

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт з дисципліни
“Цифрова обробка сигналів та передача даних”
для студентів напряму підготовки
6.050102 “Комп’ютерна інженерія”

Затверджено
на засіданні кафедри
інформаційних та комп’ютерних систем

Протокол № 12 від «30» травня 2013 р.

Цифрова обробка сигналів. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни "Цифрова обробка сигналів та передача даних" для студентів напряму підготовки 6.050102 "Комп'ютерна інженерія" / Укл.: Зайцев С.В., Риндич Є.В., Нікітенко Є.В. – Чернігів: ЧДТУ, 2013. – 80 с.

Укладачі: ЗАЙЦЕВ СЕРГІЙ ВАСИЛЬОВИЧ, кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних та комп'ютерних систем

РИНДИЧ ЄВГЕН ВОЛОДИМИРОВИЧ, кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних та комп'ютерних систем

НІКІТЕНКО ЄВГЕНІЙ ВАСИЛЬОВИЧ, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних та комп'ютерних систем

Відповідальний за випуск: КАЗИМИР ВОЛОДИМИР ВІКТОРОВИЧ, завідувач кафедри інформаційних та комп'ютерних систем, доктор технічних наук, професор

Рецензент: НЕСТЕРЕНКО СЕРГІЙ ОЛЕКСАНДРОВИЧ, кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних та комп'ютерних систем Чернігівського державного технологічного університету

ЗМІСТ

1	ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1. НАЙПРОСТІШІ АЛГОРИТМИ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ	5
1.1	Теоретичні відомості	5
1.1.2	Числові методи	15
1.2	Виконання роботи	19
1.2.1	Вихідні дані для виконання роботи	19
1.2.2	Порядок виконання лабораторної роботи	21
1.2.3	Вміст звіту до лабораторної роботи	22
1.3	Питання до захисту лабораторної роботи	22
1.4	Задачі	23
2	ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2. КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ СИГНАЛІВ	24
2.1	Теоретичні відомості	24
2.1.1	Кореляційний аналіз	24
2.1.2	Взаємна кореляційна функція	26
2.2	Виконання роботи	27
2.2.1	Вихідні данні до лабораторної роботи	27
2.2.2	Чисельне обчислення кореляційної функції	27
2.2.3	Порядок виконання лабораторної роботи	28
2.2.4	Вміст звіту до лабораторної роботи	28
2.3	Питання до захисту лабораторної роботи	29
3	ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3. СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИСКРЕТНОСТІ СИГНАЛІВ	30
3.1	Теоретичні відомості	30
3.1.1	Спектральний аналіз	30
3.1.2	Розкладання в ряд Фур'є	31
3.1.3	Вагові функції	34
3.1.4	Параметри вагових функцій	35
3.1.5	Алгоритм швидкого перетворення Фур'є	41
3.2	Виконання роботи	47
3.2.1	Вихідні дані до лабораторної роботи	47
3.2.2	Порядок виконання лабораторної роботи	48
3.2.3	Зауваження до виконання роботи	48
3.2.4	Зміст звіту лабораторної роботи	49
3.3	Питання до захисту лабораторної роботи	29
4	ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4. СИНТЕЗ НЕРЕКУРСИВНОГО ФІЛЬТРА І АНАЛІЗ ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИК	51
4.1.1	Призначення і типи фільтрів	51
4.1.2	Дискретні фільтри	53
4.1.3	Нерекурсивні фільтри	55
4.1.4	Симетричні нерекурсивні фільтри	57
4.1.5	Вибір коефіцієнтів фільтра Найпростіші згладжують фільтри	58
4.1.6	Синтез нерекурсивних цифрових фільтрів	59
4.1.7	Характеристика КИХ-фільтрів	59
4.1.8	Синтез КИХ-фільтрів з використанням рядів Фур'є	60
4.1.9	Методика синтезу КИХ-фільтрів з використанням рядів Фур'є	65
4.1.10	Методика синтезу КИХ-фільтрів з використанням частот вибірок	68
4.2	Виконання роботи	71
4.2.1	Вихідні дані до лабораторної роботи	71
4.2.2	Завдання до виконання лабораторної роботи	72
4.2.3	Порядок виконання лабораторної роботи	72
4.2.4	Зміст звіту до лабораторної роботи	72
4.3	Питання до захисту лабораторної роботи	73
5	САМОСТІЙНА РОБОТА	75

5.1	Зміст дисципліни	75
5.1.1	Методи математичного представлення сигналів і завад	75
5.1.2	Кореляційний аналіз детермінованих сигналів	75
5.1.3	Спектральний аналіз сигналів	75
5.1.4	Вузькосмугові сигнали	75
5.1.5	Призначення й типи фільтрів	75
5.1.6	Оптимальне приймання дискретних повідомлень	75
5.1.7	Методи підвищення завадостійкості каналів зв'язку	75
5.1.8	Розподіл обсягу самостійної роботи за видами робіт	76
5.2	Екзаменаційні питання	76
	РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	80

1 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

НАЙПРОСТІШІ АЛГОРИТМИ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

Мета роботи: дослідити найпростіші алгоритми цифрової обробки сигналів: згладжування, диференціювання, інтегрування та ін. Визначення абсолютного та відносного рівня сигналу, коефіцієнту форми та амплітуди.

1.1 Теоретичні відомості

1.1.1 Вимірювання фізичних величин, основні визначення й терміни

Амплітуда – максимальне значення синусоїдальної змінної величини. Амплітуда, наприклад, як найбільше з миттєвих значень величини синусоїдальної, позначається X_m .

Величина (фізична величина) – характеристика (якість) предмету, стану чи процесу, яка підлягає вимірюванню.

Кожна величина повинна якісно описуватися (тип, вид і т.д.) і кількісно визначатися (значення величини). Наприклад, метали можуть створювати опір електричному струму; мережі електропостачання характеризуються електричною напругою. Їх кількісні характеристики можуть бути виміряні. Тип фізичної величини, особливо в формулах, позначається літеральним символом, а значення величини як результат вимірювання позначається числовим значенням з одиницею вимірювання (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1 – Приклади величин

Фізична величина (ph magnitudes)	R=5,6 кОм U=220 В
Тип величини	Опір R Напруга U
Значення величини	5,6 кОм 220 В
Числове значення (value)	5600 220
Одиниця вимірювання (unit of measurements)	Ом В

Залежність піддослідних параметрів від часу характеризують головним чином сталою та періодичною величинами. Відношення двох однорідних величин оцінюють відносною величиною.

Величина відносна – фізична чи технічна величина, котра визначається через відношення двох величин.

Відношення двох однорідних величин представляє собою безрозмірну відносну величину, яка відрізняється, однак, від звичайного числа тим, що має ознаки та якості величини, наприклад коефіцієнт посилення, коефіцієнт корисної дії. Якщо в знаменнику стоїть вихідна (базова) величина, то назва відносної

величини часто має прикметник “приведена” або “нормована” (величина). Якщо відносна величина задана в виді логарифма, то говорять про логарифмічну відносну величину, наприклад, міра (одиниця) рівня. Відносна величина відхилення вихідного значення позначається переважно в наступних одиницях: відсоток ($1\%=10^{-2}$), проміле ($1\text{‰}=10^{-3}$) чи мільйонна частина ($1\text{ppm}=1\text{млн}^{-1}=10^{-6}$).

Величина змінна – динамічна величина, середнє значення котрої дорівнює нулю.

Змінна величина є величина коливальна (в основному з періодичною зміною в часі). Її середнє значення, визначене на великому інтервалі часу спостереження (значення постійне, постійна величина), дорівнює нулю. Інколи змішану величину розглядають як загальний випадок змінної величини, яка має ненульове середнє значення.

Величина періодична — динамічна величина, зміна миттєвого значення котрої має періодичний характер.

Періодичну величину в загальному випадку можливо математично описати рівністю $x(t) = x_0 + x_{\sim}(t)$, де t — час; n — будь-яке ціле число. Періодичну величину можливо представити в виді суми (статичної) постійної величини (постійної складової періодичної величини x_0) і (періодичної) змінної величини, змінної складової $x_{\sim}(t)$ (рис. 1.1): $x(t) = x_0 + x_{\sim}(t)$ (рисунок 1.1).

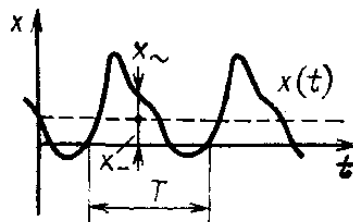


Рисунок 1.1 – Величина періодична

Величина постійна — постійний процес. Величина (або процес), миттєві значення котрої на протязі періоду спостереження не змінюють свій знак. Статична постійна величина має постійне в часі миттєве значення $x(t) = x_0 = const$ (наприклад, постійна напруга або постійний струм). Пульсуюча постійна величина характеризується зміною в часі миттєвого значення при незмінному знаку (наприклад, випрямлена змінна напруга, пульсуючий постійний струм). В загальному випадку постійна величина позначається додаванням до відповідного символу горизонтального штриха, наприклад, u_0, U_0 . В тих випадках, коли символ трактується однозначно і плутаниця виключається, допускається використання в якості позначення постійних величин великих літер без додаткових індексів (наприклад, J — змінний струм, I — постійний струм).

Величина проміжкова — проміжкове значення, більш широка трактовка. Величина, в котру перетворюється вимірювана або інша величина з метою подальшої обробки сигналу.

Величина проміжкова часто зустрічається в вимірювальній техніці. Особливо наглядно вона проявляється при електричному вимірюванні неелектричних величин. Так, наприклад, при вимірюванні температури за допомогою термометра опору і магнітоелектричного вимірювального механізму зміна

температури (вимірювана величина) перетворюють в зміну опору, напруги, струму (проміжкова величина).

Величина синусоїдальна — синусоїдальне коливання, попередня назва — гармонічне коливання. Змінна величина, миттєве значення котрої змінюється в часі по синусоїдальному закону.

Чисто синусоїдальну величину можна математично описати в загальному випадку рівнянням виду (1.1).

$$\begin{aligned} x(t) &= X_m \sin(\omega t + \varphi) \\ x(t) &= X_m \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (1.1)$$

де X_m — амплітуда синусоїдальної величини; ω — кругова частота і φ — (початковий) фазовий кут. Важливими параметрами є ефективне значення ($X_{\text{эф}}$, X_{RMS}), середньовипрямлене значення $|\bar{x}|$ і розмах коливань (X_{pp}).

Багатофазну синусоїдальну величину утворюють декілька однотипних синусоїд однакової частоти з різними амплітудами й початковими фазовими кутами. Величину, схожу на синусоїдальну, але в якій змінюються амплітуда, кругова частота та початковий фазовий кут, називають квазісинусоїдальною. До них відносяться, наприклад, пульсуючі величини, модульовані синусоїди, експоненціально наростаючі або спадаючі синусоїди.

Величина змішана — динамічна величина, миттєве значення котрої змінюється в часі як по розміру, так і по знаку (напрямку).

Змішана величина є звичайною змінною величиною. Її середнє значення за час спостереження, інакше кажучи, постійне значення відмінне від нуля. На цю постійну складову накладено змінне коливання.

Відношення ефективного значення змінної складової $X_{\text{эф}}$ до постійної складової змішаної величини \bar{x}_- називають пульсацією ϖ , або коефіцієнтом пульсацій k_{ϖ} (1.2).

$$k_{\varpi} = X_{\text{эф}} / \bar{x}_- \quad (1.2)$$

В електротехніці періодично змінні в часі напруги й струми, які мають постійну складову, а також постійні напруга (струм) з накладеними коливаннями називають змішаними напругами або струмами.

Величина числова — фізична величина, яка вимірюється шляхом ліку та служить для кількісної характеристики множин. При цьому визначається кількість одиниць, які належать даній множині. Ознакою числової величини в словосполученнях є слово “число” (“кількість”), наприклад, число обертів, число (кількість) подій, число (кількість) витків.

Час наростання — різниця між двома моментами часу, в яких імпульсна величина приймає наперед задані миттєві значення.

Коли форма імпульса спеціально не регламентується, то часом наростання T_r називають час між значеннями 10 і 90% амплітуди на наростаючій ділянці. Час спаду T_f аналогічно на спадаючій ділянці.

Градаційна характеристика — закон розміщення градаційних відміток на аналоговій шкалі.

В залежності від значення кожної поділки шкали розрізняють градацію, кратну 1, 2 і 5.

При градуванні з основою 1 ціна поділки шкали дорівнює 1 або 1×10^n , де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, кожна 5-а, 10-а або 20-а відмітка шкали може мати чисельне значення. Якщо чисельне значення поділки шкали дорівнює, наприклад 0,2, 2, 20, то говорять про градацію з основою 2. При цьому кожна 5-а, 10-а або 20-а відмітка шкали повинна мати числове значення. Аналогічно при ціні поділки, кратній 5, говорять про градацію з основою 5, при чому кожна 4-а, 10-а или 20-а відмітки шкали мають чисельні значення. По відношенню до лінійності градаційної характеристики розрізняють лінійні і нелінійні шкали.

Тривалість імпульсу – інтервал часу, на протязі якого миттєве значення імпульсу суттєво відрізняється від нуля.

Тривалість імпульсу у кожному конкретному випадку може визначатися по-різному. Так, в якості тривалості імпульсу може бути вибраний інтервал часу, на протязі якого миттєве значення перевищує заданий або вибраний рівень (наприклад, 10% амплітудного значення). Якщо рівень складає 50% від амплітуди імпульсу, то говорять про тривалість імпульсу на рівні 0,5. Допускається регламентувати тривалість реального імпульсу через тривалість рівновеликого за площею або енергією прямокутного імпульсу з рівною амплітудою. Спосіб визначення повинен вказуватися разом з вимірним значенням.

Тривалість періоду (тривалість коливання) – найменший проміжок часу, після якого періодична величина, що змінюється, повторює свої значення. Великою, зворотною тривалості періоду, є частота.

Одиниця вимірів – встановлений угодою (міжнародною) певний розмір фізичної величини, який служить для порівняння значень фізичної величини.

Відповідно до міжнародної системи одиниць (СІ) одиниця виміру має чисельне значення 1, а приставки (мілі, мікро, кіло, мега-серія та ін.) служать для утворення дольних і кратних одиниць виміру. Позначення одиниці виміру характеризує суть фізичної величини, наприклад, символ «В» свідчить, що вимірюваною величиною є напруга (див. Позначення одиниць виміру). Відносні і рахункові величини мають спеціальні одиниці виміру.

Значення максимальне (найбільше значення) – найбільше значення, яке може приймати миттєве значення періодичної величини. Якщо спостерігається змінна величина синусоїдальної форми, то допускається максимальне значення позначати як амплітуду.

Значення миттєве – значення що змінюється в часі величиною в певний момент часу. Миттєве значення позначається маленькими буквами, наприклад. Аргумент t може бути опущений, якщо обозначення часової залежності маленькою буквою не має двозначного тлумачення, наприклад, u .

Значення найменше – найменше значення, яке може приймати миттєве значення періодичної величини. Зазвичай позначається X_{\min} .

Значення пікове – амплітудне значення, що має місце на протязі дуже короткого (в порівнянні з тривалістю періоду) інтервала часу.

Значення постійне (середнє арифметичне значення періодичної величини) – усереднене по часі середнє арифметичне значення періодичної величини на протязі одного періоду або інтервала спостереження для випадкової величини (1.3).

$$\bar{x} = x_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.3)$$

Для дискретних сигналів (1.4).

$$\bar{x} = x_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i) \quad (1.4)$$

де N – кількість вибірок сигналу,
 $x(i)$ – значення i -ї вибірки сигналу.

В постійних величин миттєве значення і постійне значення збігаються. Змішана величина має, відмінне від нуля постійне значення. В змінних величин постійне значення дорівнює нулю, наприклад, синусоїда. В цьому випадку говорять про середнєвипрямлене значення.

Значення середнєвипрямлене – усереднене по часі середнє арифметичне абсолютного значення періодичної величини на протязі одного періоду або інтервала спостереження для випадкової величини (1.5).

$$|\bar{x}| = x_{cp\phi} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt \quad (1.5)$$

Для дискретних сигналів (1.6).

$$|\bar{x}| = x_{cp\phi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x(i)| \quad (1.6)$$

де N – кількість вибірок сигналу,
 $x(i)$ – значення i -ї вибірки сигналу.

Значення чисельне – число, що показує, як багато одиниць виміру міститься в спостережуваній величині. Значення чисельне, таке, що стоїть перед одиницею виміру, є складовою частиною значення величини. Воно є відношення вимірюваного значення і одиниці виміру і характеризує розмір (кількість) величини. Наприклад, напруга в електричній мережі (220*1В) має числове значення 220. В залежності від вибраної одиниці вимірювання чисельне значення може бути різним (наприклад, швидкість транспортного засобу 50,04 км/ч=13,9 м/с).

Значення ефективне. Ефективне (діюче) значення – середнє квадратичне значення періодичної величини на протязі одного періоду або інтервалу спостереження для випадкової величини (1.7).

$$\tilde{x} = x_{\phi} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [x(t)]^2 dt} \quad (1.7)$$

Для дискретних сигналів (1.8)

$$\tilde{x} = x_{\phi} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x(i)]^2} \quad (1.8)$$

де N – кількість вибірок сигналу,
 $x(i)$ – значення i -ї вибірки сигналу.

Ефективне значення змінної в часі величини викликає за час спостереження такий же ефект (наприклад, теплова дія струму або величина обертаючого моменту), як значення постійної величини (таблиця 1.2).

Таблиця 1.2 – Співвідношення між ефективним, середньовипрямленим і амплітудним значеннями різних форм періодичних сигналів

Форми сигналів	Коеф. форми	Коеф. ампл.	Формули для розрахунків
«Синусоїда»		$\sqrt{2} \approx 1,41$	$X_{\text{эф}} = X_{\text{max}} / \sqrt{2} \approx 0,71 X_{\text{max}}$ $X_{\text{max}} = \sqrt{2} X_{\text{эф}} = 1,41 X_{\text{эф}}$ $X_{\text{срв}} = \frac{2}{\pi} X_{\text{max}} \approx 0,64 X_{\text{max}}$ $X_{\text{max}} = \frac{\pi}{2} X_{\text{срв}} \approx 1,57 X_{\text{срв}}$
«Меандр»		1	$X_{\text{эф}} = X_{\text{max}}$ $X_{\text{срв}} = X_{\text{max}}$
«Прямокутні відеоімпульси»		$1/g$	$X_{\text{эф}} = \sqrt{g} X_{\text{max}}$ $X_{\text{max}} = X_{\text{эф}} / \sqrt{g}$ $X_{\text{срв}} = g X_{\text{max}}$ $X_{\text{max}} = \frac{X_{\text{срв}}}{g}$
«Трикутник»		$\sqrt{3} \approx 1,73$	$X_{\text{эф}} = X_{\text{max}} / \sqrt{3} \approx 0,58 X_{\text{max}}$ $X_{\text{max}} = \sqrt{3} X_{\text{эф}} = 1,73 X_{\text{эф}}$ $X_{\text{срв}} = \frac{X_{\text{max}}}{2}$ $X_{\text{max}} = 2 X_{\text{срв}}$

Коефіцієнт амплітуди – відношення амплітудного значення до ефективного значення змінної величини (1.9).

$$k_a = \frac{X_{\text{max}}}{x_{\text{эф}}} \quad (1.9)$$

Коефіцієнт передачі (посилення або послаблення) – відношення значення вихідної величини до значення вхідної величини передаточної ланки. Зазвичай використовується відношення напруг (коефіцієнт передачі по напрузі), а також по струму, потужності (1.10).

$$K_u = u_{\text{out}} / u_{\text{in}} \quad (1.10)$$

Коефіцієнт передачі задається в виді безрозмірного числа або в одиницях передачі, дБ (див. Рівень передачі). Якщо коефіцієнт передачі менше одиниці, мова йде про ослаблення чи «придушення» (розмовне).

