\frac{Q}{2\varepsilon_0}\cdot\int_0^{\alpha_m}\cos\alpha\cdot d\alpha,$$

де верхня межа інтегрування α_m дорівнює значенню кута α на висоті $y=h$.

Обчислюємо інтеграл:

$$\Phi=\frac{Q}{2\varepsilon_0}\cdot\int_0^{\alpha_m}\cos\alpha\cdot d\alpha=\frac{Q}{2\varepsilon_0}\cdot\sin\alpha\Big|_0^{\alpha_m}=\frac{Q}{2\varepsilon_0}\cdot\sin\alpha_m.$$

З *рисунка 2.6* бачимо, що $\sin\alpha_m=\dfrac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

Отже, остаточно маємо:

$$\Phi=\frac{Qh}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2+h^2}}=\frac{Q}{2\varepsilon_0\sqrt{1+\left(\frac{a}{h}\right)^2}}.$$

Відповідь: $\Phi=\dfrac{Qh}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2+h^2}}$.

2.7 Теорема Гауса. Поле зарядженої кулі

Куля радіуса R має позитивний заряд, об’ємна густина якого залежить тільки від відстані r до його центра за законом: $\rho(r)=\rho_0\left(1-\dfrac{r}{R}\right)$, де ρ_0 – додатна постійна. Вважаючи відносну діелектричну проникність кулі і оточуючого простору рівною одиниці, знайти:

а) модуль вектора напруженості електричного поля всередині кулі як функцію відстані r;

б) максимальне значення напруженості $E_{\max}$, та відповідну цьому значенню відстань r_m;

в) модуль вектора напруженості електричного поля зовні кулі як функцію відстані r.

Розв’язання

А) Оскільки розподіл заряду всередині кулі симетричний відносно центру ($\rho(r)$ залежить тільки від r), електричне поле у будь-якій точці всередині і зовні кулі напрямлене вздовж її радіуса (*рисунок 2.7.1*). Тому для розрахунку залежності $E(r)$ можна застосувати теорему Гауса, обравши в якості замкнутої поверхні сферу радіуса r, концентричну із зарядженою кулею. Дійсно, на поверхні такої сфери вектор $\vec{E}\;r$ напрямлений вздовж нормалі до поверхні і має однаковий модуль, тобто $E\;r\;=E_n=const$.

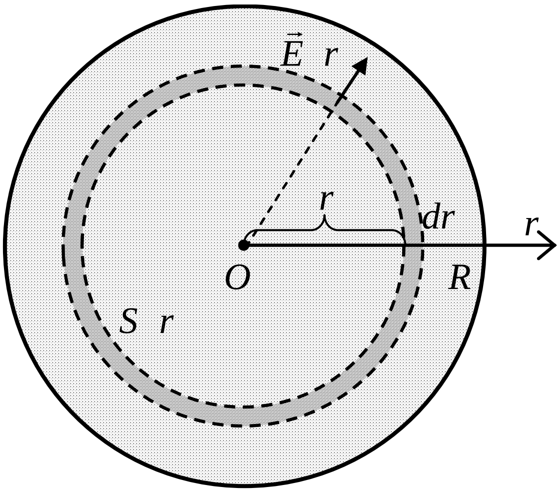


Рисунок 2.7.1 – Розрахунок напруженості електричного поля всередині зарядженої кулі

Згідно з теоремою Гауса, потік вектора $\vec{E}$ через довільну *замкнуту* поверхню S дорівнює алгебраїчній сумі зарядів всередині цієї поверхні:

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V_S}\rho\;r\;dV\,, \qquad (2.7.1)$$

де інтегрування в правій частині проводиться по об'єму V_S, обмеженому поверхнею S.

Зауважимо, що замкнута поверхня S може розглядатися як *уявна*.

Обчислюємо інтеграл у лівій частині формули (2.7.1). На поверхні $S\;r$ – сфері радіуса r:

$$\oint_S E_n dS = \Big|_{E_n=E\;r\;=const}\Big| = E\;r\;\oint_{S\;r} dS = E\;r\;\cdot 4\pi r^2. \qquad (2.7.2)$$

Обчислюємо інтеграл у правій частині формули (2.7.1). Для обчислення інтеграла розіб'ємо внутрішній простір сфери $S\;r$ на елементарні концентричні сферичні шари радіусом r і товщиною dr, як показано на *рисунку 2.7.1*. Елементарний об'єм такого сферичного шару $dV = S\;r\;\cdot dr = 4\pi r^2 dr$. Після підстановки цієї величин у правий інтеграл він набуде вигляду

$$\oint_{V_S}\rho\;r\;dV = \oint_{V_S}\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0\oint_{V_S}\left(1-\frac{r}{R}\right)r^2 dr\,.$$

При інтегруванні по внутрішньому простору сфери $S\;r$ змінна інтегрування r змінюватиметься від $r=0$ (нижня межа) до $r=r$ (верхня межа інтеграла):

$$4\pi\rho_0\oint_{V_S}\left(1-\frac{r}{R}\right)r^2 dr = 4\pi\rho_0\int_0^r r^2\left(1-\frac{r}{R}\right)dr\,.$$

Виконавши інтегрування, отримаємо заряд кулі, розташований всередині замкнутої поверхні $S\;r$:

$$\int_{V_S}\rho\;r\;dV = 4\pi\rho_0\left(\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{4R}r^4\right) = 4\pi\rho_0 r^3\left(\frac{1}{3}-\frac{r}{4R}\right). \qquad (2.7.3)$$

Підставивши результати (2.7.2) та (2.7.3) у (2.7.1), після очевидних перетворень отримаємо залежність $E\;r$ всередині кулі:

$$E(r)=\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left(1-\frac{3r}{4R}\right)\ \text{при}\ \ r\le R. \qquad (2.7.4)$$

Б) Для відповіді на запитання треба дослідити отриману функцію на максимум, тобто розв'язати рівняння $\frac{dE(r)}{dr}=0$.

Обчислюємо похідну:

$$\frac{dE}{dr}=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}-\frac{r}{2R}\right).$$

Прирівнявши похідну до нуля та розв'язавши отримане рівняння відносно r, знаходимо відстань від центра, на якій напруженість поля максимальна:

$$r_m=\frac{2}{3}R. \qquad (2.7.5)$$

Для знаходження максимальної напруженості поля підставляємо знайдену величину r_m у формулу (2.7.4). Отримаємо

$$E_{\max}=E(r_m)=\frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}. \qquad (2.7.6)$$

В) Напруженість поля зовні зарядженої кулі знайдемо, застосувавши теорему Гауса на замкнутій поверхні – сфері $S(r)$, радіус якої $r>R$, як показано на *рисунку 2.7.2*. Аналогічно тому, як це було зроблено при відповіді на запитання а), оточимо заряджену кулю уявною сферою $S(r)$, концентричною з зарядженою кулею. Інтеграл у лівій частині формули (2.7.1) буде мати такий самий вигляд, як і у попередньому випадку, тобто

$$\oint_S E_n dS=E(r)\cdot 4\pi r^2.$$

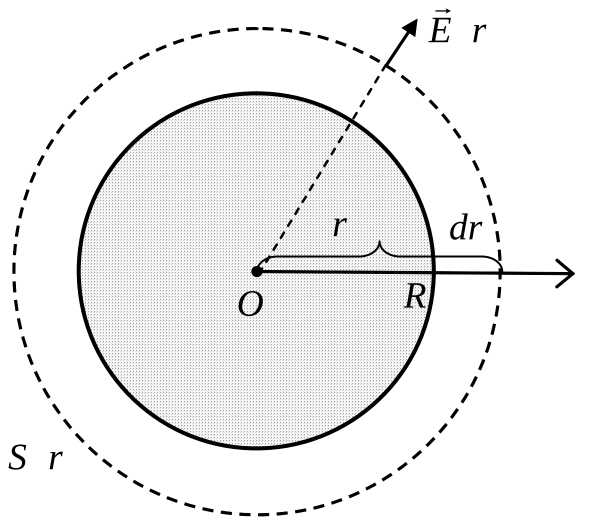


Рисунок 2.7.2 – Розрахунок напруженості електричного поля зовні зарядженої кулі

При обчисленні інтеграла у правій частині формули (2.7.1) слід звернути увагу на те що тепер замкнута поверхня $S(r)$ оточує цілком усю заряджену кулю. Отже, всередині замкнутої поверхні знаходиться повний заряд кулі, який буде лишатися сталим для сфери будь-якого радіуса за умови $r>R$. Величину цього заряду можна знайти, підставивши радіус сфери R замість r у формулу (2.7.3). Отримаємо

$$Q=4\pi\rho_0\left(\frac{1}{3}R^3-\frac{1}{4R}R^4\right)=$$

$$=4\pi\rho_0 R^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3.$$

Підставивши ці вирази у (2.7.1), отримаємо рівняння

$$E\ \ r\ \ \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3,$$

звідки і знаходимо потрібну залежність:

$$E\ \ r\ = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2} \text{ при } r \geq R. \qquad (2.7.7)$$

Відповідь: див. формули а) (2.7.4);
б) (2.7.6) та (2.7.5);
в) (2.7.7).

2.8 Рух заряджених частинок у електричному полі

Електрони влітають у плоский конденсатор довжиною L під кутом α, а вилітають під кутом β до пластини. Напруга на конденсаторі U, відстань між пластинами d. Знайти кінетичну енергію електронів на вході у конденсатор.

Розв'язання

Для визначення початкової кінетичної енергії електрона треба знайти величину його швидкості у момент вльоту у конденсатор.

Розташуємо конденсатор горизонтально і виберемо систему координат, як показано на *рисунку 2.8*.