Коефіцієнт форми – відношення ефективного значення до середньовипрямленого значення змінної величини (1.11).

$$k_a = \frac{x_{\text{эф}}}{x_{\text{срв}}} \quad (1.11)$$

Послідовність імпульсів – динамічна величина, з однакових імпульсів, які періодично повторюються. Параметрами є амплітуда імпульсів, тривалість періоду і частота(руху імпульсов). В випадку послідовності прямокутних

імпульсів відношення періоду T до тривалості імпульсів τ називають скважністю (1.12).

$$\nu = \frac{T}{\tau} \quad (1.12)$$

Зворотну величину називають коефіцієнтом заповнення g . Розрізняють немодульовані і модульовані послідовності. Із заповненням імпульсу іншою динамічною величиною (наприклад, гармонічним коливанням – «радіоімпульси») і без заповнення («відеоімпульси»).

Частота – кількість коливань величини, що періодично змінюється, в одиницю часу. Буквене позначення f . Одиниця виміру $1\text{Гц}=1/\text{с}$; $f=1/t$, де T – тривалість періоду величини, що змінюється. Частота є в загальному випадку величина, зворотна тривалості періоду.

При несинусоїдальній формі коливань за основну частоту (першу гармоніку) приймається величина, обернена найбільшій тривалості періоду. Цілі кратні значення називають гармонічними частотами (вищими гармоніками): $f_n=nf$. Субгармонічна частота визначається як ціла дріб від основної частоти: $f_{1/n}=f/n$. Кругова частота (або кутова частота) ω є швидкість зміни кута α/t . При зміні кута на цілий круг (повний оберт) ($\alpha = 2\pi$) на протязі одного періоду справедлива рівність $\omega = 2\pi/T$. При постійній частоті справедлива рівність $\omega = 2\pi f$.

Чисельні значення шкали – чисельні значення, відповідні градууювальним відміткам. Для визначення вимірюваного значення (основні) градууювальні відмітки відповідно до градууювальної характеристики мають чисельні значення шкали, в розмірних шкалах ці числа відповідають певним значенням вимірюваної величини, а в безрозмірних шкалах – лише порядковому числу градууювальної відмітки. В електровимірювальних приладах окреме чисельне значення повинне містити не більше чотирьох цифр. Чисельні значення представляються цілими числами або десятковими дробами.

Рівень – логарифм відносної величини, в знаменнику котрої стоїть вихідна (базова) величина. Якщо логарифмується відношення двох енергетичних величин (головним чином, потужностей) або параметрів поля (наприклад, напруга, струм, звуковий тиск), то відношення (величин), що логарифмується, зберігається. Використовуваний при логарифмуванні базис позначається за допомогою відповідного коефіцієнта і з додаванням позначень, одиниць виміру, що мають сенс. Використовуються як натуральні (\ln з основою $e=2.718$), так і десяткові логарифми. У першому випадку одиницю виміру називають Непер (Нп), в другому випадку – бел (Б) або децибел(дБ), $10\text{дБ}=1\text{Б}$. Для переведення однієї одиниці в іншу служить наступне співвідношення: $1^\circ\text{дБ}=0,1151^\circ\text{Нп}$ або $1^\circ\text{Нп}=8,686^\circ\text{дБ}$.

Поняттям відносний рівень користуються в тих випадках, коли, наприклад, потужність, струм або напруга сигналу в якійсь точці каналу передачі (P_x, I_x, U_x) порівнюються з аналогічною величиною у вибраній умовній точці (P_l, I_l, U_l). В загальному випадку такою умовною точкою вибирається вхід каналу передачі. Якщо ж в якості базовою використовується постійна і незалежна умовна точка (базове або опорне значення), то говорять про абсолютний рівень.

В загальному випадку в якості відносного прийнято значення потужності $P_0=1^{\circ}\text{мВт}$ (потужність зразкового генератора або міліватного передатчика з внутрішнім опором $R_i=600^{\circ}\text{Ом}$), або напруги ($U_0=0,775^{\circ}\text{В}$), або струму ($I_0=1,29\text{ мА}$), які видають на опорі 600°Ом потужність 1°мВт или $1^{\circ}\text{мВ}\cdot\text{А}$. В якості умовного значення звукового тиску прийнято значення $p_0=20^{\circ}\text{мкПа}$. В радіоприйомній техніці інколи використовується базове значення напруги в 1мкВ , а рівень позначається дБмкВ (таблиця 1.3).

Таблиця 1.3 – Рівні

Рівень	Визначення	Одиниця виміру
Відносний рівень потужності	$a = 10 \lg \frac{P_x}{P_1}$	дБ
	$a = \frac{1}{2} \ln \frac{P_x}{P_1}$	Нп
Відносний рівень напруги	$a = 20 \lg \frac{U_x}{U_1}$	дБ
	$a = \ln \frac{U_x}{U_1}$	Нп
Абсолютний рівень потужності	$a = 10 \lg \frac{P_x}{P_0} = 10 \lg \frac{P_x}{1\text{мВт}}$	дБ/ 1°мВт
	$a = \frac{1}{2} \ln \frac{P_x}{P_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_x}{1\text{мВт}}$	Нп/ 1°мВт
Абсолютний рівень напруги	$a = 20 \lg \frac{U_x}{U_0} = 20 \lg \frac{U_x}{0,775\text{В}}$	дБ/ $0,775^{\circ}\text{В}$
	$a = \ln \frac{U_x}{U_0} = \ln \frac{U_x}{0,775\text{В}}$	Нп/ $0,775^{\circ}\text{В}$
Рівень струму	Аналогічно рівню напруги при $I_0=1,29\text{ мА}$	

Рівень передачі – характеристика якостей об'єкту або системи за допомогою рівня. Рівень передачі чотирьохполюсника виражається логарифмом відношення (ефективних значень, якщо не вказані інші величини) вхідної напруги U_1 та вихідної напруги U_2 , або відповідних струмів (I_1, I_2), або потужностей (P_1, P_2), і виражається в децибелах (дБ) або рідше в Непері (Нп).

Якщо вхідна величина більше вихідної, то додатній знак рівня передачі вказує на наявність послаблення (придушення) сигналу. Інакше (вихідна величина більше вхідної) знак рівня передачі від'ємний, тобто має місце посилення. Проте на практиці виявляється зручним користуватися завжди позитивними значеннями як послаблення, так і посилення (таблиця 1.4).

Таблиця 1.4 – Послаблення або посилення

Параметр	Визначення	Співвідношення величин вхідних та вихідних
Послаблення потужності	$A_p = 10 \lg \frac{P_1}{P_2}$	$P_1 > P_2$
Посилення потужності	$V_p = 10 \lg \frac{P_2}{P_1}$	$P_1 < P_2$
Послаблення напруги	$A_u = 20 \lg \frac{U_1}{U_2}$	$U_1 > U_2$
Посилення напруги	$V_u = 20 \lg \frac{U_2}{U_1}$	$U_1 < U_2$
Послаблення і посилення струму	Аналогічно послабленню та посиленню напруги	

Рівень. Практичне використання. Так, децибелом (дБ) називається міра відношення між двома рівнями сигналу (1.13):

$$G_{dB} = 10 \lg \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (1.13)$$

де G_{dB} — посилення в децибелах; P_{in} — потужність на вході; P_{out} — потужність на виході; \lg — логарифм з основою 10.

Зв'язок між значеннями в децибелах і степенями числа 10 показана в таблиці 1.5.

Таблиця 1.5 – Значення в децибелах

Відношення потужностей	дБ	Відношення потужностей	дБ
10^1	10	10^{-1}	-10
10^2	20	10^{-2}	-20
10^3	30	10^{-3}	-30
10^4	40	10^{-4}	-40
10^5	50	10^{-5}	-50
10^6	60	10^{-6}	-60

У літературі спостерігається деяка неузгодженість у використанні термінів "посилення" і "послаблення". Якщо значення G_{dB} додатне, воно означає на практиці збільшення потужності. Наприклад, посилення 3 дБ означає, що потужність сигналу подвоїлась. Якщо значення G_{dB} від'ємне, воно означає на практиці зменшення потужності. Наприклад, посилення -3 дБ означає, що потужність зменшилася удвічі, тобто сталося послаблення. Зазвичай при цьому говорять, що маєє послаблення 3 дБ. Проте, згідно з деякими джерелами, ця величина повинна називатися посиленням -3 дБ. Правильніше буде сказати, що негативне посилення відповідає позитивному

послабленню. Таким чином, послаблення в децибелах визначається за формулою (1.14):

$$L_{dB} = -10 \lg \frac{P_{out}}{P_{in}} = 10 \lg \frac{P_{in}}{P_{out}} \quad (1.14)$$

Приклад. Якщо на вході лінії передачі рівень потужності сигналу складає 10 мВт, а на деякій відстані — 5 мВт, то послаблення сигналу можна виразити таким чином:

$$L_{dB} = 10 \lg(10/5) = 10 (0,3) = 3 \text{ дБ.}$$

Відзначимо, що в децибелах виражається відносна, а не абсолютна відмінність. Послаблення сигналу з 1000 мВт до 500 мВт також є послабленням на 3 дБ. Децибелі використовуються і для виміру відношення напруги, враховуючи той факт, що потужність пропорційна квадрату напруги (1.16):

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (1.15)$$

де P — потужність, що розсіюється на опорі R ; U — напруга на опорі R .

Впливає,

$$L_{dB} = 10 \lg \frac{P_{in}}{P_{out}} = 10 \lg \frac{U_{in}^2/R}{U_{out}^2/R} = 20 \lg \frac{U_{in}}{U_{out}} \quad (1.16)$$

Сумарне посилення або послаблення сигналу в каскадному каналі передачі можна обчислити за допомогою простих операцій додавання і віднімання.

Приклад. Використання децибел корисно при визначенні посилення або зниження потужності, що відбувається на послідовності передавальних елементів. Розглянемо, наприклад, послідовність елементів, на вхід якого подається потужність 4 мВт, перший елемент є лінією передачі з послабленням 12 дБ (посиленням -12 дБ), другий елемент — це підсилювач з посиленням 35 дБ, а третій — лінія передачі з послабленням 10 дБ. Сумарне посилення дорівнює $(-12 + 35 - 10) = 13$ дБ. Обчислимо потужність на виході:

$$G_{dB} = 13 = 10 \lg(P_{in}/4\text{мВт}),$$

$$P_{out} = 4 \cdot 10^{1,3} \text{ мВт} = 79,8 \text{ мВт.}$$

Значення в децибелах пов'язані з відносними амплітудами або змінами амплітуд, але ніяк не з абсолютними рівнями. Було б зручно передати абсолютний рівень потужності також в децибелах, щоб можна було легко обчислювати посилення або зниження потужності по відношенню до вихідного сигналу. Одиниця дБВт (dbw - децибел-ват) широко використовується в додатках СВЧ-зв'язку. У якості еталонного рівня вибрана величина 1 Вт, і їй привласнене значення 0 dbw. Абсолютний рівень потужності в децибел-ватах визначається наступним чином:

$$\text{потужність, дБВт} = 10 \lg \frac{\text{потужність, Вт}}{1 \text{ Вт}} \quad (1.17)$$

Приклад. Потужності 1000 Вт відповідає 30 дБВт, а потужності 1 мВт відповідає мінус 30 дБВт. Широко використовується інша похідна одиниця — дБмВт (dbmw або просто dbm, децибел-міліват). В цьому випадку за еталонний рівень потужності береться 1 мВт, 0 дБмВт відповідає 1 мВт. Отже,

$$\text{потужність, дБмВт} = 10 \lg \frac{\text{потужність, мВт}}{1 \text{ мВт}} \quad (1.18)$$

Корисно запам'ятати наступні співвідношення:

$$+30 \text{ дБмВт} = 0 \text{ дБВт}, 0 \text{ дБмВт} = -30 \text{ дБВт}.$$

Енергія – фізична і технічна величина в електричних колах, що виражається як добуток потужності на одиницю часу. Якщо в електричному колі напруга і струм є змінними величинами, то отримувана потужність, віднесена до конкретного моменту часу (миттєва потужність), є добутком струму і напруги. Рівняння для обчислення спожитої енергії в таблиці 1.6.

Енергія, інакше, здатність виконувати роботу, виражається потужністю, що виділяється на протязі певного проміжку часу. Тому електрична енергія або робота визначається добутком електричної потужності і часу. Це відноситься як до змінного струму (наприклад, трифазному) струму, так і до постійного. Одиницею виміру електричної енергії в системі СІ є джоуль. Крім того, використовується ват*секунда і кратні їй величини (наприклад, кВт*год).

Таблиця 1.6 – Рівняння для обчислення спожитої енергії

Енергія або робота	Однофазний змінний струм	Симетрично навантажена трьохфазна мережа	Одиниця виміру
Повна змінного струму	$W_s = U_{\sim} I_{\sim} t$	$W_{3S\sim} = 3U_1 I_1 t = \sqrt{3} U_{12} I_1 t$	$B \cdot A \cdot ч$
Активна складова	$W_{\sim} = U_{\sim} I_{\sim} \cos \varphi t$	$W_{3\sim} = 3U_1 I_1 \cos \varphi t = \sqrt{3} U_{12} I_1 \cos \varphi t$	$Вт \cdot ч$
Реактивна складова	$W_q = U_{\sim} I_{\sim} \sin \varphi t$	$W_{q3} = 3U_1 I_1 \sin \varphi t = \sqrt{3} U_{12} I_1 \sin \varphi t$	$вар \cdot ч$
Постійного струму	$W_{-} = U_{-} I_{-} t$	-	$Вт \cdot ч$

1.1.2 Числові методи

1.1.2.1 Диференціювання

Фізичним сенсом похідної називають швидкість зміни функції на нескінченно малому інтервалі аргументу.

Геометричним сенсом похідної називають відношення приросту функції до нескінченно малого інтервалу приросту аргументу, що відповідає поняттю дотичної до функції в даній точці. Тангенс кута нахилу дотичної в даній точці функції – величина похідної.

Коли похідну аналітично заданої функції унаслідок її складності шукати скрутно або вираження для похідної набуває дуже незручної для вживань форми, використовують наближене, або чисельне, диференціювання. Цей метод тим більше необхідний, якщо вихідна функція задана таблично. Один із способів вирішення задачі диференціювання — використання інтерполяційних

многочленів.

Нехай $f(x)$ — функція, для якої необхідно знайти похідну в заданій точці відрізка $|a; b|$, а $F_n(x)$ — інтерполяційний многочлен для $f(x)$ побудований на відріжку $|a; b|$. Заміняючи $f(x)$ інтерполяційним многочленом $F_n(x)$, отримаємо значення похідної $f(x)$ на відріжку $|a; b|$ як значення похідної $F'_n(x)$ інтерполяційного многочлена, т. ч. приймемо приближено

$$f'(x) = F'_n(x) \quad (1.19)$$

Аналогічним шляхом можливо діяти при знаходженні значень похідних вищих порядків функцій $f(x)$.

Вважаючи, що похибка інтерполяції визначається формулою (1.20).

$$R_n(x) = f(x) - F_n(x) \quad (1.20)$$

отримуємо підхід до оцінки похибки похідної $F'_n(x)$:

$$r_n(x) = f'(x) - F'_n(x) = R'_n(x) \quad (1.21)$$

тобто похибка похідної інтерполюючої функції дорівнює похідній від похибки цієї функції. Чисельне диференціювання зображене на рисунку 1.2.

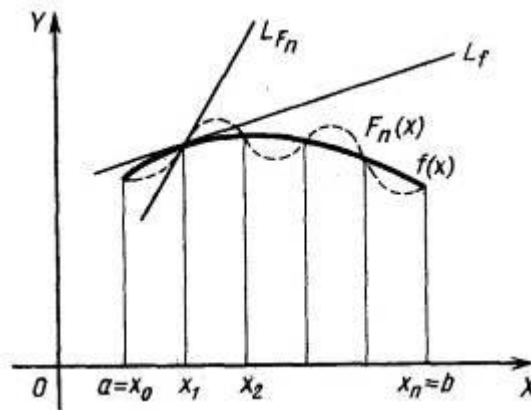


Рисунок 1.2 — Чисельне диференціювання

Відмітимо, проте, що завдання чисельного диференціювання є некоректним. Річ у тому, що похибка похідної інтерполяційного многочлена може істотно перевищувати похибку самої інтерполяції. З рисунка 1.2 добре видно, що навіть незначна відмінність (у тому числі і збіг) значень $f(x)$ і $F_n(x)$ ніяк не гарантує близькості значень їх похідних $f'(x)$ і $F'_n(x)$ (L_j і L_{F_n} — дотичні до кривих $f(x)$ і $F_n(x)$ відповідно).

У деяких випадках необхідно знайти нахил випрямлених пар значень, наприклад, коли з випрямленої швидкості треба обчислити прискорення. Для вирішення цього питання можна скористатися двома, розглянутими нижче, методами.

Відношення різниць. Якщо виміряні значення y_n в залежності від параметру x_n отримані через інтервали $x_{n+1} - x_n = h$, то при розкладанні в ряд Тейлора (1.22).

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n \quad (1.22)$$

$$y_{n-1} = y_n - hy'_n$$

можна представити алгоритм обчислення похідної y_n як:

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} \quad (1.23)$$

Неважко відмітити, що формула (1.23) відповідає одному з поширених визначень похідної функції і обчислюється як відношення приросту функції до приросту аргументу.

В випадку лабораторної роботи величина h , це не що інше, як період дискретизації сигналу. Наприклад, якщо частота дискретизації сигналу дорівнює 22050 Гц, то h , відстань між двома вибірками y_{n+1} і y_n по часовій шкалі, буде дорівнювати $1/22050$ с.

Нахил полінома третього порядку, побудованого по п'яти вузлових точках. Через п'ять точок можна провести поліном третього порядку. Якщо продиференціювати цей поліном по x_{n+k} , то отримаємо:

$$\bar{y}'_n = \frac{1}{12h}(y_{n-2} - 8y_{n-1} + 8y_{n+1} - y_{n+2}) \quad (1.24)$$

При необхідності, можна вивести формули, для обчислення значення похідної в крайніх точках \bar{y}_{n-2} , \bar{y}_{n-1} , \bar{y}_{n+1} и \bar{y}_{n+2} .