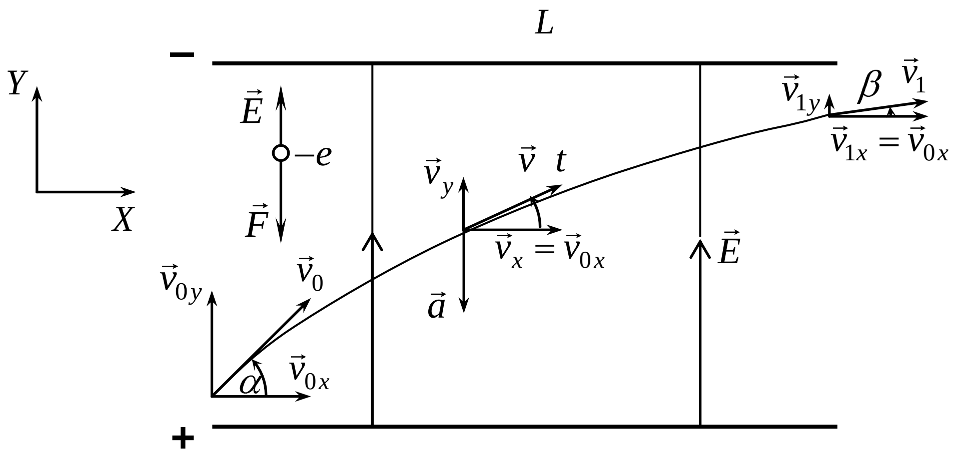


Рисунок 2.8 – Рух електрона у електричному полі зарядженого конденсатора

Якщо нижня пластина заряджена позитивно, а верхня – негативно, то між пластинами утвориться вертикальне однорідне електричне поле $\vec{E} = const$, направлене вгору. Сила $\vec{F}$, що діє на електрон у такому полі, у кожній точці траєкторії руху електрона буде напрямлена вертикально униз ($\vec{F} = q\vec{E}$, де $q = -e < 0$). У той же бік направлене і прискорення $\vec{a}$ руху електрона. Застосувавши 2-й закон Ньютона, знайдемо $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = -\dfrac{e\vec{E}}{m} = const$, m – маса електрона. Отже, прискорення стале за величиною і напрямом, тобто рух електрона – рівноприскорений. Зауважимо, що у даному випадку прискорення увесь час напрямлене вертикально униз, тому електрон рухатиметься по параболі, подібно тілу, кинутому у полі тяжіння Землі під кутом до її поверхні.

Позначимо швидкість електрона на вході у конденсатор $\vec{v}_0$, а після проходження конденсатора $\vec{v}_1$.

З кінематики відомо, що при рівноприскореному русі швидкість тіла змінюється з часом рівномірно:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \tag{2.8.1}$$

Переходячи у цьому рівнянні до проекцій на координатні осі X та Y, одержимо: $v_x(t) = v_{0x} + a_x t$ та, відповідно, $v_y(t) = v_{0y} + a_y t$. У нашому випадку $a_x = 0;\ a_y = -\frac{eE}{m}$. Тому замість векторного рівняння (2.8.1) отримаємо два скалярних рівняння:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x}; \\ v_y(t) = v_{0y} - \frac{eE}{m}t. \end{cases} \tag{2.8.2}$$

Перше з цих рівнянь свідчить про те, що швидкість руху електрона у горизонтальному напрямі (паралельно пластинам) не змінюється з часом і дорівнює горизонтальній проекції початкової швидкості

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha. \tag{2.8.3, а}$$

У той же час швидкість руху електрона вздовж вертикалі змінюється з часом:

$$v_y(t) = v_{0y} - \frac{eE}{m}t = v_0 \sin\alpha - \frac{eE}{m}t. \tag{2.8.3, б}$$

Відмітимо також, що обидва рухи – по горизонтальний і по вертикалі – не залежні один від одного, і тому, розв’язуючи задачу будемо розглядати їх окремо.

Далі позначимо час прольоту електрона через конденсатор τ. Цей час легко знайти, знаючи довжину пластин конденсатора L та горизонтальну швидкість руху:

$$\tau = \frac{L}{v_x} = \frac{L}{v_{0x}} = \frac{L}{v_0 \cos\alpha}.$$

Підставивши це значення у *формулу (2.8.3, б)*, знайдемо вертикальну складову швидкості електрона після проходження конденсатора:

$$v_y(\tau) = v_0 \sin\alpha - \frac{eE}{m}\tau = v_0 \sin\alpha - \frac{eEL}{m v_0 \cos\alpha}. \tag{2.8.4, а}$$

З іншого боку, цю проекцію можна виразити і через відомий кут β:

$$v_y(\tau) = v_{1x} \cdot tg\beta = v_{0x} \cdot tg\beta = v_0 \cos\alpha \cdot tg\beta. \tag{2.8.4, б}$$

Прирівнявши вирази (2.8.4, а) та (2.8.4, б), отримаємо рівняння:

$$v_0 \sin\alpha - \frac{eEL}{mv_0 \cos\alpha} = v_0 \cos\alpha \cdot tg\beta .$$

Переписавши його у вигляді

$$v_0 \;\; \sin\alpha - \cos\alpha \cdot tg\beta \;\; = \frac{eEL}{mv_0 \cos\alpha},$$

знаходимо

$$mv_0^2 = \frac{eEL}{\cos\alpha \;\; \sin\alpha - \cos\alpha \cdot tg\beta} .$$

Звідси знайдемо відповідь

$$K_0 = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{eEL}{2\cos\alpha \;\; \sin\alpha - \cos\alpha \cdot tg\beta} . \qquad (2.8.5, а)$$

Зауваження. Виконуючи обчислення за формулою (2.8.5) слід враховувати знак кута β. Якщо у момент вильоту з конденсатора електрон наближався до верхньої пластини, тобто вектор $\vec{v}_1$ був напрямлений «вправо і вгору», як показано на *рисунку 2.8*, то кут β в отриманій формулі вважається додатним $\beta > 0$ і вигляд формули не зміниться. Якщо ж електрон вилітає з конденсатора, віддаляючись від верхньої пластини, тобто вектор $\vec{v}_1$ напрямлений «вправо і вниз», то кут β в отриманій формулі слід вважати від'ємним $\beta < 0$, внаслідок чого $tg\beta$ як непарна функція змінить знак на протилежний, а формула буде мати вигляд

$$K_0 = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{eEL}{2\cos\alpha \;\; \sin\alpha + \cos\alpha \cdot tg\beta} . \qquad (2.8.5, б)$$

Це саме стосується і вибору знаку кута α.

Нарешті виразимо напруженість електричного поля E через напругу U між пластинами конденсатора та відстань d між пластинами, а саме $E = \frac{U}{d}$, і підставимо цей вираз в отримані формули (2.8.5, а, б):

$$K_0 = \frac{eUL}{2d\cos\alpha \;\; \sin\alpha \mp \cos\alpha \cdot tg\beta} .$$

Відповідь: $K_0 = \dfrac{eUL}{2d\cos\alpha \;\; \sin\alpha \mp \cos\alpha \cdot tg\beta}$.

2.9 Електричний струм. Закон Ома

У двохпровідній лінії довжини L на деякій відстані x від її початку AA' пробило ізоляцію, що призвело до появи деякого опору між проводами у цьому місці (*рисунок 2.9.1*). Для пошуку місця пробою провели три допоміжні вимірювання опорів:

а) опір між точками A та A' при розімкнутих кінцях B та B' дорівнював $\boldsymbol{R_1}$;

б) опір між точками A та A' при коротко замкнутих кінцях B та B' дорівнював R_2;

в) опір між точками B та B' при розімкнутих кінцях A та A' дорівнював R_3.

Знайти відстань x до місця пошкодження лінії.

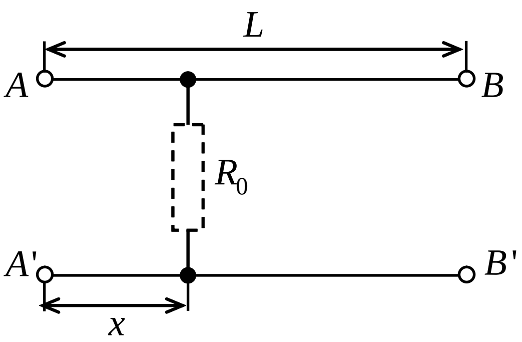


Рисунок 2.9.1 – Розрахунок відстані до місця пробою двохпровідної лінії

Розв'язання

Позначимо опір одиниці довжини одного проводу двохпровідної лінії ρ, а опір (невідомий), який утворився у місці пробою, – R_0.

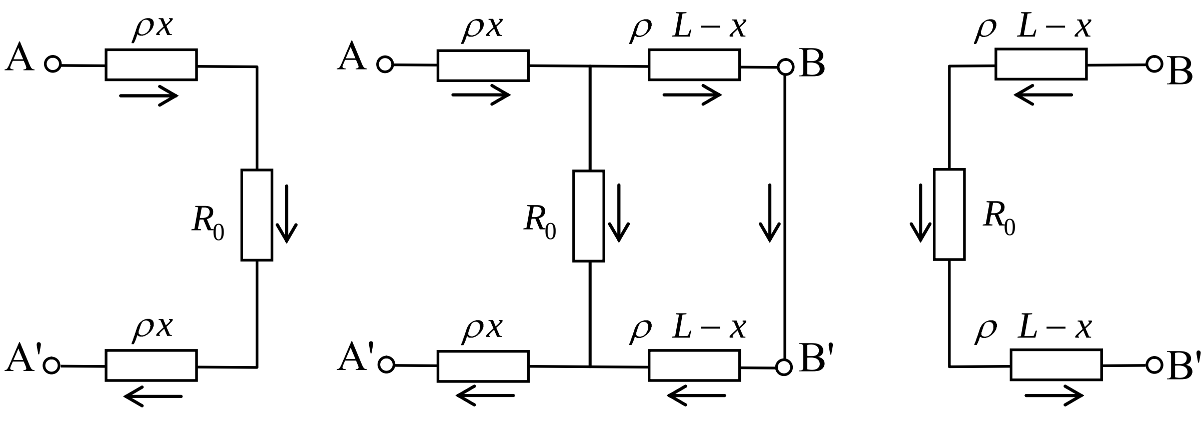
Складемо еквівалентні схеми відповідно до кожного з трьох допоміжних вимірювань (*рисунок 2.9.2*).

Відповідно до умови задачі та згідно з еквівалентними схемами, величини опорів, отримані у кожному з додаткових вимірянь, дорівнюють:

при першому вимірюванні за схемою а) $R_1 = 2\rho x + R_0$;

при другому вимірюванні за схемою б) $R_2 = 2\rho x + \dfrac{R_0 \cdot 2\rho(L-x)}{R_0 + 2\rho(L-x)}$;

при третьому вимірюванні за схемою в) $R_3 = 2\rho(L-x) + R_0$.



а) – перше вимірювання; б) – друге вимірювання; в) – третє вимірювання

Рисунок 2.9.2 – Еквівалентні схеми двохпровідної лінії при допоміжних вимірюваннях опорів

Розв'язавши таку систему рівнянь, отримаємо відповідь:

$$\textit{Відповідь}: \quad x = L\frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_3 - 2R_0}, \quad \text{де } R_0 = \sqrt{R_3(R_1 - R_2)}.$$

З а у в а ж е н н я . Для розв'язання вказаної системи рівнянь виразимо з *першого* рівняння величину $2\rho x = R_1 - R_0$, а з *третього* відповідно $2\rho\ \ L-x\ \ = R_3 - R_0$. Після підстановки цих величин у *друге* рівняння системи отримаємо $R_0 = \sqrt{R_3\ \ R_1 - R_2\ }$. Якщо ж знайти відношення цих величин, то після скорочення на 2ρ і нескладних алгебраїчних перетворень отримаємо відповідь.

2.10 Електричний струм. Закони постійного струму

Напруга на кінцях провідника зі сталим опором R рівномірно зростає протягом часу τ від U_1 до U_2. Знайти:

а) заряд q, який пройшов по провіднику;

б) кількість теплоти Q, що виділилась в провіднику за цей проміжок часу.

Розв'язання:

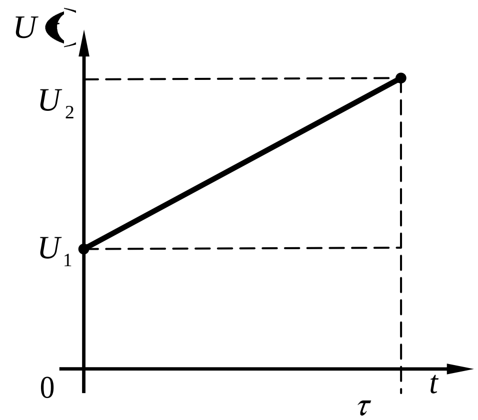


Рисунок 2.10 – Залежність від часу напруги на опорі

Спочатку з'ясуємо, за яким законом змінювалась напруга на кінцях провідника. Графік залежності $U = U\ \ t$ показано на *рисунку 2.10*. За умовою задачі напруга зростала рівномірно, тобто залежність $U = U\ \ t$ – лінійна:

$$U\ \ t\ \ = a + bt,$$

де a і b – деякі константи, $0 \le t \le \tau$.

Знаходимо значення цих констант. У початковий момент часу, при $t = 0$, маємо $U\ \ 0\ \ = a = U_1$, тоді залежність набуває вигляду:

$$U\ \ t\ \ = U_1 + bt.$$

В кінцевий момент часу, при $t = \tau$, $U\ \ \tau\ \ = U_2$, тобто $U_1 + b\tau = U_2$, звідки:

$$b = \frac{U_2 - U_1}{\tau}.$$

Отже, уточнена залежність миттєвої напруги $U\ \ t$ на опорі має вигляд:

$$U\ \ t\ \ = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{\tau} t.$$

Миттєву силу струму в опорі у момент часу t знайдемо за законом Ома:

$$I\ \ t\ \ = \frac{U\ \ t}{R} = \frac{1}{R}\left(U_1 + \frac{U_2 - U_1}{\tau} t\right).$$

Відповідаємо на запитання задачі.

А) Сила струму в опорі дорівнює заряду, який проходить по опору за одиницю часу:

$$I\;\;t\;\;=\frac{dq}{dt}.$$

В цій формулі dq − це заряд, який пройде через опір за малий проміжок часу dt від моменту t до моменту $t+dt$. Таким чином:

$$dq=I\;\;t\;\;dt.$$

Повний заряд q, що пройде по колу за проміжок часу від $t=0$ до $t=\tau$, дорівнює сумі всіх зарядів dq, які пройшли по колу за кожний з елементарних проміжків dt:

$$q=\int dq=\int_0^{\tau} I\;\;t\;\;dt=\frac{1}{R}\cdot\int_0^{\tau}\left(U_1+\frac{U_2+U_1}{\tau}t\right)dt=$$

$$=\frac{\tau}{R\;\;U_2-U_1}\int_0^{\tau}\left(U_1+\frac{U_2-U_1}{\tau}t\right)\;d\left(U_1+\frac{U_2-U_1}{\tau}t\right)=$$

$$=\frac{\tau}{R\;\;U_2-U_1}\cdot\frac{1}{2}\left(U_1+\frac{U_2-U_1}{\tau}t\right)^2\Bigg|_0^{\tau}=\frac{\tau}{2R\cdot\;\;U_2-U_1}\;\;U_2^2-U_1^2\;\;=\frac{U_2+U_1}{2R}\cdot\tau.$$

Б) Кількість теплоти Q, що виділяється на опорі протягом dt, пов'язана з миттєвим значенням теплової потужності *P(t)* на опорі співвідношенням $P\;\;t\;\;=\frac{dQ}{dt}$. З іншого боку, за законом Джоуля − Ленца, $P\;\;t\;\;=I^2\;\;t\;\;R$. Звідси $\frac{dQ}{dt}=I^2\;\;t\;\;R$. Далі, враховуючи, що $dQ=I^2\;\;t\;\;\cdot Rdt=\frac{1}{R}\left(U_1+\frac{U_2-U_1}{\tau}t\right)^2dt$, отримаємо:

$$Q=\int dQ=\frac{1}{R}\int_0^{\tau}\left(U_1+\frac{U_2-U_1}{\tau}t\right)^2dt=\frac{\tau}{R\;\;U_2-U_1}\int_0^{\tau}\left(U_1+\frac{U_2-U_1}{\tau}t\right)^2d\left(U_1+\frac{U_2-U_1}{\tau}t\right)=$$

$$=\frac{\tau}{R\;\;U_2-U_1}\cdot\frac{1}{3}\left(U_1+\frac{U_2-U_1}{\tau}t\right)^3\Bigg|_0^{\tau}=\frac{\tau}{3R\;\;U_2-U_1}\;\;U_2^3-U_1^3\;\;=\frac{\tau\cdot\;\;U_1^2+U_1U_2+U_2^2}{3R}.$$

Відповідь: а) $q=\frac{U_1+U_2}{2R}\cdot\tau$; *б)* $Q=\frac{U_1^2+U_1U_2+U_2^2\;\;\cdot\tau}{3R}$.

2.11 Електричний струм. Закон Джоуля – Ленца

Яка кількість теплоти Q виділиться в нагрівачі з опором R при проходженні через нього заряду q, якщо струм в нагрівачі:

а) рівномірно зменшувався до нуля протягом часу Δt;

б) монотонно зменшувався до нуля так, що за кожні Δt секунд він зменшувався удвічі.

Розв'язання:

А) Сила струму зв'язана із зарядом співвідношенням $I(t)=\dfrac{dq}{dt}$.

За умовою задачі, струм в нагрівачі рівномірно зменшувався до нуля протягом часу Δt, тобто математично це можна записати так:

$$I(t)=\alpha(\Delta t-t);\quad 0\le t\le\Delta t, \qquad (2.11.1)$$

де α − деякий постійний коефіцієнт, пов'язаний, очевидно, з зарядом q, що пройшов по колу. Щоб знайти значення цього коефіцієнта, проведемо інтегрування залежності (2.11.1) по часу, тобто виразимо величину заряду q через α:

$$q=\int_0^{\Delta t} Idt=\int_0^{\Delta t}\alpha(\Delta t-t)dt=\left.\left(\alpha\Delta t\cdot t-\frac{\alpha t^2}{2}\right)\right|_0^{\Delta t}=\frac{\alpha\Delta t^2}{2}, \text{ звідки } \quad \alpha=\frac{2q}{\Delta t^2}.$$

Підставивши отримане значення α у *формулу (2.11.1),* отримаємо

$$I(t)=\alpha(\Delta t-t)=\frac{2q}{\Delta t^2}(\Delta t-t)=\frac{2q}{\Delta t}\left(1-\frac{t}{\Delta t}\right).$$

Щоб знайти кількість теплоти, яка виділиться в нагрівачі опором R, скористаємось законом Джоуля – Ленца. Згідно з законом, теплова потужність, що виділяється на опорі,

$$P(t)=\frac{dQ}{dt}=I^2(t)R,$$

де dQ – кількість теплоти, яка виділяється на опорі R протягом dt:

$$dQ=I^2Rdt.$$

Повну кількість теплоти, яка виділяється на опорі за проміжок часу $0\le t\le\Delta t$, знайдемо інтегруванням:

$$Q=\int_0^{\Delta t} I^2(t)Rdt=\frac{4q^2}{\Delta t^2}R\int_0^{\Delta t}\left(1-\frac{t}{\Delta t}\right)^2dt.$$

Виконавши інтегрування, отримаємо $Q=\dfrac{4q^2R}{3\Delta t}$.

Б) Задача розв'язується аналогічно. У цьому випадку залежність сили струму від часу запишемо у вигляді

$$I(t)=\alpha\cdot 2^{-\frac{t}{\Delta t}}, \quad \text{де } \alpha=const.$$

$$q=\int_0^{\infty}\alpha\cdot 2^{-\frac{t}{\Delta t}}dt=\left.-\frac{\alpha\Delta t}{\ln 2}\cdot 2^{-\frac{t}{\Delta t}}\right|_0^{\infty}=\frac{\alpha\Delta t}{\ln 2}\quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{q\cdot\ln 2}{\Delta t}.$$

$$Q=\int_0^{\infty} I^2Rdt=\int_0^{\infty}\frac{Rq^2\ln^2 2}{\Delta t^2}\cdot 2^{-\frac{2t}{\Delta t}}dt=\frac{Rq^2\ln^2 2}{\Delta t^2}\cdot\left(-\frac{\Delta t}{2\ln 2}\right)\cdot 2^{-\frac{2t}{\Delta t}}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{Rq^2}{\Delta t}\cdot\frac{\ln 2}{2}.$$

Відповідь: а) $Q=\dfrac{4q^2R}{3\Delta t}$; б) $Q=\dfrac{Rq^2}{\Delta t}\cdot\dfrac{\ln 2}{2}$.