Не рекомендується розсіяти виміряні значення згладжувати за допомогою поліномів вищих за третій порядок. Поліноми вищого порядку є причиною пульсації, тому нахил згладжуючого полінома сильно відхиляється від виміряного дійсного різницевого відношення.

1.1.2.2 Інтегрування

Постановка задачі чисельного інтегрування.

При обчисленні визначеного інтеграла (1.25)

$$\int_a^b f(x)dx \quad (1.25)$$

де $f(x)$ — неперервна на відрізку $|a, b|$ функція, інколи вдається скористатися відомою формулою Ньютона — Лейбніца (1.26):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1.26)$$

Тут $F(x)$ — одна з первісних функцій $f(x)$, тобто така функція, що $F'(x) = f(x)$. Проте навіть в тих, практично рідких, випадках, коли первісну функції удається явно знайти в аналітичній формі, не завжди удається довести до числової відповіді значення певного інтеграла. Якщо до того ж врахувати, що інколи підінтегральна функція зовсім задається таблицею або графіком, то стає зрозумілим, чому інтеграція по формулі Ньютона — Лейбніца не отримує широкого вживання на практиці.

У подібних випадках застосовують різні методи наближеної (чисельної) інтеграції. Формули, використовувані для наближеного обчислення однократних інтегралів, називають квадратурними формулами. Простий прийом побудови квадратурних формул полягає в тому, що підінтегральна функція $f(x)$ замінюється на відрізку $|a, b|$ інтерполяційним многочленом,

наприклад многочленом Лагранжа $L_n(x)$, і виходить наближена рівність (1.27).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx \quad (1.27)$$

Подібний підхід зручний тим, що він приводить до алгоритмів, що легко реалізуються на ЕОМ і дозволяють отримувати результат з достатньою точністю. При цьому, природно, передбачається, що відрізок $|a, b|$ розбитий на n частин точками $a = x_0; x_1; \dots; x_n = b$, наявність яких мається на увазі при побудові многочлена $L_n(x)$.

Розглянемо функцію $f(x)$ представлену послідовністю із значень (x_n, y_n) – вузлових точок; де x_n взяті через однакові інтервали $x_{n+k} - x_n = h$. Для обчислення площі поверхні обмеженою цими вузловими точками можна скористатися одним з приведених нижче методів, причому ті з них, які вимагають більше витрат є точнішими.

Правило прямокутників. Через одну вузлову точку проводиться інтерполяційний поліном нульового порядку.

Значення y_n перемножуються з тривалістю інтервалу h . При цьому можуть виникнути як лівосторонні, так і правосторонні прямокутники з поверхнею A_n :

$$A_n = hy_n \text{ для } n = 1 \text{ до } N-1 \quad (1.28)$$

або

$$A_n = hy_n \text{ для } n = 2 \text{ до } N \quad (1.29)$$

Загальна поверхня, для правосторонніх прямокутників, обчислюватиметься за формулою (1.30):

$$R_N = h \sum_{n=2}^N y_n \quad (1.30)$$

Правило трапецій. Через дві вузлові точки проводиться інтерполяційний поліном першого порядку - вузлові точки попарно з'єднуються між собою прямими відрізками. При цьому утворюються трапеції площею (1.31):

$$A_n = h \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \text{ для } n = 2 \text{ до } N \quad (1.31)$$

Відповідно загальна площа T_N може бути обчислена за наступною формулою (1.32):

$$T_N = h \left(\frac{y_1}{2} + \sum_{n=2}^{N-1} y_n + \frac{y_N}{2} \right) \quad (1.32)$$

Правило Сімпсона. Через три вузлові точки проводиться інтерполяційний поліном другого порядку. По цій квадратичній параболі виконується інтеграція з інтервалом $2h$. При цьому правило Кеплера для обчислення площі поверхні під параболою може бути виражене таким чином:

$$K_{2m+2} = \frac{2h}{6} (y_{2m+1} + 4y_{2m+2} + y_{2m+3}) \quad (1.33)$$

для $m = 0$ до $(N-3)/2$

Якщо площі додати, то по правилу Сімпсона загальна площа S_{2m+2} між y_1 та y_{2m+3} буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} S_{2m+2} &= \frac{2h}{6}(y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + \dots + y_{2m+3}) = \\ &= K_2 + K_4 + \dots + K_{2m+2} \\ S_{2m+2} &= S_{2m} + K_{2m+2} \end{aligned} \quad (1.34)$$

для $m = 0$ до $(N-3)/2$ при $S_0 = 0$

При парному числі вимірюваних значень, число смуг буде непарним. В цьому випадку площу однієї смуги необхідно визначити за правилом трапецій, а площу інших смуг – за правилом Сімпсона.

1.2 Виконання роботи

1.2.1 Вихідні дані для виконання роботи

Тривалість вікна спостереження 2с. Період дискретизації 10мс. Період повторення імпульсів 2с. Тривалість імпульсу для сигналів складної форми (затухаючих – $\sin(x)/x$, гаус) біля вказаної величини (по рівню 5...10% від максимуму). Розташування імпульсів відносно один одного довільне. Імпульси повинні цілком знаходитися у вікні спостереження. Завдання в таблиці 1.7.

Таблиця 1.7 – Вид сигналів

n/n	Вид сигналу									
	“Радіоімпульс” з прямокутною огинаючою і гармонійним заповненням				“Відеоімпульс”			“Псевдовипадоковий”		
	U, В	23	$\varphi, ^\circ$	τ, c	U, В	τ, c	Тип*	M, В	σ^2, B^2	τ, c
1	1.9	10	230	0.2	2.5	0.2	Бартлетта	0.7	1.3	0.5
2	4.8	25	180	0.3	0.4	0.1	Парзена	0.4	1.8	0.6
3	0.9	14	250	0.1	2.1	0.3	Гаусса, $\alpha=1$	0.9	2.5	0.6
4	0.4	15	40	0.5	1.8	0.5	Коші, $\alpha=1$	0.5	1.9	0.5
5	0.8	7	50	0.4	2.0	0.2	Дирихле	0.7	4.8	0.1
6	1.2	12	45	0.7	1.1	0.5	Блекмана-Херриса	0.2	0.9	0.9
7	1.0	18	70	0.4	0.8	0.3	Блекмана	0.8	0.4	0.2
8	2.0	17	80	0.9	0.8	0.1	Ханна	1.8	0.8	0.1
9	0.8	5	170	0.5	2.4	0.6	Хемминга	1.9	1	0.3
10	1.6	19	135	0.7	1.4	0.9	Парзена	4.8	1.0	0.5
11	1.0	9	190	0.1	2.3	0.5	Рімана	0.9	2.0	0.2
12	2.1	10	90	0.5	1.4	0.3	Рісса	0.4	0.8	0.5
13	2.2	8	100	0.6	0.2	0.1	Плосковерш инне	0.8	1.6	0.3

Продовження таблиці 1.7

14	3.3	15	135	0.6	0.4	0.1	Парзена	1	0.1	0.1
15	1.9	16	150	0.5	0.3	0.3	Ханна	1.0	0.2	0.6
16	0.7	12	160	0.1	0.8	0.5	Блекмана	0.3	0.3	0.9
17	1.2	10	120	0.2	0.4	0.4	Блекмана-Херриса	0.2	0.2	0.5
18	1.6	13	180	0.3	0.9	0.3	Гаусса, $\alpha=3$	0.4	0.4	0.3
19	1.3	14	130	0.2	2.5	0.2	Коші, $\alpha=3$	0.5	1.8	0.1
20	1.8	1	140	0.4	0.2	0.1	Дирихле	2.0	2.5	0.1
21	2.5	5	135	0.5	0.8	0.5	Бартлетта	1.1	1.9	0.3
22	1.9	20	45	0.4	1.8	0.5	Парзена	0.8	0.9	0.5
23	2.0	21	200	0.1	1.1	0.1	Гаусса, $\alpha=1$	0.8	0.4	0.4
24	2.1	22	210	0.3	2.4	0.5	Ханна	2.4	0.8	0.9
25	1.8	22	220	0.5	0.4	0.3	Бартлет	1.4	1	0.5
26	1.2	15	80	0.1	1.4	0.1	Блекмана-Херриса	1.9	2.5	0.3
27	1.0	16	170	0.5	2.3	0.6	Блекмана	4.8	1.9	0.5
28	2.0	12	135	0.6	1.4	0.9	Коші, $\alpha=3$	0.9	4.8	0.2
29	0.8	10	190	0.6	0.2	0.5	Хемминга	0.4	0.9	0.5
30	1.6	13	90	0.5	0.4	0.3	Бартлетта	0.8	0.4	0.3

* Формули для побудови відеоімпульсу можна знайти в лабораторній роботі №3. Схема електрична показана на рисунку 1.3, розрахункові параметри – в таблиці 1.8.

Умовні позначення:

U – амплітуда сигналу,

f – частота періодичного сигналу,

φ – початкова фаза періодичного сигналу,

τ – тривалість імпульсу.

M – математичне очікування

σ^2 – дисперсія

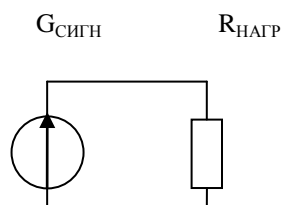


Рисунок 1.3 – Схема електрична

Таблиця 1.8 – Розрахункові параметри

n/n	Вид параметра		
	Базове значення напруги, В	Опір навантаження, Ом	Метод інтегрування**
1	$1e-6$	150	ПП
2	$1e-3$	300	ПТ

Продовження таблиці 1.8

3	1	1	ПС
4	1e-6	50	ПП
5	1e-3	1	ПТ
6	1	50	ПС
7	1e-6	150	ПП
8	1e-3	300	ПС
9	1	1	ПП
10	1e-6	50	ПТ
11	1e-3	75	ПС
12	1	1	ПП
13	1e-6	50	ПТ
14	1e-3	75	ПС
15	1	150	ПП
16	1e-6	300	ПТ
17	1e-3	1	ПС
18	1	50	ПП
19	1e-6	75	ПТ
20	1e-3	75	ПС
21	1	150	ПП
22	1e-6	300	ПП
23	1e-3	75	ПТ
24	1	150	ПС
25	10	300	ПТ

**Умовні скорочення:

ПП - Правило прямокутників,

ПТ - Правило трапецій

ПС - Правило Сімпсона

1.2.2 Порядок виконання лабораторної роботи

1. Синтезувати і побудувати графіки функцій вказаних в відповідній комірці (порядковий номер в журналі групи) таблиці №1 вихідних даних. Синтезувати і побудувати графік суми сигналів вказаних в завданні.

2. Визначити час спостереження для кожного сигналу та їх суми:

- 1) максимальне значення напруги,
- 2) середнє значення напруги,
- 3) середньовипрямлене значення напруги,
- 4) діюче значення напруги,
- 5) коефіцієнт форми,
- 6) коефіцієнт амплітуди,
- 7) рівень максимального значення сигналу відносно заданого в таблиці 1.6 вихідних даних ($20 \cdot \lg(x/x_0)$, дБ),
- 8) функцію швидкості зміни напруги,
- 9) функцію миттєвого значення електричної потужності на навантаженні,

10) функцію значення енергії яка виділилася на навантаженні за минулий інтервал часу.

3. Синтезувати і зберегти для звіту тимчасові діаграми сигналів.

4. Визначити необхідні значення і графіки використовуючи чисельні методи аналізу. Тип методу інтеграції вказаний у вихідних даних.

1.2.3 Вміст звіту до лабораторної роботи

1 Вміст індивідуального завдання. Чисельні значення параметрів.

2 Математичні описи і параметри тестових сигналів, програми їх синтезу.

3 Графіки вихідних сигналів і їх суми. Вказувати розмірність фізичних величин.

4 Розраховані значення п.п. 1.7 завдань 2 занести в таблицю 1.9.

Таблиця 1.9 – Результати обчислень

Тип сигналу	максимальне значення напруги, В	середнє значення напруги, В
1-й				
2-й				
3-й				
Σ				

5 Відображувати в звіті графіки швидкості зміни сигналу, потужності, енергії вихідних сигналів і їх суми. Вказувати розмірність фізичних величин.

6 Висновки про результати роботи.

1.3 Питання до захисту лабораторної роботи

1. Фізична величина. Тип величини, числове значення, одиниці вимірювання.

2. Постійна, змінна, змішана, випадкова величина.

3. Гармонічне коливання. Полігармонічний сигнал.

4. Імпульс. Послідовність імпульсів. Коефіцієнт сквапності та заповнення.

5. Випадкові сигнали.

6. Динамічне представлення довільного сигналу за допомогою функцій включення (Хевісайда) і дельта-функцій (функції Діраку).

7. Визначити розмах коливань величини, максимальне значення величини, середнє значення, середневипрямлене значення, діюче значення величини, коефіцієнт форми і амплітуди.

8. Як визначити величину потужності електричного сигналу, величину електричної енергії що виділяється на навантаженні, величину середньої потужності електричного сигналу?

9. Абсолютний і відносний рівень сигналу. По напрузі (струму), по потужності.

10. Диференціювання безперервних функцій. Фізичний і геометричний сенс. Постановка завдання чисельного диференціювання. Особливість завдання чисельного диференціювання.

11. Інтегрування безперервних функцій. Фізичний і геометричний сенс. Постановка завдання чисельної інтеграції. Методи чисельної інтеграції.

1.4 Задачі

1. Імпульсний сигнал u прямокутної форми має тривалість 2 с і амплітуду 3 В. Початок імпульсу у момент часу $t_n=3$ с. Записати аналітичне вираження цього сигналу за допомогою функцій Хевісайда.

2 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2 КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ СИГНАЛІВ

Мета роботи: дослідити кореляційні властивості найпростіших сигналів.

2.1 Теоретичні відомості

2.1.1 Кореляційний аналіз

Кореляційний аналіз грає велику роль в теорії сигналів. Його сенс полягає в кількісному вимірюванні міри схожості різних сигналів.

2.1.1.1 Кореляційна функція

Кореляційна функція (КФ; англійський термін — correlation function, CF) детермінованого сигналу з кінцевою енергією є інтегралом (у безкінечних межах) від добутку двох копій сигналу, зрушених один відносно одного на час τ .

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt \quad (2.1)$$

Кореляційна функція показує міру схожості між сигналом і його зрушеною копією — чим більше значення кореляційної функції, тим ця схожість сильніша. Крім того, кореляційна функція володіє наступними властивостями:

1 Значення КФ при $\tau=0$ дорівнює енергії сигналу, тобто інтегралу від його квадрату:

$$B_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = E. \quad (2.2)$$

2 КФ є парною функцією свого аргумента τ :

$$B_s(\tau) = B_s(-\tau) \quad (2.3)$$

3 Значення КФ при $\tau = 0$ є максимально можливим значенням:

$$B_s(\tau) \leq B_s(0) \quad (2.4)$$

4 З ростом абсолютного значення τ КФ сигналу з кінечною енергією згасає:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_s(\tau) = 0 \quad (2.5)$$

5 Якщо сигнал $s(t)$ не містить особливостей в виді дельта-функцій, його КФ не може мати розривів (тобто зобов'язана бути безперервною функцією).

6 Якщо сигнал — напруга, то розмірність його КФ дорівнює $V^2 \cdot c$.

В якості прикладу підрахуємо КФ прямокутного імпульсу

- при $0 < \tau < T$

$$B_s(\tau) = \int_{\tau}^T A^2 dt = A^2(T - \tau) \quad (2.6)$$

- при $-T < \tau < 0$

$$B_s(\tau) = \int_0^{T+\tau} A^2 dt = A^2(T + \tau) \quad (2.7)$$

- при $|\tau| > T$

$$B_s(\tau) = 0 \quad (2.8)$$

Об'єднуючи результати, можна записати

$$B_s(\tau) = \begin{cases} A^2(T - |\tau|), & |\tau| \leq T, \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases} \quad (2.9)$$

Графік КФ прямокутного імпульсу показаний на рисунку 2.1.

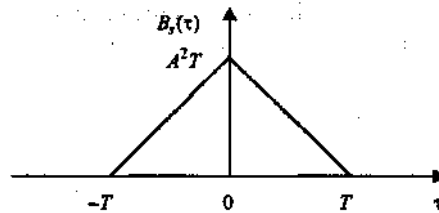


Рисунок 2.1 – Кореляційна функція прямокутного імпульсу

В разі періодичного сигналу (і взагалі будь-якого сигналу з безкінечною енергією) скористатися приведеним визначенням не вдасться. Тому КФ періодичного сигналу з періодом T обчислюють, усереднюючи добуток зрушених копій в межах одного періоду:

$$B_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau) dt \quad (2.10)$$

КФ гармонійного сигналу теж є гармонійною функцією. Ще дуже важливий той факт, що результат не залежить від початкової фази гармонійного сигналу.

Набір властивостей такої КФ декілька змінюється.

1 Значення при $\tau=0$ дорівнює не енергії, а середній потужності аналізованого сигналу:

$$B_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = P_{cp} \quad (2.11)$$

2 Властивість парності зберігається:

$$B_s(\tau) = B_s(-\tau) \quad (2.12)$$

3 Значення КФ при $\tau = 0$ як і досі є максимально можливим:

$$B_s(\tau) \leq B_s(0) \quad (2.13)$$

4 КФ періодичного сигналу періодичною функцією с тим же періодом, що й сам сигнал:

$$B_s(\tau + T) \leq B_s(\tau) \quad (2.14)$$

5 Якщо сигнал не містить дельта-функцій, його КФ буде неперервною функцією.

6 Розмірність КФ періодичного сигналу — квадрат розмірності сигналу (B^2 , якщо сигнал — напруга).

2.1.2 Взаємна кореляційна функція

Якщо КФ показує міру схожості між зрушеними копіями одного і того ж сигналу, то взаємна кореляційна функція (ВКФ; англійський термін — cross-correlation function, CCF) дозволяє виміряти аналогічну величину для зрушених екземплярів двох різних сигналів.

Загальний вигляд формули КФ зберігається, але під інтегралом стоїть добуток двох різних сигналів, один з яких затриманий на час τ :

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)dt \quad (2.15)$$

Очевидно, що КФ є окремим випадком ВКФ, коли обидва сигнали однакові.

У якості прикладу обчислимо ВКФ прямокутного і трикутного імпульсів. Графік отриманої ВКФ представлений на рисунку 2.2.