2.12 Закон Біо – Савара – Лапласа. Магнітне поле лінійного струму

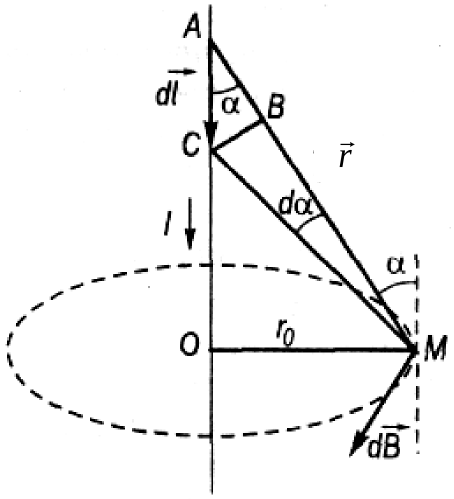


Рисунок 2.12.1 – Розрахунок магнітного поля прямолінійного струму

Користуючись законом Біо – Савара – Лапласа, обчислити індукцію магнітного поля, утвореного

а) ділянкою прямолінійного провідника;

б) нескінченно довгим прямолінійним провідником зі струмом I в точці M, розташованій на відстані r_0 від провідника (*рисунки 2.12.1* та *2.12.2*).

Розв'язання:

А) Щоб обчислити індукцію магнітного поля $\vec{B}$ в точці M на відстані r_0 від прямолінійного провідника зі струмом, поділимо його на нескінченно малі (елементарні) ділянки dl і знайдемо магнітну індукцію поля, створюваного цією ділянкою в точці M. За законом Біо – Савара – Лапласа

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^2},$$

або, у скалярній формі,

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}.$$

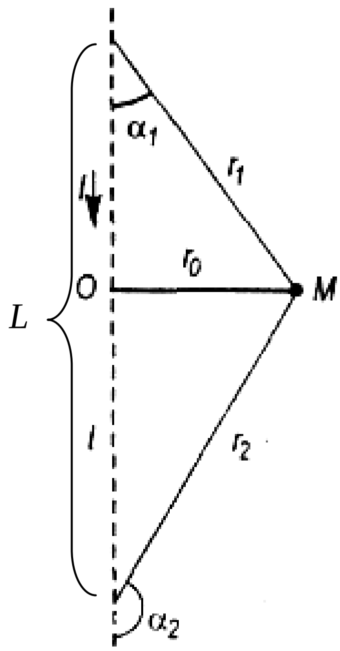


Рисунок 2.12.2 – Вибір меж інтегрування

У точці M напрями елементарних векторів $d\vec{B}$ від усіх ділянок $d\vec{l}$ однакові (направлені перпендикулярно до площини рисунка, до нас). Тому модуль векторної суми усіх $d\vec{B}$ дорівнюватиме сумі їх модулів dB, отже при інтегруванні можна користуватися безпосередньо скалярною формою закону Біо – Савара – Лапласа:

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_L\frac{Idl\sin\alpha}{r^2},$$

де інтегрування проводиться по усьому провіднику.

Перейдемо в інтегралі до однієї незалежної змінної – кута α. З *рисунка 2.12.1* маємо: $r = \dfrac{r_0}{\sin\alpha}$.

Відрізок BC замінимо елементом дуги радіуса r, яка опирається на нескінченно малий центральний кут $d\alpha$, а саме $BC = r \cdot d\alpha$. Тоді

$$dl = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{r d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{r_0 d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Підставивши значення r і dl в підінтегральну функцію, а також врахувавши межі інтегрування: від α_1 (початок) до α_2 (кінець ділянки провідника) в напрямку струму (*рисунок 2.12.2*), одержимо:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha .$$

Після інтегрування отримаємо

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\ \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\ \ .$$

Б) Для нескінченно довгого провідника $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to \pi$. За цих умов

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}.$$

Відповідь: а) $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\ \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\ $; б) $B_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$.

2.13 Закон Біо – Савара – Лапласа. Магнітне поле кругового струму

Користуючись законом Біо – Савара – Лапласа, обчислити індукцію магнітного поля кругового струму силою I і радіусом r_0:

а) у точці O', віддаленій уздовж осі Z від центра кола O на відстань h (*рисунок 2.13*);

б) у центрі кола.

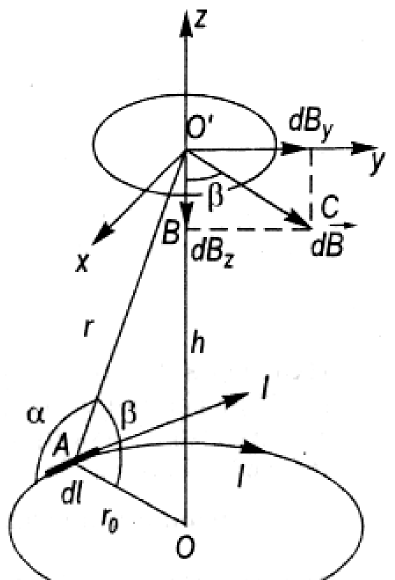


Рисунок 2.13 – Розрахунок магнітного поля на осі кругового струму

Розв'язання:

А) Як і у попередньому випадку, розіб'ємо провідник зі струмом на елементарні ділянки dl, одна з яких показана на рисунку. За законом Біо – Савара – Лапласа індукція елементарного магнітного поля dB в точці O', створювана такою ділянкою, буде дорівнювати:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}, \quad \text{де } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

З рисунка видно, що в точці O' вектори елементарних полів $d\vec{B}$ від різних ділянок кола не співпадають за напрямами, отже модуль суми цих векторів не буде дорівнювати сумі їх модулів. Дійсно, напрям вектора $d\vec{B}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $d\vec{l}$ та $\vec{r}$, тобто нахилений під деяким кутом β до осі Z. В той же час векторна сума $\vec{B}$ усіх векторів $d\vec{B}$ лежить на осі Z.

Для розв'язання задачі розкладемо вектор $d\vec{B}$ на складові: $d\vec{B}_Z$ – вздовж осі Z та $d\vec{B}_\perp$ – перпендикулярно Z (на рисунку одна з таких складових позначена $d\vec{B}_Y$). Очевидно, що при інтегруванні складові $d\vec{B}_\perp$ взаємно компенсуються і результуюче значення складової поля $\vec{B}_\perp = 0$. Одночасно складові, напрямлені вздовж Z, мають однакові напрями (однаковий знак проекцій на Z), тому їх проекції можна додати алгебраїчно. Отже

$$B = \int_C dB_Z,$$

де інтегрування проводиться вздовж усього кола.

З рисунка видно, що $dB_z = dB\cos\beta$.

З рівності кутів $\angle O'AO$ та $\angle B\ O'C$ (як кутів, сторони яких взаємно перпендикулярні: $d\vec{B} \perp \vec{r}$, $O'B \perp OA$) випливає подібність прямокутних трикутників AOO' та $O'BC$. З трикутника АОО′ маємо:

$$\cos\beta = \frac{r_0}{r} = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + h^2}}, \quad \text{тоді}$$

$$B_Z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r_0^2 + h^2}\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + h^2}}\int_0^{2\pi r_0} dl = \frac{\mu_0 I r_0^2}{2\left(r_0^2 + h^2\right)^{3/2}}.$$

Б) Індукцію магнітного поля в центрі кругового струму B_0 знайдемо, підставивши в отриманий результат значення $h = 0$:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2r_0}.$$

Відповідь: а) $B_Z = \dfrac{\mu_0 I r_0^2}{2\left(r_0^2 + h^2\right)^{3/2}}$; б) $B_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2r_0}$.

2.14 Взаємозв'язок магнітного та електричного полів

Вздовж мідного прямого провідника круглого перерізу радіусом $R = 5\ мм$ тече струм $I = 50\ А$. Знайти різницю потенціалів між віссю провідника та його поверхнею. Концентрація електронів провідності у міді $n = 0{,}9 \cdot 10^{23}\ см^{-3}$.

Розв'язання

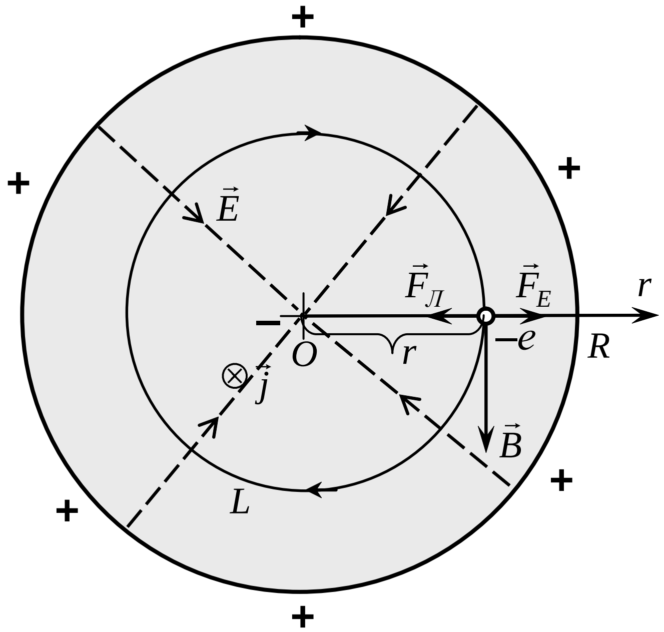


Рисунок 2.14 – Магнітне та електричне поля всередині провідника зі струмом

З'ясуємо причину виникнення різниці потенціалів між віссю провідника та його поверхнею. На *рисунку 2.14* зображено поперечний переріз провідника зі струмом. Напрям струму у провіднику показаний за допомогою вектора густини струму $\vec{j}$ – перпендикулярно до площини рисунку, від нас. При протіканні такого струму всередині провідника утворюється магнітне поле. Перш за все звернімо увагу на те, що струм розподілений рівномірно по площині перерізу провідника $\vec{j} = const$, тобто симетрично відносно осі трубки. Отже і магнітне поле буде симетричне відносно осі. Це означає, що величина індукції магнітного поля $B\ r$ на певній відстані r від осі буде однаковою незалежно від напряму на точку спостереження. З цього, у свою чергу, випливає, що силові лінії магнітного поля будуть мати вигляд концентричних кіл, центри яких розташовані на осі трубки. Напрям силових ліній пов'язаний з напрямом струму (напрямом вектора $\vec{j}$) «правилом свердлика».