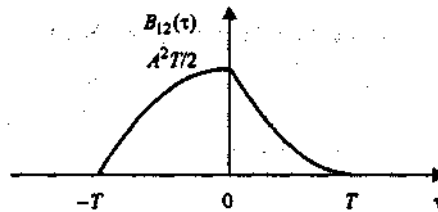


Рисунок 2.2 – ВКФ прямокутного і трикутного імпульсів

Властивості ВКФ декілька відрізняються від властивостей КФ:

1. $|B_{12}(\tau)| \leq \sqrt{E_1 E_2}$, где E_1 и E_2 — енергії сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$.
2. $B_{12}(\tau) = B_{21}(\tau)$, тобто зміна знака τ рівносильна взаємній перестановці сигналів.
3. Значення ВКФ при $\tau=0$ нічим не виділяється; максимум може бути розташований в будь-якому місці осі τ .
4. Із зростанням абсолютного значення τ ВКФ сигналів з кінцевою енергією затухає:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_{12}(\tau) = 0 \quad (2.16)$$

5. Якщо сигнали $s_1(t)$ і $s_2(t)$ не містять особливостей у виді дельта-функцій, то ВКФ не може мати розривів (тобто зобов'язана бути безперервною функцією).

6. Якщо сигнали — напруга, то розмірність їх ВКФ дорівнює $V^2 \cdot c$.

Для періодичних сигналів поняття ВКФ зазвичай не застосовується, хоча воно може бути введено у випадку, якщо сигнали $s_1(t)$ і $s_2(t)$ мають однаковий період.

2.2 Виконання роботи

2.2.1 Вихідні дані до лабораторної роботи

Вихідні дані до виконання поточної лабораторної роботи знаходяться в відповідному розділі лабораторної роботи №1.

2.2.2 Чисельне обчислення кореляційної функції

Кореляційна функція детермінованого сигналу з кінцевою енергією є інтегралом (у безкінечних межах) від добутку двох копій сигналу, зрушених один відносно одного на час τ .

У якості прикладу обчислимо КФ для синусоїди. Щоб зрозуміти, як будується кожна точка КФ, далі будуть розглянуті основні етапи побудови.

1. Побудуємо дві синусоїди в інтервалі від 0 до 2π . Хай ці синусоїди повністю збігаються (рисунок 2.3). В результаті обчислення значення функції синуса для кожної точки заданого інтервала утворюється одновимірний масив що містить всі значення заданої функції. Оскільки синусоїди повністю збігаються, то і масиви значень теж збігаються. Тому значення КФ для Y_0 можна визначити за формулою:

$$Y_0 = \sum_k^N x(k)^2 = 0^2 + 0.0314^2 + 0.0628^2 + \dots + (-0.0628)^2 + (-0.0314)^2 + 0^2 = 100; \quad (2.17)$$

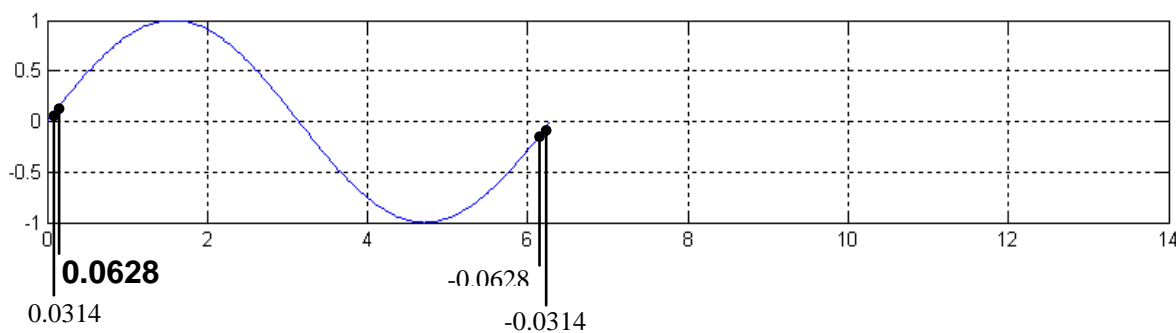


Рисунок 2.3 – Повністю співпадаючі синусоїди

2. Нехай дві синусоїди здвинуті відносно одна одної на деяке τ (рисунок 2.4). Для другої (здвинутої) синусоїди в інтервалі $[0; \tau]$ і $[2\pi; 2\pi + \tau]$ масив значень x буде містити 0. Всі інші елементи масиву будуть містити значення функції синусоїди в інтервалі $[\tau; 2\pi]$. Значення КФ для точки Y_n можна визначити за формулою:

$$Y_n = \sum_{k=0}^N x(k) * x(k = t) = 0 * (0) + 0.0314 * (0) + 0.0628 * (0) + \dots + (-0.0628) * 0 + 0 * (-0.0314) + 0 * 0 = 83; \quad (2.18)$$

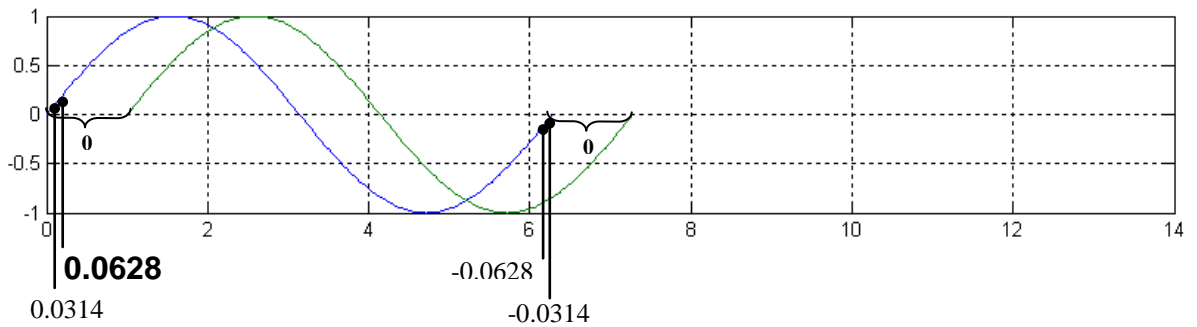


Рисунок 2.4 – Синусоїди, здвинуті на деяке τ

3. Нехай дві синусоїди не накладаються одна на одну (рисунок 2.5). Значення КФ для точки Y_n дорівнює 0.

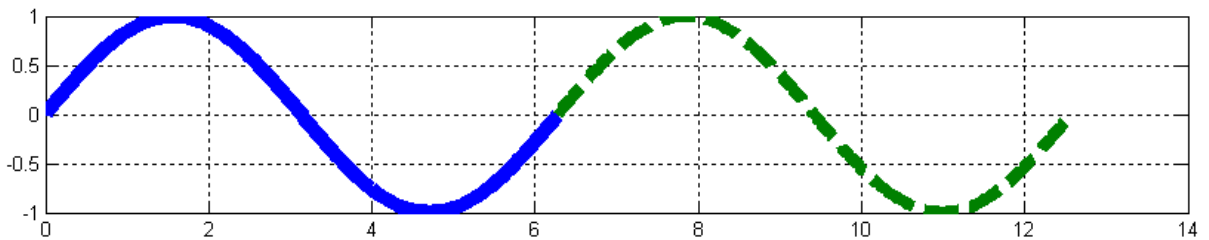


Рисунок 2.5 – Не співпадаючі синусоїди

На рисунку 2.6 побудована КФ для синусоїди. На ній позначено три точки, які були обчислені вище. Всі інші крапки будуються аналогічно.

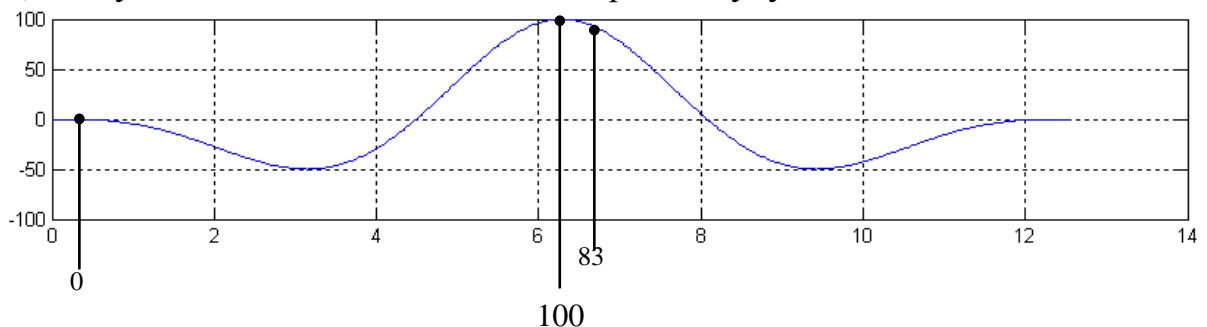


Рисунок 2.6 – КФ для синусоїди.

2.2.3 Порядок виконання лабораторної роботи

- 1 Побудувати графіки автокореляційних функцій (АКФ) сигналів і їх суми вказаних у вихідних даних до лабораторної роботи №1.
- 2 Побудувати графіки взаємних кореляційних функцій (ВКФ) сигналів і їх суми вказаних у вихідних даних до лабораторної роботи №1(кожен з кожним). Побудувати нормовані графіки ВКФ.

2.2.4 Вміст звіту до лабораторної роботи

1. Вміст індивідуального завдання. Чисельні значення параметрів.
2. Математичні описи і параметри тестових сигналів, програми їх синтезу. Графіки вихідних сигналів і їх суми.
3. Графіки автокореляційних, взаємних кореляційних і нормованих, взаємних кореляційних функцій.
4. Висновки за результатами роботи.

2.3 Питання до захисту лабораторної роботи

1. Постійна, змінна, змішана, випадкова величина.
2. Гармонічне коливання. Полігармонічний сигнал. Імпульс. Послідовність імпульсів. Випадкові сигнали.
3. Як визначити величину потужності електричного сигналу, величину електричної енергії що виділяється на навантаженні, величину середньої потужності електричного сигналу?
4. Скалярний добуток векторів.
5. Ортогональні сигнали. Ортонормовані базиси.
6. АКФ. Властивості. Приклади функцій.
7. ВКФ. Властивості. Приклади функцій.
8. Зв'язок кореляційних функцій сигналів і їх спектрів.
9. Побудувати КФ шуму.
10. Уміти визначати по КФ інтервали кореляції.
11. Коли справедливе твердження: некорельовані перерізи незалежні? Коли це твердження несправедливо?
12. Чи можна по КФ визначити числові характеристики СП?

3 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3 СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИСКРЕТНОСТІ СИГНАЛІВ

Мета роботи: дослідження спектрального аналізу сигналів на основі дискретного перетворення Фур'є (ДПФ), синтез сигналів по їх спектру на основі зворотного дискретного перетворення Фур'є (ОДПФ).

3.1 Теоретичні відомості

3.1.1 Спектральний аналіз

Електричні сигнали зв'язку - це мінливі з часом сигнали напруги або струму, зазвичай описувані в тимчасовій області. З іншого боку, подібні сигнали також зручно описувати в частотній області, де опис сигналу називається його спектром. Спектральні поняття досить важливі при аналізі і проектуванні систем зв'язку; вони можуть описувати сигнал через його середню потужність або енергетичний зміст на різних частотах і показують, яку частину (смуги) електромагнітного спектра займає сигнал. Теле-і радіостанції працюють на виділених їм частотах при вкрай малих проміжках між смугами, зайнятими різними станціями. Наприклад, амплітудно-модульовані радіоканали розділені смугою 10 кГц, а телевізійні канали - смугою 6 МГц. Так що наш інтерес до спектрами та аналізу Фур'є пояснюється реальними вимогами приміщення сигналу в точно задані межі.

Частотні спектральні характеристики можна приписати як до власне сигналам, так і електричним схемами. Якщо говориться, що конкретний спектр описує сигнал, мається на увазі, що один із способів опису сигналу - це задати його амплітуду і фазу як функції частоти. У той же час, коли ми говоримо про спектральних параметрах схеми, маємо на увазі передавальну функцію (або частотну характеристику), що зв'язує вихід схеми з її входом; іншими словами, схема характеризується тим, яка частина спектра вхідного сигналу пройде на вихід.

Все різноманіття сигналів можна розділити на детерміновані і випадкові. У свою чергу детерміновані, тобто відомі заздалегідь, поділяються на періодичні - повторювані через певний проміжок часу, званий періодом і існуючі нескінченно, і неперіодичні, у яких період дорівнює нескінченності. Це поодинокі імпульси з відомими параметрами.

Випадковими називаються сигнали, поведінка яких в часі можна передбачити тільки з деякою часткою ймовірності. Власне, тільки вони і є саме сигналами, а детерміновані можуть служити як би моделями сигналів, за допомогою яких легко вивчати властивості сигналів. Усі сигнали можна представити як в тимчасовій, так і в частотній областях. Частотне зображення сигналу називається його спектром. Якщо з тимчасової діаграми можна судити про форму сигналу, то по спектру про його зміст. У цьому виявляється діалектичний закон єдності форми і змісту. Між тимчасовій і частотній формами існує функціональний зв'язок у вигляді перетворень Фур'є, тобто, якщо відомо тимчасове опис сигналу, то можна отримати його спектр - пряме перетворення Фур'є, і навпаки, через спектр отримати тимчасове опис. У цьому

випадку говорять, що тимчасове і частотне опису сигналу адекватні, тобто рівноцінні. У зв'язку спектральне опис більш зручно, по-перше, тому, що всі сигнали випадкові, тобто випадкові їхні тимчасові опису, тоді як спектр певного класу сигналів відомий заздалегідь, по-друге, сигнали передаються через елементи каналу, що представляють собою чотириполіусники із заданою функцією передачі, порівнюючи яку зі спектром сигналу, можна буде судити про можливість проходження сигналу через даний чотириполіусник.

3.1.2 Розкладання в ряд Фур'є

Періодичні сигнали з кінцевою енергією, переданої за період, можна представити у вигляді ряду Фур'є. Довільний періодичний сигнал $x(\lambda)$ виражається через нескінченне число гармонік з зростаючими частотами.

$$x(\lambda) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos(\lambda) + a_2 \cos(2\lambda) + a_3 \cos(3\lambda) + \dots + \\ + b_1 \sin(\lambda) + b_2 \sin(2\lambda) + b_3 \sin(3\lambda) + \dots \quad (3.1)$$

Члени $\cos(\lambda)$ і $\sin(\lambda)$ називаються основними; члени $\cos(n\lambda)$ і $\sin(n\lambda)$, при $n > 1$, де n — ціле, називаються гармонічними. Члени a_i і b_i представляють коефіцієнти гармонік, а $\frac{1}{2}a_0$ — це постійний член, або складова постійного струму.

Період функції $x(\lambda)$ повинен дорівнювати 2π або кратній величині; крім того, функція $x(\lambda)$ повинна бути однозначною. Ряд Фур'є можна розглядати як "рецепт приготування" будь-якого періодичного сигналу з синусоїдальних складових. Щоб даний ряд мав практичне значення, він повинен сходитися, тобто часткові суми ряду, повинні мати межу.

Процес створення довільного періодичного сигналу з коефіцієнтів, що описують змішування гармонік, називається синтезом. Зворотний процес обчислення коефіцієнтів іменується аналізом. Обчислення коефіцієнтів полегшується тим, що середнє від перехресних творів синусоїди на косінусоїду (а також середнє будь синусоїди або косінусоїди) дорівнює нулю. Нижче наводяться формули, що ілюструють основні властивості середніх від гармонійних функцій.

За будь-яких цілих m та n :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\lambda) d\lambda = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\lambda) d\lambda = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\lambda) \cos(n\lambda) d\lambda = 0$$

При $m \neq n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\lambda) \sin(n\lambda) d\lambda = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\lambda) \cos(n\lambda) d\lambda = 0$$

При $m = n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(m\lambda) d\lambda = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(m\lambda) d\lambda = \pi$$

Розглянемо, як обчислюються значення коефіцієнтів a_i або b_i у формулі (3.2). Наприклад, для обчислення коефіцієнта a_3 обидві сторони формули можна помножити на $\cos(3\lambda)d\lambda$, а потім проінтегрувати (3.3).

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(\lambda) \cos(3\lambda) d\lambda = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_0 \cos(3\lambda) d\lambda}_{=0} +$$

$$+ \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_1 \cos(\lambda) \cos(3\lambda) d\lambda}_{=0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_2 \cos(2\lambda) \cos(3\lambda) d\lambda}_{=0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_3 \cos(3\lambda) \cos(3\lambda) d\lambda}_{=\pi} + \dots \quad (3.2)$$

$$+ \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} b_1 \sin(\lambda) \cos(3\lambda) d\lambda}_{=0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} b_2 \sin(2\lambda) \cos(3\lambda) d\lambda}_{=0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} b_3 \sin(3\lambda) \cos(3\lambda) d\lambda}_{=0} + \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(\lambda) \cos(3\lambda) d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} a_3 \cos^2(3\lambda) d\lambda = a_3 \pi \quad (3.3)$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\lambda) \cos(3\lambda) d\lambda$$

Отриманий висновок можна узагальнити

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\lambda) \cos(n\lambda) d\lambda \quad (3.4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\lambda) \sin(n\lambda) d\lambda$$

Коефіцієнт a_0 знаходиться з (3.4) при $n = 0$. В результаті отримуємо наступне:

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\lambda) d\lambda$$

Даний вираз — це член нульової частоти, або середнє значення періодичного сигналу. Процес синтезу рівняння (3.3) можна записати в більш компактній формі (3.5).

$$x(\lambda) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\lambda) + b_n \sin(n\lambda)) \quad (3.5)$$

Існує кілька способів вираження пари перетворень (аналізу і синтезу) Фур'є. Найбільш поширена форма (комплексна форма) — це вираз синуса і косинуса через експоненти з комплексним показником.

$$\cos(\lambda) = \frac{e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}}{2}$$

$$\sin(\lambda) = \frac{e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}}{2}$$

Периодическая функция с периодом T_0 секунд имеет следующие частотные — $f_0, 2f_0, 3f_0, \dots$, где $f_0 = 1/T_0$ называется власною частотою. Іноді частотні компоненти записують як $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$, где $\omega_0 = 2\pi / T_0$ іменується власної кутовий частотою; частота f вимірюється в герцах, частота ω_0 — в радіанах в секунду. Замінімо $n\lambda$ в аргументах гармонійних функцій у формулах (3.1-3.4) на $2\pi n f_0 t = 2\pi n t / T_0$, де n -ціле. Використовуючи формули (3.4-3.5), можна записати $x(t)$ в експоненційній формі.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n - ib_n) e^{2\pi i n f_0 t} + (a_n + ib_n) e^{-2\pi i n f_0 t} \right] \quad (3.6)$$

Позначимо через c_n , комплексні коефіцієнти, або спектральні компоненти $x(t)$, пов'язані з коефіцієнтами a_n і b_n наступним чином.

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{при } n > 0 \\ \frac{a_0}{2} & \text{при } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n) & \text{при } n < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Тепер формулу (3.6) можна спростити.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n f_0 t} \quad (3.8)$$

Тут коефіцієнти експоненційних гармонік визначаються наступним чином.

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{2\pi i n f_0 t} dt \quad (3.9)$$

Для перевірки справедливості формули (3.9) помножимо обидві частини виразу (3.8) на $\frac{e^{2\pi i m f_0 t} dt}{T_0}$, проінтегруємо по проміжку $(-T_0/2, T_0/2)$ і використовуємо таку формулу:

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{2\pi i(n-m)f_0 t} dt = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n \neq m \end{cases}$$

Тут δ_{nm} , називається дельта-функцією Кронекера. Після виконання зазначених дій отримуємо:

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{2\pi i m f_0 t} dt = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \delta_{nm} = c_m \quad (3.10)$$

для всіх цілих m .