На кожний електрон провідності, який рухається у магнітному полі, діятиме сила Лоренца, напрям якої встановлюємо за формулою $\vec{F}_Л = q\left[\vec{v}\vec{B}\right]$. Визначаючи напрям сили Лоренца за допомогою цієї формули слід врахувати знак заряду. У нашому випадку заряд електрона – від'ємний $q = -e$, з чого випливає:

а) напрям руху вільних електронів у провіднику протилежний напряму вектора $\vec{j}$ $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{j}$;

б) напрям сили Лоренца протилежний напряму векторного добутку $\left[\vec{v}\vec{B}\right]$.

Отже, на кожний електрон у провіднику буде діяти сила Лоренца, напрямлена до осі провідника. Під дією цих сил електрони повинні дещо зміститися ближче до осі провідника (віддалитися від його поверхні), продовжуючи свій рух вздовж провідника. В результаті поблизу поверхні провідника концентрація вільних електронів зменшиться і утвориться частково некомпенсований додатний заряд іонної решітки металу, а поблизу осі навпаки – концентрація електронів зросте і утвориться надлишковий негативний заряд. Таким чином під дією сили Лоренца різнойменні електричні заряди всередині провідника частково розділиляться у просторі: «мінус» – на осі, «плюс» – на поверхні провідника (рисунок).

Поява розділених у просторі різнойменних електричних зарядів призведе до виникнення електричного поля $\vec{E}$ всередині провідника у напрямі від поверхні до осі уздовж радіуса провідника (на рисунку силові лінії поля $\vec{E}$ показані штриховими стрілками). Це поле також буде діяти на електрони з силою $\vec{F}_E = q\vec{E}$. При визначенні напряму дії сили $\vec{F}_E$ (*рисунок 2.14*) треба знов урахувати знак заряду $q = -e$. З *рисунка 2.14* видно, що на кожний вільний електрон у провіднику будуть діяти дві протилежно направлені сили: $\vec{F}_Л$ та $\vec{F}_E$, які після досягнення рівноваги у розподілі зарядів зрівняються між собою по величині: $F_Л = F_E$.

Розписуючи умову рівноваги $F_Л = F_E$, отримаємо $qvB = qE$, або

$$vB = E. \qquad (2.14.1)$$

Оберемо на відстані r від осі $0 \le r \le R$ точку і знайдемо величину магнітної індукції $B\ r$ у цій точці, скориставшись теоремою про циркуляцію вектора $\vec{B}$ у інтегральній формі:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_L} \vec{j}d\vec{S}, \qquad (2.14.2,\ а)$$

де інтеграл у правій частині береться по поверхні S_L, обмеженій замкнутою кривою L, по якій обчислюється циркуляція. Якщо при обчисленні циркуляції рухатися по шляху L, який співпадає з силовою лінією поля $\vec{B}$, тобто по колу радіуса r (*рисунок*), то, врахувавши напрямки векторів $\vec{B}$, $d\vec{l}$, $\vec{j}$ та $d\vec{S}$, *формулу* (*2.14.2, а*) можна записати у спрощеному вигляді:

$$\oint_L Bdl = \mu_0 \int_{S_L} jdS, \qquad (2.14.2,\ б)$$

або, виносячи за знаки інтегралів сталі множники B та j,

$$B\oint_L dl = \mu_0 j \int_{S_L} dS, \qquad (2.14.2,\ в)$$

де $\oint_L dl = 2\pi r$ – довжина шляху інтегрування, а $\int_{S_L} dS = \pi r^2$ – площа круга, який охоплює шлях інтегрування L. Після підстановки таких величин у формулу (*2.14.2, в*) одержимо

$$B(r)\cdot 2\pi r=\mu_0 j\cdot \pi r^2,$$

звідки

$$B(r)=\frac{\mu_0 j}{2}r. \qquad (2.14.3)$$

Підставивши цей вираз у формулу (2.14.1), отримаємо

$$E(r)=v\frac{\mu_0 j}{2}r. \qquad (2.14.4)$$

З електронної теорії провідності відомо, що густина струму j пов'язана з дрейфовою швидкістю вільних носіїв заряду v співвідношенням $j=qnv$, або, у нашому випадку

$$j=env,$$

де $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ $Кл$ – елементарний заряд, n – концентрація носіїв заряду у провіднику. Замінивши у формулі (*2.14.4*) швидкість дрейфу величиною $v=\dfrac{j}{en}$, знайдемо

$$E(r)=\frac{\mu_0 j^2}{2en}r. \qquad (2.14.5)$$

Формули (*2.14.3*) та (*2.14.5*) свідчать, що усередині провідника як магнітна індукція $B(r)$, так і напруженість електричного поля $E(r)$ збільшуються пропорційно відстані r до осі провідника.

Різницю потенціалів між віссю провідника $r=0$ та точками на поверхні провідника $r=R$ знаходимо інтегруванням виразу (*2.14.5*) у відповідних межах:

$$\varphi(0)-\varphi(R)=\int_0^R E_r(r)\,dr=-\frac{\mu_0 j^2}{2en}\int_0^R r\,dr=-\frac{\mu_0 j^2 R^2}{4en}.$$

Ми врахували, що проекція вектора $\vec{E}$ на напрям осі r від'ємна.

Нарешті, виразивши густину струму через силу струму та площу перерізу провідника: $j=\dfrac{I}{\pi R^2}$, одержимо остаточну відповідь:

$$\varphi(0)-\varphi(R)=-\frac{\mu_0 j^2 R^2}{4en}=-\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2 en}.$$

Р о з р а х у н о к :

$$\varphi(0)-\varphi(R)=-\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2 en}=-\frac{4\pi\cdot 10^{-7}(50)^2}{4\pi^2(5\cdot 10^{-3})^2 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}9\cdot 10^{29}}=-2\cdot 10^{-12}\,В.$$

Відповідь: $\varphi(0)-\varphi(R)=-\dfrac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2 en}=-2\cdot 10^{-12}\,В.$

2.15 Магнітний момент

Заряд $q>0$ рівномірно розподілений по об’єму кулі радіуса R, яка обертається навколо осі, що проходить через її центр, з кутовою швидкістю ω. Знайти відповідний магнітний момент p_M кулі (*рисунок 2.15*).

Розв’язання

Будь-яку систему з розподіленим зарядом можна розглядати як систему точкових зарядів, умовно поділивши її на безліч нескінченно малих за розмірами фрагментів (об’ємів dV у тривимірному зарядженому тілі, площадок dS на зарядженій поверхні або відрізків dl на зарядженій лінії). На кожному з таких фрагментів міститься нескінченно малий заряд dq, який надалі розглядається як точковий.

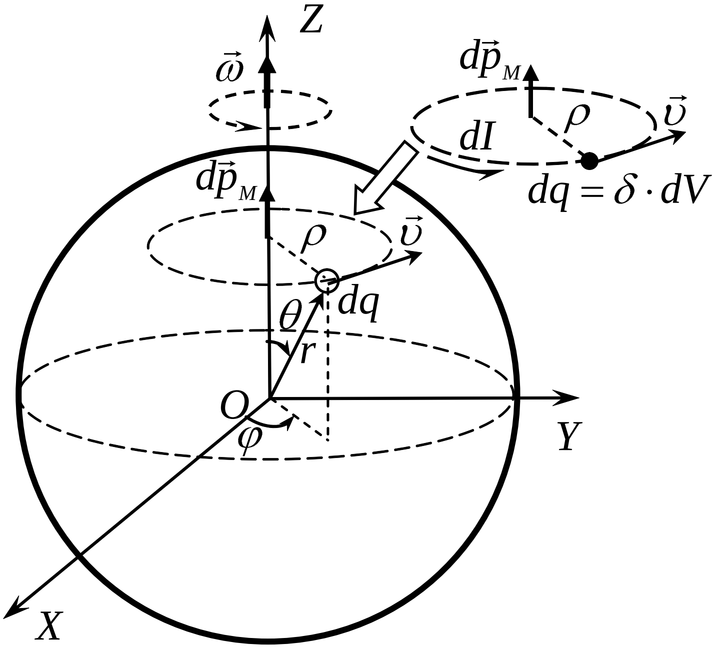


Рисунок 2.15 – До розрахунку магнітного моменту зарядженої кулі

Будемо розв’язувати задачу у сферичній системі координат. Розіб’ємо заряджену кулю на безліч нескінченно малих об’ємів і розглянемо один з них, позначивши його dV. Заряд, розміщений в межах цього елементарного об’єму $dq=\delta\cdot dV$, де δ – об’ємна густина заряду кулі. Цей заряд, обертаючись разом з кулею, рухається по колу радіуса ρ навколо осі Z і створює еквівалентний електричний струм величиною $dI=\dfrac{dq}{T}=\dfrac{\omega\cdot dq}{2\pi}$, де T – період обертання кулі навколо осі. Вектор магнітного моменту плоского витка зі струмом $\vec{p}_M=IS\cdot\vec{n}$, де I – сила струму у витку, S – площа витка; $\vec{n}$ – додатна одинична нормаль до площі витка, напрям якої пов'язаний з напрямом струму у витку «правилом свердлика» (*рисунок 2.15*).

Елементарний магнітний момент, який створює заряд dq, обертаючись навколо осі:

$$dp_M=dI\cdot S=\frac{\omega\cdot dq}{2\pi}\cdot\pi\rho^2=\frac{1}{2}\omega\cdot\rho^2\cdot\delta dV.$$

Виразимо величини в останньому співвідношенні через сферичні координати r,θ,φ, а саме: $\rho=r\sin\theta$; $dV=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$. Отримаємо $dp_M=\dfrac{1}{2}\delta\omega r^4\sin^3\theta drd\varphi d\theta$. Вектори усіх елементарних магнітних моментів мають однаковий напрям – вздовж осі Z. Тому інтегрування проводимо для модулів цих векторів по об’єму кулі:

$$p_M = \int\limits_V dp_M = \frac{1}{2}\delta\omega\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int\limits_0^R r^4 dr = \frac{1}{2}\delta\omega\cdot 2\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{R^5}{5} = \frac{4\pi}{15}\delta\omega R^5.$$

Врахувавши, що об’ємна густина заряду кулі $\delta = \dfrac{q}{V_{\text{Кулі}}} = \dfrac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, отримаємо відповідь.

Відповідь: $p_M = \dfrac{1}{5}qR^2\omega$.

2.16 Магнітний потік

Квадратна рамка зі стороною a і довгий прямий провідник зі струмом I знаходяться в одній площині, як показано на *рисунку 2.16*. Відстань від провідника до найближчої до нього сторони рамки дорівнює b. Знайти магнітний потік через рамку.

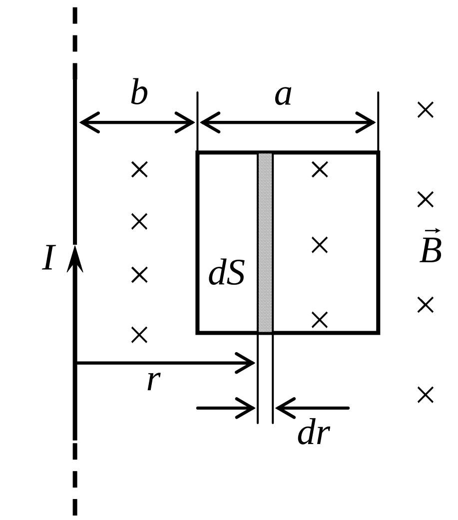


Рисунок 2.16 – Розрахунок магнітного потоку через квадратну рамку

Розв’язання

Будемо вважати провідник нескінченно довгим. Тоді індукція магнітного поля на відстані r від провідника (див. *приклад 2.12*)

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

тобто поле не буде однорідним, а буде зменшуватись зі зростанням r. При цьому лінії поля перетинають площину рамки під прямим кутом, від нас.

Оскільки магнітне поле в межах рамки змінюється за величиною, розіб’ємо площину, обмежену сторонами провідника на елементарні прямокутні площадки довжиною a і шириною dr, розташовані паралельно провіднику. На положення такої елементарної площадки відносно провідника буде вказувати змінна r, тоді ширину площадки dr можна розглядати як нескінченно малий приріст координати r (диференціал). Сама ж координата r в межах рамки змінюватиметься від $r = b$ до $r = b + a$. Площа такої малої площадки $dS = a\cdot dr$.

При такому виборі розташування елементарної площадки індукцію магнітного поля в межах dS можна вважати однаковою в усіх її точках. Тоді елементарний магнітний потік через dS буде

$$d\Phi = B_n dS = B(r)\,dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}a dr.$$

Для відповіді на запитання задачі обчислимо інтеграл

$$\Phi = \int\limits_S d\Phi = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int\limits_b^{b+a}\frac{dr}{r} = \\ = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\frac{a+b}{b} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{b}\right).$$

Відповідь: $\Phi = \dfrac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)$.

2.17 Електромагнітна індукція

Магнітний потік через нерухомий контур з опором R змінюється протягом проміжку часу τ за законом $\Phi(t) = at(\tau - t)$. Знайти, як змінюються при цьому у часі:

а) електрорушійна сила індукції $E_i(t)$;

б) сила струму у контурі $I(t)$;

в) теплова потужність на опорі $P(t)$;

г) кількість тепла Q, що виділилось у контурі протягом часу $0 \le t \le \tau$.

Побудувати графіки цих залежностей у спільному масштабі часу.

Індуктивністю контуру знехтувати.

Розв'язання

Аналізуючи умову задачі, бачимо, що магнітний потік змінюється за квадратичним законом, причому дорівнює нулю в початковий та кінцевий моменти часу. Це можливо, наприклад, коли індукція магнітного поля, яке перетинає площу контуру, буде змінюватись за аналогічною залежністю. Тобто контур знаходиться у імпульсному магнітному полі. Форма такого імпульсу показана на *рисунку 2.17, а*.

Відповідаємо на запитання задачі.

А) *ерс* індукції знаходимо за основним законом електромагнітної індукції (законом Фарадея):

$$E_i(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

Підставивши в цей закон задану умовою задачі залежність $\Phi(t)$, отримаємо

$$E_i(t) = 2at - a\tau.$$

Бачимо, що протягом проміжку часу від нуля до τ *ерс* індукції в контурі рівномірно зростає від значення $E_i(0) = -a\tau$ до значення $E_i(\tau) = +a\tau$ (*рисунок 2.17, б*). Зміна знаку *ерс* означає зміну напряму її дії на протилежний. Це відбувається в момент $t = \dfrac{\tau}{2}$.

Б) Сила струму в контурі у будь-який момент часу визначається законом Ома для замкнутого кола: $I(t) = \dfrac{E_i(t)}{R}$. Після підстановки даних отримаємо

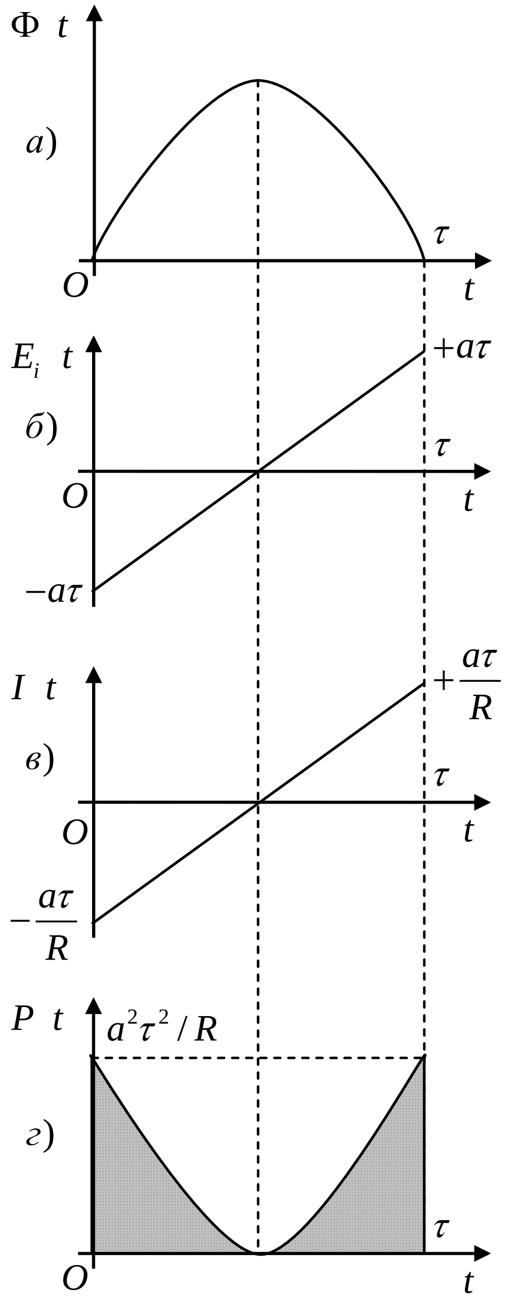


Рисунок 2.17 – Розрахунок кількості теплоти, що виділяється у контурі

$$I(t) = \frac{1}{R}(2at - a\tau).$$

Бачимо, що струм у контурі змінюється рівномірно, як і $E_i(t)$, від значення $I(0) = -\dfrac{a\tau}{R}$ до значення $I(\tau) = +\dfrac{a\tau}{R}$ (*рисунок 2.17, в*). У момент часу $t = \dfrac{\tau}{2}$ напрям струму в контурі також змінюється на протилежний. Отже, за час протікання струму величина заряду, який проходить по колу, дорівнює нулю.

В) Теплова потужність на опорі R змінюється у часі згідно з законом Джоуля – Ленца: $P(t) = I^2(t)R$. Підставивши в цей закон отриману раніше залежність $I(t)$, знайдемо

$$P(t) = \frac{(2at - a\tau)^2}{R}.$$

Бачимо (*рисунок 2.17, г*), що теплова потужність, яка виділяється у контурі $P(t)$ змінюється з часом за квадратичною залежністю, сягаючи максимальних значень у початковий та кінцевий моменти: $P(0) = P(\tau) = \dfrac{a^2\tau^2}{R}$, при цьому $P\left(\dfrac{\tau}{2}\right) = 0$. Відмітимо, що незважаючи на зміну напряму струму, теплова потужність на опорі продовжує виділятися, тобто вона не залежить від напряму струму, а лише від його величини.

Г) Для відповіді на останнє запитання скористаємось зв'язком між тепловою потужністю та кількістю теплоти, що виділяється на опорі: $P(t) = \dfrac{dQ}{dt}$. З цієї залежності витікає, що кількість теплоти, яка виділиться на опорі протягом малого проміжку часу від t до $t + dt$, становить $dQ = P(t)\,dt$.

Повну кількість теплоти, яка виділиться у колі за весь час протікання струму, знаходимо інтегруванням:

$$Q=\int dQ=\int_0^{\tau}P(t)\,dt=\frac{1}{R}\int_0^{\tau}(2at-a\tau)^2\,dt.$$

На графіку залежності $P(t)$ ця кількість теплоти чисельно дорівнює площі під кривою на *рисунку 2.17, г*.

Після інтегрування отримаємо

Відповідь: $Q=\dfrac{a^2\tau^3}{3R}$.

2.18 Закон електромагнітної індукції. Закон Джоуля – Ленца

Провідник EF рухається зі сталою швидкістю $\vec{v}$, замикаючи два провідника AC та AD, які утворюють між собою кут α (*рисунок 2.18*). Перпендикулярно до площини системи провідників прикладене постійне однорідне магнітне поле індукції $\vec{B}$. Знайти повну кількість теплоти, яка виділиться у колі за час руху провідника EF від точки A до точки C. Опір одиниці довжини провідника EF дорівнює R_0. Опором провідників AC та AD знехтувати. $AC=l_0$, $EF\perp AC$, $\vec{v}\perp EF$.