У загальному випадку коефіцієнт c_n — комплексне число, висловити яке можна таким чином.

$$c_n = |c_n| e^{i\theta_n} \quad (3.11)$$

$$c_{-n} = |c_n| e^{-i\theta_n} \quad (3.12)$$

$$|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3.13)$$

$$\theta_n = \arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right), \quad (3.14)$$

$$\text{де } b_0 = 0 \text{ і } c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Значення $|c_n|$ визначає амплітуду n -ї гармоніки періодичного сигналу, так що графік залежності $|c_n|$ від частоти, званої амплітудним спектром, дає амплітуду кожної з n дискретних гармонік сигналу. Подібним чином графік залежності θ_n від частоти, іменованої фазовим спектром, дає фазу кожної гармоніки сигналу. Коефіцієнти Фур'є речовій періодичної за часом функції мають наступну властивість.

$$c_{-n} = c_n^*, \quad (3.15)$$

де c_n^* — комплексно поєднане c_n . Таким чином, отримуємо наступне:

$$|c_{-n}| = |c_n|, \quad (3.16)$$

Амплітудний спектр є парною функцією частоти. Подібним чином фазовий спектр θ_n - це непарна функція частоти, оскільки з формули (3.16) випливає, що:

$$\theta_{-n} = -\theta_n, \quad (3.17)$$

Отже, як зазначалося вище, ряди Фур'є особливо корисні при описі довільних періодичних сигналів з кінцевою енергією кожного періоду. Крім того, вони можуть використовуватися для опису неперіодичних сигналів, що мають кінцеву енергію за кінцевий інтервал. Втім, для таких сигналів більш зручним є представлення у вигляді інтеграла Фур'є.

3.1.3 Вагові функції

Для зменшення розтікання спектра при ДПФ застосовуються вагові функції (weighting functions), які також називають вікнами (window). У цьому випадку перед розрахунком ДПФ сигнал множиться на вагову функцію $w(k)$,

яка повинна спадати до країв сегмента. Ми ніби дивимося на досліджуваний процес через вікно вагової функції. Формула прямого ДПФ (3.18) при використанні вагових функцій приймає наступний вигляд:

$$\dot{X}_{\varpi}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \varpi(k) e^{-j \frac{2\pi nk}{N}} \quad (3.18)$$

Роль вагової функції в цій формулі можна розглядати з різних точок зору. Спочатку проаналізуємо ситуацію в тимчасовій області. Якщо ми використовуємо вагову функцію, яка має максимум в середині (при $k = N / 2$) і плавно спадає до країв ($k = 0$ і $n = N-1$), то це призведе до ослаблення ефектів, пов'язаних з виникненням стрибків сигналу при періодичному повторенні аналізованої кінцевої послідовності, і, таким чином, до зменшення розтікання спектру.

Аналогічний висновок можна зробити, розглянувши вплив вагової функції в частотній області. Множення сигналу на вагову функцію відповідає згортку спектрів сигналу і вагової функції (див. розділ «Властивості дискретного перетворення Фур'є»). Це призводить до того, що піки, що містяться в спектрі сигналу, кілька розширюються. Однак при цьому стає можливо зменшити рівень бічних пелюсток спектральної функції, що і є метою застосування вагових функцій.

Якщо трактувати ДПФ як фільтрацію, при використанні вагової функції $w(k)$ виходять частотні характеристики фільтрів такого вигляду:

$$K_{n,\varpi}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \varpi(k) e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Вибираючи вагову функцію $w(k)$ певним чином, можна зменшити рівень бічних пелюсток частотою характеристики фільтрів, відповідних окремих каналах ДПФ. Платою за це є розширення центральної частотної характеристики.

3.1.4 Параметри вагових функцій

Спектр вагової функції (вагові вікна) кінцевої тривалості відмінний від нуля на нескінченному частотному проміжку, тому що обмежена за часом функція принципово має необмежений за частотою спектр. Справедливо і дуальне положення: функція з обмеженою за частотою спектром має нескінченну протяжність у часі.

Якість реальних ВФ можна оцінювати за ступенем їх наближення до ідеальних властивостей: нескінченно вузька смуга основної пелюстки спектру і нескінченно мала величина побічних пелюсток. Типовий вид тимчасового вікна і його спектру зображений на Рисунку 3.1. Крива спектру має основний пелюстка в районі нульової частоти, і далі йдуть бічні пелюстки. Слід, однак, зауважити, що існують вікна, спектр яких не має явно виражених бічних пелюсток. У цьому випадку ширину основної пелюстки визначають умовно по деякому рівні модуля спектра.

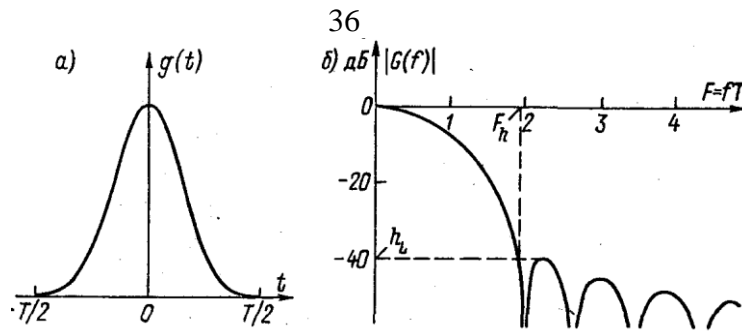


Рисунок 3.1 – Приклад усереднюючого вікна (вікно Кайзера-Бесселя (а) і його спектр (б))

Ідеальний усереднюючий фільтр повинен мати гранично вузьку смугу пропускання; відповідно цьому реальне вікно може бути охарактеризоване шириною основної пелюстки спектру: чим менше ця ширина, тим краще вікно. Стиснення функції за часом у a раз призводить до розширення її спектра по частоті також у a раз. Тому якість ВФ визначають наведеної шириною основної пелюстки F_h , дорівнює добутку ширини основної пелюстки АЧХ і тривалості ВФ. Пояснимо сенс цього параметра. Нехай потрібно придушувати пульсації сигналу в деякому частотному діапазоні, починаючи з частоти f_c . Знаючи параметр вікна F_h , знаходимо, що тривалість вікна повинна бути встановлена рівної $T = F_h/f_c$. Таким чином, чим менше F_h , тим за інших рівних умов більш швидкодіючий КИХ-фільтр може бути реалізований на основі даного вікна. Ширину основної пелюстки будемо визначати за рівнем максимального бічного пелюстки.

Звернемо увагу на те, що ми приймаємо ширину основної пелюстки рівної смузі частот від нуля до f_h , тобто розглядаємо фізичний спектр ВФ. Якщо ж аналізувати теоретичний спектр ВФ, то він буде парному-симетричним і тоді основний пелюстка АЧХ буде простягатися від $-f_h$ до $+f_h$, т. е. його ширина буде рівна $2f_h$.

Ідеальний усереднюючий фільтр повинен мати АЧХ з рівними нулю бічними пелюстками. Реальні усереднюються вікна ми будемо характеризувати рівнем бічних пелюсток h : ставленням амплітуди найбільшого бічної пелюстки до амплітуди основної пелюстки. Часто рівень бічних пелюсток вимірюють у децибелах.

Розглянемо, як змінюється в загальному випадку амплітуда бічних пелюсток спектра усереднюючого вікна при збільшенні частоти.

Як ми знаємо, модуль спектру δ - імпульсу має одне і те ж значення на всіх частотах. Тому, якби у ваговій функції вікна присутня адитивна складова в δ - імпульсу, то амплітуда бічних пелюсток спектра такого вікна не спадала б із зростанням частоти. Реальні вікна не мають таких складових. Однак усереднюються вікна можуть мати розриви першого роду - стрибкоподібні зміни амплітуди. Це означає, що перша похідна вікна містить δ - імпульси. Інтегрування деякої функції часу призводить до поділу її спектра на $j2\pi f$. Якщо похідна функції містить δ -імпульси, то спектр цієї похідної не убуває із зростанням частоти. А значить, спектр самої функції буде спадати обернено пропорційно частоті. У таких випадках говорять, що із збільшенням частоти f спектр убуває зі швидкістю $1/f$.

Якщо крива вікна не має розривів, але має злами, то це означає, що перша похідна вікна має розриви першого роду, а друга похідна містить δ - імпульси. Спектр такого вікна буде спадати зі швидкістю $1/f^2$. Розмірковуючи, таким чином, приходимо до висновку, що якщо сама функція і її перші $n-1$ похідних не мають розривів, а n -я похідна має розриви першого роду, то спектр такої функції убуває зі швидкістю $1/f^{n+1}$.

В даний час відомо велика кількість усереднюються вікон, запропонованих у різний час різними авторами.

У таблиці 3.1 дано параметри деяких часто вживаних вікон. У цій таблиці поряд з рівнем бічних пелюсток h вказані також значення наведеної ширини основної пелюстки за рівнем бічних пелюсток $F_h >$ по рівню 0,71 (тобто при спаді АЧХ на 3 дБ) і за рівнем 0,99 (тобто при спаді АЧХ на 1%), а також швидкість спаду амплітуди бічних пелюсток із зростанням частоти і. Крім того в таблиці наведено номери формул, що описують відповідні вікна.

Таблиця 3.1 – Параметри усереднюються вікон

Вид вікна	Формула	h_L , дБ	F_h	$F_{0,71}$	$F_{0,99}$	ν
Вікно Дирихле	(3.19)	-13,3	0,82	0,44	0,07	$1/f$
Вікно Бартлетта	(3.20)	-26,6	1,63	0,64	0,11	$1/f^2$
Вікно Парзена	(3.21)	-53,1	3,26	0,91	0,15	$1/f^4$
Вікно Ханна	(3.22)	-31,5	1,88	0,71	0,12	$1/f^3$
Вікно Хеммінга	(3.23)	-42,7	1,92	0,65	0,11	$1/f$
Вікно Блэкмана	(3.24)	-58,2	2,83	0,82	0,14	$1/f^3$
Вікно Блэкмана -Херриса	(3.25)	-90,1	3,94	0,94	0,16	$1/f^3$
Плосковершинне вікно	(3.26)	-81,1	4,84	1,86	0,75	$1/f$
Вікно Рисса	(3.27)	-21,3	1,28	0,58	0,10	$1/f^2$
Вікно Коши, $a = 3$	(3.28)	-30,8	3,25	0,67	0,11	$1/f$
Вікно Римана	(3.29)	-26,5	1,51	0,62	0,10	$1/f^2$
Вікно Гаусса, $a = 3$	(3.30)	-55,9	3,34	0,80	0,13	$1/f$

Вікно Дирихле, або природне вікно, - це П-подібна вагова функція $\Pi(t, T)$:

$$g(t) = 1; |t| \leq T/2. \quad (3.19)$$

Передбачається, що вікно Дирихле так само, як і всі інші вікна, описувані в даному параграфі, діє на тимчасовому проміжку $-T/2 \leq t \leq T/2$. За межами цього проміжку $g(t) = 0$. Взагалі кажучи, розмірність вагової функції повинна збігатися з розмірністю частоти. Але зазвичай вагові функції, відповідні усереднюються вікнам, наводяться до виду, коли вони не мають розмірності.

Спектр вікна Діріхле, як відомо, визначається формулою

$$\bar{G}(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

Вікно Бартлетта, або трикутне вікно, - це згортка двох прямокутників половинній тривалості

$$g(t) = \frac{1-|t|}{T/2}; |t| \leq T/2 \quad (3.20)$$

Частотна характеристика фільтра, відповідного цьому вікну, дорівнює квадрату спектру прямокутника тривалістю $T/2$:

$$\bar{G}(f) = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi f T}{2}\right)}{\frac{\pi f T}{2}} \right)^2$$

Вікно Парзена - це згортка двох трикутників половинній тривалості, воно описується співвідношеннями

$$g(t) = \begin{cases} 1 - 24\left|\frac{t}{T}\right|^2 + 48\left|\frac{t}{T}\right|^3, & \text{при } |t| \leq \frac{T}{4}; \\ 2\left(1 - 2\left|\frac{t}{T}\right|\right)^3, & \text{при } \frac{T}{4} < |t| \leq \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Частотна характеристика цього вікна має вигляд

$$\bar{G}(f) = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi f T}{4}\right)}{\frac{\pi f T}{4}} \right)^4$$

З даних таблиці 3.1 видно, що при переході від вікна Діріхле до вікна Бартлетта і далі до вікна Парзена рівень бічних пелюсток знижується, але разом з тим збільшується ширина основної пелюстки.

Вікно Ханна (це вікно називають також Хеннінг) - це один період косінусоїди, піднесеною на величину амплітуди:

$$g(t) = 0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad |t| \leq \frac{T}{2} \quad (3.22)$$

Для цього вікна

$$\bar{G}(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \frac{1}{1 - (fT)^2}$$

Вікно Хеммінга відрізняється від вікна Ханна лише коефіцієнтами

$$g(t) = 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad |t| \leq \frac{T}{2} \quad (3.23)$$

Відповідно і ЧХ цього вікна має подібний

$$\bar{G}(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \left(1 + \frac{0,46}{0,54} \frac{(fT)^2}{1 - (fT)^2} \right)$$

Вікна Блекмана, Блекмана-Херріс і плосковершинних так само, як і вікна Ханна і Хеммінга, описуються кінцевими тригонометричними рядами. Наведемо формули, що описують ці вікна та їх спектри.

Вікно Блекмана:

$$g(t) = 0,42 + 0,5 \cos\frac{2\pi t}{T} + 0,08 \cos\frac{4\pi t}{T}, \quad |t| \leq \frac{T}{2} \quad (3.24)$$

$$\bar{G}(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \left(1 + \frac{0,5}{0,42} \frac{(fT)^2}{1 - (fT)^2} - \frac{0,08}{0,42} \frac{(fT)^2}{4 - (fT)^2} \right)$$

Вікно Блэкмана — Херриса:

$$g(t) = 0,3587 + 0,4883 \cos \frac{2\pi t}{T} + 0,1413 \cos \frac{4\pi t}{T} + 0,0117 \cos \frac{6\pi t}{T}, \quad |t| \leq \frac{T}{2} \quad (3.25)$$

$$\bar{G}(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \left(1 + \frac{0,4883}{0,3587} \frac{(fT)^2}{1 - (fT)^2} - \frac{0,1413}{0,3587} \frac{(fT)^2}{4 - (fT)^2} + \frac{0,0117}{0,3587} \frac{(fT)^2}{9 - (fT)^2} \right).$$

Плосковершинне вікно:

$$g(t) = 1 + 1,933 \cos \frac{2\pi t}{T} + 1,286 \cos \frac{4\pi t}{T} + 0,388 \cos \frac{6\pi t}{T} + 0,032 \cos \frac{8\pi t}{T}, \quad |t| \leq \frac{T}{2} \quad (3.26)$$

$$\bar{G}(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \left(1 + \frac{1,93(fT)^2}{1 - (fT)^2} - \frac{1,29(fT)^2}{4 - (fT)^2} + \frac{0,388(fT)^2}{9 - (fT)^2} - \frac{0,0322(fT)^2}{16 - (fT)^2} \right).$$

Як бачимо, додавання нових членів у тригонометричний ряд, що описує вагову функцію, призводить до розширення основної пелюстки АЧХ фільтра, що реалізує цю ВФ, але разом з тим з'являється можливість підсилити якісь позитивні якості фільтра. Для вікна Блекмана - Херріс коефіцієнти ряду підібрані так, щоб мінімізувати рівень бічних пелюсток. Можливі кілька варіантів коефіцієнтів для цього вікна з різними параметрами h і F_h .

Плосковершинне вікно сконструйовано так, щоб отримати максимально плоску вершину основної пелюстки АЧХ. Це дає можливість використовувати вікно не тільки тоді, коли потрібно виділити постійну складову, але і тоді, коли виділенню підлягає низькочастотна складова вхідного сигналу.

Поряд із згаданими відомо досить велике число і інших усереднюються вікон. Серед них можна, наприклад, відзначити вікно Рісса:

$$g(t) = 1 - \left(\frac{2t}{T} \right)^2, \quad |t| \leq \frac{T}{2} \quad (3.27)$$

Вікно Коши:

$$g(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\alpha t}{T} \right)^2}, \quad |t| \leq \frac{T}{2} \quad (3.28)$$

Вікно Римана:

$$g(t) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{\frac{2\pi t}{T}}, \quad |t| \leq \frac{T}{2} \quad (3.29)$$

Вікно Гаусса:

$$g(t) = \exp\left(-2\left(\frac{\alpha t}{T}\right)^2\right), \quad |t| \leq \frac{T}{2} \quad (3.30)$$

де α — коефіцієнт, змінюючи який, можна в деяких межах змінювати параметри вікна.

Відомі також вікна, отримані шляхом перемноження або згортки простіших вікон.

Всі згадані тут вікна — безперервні функції часу. Однак, як уже говорилося, безперервні вагові функції важко відтворювати на практиці. Тому зазвичай застосовують дискретні або ступінчасті аналоги цих вікон. Перехід до

дискретного, або ступенчатому аналогу ваговій функції мало впливає на параметри АЧХ, наведені в таблиці 1. Але такий перехід призводить до періодичного повторення спектру. Внаслідок цього основний пелюстка АЧХ фільтра буде повторюватися з періодом, рівним частоті дискретизації. Фільтр на основі безперервного вікна придушує всі пульсації сигналу з частотами від f_h і вище. Дискретний, або імпульсний аналог цього фільтра буде мати АЧХ, в якій низькочастотна смуга загородження простягається від f_h до $f_2 - fh$, де f_2 — частота дискретизації.

Якщо використовувати ступінчастий аналог безперервної ВФ, то вихідний спектр ВФ, як ми знаємо, не тільки періодично повторюється, але і множить на функцію

$$\frac{\sin(\pi f T_2)}{\pi f T_2}, \quad (3.31)$$

де $T_2 = 1/f_2$.

Це призводить до зміни форми та зменшення амплітуди повторень основної пелюстки спектру. Загалом, можна так вибрати частоту дискретизації, що ця зменшена амплітуда основної пелюстки не перевищуватиме амплітуду найбільшого з бічних пелюсток, і тоді перехід від безперервної до ступінчастою ВФ не зменшиться ширину смуги загородження фільтра.