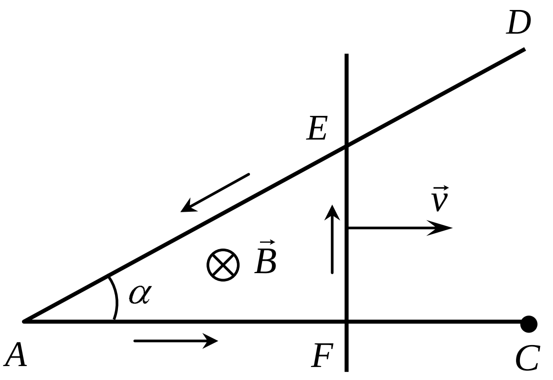


Рисунок 2.18 – Рух провідної перетики EF у однорідному магнітному полі

Розв'язання

Внаслідок руху перемички EF зростає площа замкнутого провідного кола AEF, а отже і магнітний потік $\Phi=BS_{AEF}$. При цьому у колі виникає індукційний струм, напрям якого можна визначити за правилом Ленца (показано на *рисунку 2.18*).

Площа контуру у момент часу t від початку руху перемички $S_{AEF}=\frac{1}{2}AF\cdot EF$, де $AF=vt$; $EF=AF\cdot tg\alpha=vt\cdot tg\alpha$. Отже $S_{AEF}=\frac{1}{2}v^2t^2\cdot tg\alpha$, а залежність магнітного потоку від часу буде мати вигляд

$$\Phi(t)=\frac{1}{2}Bv^2t^2\cdot tg\alpha.$$

За законом Фарадея при цьому у контурі виникає *ерс* індукції пропорційна швидкості зміни магнітного потоку через площину контуру.

$$E_i = \frac{d\Phi}{dt} = Bv^2 t \cdot tg\alpha .$$

Силу струму у контурі знайдемо за законом Ома для повного кола. При цьому врахуємо, що опір кола буде змінюватись з часом за залежністю

$$R\ t\ = R_0 \cdot EF = R_0 \cdot vt \cdot tg\alpha .$$

Отже

$$I\ t\ = \frac{E_i}{R_{EF}} = \frac{E_i}{R\ t} = \frac{Bv^2 t \cdot tg\alpha}{R_0 \cdot vt \cdot tg\alpha} = \frac{Bv}{R_0} .$$

Бачимо, що при переміщенні перемички у контурі протікає постійний струм. Теплову потужність, яка виділяється у колі (на опорі перемички) знайдемо за законом Джоуля – Ленца:

$$P\ t\ = I^2 R\ t\ = \left(\frac{Bv}{R_0}\right)^2 R_0 vt \cdot tg\alpha = \frac{B^2 v^3 tg\alpha}{R_0} t$$

Повна кількість теплоти, що виділиться у колі за час t_0 (час руху перемички від точки A до точки C) знайдемо інтегруванням потужності по часу:

$$Q = \int_0^{t_0} P\ t\ dt = \frac{B^2 v^3 tg\alpha}{R_0} \int_0^{t_0} t dt = \frac{B^2 v^3 tg\alpha}{2R_0} t_0^2 ,$$

де $t_0 = \frac{l}{v}$. Підставивши це значення у попередню формулу, отримаємо

$$Q = \frac{B^2 v^3 tg\alpha}{2R_0} t_0^2 = \frac{B^2 v^3 tg\alpha}{2R_0} \left(\frac{l}{v}\right)^2 = \frac{B^2 v l^2 tg\alpha}{2R_0} .$$

Відповідь: $Q = \dfrac{B^2 v l^2 tg\alpha}{2R_0}$.

2.19 Самоіндукція. Перехідний процес

Соленоїд з індуктивністю $L = 100\ мГн$ та опором $R = 20\ мОм$ підключають до джерела, внутрішній опір якого дуже малий. Який заряд пройде через соленоїд від моменту підключення $t = 0$ до моменту $t_0 = 5\ с$ після замикання кола?

Розв'язання

Після замикання соленоїда на *ерс* E_0 у колі виникає екстраструм замикання

$$I\ t\ = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right),$$

де $I_0 = \dfrac{E_0}{R}$ – сила струму у соленоїді після завершення перехідного процесу.

Для розрахунку заряду, який пройде через соленоїд, поділимо проміжок часу від $t=0$ до $t=t_0$ на такі короткі (нескінченно малі) інтервали dt, щоб протягом кожного такого відтинку часу силу струму можна було вважати наближено незмінною. Тоді елементарна кількість заряду dq, який пройде через соленоїд за цей проміжок dt,

$$dq = I\ \ t\ \ dt = \frac{E_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)dt\,.$$

Звідси після інтегрування по часу t у межах від 0 до t_0 знайдемо заряд, що пройшов через соленоїд:

$$q=\int_0^{t_0} I\ \ t\ \ dt = \frac{E_0}{R}\int_0^{t_0}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)dt = \frac{E_0}{R}\left(t+\frac{L}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right)\Bigg|_0^{t_0} = \frac{E_0}{R}\left(t_0+\frac{L}{R}e^{-\frac{R}{L}t_0}-\frac{L}{R}\right),$$

або

$$q=\frac{E_0}{R}\left[t_0-\frac{L}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t_0}\right)\right].$$

Виконавши розрахунки, знайдемо $q \approx 184\ Кл$.

Відповідь: $q=\dfrac{E_0}{R}\left[t_0-\dfrac{L}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t_0}\right)\right]\approx 184\ Кл$.

2.20 Застосування закону збереження енергії

У схемі (*рисунок 2.19*) ключ K замкнуто і режим кола стабілізувався. Яка кількість теплоти виділиться на опорі $5R$ після розмикання ключа? Внутрішнім опором джерела *ерс* та випромінюванням електромагнітної енергії знехтувати.

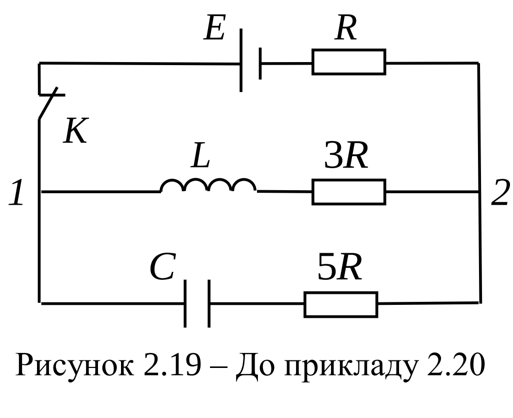


Рисунок 2.19 – До прикладу 2.20

Розв'язання

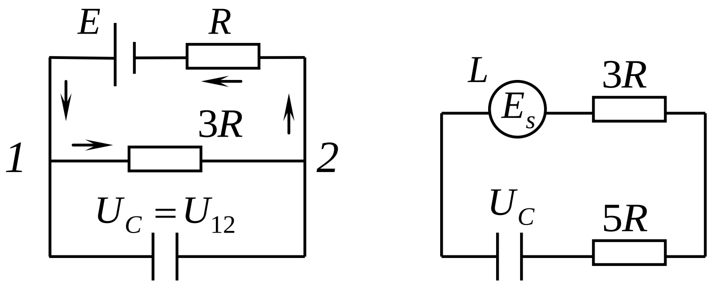
Для розв'язання задачі застосуємо «енергетичний» підхід, тобто будемо виходити з того, що загальна кількість теплоти

$Q_{заг}$, яка виділиться у колі після розмикання ключа, дорівнює сумарній енергії магнітного поля котушки зі струмом та електричного поля зарядженого конденсатора до розмикання ключа.

Проаналізуємо роботу схеми до і після розмикання ключа.

До розмикання ключа (у вихідному стані) у колі діє постійна *ерс* ($E = const$), сили струмів та напруги на різних ділянках кола не змінюються з часом, і схему слід розглядати як коло постійного струму. За таких умов конденсатор буде заряджений до певної (сталої) напруги, і струм через нього дорівнює нулю. З цього випливає, що сила струму і, відповідно, спад напруги на опорі $5R$ також дорівнюють нулю, а напруга на конденсаторі $U_C = U_{12}$, де U_{12} – різниця потенціалів між вузлами *1* та *2*.

Відсутність струму у вітці з конденсатором означає також, що струм існує лише у послідовному колі $E - K - L - 3R - R - E$ і на усіх ділянках цього кола однаковий. При протіканні постійного струму через індуктивність L *ерс* самоіндукції у котушці не виникає, спад напруги на котушці дорівнює нулю, отже котушка не впливає на силу струму у колі до розмикання ключа. Еквівалентна схема кола до розмикання ключа показана на *рисунку 2.20, а*.