Вагові коефіцієнти $a(n)$ дискретної або імпульсної ВФ можуть бути визначені на основі співвідношення, що описує безперервну ВФ $g(t)$:

$$a(n) = g(t_n) \quad (3.32)$$

При визначенні моментів часу t_n , відповідних отсчетах дискретної ВФ, потрібно враховувати дві обставини. По-перше, безперервну ВФ ми розглядали на проміжку від $-T/2$ до $+T/2$, в той час як для дискретних ВФ номер імпульсу змінюється від 0 до $N-1$. По-друге, можливі два способи дискретизації обмеженою за часом безперервної функції. При першому способі проміжок часу T , на якому задана безперервна ВФ, ділиться на N рівних інтервалів T_2 і беруться відліки ВФ, відповідні серединам цих інтервалів. У цьому випадку

$$a(n) = g(t_n) = g\left(\frac{T}{2} \frac{2n - N + 1}{N}\right) \quad (3.33)$$

При другому способі проміжок часу T , де задана безперервна ВФ, ділиться на $N-1$ рівних інтервалів T_2 і знаходяться відліки ВФ, відповідні кордонів цих інтервалів. При цьому амплітуди крайніх відліків, для яких $n = 0$ і $n = N-1$, зменшуються вдвічі. У підсумку отримуємо

$$a(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} g\left(\frac{T}{2} \frac{2n - N + 1}{N - 1}\right), & \text{при } n = 0, n = N - 1; \\ g\left(\frac{T}{2} \frac{2n - N + 1}{N - 1}\right), & \text{при } 0 < n \leq N - 1. \end{cases} \quad (3.34)$$

АЧХ дискретної ВФ може бути знайдена виходячи з формули

$$|G_D(\bar{f})| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \exp(-j2\pi n \bar{f}) \right|, \quad (3.35)$$

де $\bar{f} = fT_2$.

3.1.5 Алгоритм швидкого перетворення Фур'є

Дискретне перетворення Фур'є досить часто застосовується при цифровій обробці інформації. Тому важливим фактором починає виступати час реалізації алгоритму ДПФ на наявній в розпорядженні дослідника обчислювальній машині. Особливо велике значення цей чинник набуває при збільшенні числа відліків аналізованого сигналу N . Дійсно, відповідно до формули дискретного перетворення Фур'є

$$\dot{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j \frac{2\pi nk}{N}\right) \quad (3.36)$$

для визначення N значень послідовності потрібно виробити приблизно N^2 множень і N^2 складань [точніше, $(N-1)^2$ множень і $N(N-1)$ складань]. Число операцій зростає пропорційно квадрату розмірності ДПФ. Таким чином, із зростанням N непропорційно швидко зростає час розрахунку ДПФ на ЕОМ.

Ідея швидкого дискретного перетворення Фур'є (його зазвичай називають просто - швидке перетворення Фур'є - ШПФ; англійський термін - Fast Fourier Transform, FFT) полягає в наступному.

Якщо N не є простим числом і може бути розкладено на множники, процес обчислень можна прискорити, розділивши аналізований набір відліків на частини, обчисливши їх ДПФ і об'єднавши результати.

Послідовність $a(n)$ довжиною N розбивають на дві послідовності $a_1(n)$ і $a_2(n)$ завдовжки $N/2$ кожна і знаходять для них ДПФ відповідно $b_1(k)$ і $b_2(k)$. Природно, що число N при цьому передбачається парним (зазвичай, але не обов'язково). Потім за значеннями $b_1(k)$ і $b_2(k)$ визначають N -точкове ДПФ $b(k)$. Якщо ця остання операція не потребує багато часу, то тоді можна чекати скорочення загальної тривалості обчислень. Дійсно, звичайним методом два ДПФ по $N/2$ точок можна знайти помітно швидше, ніж одне N -точкове ДПФ, так як $(N/2)^2 + (N/2)^2 < N^2$. Подібним чином можна піти і далі: розділити навпіл кожен з послідовностей $a_1(n)$ і $a_2(n)$, знайти для них свої ДПФ і далі шукати ДПФ $b_1(k)$ и $b_2(k)$, виходячи з цих приватних ДПФ.

Очевидно, що такий поділ можна проводити до тих пір, поки ми не отримаємо послідовності, кожна з яких буде складатися всього з двох членів. При цьому, звичайно, потрібно вибрати початково число точок N рівним цілій степені числа 2.

При реалізації ШПФ можливо кілька варіантів організації обчислень в залежності від способу ділення послідовності відліків на частини (проріджування за часом або за частотою) і від того, на скільки фрагментів проводиться розбиття послідовності на кожному кроці (підстава ШПФ).

БПФ із проріджуванням за часом. Ідею ШПФ із проріджуванням за часом (decimation in time, DIT) розглянемо на прикладі ділення набору відліків навпіл.

Отже, нехай N - парне число. Виділимо у формулі дискретного перетворення Фур'є два доданки, що відповідають елементам вихідної послідовності з парними і непарними номерами:

$$\dot{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j \frac{2\pi nk}{N}\right) \quad (3.37)$$

$$\dot{X}(n) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m) e^{-j \frac{2\pi 2m n}{N}} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1) e^{-j \frac{2\pi (2m+1) n}{N}} \quad (3.38)$$

Введемо означення $y(m) = x(2m)$ і $z(m) = x(2m+1)$, а також винесемо з другої суми загальний множник $e^{-j \frac{2\pi n}{N}}$.

$$\dot{X}(n) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y(m) e^{-j \frac{2\pi m n}{N/2}} + e^{-j \frac{2\pi n}{N}} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} z(m) e^{-j \frac{2\pi m n}{N/2}} \quad (3.39)$$

Дві суми в (3.31) являють собою ДПФ послідовностей $\{y(m)\}$ (відліки з парними номерами) і $\{z(m)\}$ (відліки з непарними номерами). Кожне з цих ДПФ має розмірність $N/2$. Таким чином,

$$\begin{aligned} \dot{X}(n) &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y(m) e^{-j \frac{2\pi m n}{N/2}} + e^{-j \frac{2\pi n}{N}} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} z(m) e^{-j \frac{2\pi m n}{N/2}} \\ \dot{X}(n) &= \dot{Y}(n) + e^{-j \frac{2\pi n}{N}} \dot{Z}(n) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Де $\dot{Y}(n)$ і $\dot{Z}(n)$ — ДПФ відповідно послідовностей відліків з парними і непарними номерами:

$$\dot{Y}(n) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y(m) e^{-j \frac{2\pi m n}{N/2}} \quad (3.41)$$

$$\dot{Z}(n) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} z(m) e^{-j \frac{2\pi m n}{N/2}} \quad (3.42)$$

Так як ДПФ розмірності $N/2$ дає лише $N/2$ спектральних коефіцієнтів, безпосередньо використовувати формулу (3.32) можна тільки при $0 \leq n < N/2$. Для решти n ($N/2 \leq n < N$) слід скористатися періодичністю спектру дискретного сигналу (і, відповідно, періодичністю результатів ДПФ):

$$\dot{Y}\left(n + \frac{N}{2}\right) = \dot{Y}(n), \quad (3.43)$$

$$\dot{Z}\left(n + \frac{N}{2}\right) = \dot{Z}(n) \quad (3.44)$$

З урахуванням цього при $n \geq N/2$ формула (3.40) представляється у вигляді

$$\dot{X}(n) = \dot{Y}\left(n - \frac{N}{2}\right) + e^{-j \frac{2\pi n}{N}} \dot{Z}\left(n - \frac{N}{2}\right) = \dot{Y}\left(n - \frac{N}{2}\right) - e^{-j \frac{2\pi n}{N} \left(n - \frac{N}{2}\right)} \dot{Z}\left(n - \frac{N}{2}\right) \quad (3.45)$$

Процес обчислення 8-точкового ДПФ шляхом розбиття його на два 4-точкових ДПФ ілюструється на рисунку 3.2.

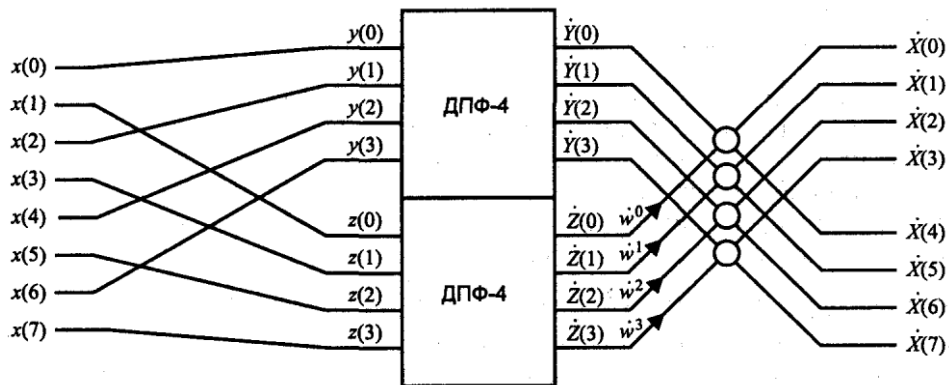


Рисунок 3.2 – Обчислення 8-точкового ДПФ за допомогою двох 4-точкових ДПФ

Блоки, які виконують на рисунку 3.2 об'єднання результатів двох ДПФ, потребують додаткових коментарів. Кожен такий блок має два вхідних і два вихідних сигналу. Один з вхідних сигналів множиться на комплексну експоненту w^k , після чого підсумовується з другим вхідним сигналом і віднімається з нього, формуючи таким чином два вихідних сигналу. це відповідає реалізації формул (3.32) і (3.33). Дана операція отримала назву «метелики» (butterfly). Розшифровка її структури представлена на рисунку 3.3.

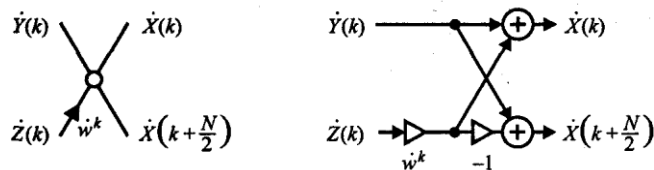


Рисунок 3.3 – Умовне позначення «метелики» ШПФ із проріджуванням за часом і її структурна схема (праворуч) фігурна схема (ліворуч)

Оцінимо кількість операцій, необхідне для обчислення ДПФ зазначеним способом. Кожне з двох ДПФ половинної розмірності вимагає $N^2/4$ операцій. Крім того, при обчисленні остаточних результатів кожен спектральний коефіцієнт $Z(n)$ множиться на експонентний комплексний множник. Це додає ще $N/2$ операцій. Разом виходить $2N/4 + N/2 = N(N+1)/2$, що майже вдвічі менше, ніж при обчисленні ДПФ прямим способом.

Якщо $N/2$ теж є парним числом (тобто якщо N ділиться на 4), можна продовжити описану процедуру, висловивши результат через чотири ДПФ розмірності $N/4$. Це дозволяє ще більше скоротити число необхідних обчислювальних операцій.

Ділити вихідну послідовність можна на будь-яку кількість частин. Таким чином, наведений алгоритм дозволяє зменшити кількість операцій у разі будь-якого N , яка не є простим числом. Ступінь прискорення обчислень залежить від числа фрагментів послідовності і є максимальною при діленні на дві частини, як у розглянутому прикладі.

Найбільший ступінь прискорення обчислень може бути досягнута при $N = 2^k$, в цьому випадку поділ послідовностей на дві частини можна продовжувати до тих пір, поки не вийдуть двоелементні послідовності, ДПФ яких розраховується взагалі без використання операцій множення (досить обчислити суму і різницю двох відліків). Число потрібних при цьому пар

операцій «множення - додавання» можна оцінити як $M \log_2(N)$. Таким чином, обчислювальні витрати порівняно з безпосереднім використанням формули ДПФ зменшуються в $M \log_2(N)$ разів. При великих N це відношення стає вельми велике (наприклад, $1024/\log_2(1024) = 1024$, тобто при $N=1024$ досягається більш ніж 100-кратне прискорення).

БПФ із проріджуванням по частоті. Формули прямого і зворотного ДПФ і відрізняються тільки знаком в показнику експоненти і множником перед сумою. Тому можна отримати ще один варіант алгоритму ШПФ, виконавши перетворення, показані на схемі рис. 1, у зворотному порядку. Цей спосіб обчислень називається проріджуванням по частоті (decimation in frequency, DIF). Покажемо, як отримати опис цього методу на основі формули прямого ДПФ.

$$\dot{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j \frac{2\pi nk}{N}\right) \quad (3.46)$$

Розділимо вихідну послідовність $\{x(k)\}$ на дві наступні один за одним половини (як і в попередньому випадку, N повинно бути парним числом):

$$\dot{X}(n) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(m) e^{-j \frac{2\pi 2m n}{N}} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(m + \frac{N}{2}\right) e^{-j \frac{2\pi (m + \frac{N}{2}) n}{N}} \quad (3.47)$$

З другої суми можна виділити множник

$$e^{-j \frac{2\pi \frac{N}{2} n}{N}} = e^{-j\pi n} = (-1)^n \quad (3.48)$$

Цей множник дорівнює 1 або -1 залежно від парності номера обчислюваного спектрального відліку n , тому далі розглядаємо парні і непарні n окремо. Після виділення множника ± 1 комплексні експоненти в обох сумах стають однаковими, тому виносимо їх за дужки, поєднуючи дві суми:

$$\dot{X}(2k) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x(m) + x\left(m + \frac{N}{2}\right) \right) e^{-j \frac{2\pi mk}{N/2}}, \quad (3.49)$$

$$\dot{X}(2k+1) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x(m) - x\left(m + \frac{N}{2}\right) \right) e^{-j \frac{2\pi mk}{N/2}} e^{-j \frac{2\pi m}{N}} \quad (3.50)$$

Фігурують тут суми являють собою ДПФ суми і різниці половин вихідної послідовності, при цьому різниця перед обчисленням ДПФ множиться на комплексні експоненти $\exp(-j2\pi m/N)$. Кожне з двох використовуваних тут ДПФ має розмірність $N/2$.

Отже, при проріджуванні за частотою обчислення організуються наступним чином:

1 З вихідної послідовності $\{x(k)\}$ довжиною N виходять дві послідовності $\{y(m)\}$ і $\{z(m)\}$ довжиною $N/2$ згідно такими формулами:

$$y(m) = x(m) + x\left(m + \frac{N}{2}\right), \quad (3.51)$$

$$z(m) = \left(x(m) - x\left(m + \frac{N}{2}\right) \right) e^{-j\frac{2\pi m}{N}} \quad (3.52)$$

2 ДПФ послідовності $\{y(m)\}$ дає спектральні відліки з парними номерами, ДПФ послідовності $\{z(m)\}$ - з непарними:

$$\dot{X}(2k) = \dot{Y}(k) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y(m) e^{-j\frac{2\pi km}{N/2}}, \quad (3.53)$$

$$\dot{X}(2k+1) = \dot{Z}(k) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} z(m) e^{-j\frac{2\pi km}{N/2}} \quad (3.54)$$

Все сказане в попередньому розділі про можливість поділу послідовності на інше, відмінне від двох, число частин і про зменшення числа операцій, необхідних для розрахунків, відноситься і до алгоритму з проріджуванням по частоті.

Процес обчислення 8-точкового ДПФ шляхом розбиття його на два 4-точкових ДПФ з проріджуванням по частоті показаний на рисунку 3.4.

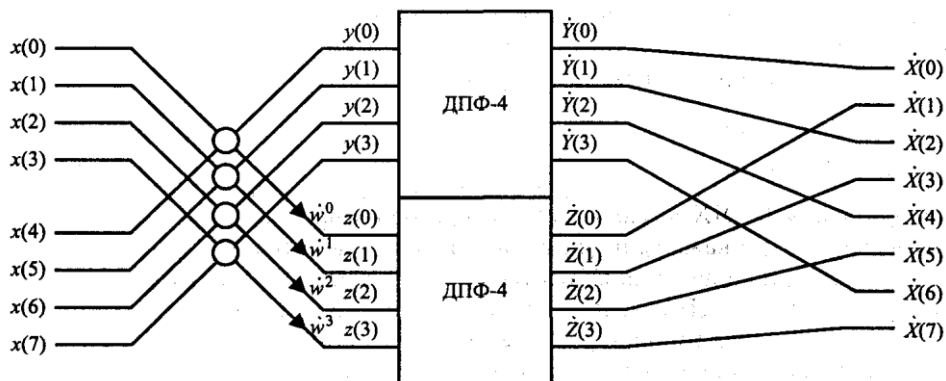


Рисунок 3.4 – Обчислення 8-точкового ДПФ за допомогою двох 4-точкових ДПФ шляхом проріджування по частоті

Оскільки комплексний експонентний множник в даному алгоритмі застосовується до результату віднімання двох сигналів, «метелик» ШПФ із проріджуванням по частоті має дещо іншу структурну схему (рисунок 3.5).

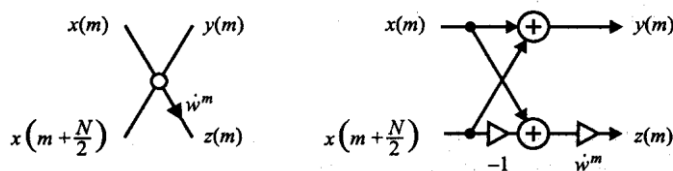


Рисунок 3.5 — Умовне позначення «метелики» ШПФ із проріджуванням по частоті (ліворуч) та її структурна схема (праворуч)

З використанням умовного позначення, показаного на рисунку 3.6, а), на рисунку 3.6 б) показаний повний алгоритм восьмиточкового ШПФ. Приймавши якісь конкретні значення $a(0), \dots, a(7)$, неважко на власному досвіді переконатися, наскільки легше знайти значення $b(0) \dots b(7)$ за цим алгоритмом, ніж безпосередньо по формулі ДПФ.

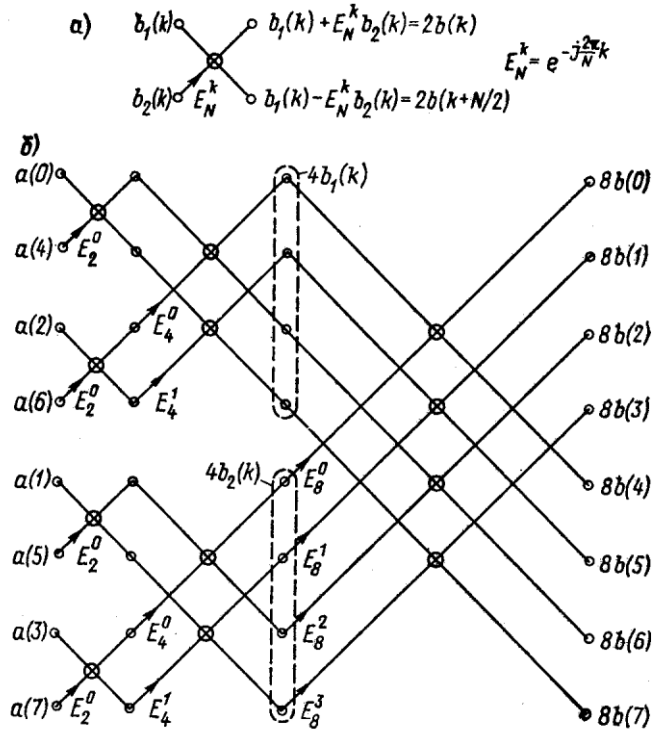


Рисунок 3.6 — Умовне позначення одного перетворення (а) і можливий алгоритм швидкого перетворення Фур'є (б)

Для отримання алгоритму зворотного ШПФ досить поміняти в наведених формулах знак у показниках комплексних експонент і додати на виході (або на вході) поділ на два (в більш загальному випадку - на використовуваний коефіцієнт проріджування).

Підстава алгоритму БПФ. У назвах алгоритмів ШПФ можна зустріти слово «RADIX» («підстава» - у математичному сенсі). Наступне після нього число позначає число фрагментів, на яке розбивається сигнал на кожному етапі проріджування (а також мінімальний розмір «шматочків» вхідного вектора, який досягається в результаті його послідовних разбиений).

В алгоритмах «RADIX-2» розмір аналізованої послідовності повинен бути рівний ступеню двійки, а її половинне поділ проводиться аж до отримання двоелементних послідовностей. Обчислення їх ДПФ не вимагає операцій множення - два спектральних відліку являють собою суму і різницю відліків тимчасових:

$$\dot{X}(0) = x(0) + x(1), \tag{3.55}$$

$$\dot{X}(1) = x(0) - x(1) \tag{3.56}$$

В алгоритмах «RADIX-4» кількість відліків сигналу має дорівнювати ступеня четвірки, при кожному проріджуванні сигнал ділиться на чотири фрагменти, а останньою стадією поділу є чотириелементних послідовності. При обчисленні їх ДПФ множення проводиться тільки на $\pm j$, а таке множення зводиться до взаємної перестановці і уявною частин комплексного числа з зміною знака в однієї з них:

$$\dot{X}(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3), \tag{3.57}$$

$$\dot{X}(1) = x(0) - jx(1) - x(2) + jx(3), \tag{3.58}$$

$$\dot{X}(2) = x(0) - x(1) + x(2) - x(3), \tag{3.59}$$

$$\dot{X}(3) = x(0) + jx(1) - x(2) - jx(3) \tag{3.60}$$

Використання підстави 4 дозволяє відчутно зменшити число виконуваних множень.

Висновки. Найбільше прискорення обчислень завдяки алгоритму ШПФ досягається при довжині аналізованого вектора, рівною мірою двійки. При розкладанні довжини вектора на інші множники прискорення також можливо, хоча і не настільки значне. Якщо довжина вектора - просте число, обчислення спектру може бути виконано тільки по прямій формулою ДПФ.

Завершуючи короткий розгляд ідеї ШПФ, необхідно відзначити наступне:

1 БПФ не є наближеним алгоритмом; за відсутності обчислювальних похибок він дасть точно такий же результат, що і початкова формула ДПФ. Прискорення досягається виключно за рахунок оптимальної організації обчислень;

2 Застосування БПФ має сенс, якщо число елементів у аналізованій послідовності є ступенем числа 2. Як вже зазначалося, деяке прискорення обчислень можливо і при розкладанні N на інші множники, проте це прискорення не настільки велике, як при $N = 2^k$;

3 Алгоритм ШПФ призначений для одночасного розрахунку всіх спектральних відліків $X(n)$. Якщо ж необхідно отримати ці відліки лише для деяких n , може виявитися кращим пряма формула ДПФ або розглянутий далі алгоритм Герцель.

3.2 Виконання роботи

3.2.1 Вихідні дані до лабораторної роботи

Вихідні дані знаходяться в лабораторній роботі № 1 та в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 — Параметри ШПФ і вид вагового вікна

n/n	Спосіб розподілу послідовності на частини	Підстава БПФ	Вид вагового вікна
1	За частотою	2	Вікно Дирихле
2	За часом	2	Вікно Бартлетта
3	За частотою	2	Вікно Парзена
4	За часом	2	Вікно Ханна
5	За частотою	2	Вікно Хэмминга
6	За часом	2	Вікно Блэкмана
7	За частотою	2	Вікно Блэкмана -Хэрриса
8	За часом	2	Плосковершинное вікно
9	За частотою	2	Вікно Рисса
10	За часом	2	Вікно Коши, $a = 3$
11	За частотою	2	Вікно Римана
12	За часом	2	Вікно Гаусса, $a = 3$
13	За частотою	2	Вікно Дирихле
14	За часом	2	Вікно Дирихле
15	За частотою	2	Вікно Бартлетта
16	За часом	2	Вікно Парзена

Продовження таблиці 3.2

17	За частотою	2	Вікно Ханна
18	За часом	2	Вікно Хэмминга
19	За частотою	2	Вікно Блэкмана
20	За часом	2	Вікно Блэкмана –Хэрриса
21	За частотою	2	Плосковершинное вікно
22	За часом	2	Вікно Рисса
23	За частотою	2	Вікно Коши, $a = 3$
24	За часом	2	Вікно Римана
25	За частотою	2	Вікно Гаусса, $a = 3$

3.2.2 Порядок виконання лабораторної роботи

1. Дослідити спектральний склад сигналів і їх суми зазначених у вихідних даних до лабораторної роботи № 1 методом ДПФ. Графіки амплітудних спектрів сигналів відобразити в лінійному і логарифмічному масштабі по амплітуді ($20 \cdot \lg(x/x_0)$, где $x_0=1В$).

2. Дослідити спектральний склад сигналів і їх суми отриманих в результаті згладжування (фільтрації) в лабораторній роботі № 1 методом ШПФ, параметри якого зазначені у вихідних даних до розрахунково-графічної роботи. Порівняти з графіками амплітудного спектра сигналів отриманими за допомогою ДПФ. Графіки амплітудних спектрів сигналів відобразити в лінійному і логарифмічному масштабі по амплітуді ($20 \cdot \lg(x/x_0)$, где $x_0=1В$).

3. Знайти роздільну здатність спектрального аналізу за частотою без використання вагової функції і з використанням вагової функції зазначеної у вихідних даних до розрахунково-графічної роботи. Тестові сигнали: 2-а гармонійних сигналу з рівною амплітудою.

4. Знайти роздільну здатність спектрального аналізу по амплітуді без використання вагової функції і з використанням вагової функції зазначеної у вихідних даних до розрахунково-графічної роботи. Тестові сигнали: 2-а гармонійних сигналу з різною амплітудою і частотою. Різницю частот приймемо в 2 .. 3 величини роздільної здатності по частоті.

5. Виконати зворотне дискретне перетворення Фур'є спектру сигналів пункту 1, виключивши половину коефіцієнтів розкладання (тобто обмеживши ряд нижчими гармоніками). Вказати на відмінності вихідних сигналів і результатів ОДПФ.

3.2.3 Зауваження до виконання роботи

За допомогою ДПФ виконати гармонічний аналіз сигналів зазначених у завданнях № 1 .. № 2. Параметрами гармонійного спектрального аналізу є частота дискретизації F_s , яка визначається теоремою Шеннона-Котельникова і тривалість вікна аналізу, відповідна довжині аналізованої реалізації сигналу N . Довгою вікна N (довжиною ваговій функції або довжиною реалізації) визначається дозвіл аналізатора спектра по частоті: $D_F = F_s/N$. ДПФ обчислюється на частотах $f_k = kD_F$, $k = 0, 1, 2, \dots, N/2$, кратних D_F і званих частотами аналізу ДПФ. Вони відповідають центральним частотам каналів

аналізатора спектра, частотна характеристика яких визначається частотною характеристикою вагової функції.

Наприклад, при $D_F = 2,5$ Гц и $F_S = 500$ Гц $N = 200$ (цифрова обробка сигналів ЕКГ); при $D_F = 50$ Гц и $F_S = 32000$ Гц $N = 640$ (цифрова обробка аудіосигналів) і т. д. Для однозначного дозволу всіх спектральних складових, присутніх в сигналі, потрібно вибрати N таким чином, щоб частоти цих складових були кратні значенням D_F , т. е. збігалися з частотами аналізу ДПФ (ідеальний випадок).

При виконанні завдання № 3 слід враховувати періодичність спектру дискретного сигналу щодо частоти дискретизації і симетричність спектру речового дискретного сигналу щодо половини частоти дискретизації.

3.2.4 Зміст звіту лабораторної роботи

1. Зміст індивідуального завдання. Чисельні значення параметрів.
2. Математичні опису та параметри тестових сигналів, програми їх синтезу на мові програмування.
3. Графіки амплітудних спектрів сигналів в лінійному (графіки повинні відображатися в абсолютній шкалою, В і Гц) і логарифмічному масштабі по амплітуді ($20 \cdot \lg(x/x_0)$, где $x_0=1В$), Отримані на основі застосування ДПФ і ШПФ. Діапазон для відображення графіків в логарифмічному масштабі встановлювати таким, що б зберігалися істотні ознаки спектру (дискретність, наявність і співвідношення амплітуд бічних пелюсток).
4. Графіки амплітудного спектра використовуються при визначенні роздільної здатності спектрального аналізу по частоті. Графіки амплітудного спектра використовуються при визначенні роздільної здатності спектрального аналізу за амплітудою.
5. Графіки сигналів отримані в результаті ОДПФ.
6. Висновки за результатами роботи.

3.3 Питання до захисту лабораторної роботи

1. Речові і комплексні числа. Арифметична і показова форма комплексних чисел. Перетворення форм. Модуль і аргумент. Парні комплексні числа. Формула Ейлера.
2. Скалярний добуток векторів. Ортогональні сигнали. Ортонормированного базиси.
3. Ортогональні і ортонормированного системи функцій. Розкладання в ряд Фур'є, Уолша.
4. Ряд Фур'є. Форми розкладання в ряд Фур'є. Спектр сигналу. Властивості. Приклади розкладання в ряд найпростіших сигналів. Поняття лінійної і кругової частоти, позитивної та негативної частоти, нульової частоти, постійної складової, амплітудного і фазового спектру.
5. Перетворення Фур'є. Властивості.
6. Дискретизація і квантування безперервних сигналів. Теорема про рівномірну дискретизації (Шеннона-Котельникова). Практичний вибір частоти дискретизації.

7. Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ). Властивості. У чому полягає аналіз спектра сигналів, на основі ДПФ і які його особливості? Які види спектрів можуть бути отримані за допомогою ДПФ?

8. Які основні параметри аналізаторів спектра на основі ДПФ? Що розуміється під роздільною здатністю за частотою аналізатора спектра на основі ДПФ? Що таке частоти аналізу ДПФ? Як знайти значення частоти періодичного сигналу з його спектру на основі ДПФ?

9. Яка базова структура аналізатора спектра на основі ДПФ, ДПФ, фільтрів?

10. Що розуміється під частотної характеристикою k -го каналу аналізатора спектра на основі ДПФ і повної частотної характеристикою аналізатора спектра, як вони пов'язані з ваговою функцією?

11. Принципи зменшення обчислювальної складності алгоритму ДПФ. Підстава алгоритму ШПФ.

12. Особливості реалізації алгоритмів ШПФ. Структура та обсяги необхідної пам'яті. Кількість операцій додавання і множення.

13. Алгоритм Гертцеля.

14. Що розуміється під явищем розмиття або просочування спектру при спектральному аналізі? Яка роль вагових функцій при спектральному аналізі? Необхідна довжина ваговій функції при спектральному аналізі періодичних сигналів.

15. Параметри вагових вікон. Вплив вагових вікон на роздільну здатність за частотою і амплітудою. Практичний вибір вагових вікон.

16. Оптимальні вагові вікна. Критерії формування оптимальних вагових вікон.

17. Цілочисельні вагові вікна. Алгоритм оптимізації при зміні числа рівнів квантування.

18. Взаємозв'язок вагових вікон і фільтрації. Частотні характеристики вагових вікон і найпростіших методів згладжування.

4 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

СИНТЕЗ НЕРЕКУРСИВНОГО ФІЛЬТРА І АНАЛІЗ ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИК

Мета роботи: вивчення методики синтезу нерекурсивних цифрових фільтрів (НЦФ) методом вагових функцій і частотних вибірок, реалізація НЦФ на основі дискретної тимчасової згортки (ДВЗ), аналіз характеристик фільтра: імпульсної характеристики (ІХ), передавальної функції та ін, рішення задач оцінки і забезпечення точності НЦФ на основі ДВС.

4.1 Теоретичні відомості

4.1.1 Призначення і типи фільтрів

Фільтри — це електричні ланцюги, цілеспрямованим чином змінюють спектри сигналів. Фільтрація сигналу, тобто зміна його спектру, зазвичай робиться з метою збільшити відношення корисного сигналу до шумів і перешкод або підкреслити (посилити) які-небудь корисні якості сигналу.

Наприклад, при вимірюванні сигналів, одержуваних від термопар, найчастіше доводиться застосовувати фільтри, що ослабляють перешкоди від системи силового електроживлення. Вихідний корисний сигнал термопар становить, як правило, кілька мілівольт, і перешкода від силової мережі, що має частоту 50 Гц, може бути порівнянною з корисним сигналом або навіть перевершувати його. Шуми вимірюваних величин і випадкові похибки вимірювального приладу породжують в загальному випадку розсіювання вимірюваних величин. Тому раціональніше згладити їх перед подальшою обробкою, тобто усереднити. За своєю суттю згладжування, як одна з операцій попередньої обробки інформації, виконує роль цифрового фільтра, який пригнічує високочастотні (швидкі) коливання у вихідному сигналі.

Інший приклад — фільтрація сигналу, одержуваного від датчика моменту, що розвивається двигуном деякого транспортного засобу. Виділяючи за допомогою фільтра постійну складову цього сигналу, ми отримуємо інформацію про середньої потужності двигуна. Якщо ж виділити і проаналізувати високочастотні складові сигналу, то можна зробити висновок про якість роботи системи регулювання, про вібрації, обумовленої працюючим двигуном, і т. п.

Теорія фільтрації сигналів і методи побудови фільтрів в даний час дуже розвинені. Існує дуже велика кількість різних видів фільтрів. Класифікація фільтрів може бути проведена за різними ознаками. Далі розглядаються лінійні стаціонарні фільтри. Ми будемо використовувати при поділі фільтрів по групах чотири різних ознаки, вказані нижче.

Перша ознака - вид вхідного і вихідного сигналу фільтра. Якщо ці сигнали аналогові, то фільтр називається аналоговим, якщо ж сигнали представлені цифровим кодом, то фільтр називається цифровим. Можливі і проміжні варіанти: аналого-цифровий фільтр (вхід аналоговий, вихід цифровий) і цифроаналоговий (вхід цифровий, вихід аналоговий).

Друга ознака — вид частотної характеристики. За цією ознакою фільтри поділяються на такі групи: фільтри нижніх частот (ФНЧ) пропускають низькочастотні складові спектра і затримують високочастотні; фільтри верхніх частот (ФВЧ) пропускають тільки високочастотні складові; фільтри полоснопропускаючі (ФПП) пропускають складові сигналу тільки в певній смузі частот; фільтри смугово -заграждаючі (ФПЗ) пропускають всі складові сигналу, за винятком тих, частоти яких входять у певну смугу; фільтри всепропускаючі (ФВП) пропускають всі без винятку складові сигналу, але змінюють фазові співвідношення між ними. Графіки АЧХ згаданих видів фільтрів показані на рис. 1, а, б, в, г, д. Крім перерахованих, основних за цією ознакою, груп, є й інші різновиди. Наприклад, резонансний фільтр являє собою окремий випадок смугово-проникного фільтру, але з дуже вузькою смугою пропускання (штрихова АЧХ на рис. 1, г). Фільтр-пробка на певну частоту-це ФПЗ з вузькою смугою загородження (штрихова АЧХ на рис. 1, г). Гребінчастий фільтр - це такий фільтр, який має декілька смуг пропускання (рис. 1, е). У назву фільтра входить зазвичай та частотна смуга, яку фільтр пропускає. Так, фільтр нижніх частот - це фільтр, що пропускає нижні частоти сигналу. Тому не зовсім коректні зустрічаються іноді словосполучення типу «фільтрація перешкод». Фільтрується, тобто проходить через фільтр, корисний сигнал, а перешкода затримується, не пропускається.

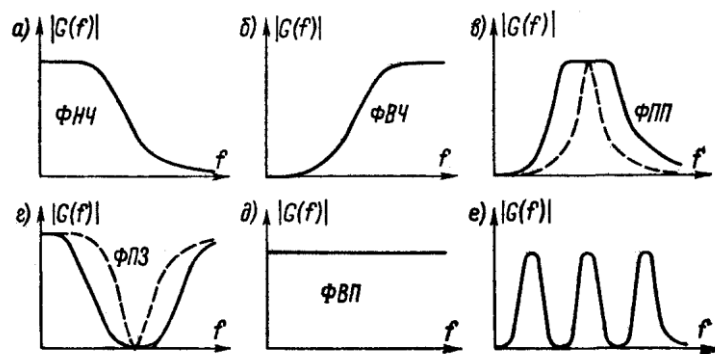


Рисунок 4.1 — Амплітудно-частотні характеристики різних фільтрів

Відзначимо, що в якості базового при аналізі та синтезі фільтрів звичайно приймається фільтр нижніх частот. Саме ФНЧ, як правило, розглядається в різних публікаціях, для нього розробляються методики синтезу. Інші ж види фільтрів можуть бути побудовані на основі ФНЧ. Так, якщо з повного сигналу відняти вихідний сигнал ФНЧ, то в результаті ми отримаємо ФВЧ (рис. 2, а). ФПЗ можна побудувати, якщо включити паралельно ФНЧ і ФВЧ з різними частотами зрізу (рис. 2,б). Для побудови ФПП досить з'єднати послідовно відповідним чином розраховані ФНЧ і ФВЧ.

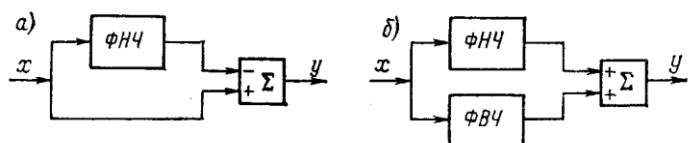


Рисунок 4.2 — Можливі структури фільтра верхніх частот (а) і смугастро-заграждаючого фільтра (б)

Третя ознака-це вид їх імпульсних характеристик. Безперервний фільтр - це фільтр з безперервною ІХ, дискретний фільтр - це фільтр, ІХ якого

представлена набором імпульсів. Нарешті, імпульсний фільтр має ІХ, що складається з послідовності однакових за формою імпульсів кінцевої тривалості різної амплітуди. У принципі можливі фільтри, при класифікації яких за цією ознакою виникають деякі труднощі, але такі фільтри на практиці зустрічаються рідко.

Четверта ознака - це протяжність імпульсної характеристики. Якщо ІХ фінитности, тобто обмежена в часі, то такі фільтри називають фільтрами з кінцевою імпульсною характеристикою або коротко КІХ-фільтрами. Якщо ІХ, хоча й загасає з часом, але має теоретично не обмежену в часі протяжність, то відповідний фільтр називають Біх-фільтром, тобто фільтром з нескінченною імпульсною характеристикою.