а) – до розмикання ключа

б) – після розмикання ключа

Рисунок 2.20 – Еквівалентні схеми кола до і після розмикання ключа

Проте при проходженні струму по котушці у ній буде накопичена енергія магнітного поля $W_L = \frac{LI^2}{2}$. Силу струму у котушці (у колі) до розмикання ключа знайдемо за законом Ома для замкнутого кола:

$$I = \frac{E}{R + 3R} = \frac{E}{4R}. \qquad (2.20.1)$$

Отже початковий запас енергії котушки

$$W_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{LE^2}{32R^2}. \qquad (2.20.2)$$

Напруга на конденсаторі U_C дорівнює спаду напруги на опорі $3R$:

$$U_C = U_{12} = I \cdot 3R = \frac{E}{4R} \cdot 3R = \frac{3}{4}E.$$

Енергію зарядженого конденсатора знайдемо за формулою

$$W_C = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{1}{2}C\left(\frac{3}{4}E\right)^2 = \frac{9CE^2}{32}. \qquad (2.20.3)$$

Загальна енергія, зосереджена у котушці і конденсаторі до розмикання ключа

$$W = W_L + W_C = \frac{LE^2}{32R^2} + \frac{9CE^2}{32} = \frac{E^2}{32R^2}\;\; L + 9CR^2 \;\; . \qquad (2.20.4)$$

П і с л я р о з м и к а н н я к л ю ч а, згідно з законом збереження енергії, уся енергія, накопичена у котушці і конденсаторі, виділиться у вигляді теплоти на опорах зі струмом. Тобто загальна кількість теплоти, що виділиться на опорах після розмикання ключа, виражається *формулою 2.20.4*:

$$Q_{заг} = W_L + W_C = \frac{E^2}{32R^2}\;\; L + 9CR^2 \;\; . \qquad (2.20.5)$$

Після розмикання ключа (після відключення джерела *ерс* E) сила струму у новому колі починає змінюватись, прямуючи поступово до нуля. На цьому етапі струм у колі підтримується за рахунок дії *ерс* самоіндукції котушки E_s,а також напруги на конденсаторі, яка поступово спадає внаслідок розряду конденсатора. За таких умов залежність сили струму у колі від часу досить складна, а вигляд цієї залежності (затухаючі коливання або аперіодичний процес) визначається параметрами кола: L, C, R. Проте знайти кількість теплоти, яка виділиться на кожному з опорів після розмикання ключа, можна і не з'ясовуючи, як саме змінювався струм у колі. На *рисунку 2.20, б* зображена еквівалентна схема кола після розмикання ключа, з якої видно, що у будь-який момент часу сила струму у опорах $3R$ та $5R$ однакова (послідовне з'єднання). А згідно із законом Джоуля – Ленца $dQ = I^2R \cdot dt$ при однакових струмах кількість теплоти, що виділяється за певний час на різних опорах, прямо пропорційна величинам опорів. Тому для визначення тепловиділення на опорі $5R$ достатньо поділити загальну кількість теплоти $Q_{заг}$ (*формула* 2.20.5) пропорційно відповідним опорам, тобто скласти пропорцію:

$$\mathrm{Q}_{заг} \;\rightarrow\; 3R + 5R\;;$$

$$Q_{5R} \;\rightarrow\; 5R.$$

Розв'язавши пропорцію, одержимо

$$Q_{5R} = \frac{5}{8} Q_{\text{заг}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{E^2}{32R^2} \; L + 9CR^2 \; = \frac{5E^2}{256R^2} \; L + 9CR^2 \; .$$

Відповідь: $Q_{5R} = \dfrac{5E^2}{256R^2} \; L + 9CR^2 \; .$

3. Завдання для самоконтролю

Вектор напруженості електричного поля змінюється за залежністю $\vec{E}(x,y)=\vec{i}\cdot ax^2y+\vec{j}\cdot\dfrac{ax^3}{3}$. Знайти потенціал $\varphi(x,y)$ поля.

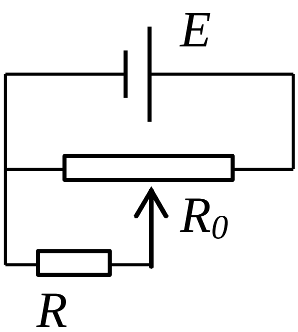
Відповідь: $\varphi\ x,y\ =\dfrac{ax^3y}{3}+C$.

Електрон влітає у однорідне електричне поле напруженістю $\vec{E}$ з початковою швидкістю v_0, яка утворює з напрямом поля гострий кут α. Знайти найменше значення $v_{\min}$, яке приймає швидкість електрона під час його руху у полі, а також радіус кривизни R траєкторії у момент, коли $v=v_{\min}$

Відповідь: $v_{\min}=v_0\sin\alpha;\quad R=\dfrac{mv_0^2\sin^2\alpha}{eE}$.

Для деякого опору не виконується закон Ома, і залежність сили струму (у амперах) від прикладеної до опору напруги (у вольтах) має вигляд $I = 0{,}004\ V^4$. Цей опір встановлено у плече мосту Уітстона, решта опорів якого однакові і дорівнюють *16 Ом.* Міст живиться зовнішньою батареєю. Визначити струм джерела для збалансованого мосту.

Відповідь: 312,5 мА



Знайти напругу на опорі *R*, коли рухомий контакт реостата встановлено посередині потенціометра R_0.

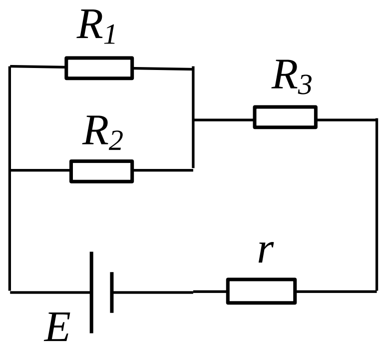
Відповідь: $U=\dfrac{2ER}{R_0+4R}$.

Два опори $R_1=100$ *Ом* та $R_2=200$ *Ом* з'єднані послідовно і підключені до джерела живлення, *ерс* якого $E=100\ B$, а внутрішній опір дорівнює нулю. Вольтметр опором $R_V=200$ *Ом* підключають почергово до опору R_1 і R_2. Знайти:

а) покази вольтметра у кожному випадку;

б) напруги на опорах до початку вимірювань.

Відповідь: а) $V_1 = 25\ B;\ V_2 = 50\ B$; б) $V_1 = 33{,}3\ B;\ V_2 = 66{,}7\ B$.

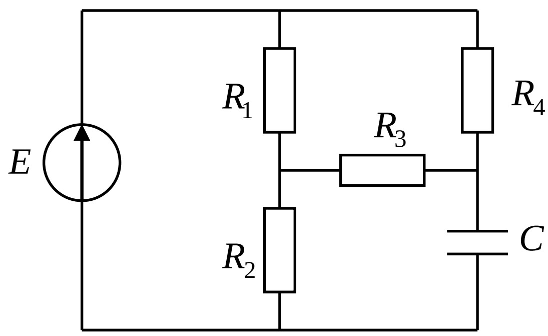


Знайти сили струмів в усіх опорах.

R_1 = 2 Ом; R_2 = 4 Ом; R_3 = 1 Ом;
E = 2 В; r = 1 Ом.

Відповідь: I_1 = 0,4 А; I_2 = 0,2 А; I_3 = 0,6 А.

Конденсатор ємністю C та чотири резистори, опори яких однакові і дорівнюють R, включені у електричне коло, як показано на рисунку. Знайти заряд, накопичений на конденсаторі. Електрорушійна сила джерела дорівнює E.



П і д к а з к а. Напруга на конденсаторі дорівнює сумі спадів напруг на опорах R_2 та R_3. Для визначення спадів напруг U_2 та U_3 треба знайти сили струмів I_2 та I_3 у резисторах. А для визначення струмів доцільно розглянути еквівалентну схему кола, вилучивши вітку з конденсатором (постійний струм через конденсатор не тече, оскільки для постійного струму конденсатор являє собою розрив кола).

Відповідь: $q = \frac{4}{5}CE$.

Металічний диск радіуса $R = 25\,см$ обертають с постійною кутовою швидкістю $\omega = 130\,рад/с$ навколо його осі. Знайти різницю потенціалів між центром та ободом диску, якщо

а) зовнішнє магнітне поле відсутнє;
б) існує перпендикулярне до площини диску зовнішнє магнітне поле з індукцією $B = 5\,мТл$.

Порівняти результати.

Відповідь: а) $\Delta\varphi = \dfrac{\omega^2 R^2 m}{2e} = 3\cdot 10^{-9}\,В$,

e та m – заряд та маса електрона;

б) $\Delta\varphi = \dfrac{\varpi B R^2}{2} = 20\cdot 10^{-3}\ В$.

Рекомендована література

1. ДСТУ 3008-95 (Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення).
2. Бабаджан Е.И., Гердвис В.И., Дубовик В.М., Нерсесов Э.А. Сборник качественных вопросов и задач по общей физике. – М.: Наука, 1990. – 400 с.
3. Беликов Б.С. Решение задач по физике. Общие методы. – М.: Высш. шк., 1986. – 256 с.
4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1979. – 352 с.
5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1975. – 872 с.
6. Загальний курс фізики: Збірник задач / За заг. редакцією І.П. Гаркуші. – К.: Техніка, 2003. – 560 с.
7. Зачек І.Р., Кравчук І.М., та ін. Курс фізики: навчальний підручник. – Львів: «Бескид Біт», 2002. – 376 с.
8. Інтегрування в фізиці. Частина І. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт та підготовки до практичних занять з фізики для студентів денної та заочної форми навчання / Укладачі: Григоренко В.А., Єршов Р.Д., Журко В.П., Ушаков В.Г. – Чернігів: ЧДТУ, 2009. – 100 с.
9. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. – М.: Высш. шк., 1991. – 288 с.
10. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: Наука, 1979. – 368 с.
11. Калашников С.Г. Электричество. – М.: Наука, 1985. – 576 с.
12. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики; Навч. посібник для студентів вищих техн. і пед. закладів освіти /За ред. І.М. Кучерука. – К.: Техніка, 1999. Т.2: Електрика і магнетизм. – 2001. – 452 с.
13. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: Высш. шк., 1983. – 463 с.
14. Орир Дж. Физика. – М.: Мир, 1981. – Т. 1, 2.
15. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1988. – Т.2. – Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – 496 с.
16. ФИЗИКА: задания к практическим занятиям. /Под ред. Ж.П. Лагутиной. – Мн.: Выш. шк., 1989. – 236 с.
17. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики. – М.: Высш. шк., 1977. – 352 с.
18. Чертов А.Г., Воробьёв А.А. Задачник по физике. – М.: Высш. шк., 1981. – 496 с.

Додаток А – Зразок оформлення титульної сторінки розрахункової роботи

Міністерство освіти і науки України
Чернігівський національний технологічний університет

Кафедра інформаційно-вимірювальних технологій,
метрології та фізики

Розрахунково-графічна робота з фізики

Розділ (назва розділу: механіка; електромагнетизм, …)

Варіант №….

Виконав: (підпис)
студент групи ……….. (дата) ………………
(№ групи) (Прізвище, ініціали студента)

Викладач: (підпис)
……………… (дата) ………………
(Прізвище, ініціали викладача)

Чернігів ЧНТУ