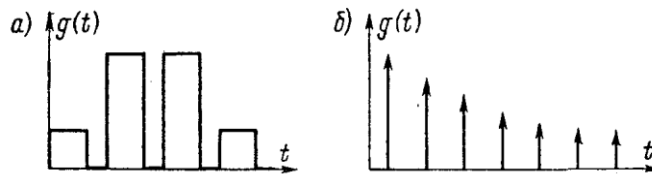


Рисунок 4.3 — Приклади імпульсних характеристик: імпульсного КІХ-фільтра (а) і дискретного Біх-фільтра (б)

4.1.2 Дискретні фільтри

Дискретний фільтр — це довільна система обробки дискретного сигналу, що має властивості лінійності і стаціонарності. Під цими властивостями розуміється: лінійність означає, що вихідна реакція на суму сигналів дорівнює сумі реакцій на ці сигнали, подані на вхід окремо, а стаціонарність - що затримка вхідного сигналу призводить лише до такої ж затримці вихідного сигналу, не змінюючи його форми.

При згладжуванні функції з і-точкам, слід розрізняти дві можливі ситуації:

1 Дані (відліки сигналу) вже все є і для обчислення усередненого відліку ун беруться відліки сигналу ліворуч і праворуч, наприклад формула (1) $\{x_{n-(i-1)/2}, \dots, x_n, \dots, x_{n+(i-1)/2}\}$. Метод застосовується при аналізі раніше отриманих і збережених даних (умовно назвемо цей процес згладжуванням).

2 Дані надходять із зовнішнього пристрою, отже «правих» відліків сигналу на графіку не існує і для обчислення усередненого відліку ун беруться відліки сигналу ліворуч $\{x_{n-i}, \dots, x_n\}$. Даний метод називається (є) «фізично реалізованим», тому що відповідає роботі реальних пристроїв (умовно назвемо цей процес фільтрацією). Слід зазначити, що при розгляді цифрових фільтрів прийнято вважати, що дані надходять і зсуваються ліворуч на право, т.е. нуль графіка функції розташований праворуч.

У загальному випадку дискретний фільтр підсумовує (з ваговими коефіцієнтами) деяку кількість вхідних відліків (включаючи останній) і деяку кількість попередніх вихідних відліків:

$$y(k) = \underbrace{b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m)}_{\text{вхідні відліки}} + \underbrace{a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_n x(k-n)}_{\text{вихідні відліки}}, \quad (4.1)$$

де a_j і b_i – речові коефіцієнти.

Такий фільтр називається рекурсивним. Фільтр, суммируючий тільки деяка кількість вхідних відліків називається нерекурсивним.

Найпростіший нерекурсивний фільтр має постійний вага відліків і фільтрований сигнал визначається як середнє арифметичне значення за N відліками:

$$\bar{y}_n = \frac{y_{n-N+1} + \dots + y_n}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_{n-k} \quad (4.2)$$

Розглянемо структурні схеми пристроїв, що реалізують рівняння, в загальному вигляді описує процес обробки сигналу дискретної системою.

Чисельне виконання згладжування функції по п'яти точках на основі циклічного буфера.

Розглянемо етапи формування значень масиву Pavg (усереднена потужність) із значень масиву P (миттєва потужність). Для розуміння алгоритму досить розібрати кілька його кроків. Малюнки 4.4 та 4.5 відображають 1 і 6 кроки алгоритму.

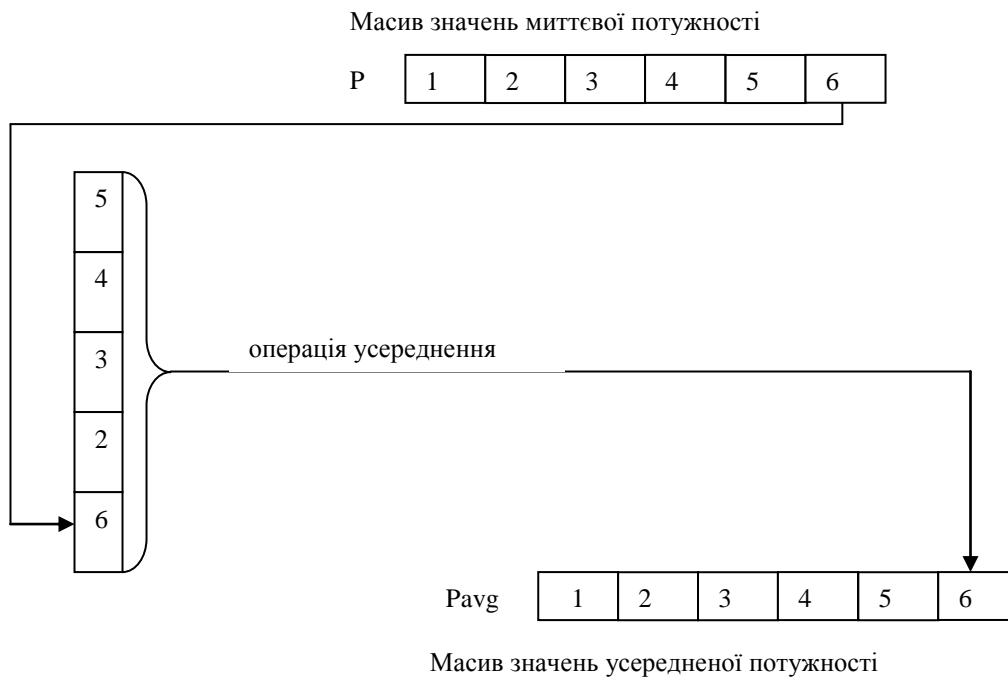
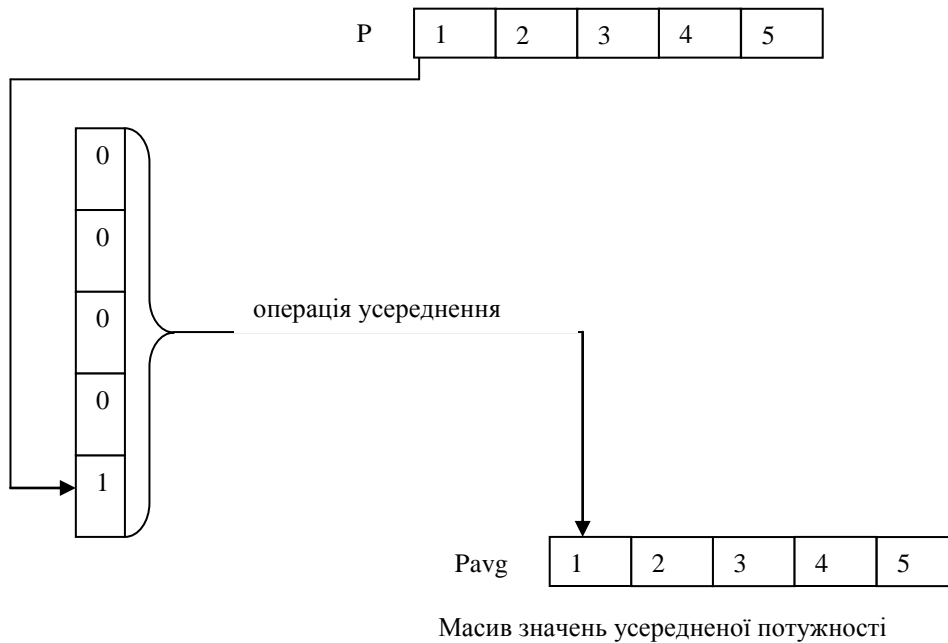


Рисунок 4.4 — Масив Pavg

Рисунок 4.5 — Масив P

4.1.3 Нерекурсивні фільтри

Перш за все слід зазначити, що в загальному випадку при обчисленні чергового вихідного відліку $y(k)$ використовується інформація двох типів: деяку кількість відліків вхідного сигналу і деяку кількість попередніх відліків вихідного сигналу. Ясно, що хоча б один відлік вхідного сигналу повинен брати участь в обчисленнях; в іншому випадку вихідний сигнал не залежатиме від вхідного. На противагу цьому, попередні відліки вихідного сигналу можуть і не використовуватися. Рівняння фільтрації в цьому випадку набуває наступний вигляд:

$$y(k) = \sum_{i=0}^m b_i x(k-i) \quad (4.3)$$

Кількість використовуваних попередніх відліків m називається порядком фільтра.

Структурна схема, що реалізує цей алгоритм, наведена на рис. 6. Деяка кількість попередніх відліків вхідного сигналу зберігається в комірках пам'яті, які утворюють дискретну лінію затримки. Ці відліки множаться на коефіцієнти b_i і підсумовуються, формуючи вихідний відлік $y(k)$.

Зауваження. Згідно властивостям z -перетворення, затримка дискретної послідовності на один такт відповідає множенню її z -перетворення на z^{-1} . Тому елементи пам'яті, які здійснюють таку затримку, позначені на структурній схемі як « z^{-1} ».

Так як при обчисленнях не використовуються попередні відліки вихідного сигналу, у схемі відсутні зворотні зв'язки. Тому такі фільтри називаються нерекурсивними (nonrecursive). Застосовується також термін «трансверсальний фільтр» (від англійського transversal - поперечний).

Імпульсна характеристика нерекурсивного фільтра визначається дуже просто. Підставимо в рівняння (4.3) одиничний імпульс $x_0(k)$ в якості вхідного сигналу:

$$h(k) = \sum_{i=0}^m b_i x_0(k-i) \quad (4.4)$$

Але відлік $x_0(k)$ дорівнює нулю для всіх k , крім $k = i$, коли цей відлік дорівнює одиниці. Тому ми отримуємо дуже простий результат:

$$h(k) = b_k \quad (4.5)$$

тобто коефіцієнти b_i є отсчетами імпульсної характеристики фільтра. Це можна наочно пояснити за допомогою рисунка 4.3. При подачі на вхід одиничного імпульсу він буде переміщатися по лінії затримки, множитися на коефіцієнти b_0, b_1, b_2, \dots і проходити на вихід пристрою (одже всі інші вхідні сигнали суматора при цьому дорівнюють нулю). Очевидно, що в реальному пристрої лінія затримки містить кінцеве число елементів, тому імпульсна характеристика нерекурсивного фільтра також є кінцевою по тривалості. Це зумовило ще одну назву таких фільтрів – фільтри з кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ-фільтри; англійський термін – finite impulse response, FIR).

Зауваження. Внаслідок відсутності зворотних зв'язків будь-який нерекурсивний фільтр є стійким – адже які б не були початкові умови (тобто відліки, що зберігаються в лінії затримки), при відсутності сигналу на вході ($x(k) = 0$) вихідний сигнал (вільні коливання) буде відмінний від нуля протягом не більше ніж m тактів, необхідних для очищення лінії затримки.

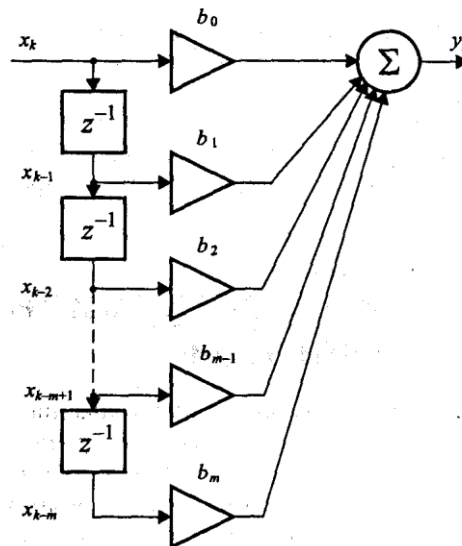


Рисунок 4.6 — Нерекурсивний фільтр

Простота аналізу і реалізації, а також наочна зв'язок коефіцієнтів фільтра з відліками його імпульсної характеристики і абсолютна стійкість призвели до того, що нерекурсивні фільтри широко застосовуються на практиці. Однак для отримання хороших частотних характеристик (наприклад, смугових фільтрів з високою прямокутністю АЧХ) необхідні нерекурсивні фільтри високого порядку – до декількох сотень і навіть тисяч.

4.1.4 Симетричні нерекурсивні фільтри

Дуже важливе значення має той факт, що нерекурсивні фільтри дозволяють легко забезпечити лінійну ФЧХ, а значить, постійні (не залежать від частоти) групову і фазову затримки. Для цього необхідна лише симетрія імпульсної характеристики. Ця симетрія може бути двох типів:

— парна симетрія (even symmetry): $b_k = b_{N-k}$ для усіх $k = 0, 1, \dots, N$;

— не парна симетрія (odd symmetry): $b_k = -b_{N-k}$ для усіх $k = 0, 1, \dots, N$.

Зауваження. Іноді під симетричними увазі тільки характеристики з парною симетрією, а для непарної симетрії використовують термін «антисиметричні».

Групова затримка для симетричних фільтрів не залежить від частоти і дорівнює $N/2$ відліків.

При парному N і непарної симетрії імпульсної характеристики, очевидно, її середній відлік повинен бути рівний нулю: $b_{N/2} = 0$. Крім того, парність або непарність порядку фільтра та наявність того чи іншого типу симетрії накладають певні обмеження на коефіцієнти передачі фільтра на нульовій частоті і на частоті Найквіста. Ці обмеження легко отримати з умов симетрії і формули комплексного коефіцієнта передачі (частотної характеристики) фільтра

$$\dot{K}(\omega) = H(e^{j\omega T}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k T} \quad (4.6)$$

Видно, що частотна характеристика дискретної системи, так само як і спектри дискретизованої сигналів, є періодичною функцією частоти з періодом, рівним частоті дискретизації $\omega_D = 2\pi/T$. Поєднання парності порядку фільтра і типу симетрії дає чотири типи симетричних фільтрів, перерахованих в табл. 4.1 разом із зазначеними обмеженнями значень АЧХ. Наведені в таблиці номери типів часто використовуються в зарубіжній літературі.

Таблиця 4.1 — Типи симетричних фільтрів

Тип	Порядок фільтра	Тип симетрії	$K(0)$	$K(\omega_D/2)$
I	Парна	Парна	Будь-який	Будь-який
II	Не парна	Парна	Будь-який	0
III	Парна	Не парна	0	0
IV	Не парна	Не парна	0	Будь-який

4.1.5 Вибір коефіцієнтів фільтра Найпростіші згладжують фільтри

Лінійне згладжування по трьох точках. Найпростішим способом виконання операції згладжування буде спосіб, коли з трьох вимірних величин y_{n-1}, y_n, y_{n+1} обчислюється згладжуюча величина як середнє арифметичне значення:

$$\bar{y}_n = \frac{y_{n-1} + y_n + y_{n+1}}{3} \quad (4.7)$$

З цього виразу для N вимірних величин формуються $N-2$ згладжених. При згладжуванні по трьох точках усереднена виміряна величина знаходиться в центрі ваги трикутника, побудованого за цим точкам. Зазвичай одноразового згладжування буває недостатньо, і застосовують дворазове згладжування:

$$\bar{\bar{y}}_n = \frac{\bar{y}_{n-1} + \bar{y}_n + \bar{y}_{n+1}}{3} = \frac{1}{9}(y_{n-2} + 2y_{n-1} + 3y_n + 2y_{n+1} + y_{n+2}) \quad (4.8)$$

З цього виразу для N вимірних величин формуються $N-4$ згладжених, що в багатьох випадках є припустимою втратою даних.

Згладжування поліномом третього порядку по п'яти точках

Для того щоб згладити в точці x_n виміряну величину y_n , необхідно через п'ять точок провести поліном третього порядку $P(x)$. Значення цього полінома в точці x_n буде тоді виступати як згладжена виміряна величина \bar{y}_n .

$$P(x_n) = \bar{y}_n \quad (4.9)$$

У системі координат, де ордината проходить через x_n одержимо рівняння кубічної параболи з коефіцієнтами від a до d

$$P(x_{n+k}) = a + b(x_{n+k} - x_n) + c(x_{n+k} - x_n)^2 + d(x_{n+k} - x_n)^3 \quad (4.10)$$

При $k = -2, -1, 0, 1, 2$ парабола повинна згладжувати п'ять вузлових точок (x_{n+k}, y_{n+k}) . Оперуючи цим рівнянням можна обчислити коефіцієнти і відповідно згладжену величину \bar{y}_n

$$\bar{y}_n = \frac{1}{35}(-3y_{n-2} + 12y_{n-1} + 17y_n + 12y_{n+1} - 3y_{n+2}) \quad (4.11)$$

Оперуючи цією формулою, як і у випадку подвійного згладжування за трьома точками, не можна згладити дві точки на початку і дві в кінці галузі вимірювань. У разі, коли неможливо цими значеннями знехтувати, потрібно визначити всі коефіцієнти полінома (4.10) і отримати вирази для обчислення $\bar{y}_{n-2}, \bar{y}_{n-1}, \bar{y}_{n+1}$ і \bar{y}_{n+2} .

4.1.6 Синтез нерекурсивних цифрових фільтрів

Переваги нерекурсивних фільтрів:

1. Абсолютно стійкі;
2. Довільний вид АЧХ.
3. Лінійні ФЧХ;

Недоліки нерекурсивних фільтрів:

1. Великий порядок при високих вимогах до скатів АЧХ.
2. Особливості нерекурсивних фільтрів:
3. Мають кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ-фільтри).
4. Можуть мати постійну затримку сигналу на виході фільтра.

Нерекурсивний фільтр описується:

— передавальною характеристикою

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} a(m) \cdot z^{-m} \quad (4.12)$$

— рівнянням різниці

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M-1} a(m) \cdot x(n-m) \quad (4.13)$$

Під синтезом будемо розуміти алгоритм визначення коефіцієнтів фільтра, що задовольняють поставленим технічним вимогам частотної характеристики.

Основні методи синтезу нерекурсивних фільтрів:

1. Рядів Фур'є (зважування);
2. Частотної вибірки.

4.1.7 Характеристика КІХ-фільтрів

Частотна характеристика КІХ-фільтра:

$$H(\omega) = M(\omega) \cdot \exp \left[j\Theta(\omega) \right] = \sum_{m=0}^{M-1} h(m) \exp \left[j\omega m \right] \quad (4.14)$$

де $M(\omega)$ — амплітудно-частотна характеристика фільтра;

$\Theta(\omega)$ — фазо-частотна характеристика фільтра;

Умова досягнення лінійної фазової характеристики:

$$\Theta(\omega) = \arctan \frac{-\sum_{m=0}^{M-1} h(m) \cos(\omega \cdot m)}{\sum_{m=0}^{M-1} h(m) \sin(\omega \cdot m)} = -\alpha \cdot \omega \quad (4.15)$$

Рішення має відповідати таким умовам:

$$\begin{aligned} \alpha &= (M-1)/2; \\ h(m) &= h \cdot (M-1-m). \end{aligned} \quad (4.16)$$

1. Необхідна симетрична імпульсна характеристика
 2. Порядок фільтра повинен бути непарним
- Можлива реалізація КИХ-фільтрів:
- 3 непарних порядком фільтра
 - 3 антисиметричною імпульсною характеристикою
- Існує 4 види КИХ-фільтрів з лінійної ФЧХ.

4.1.8 Синтез КИХ-фільтрів з використанням рядів Фур'є

Необхідно розрахувати коефіцієнти фільтра для досягнення необхідної частотної характеристики.

Для КИХ-фільтра маємо $a(m) = h(m)$:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M-1} a(m) \cdot x(n-m) = \sum_{m=0}^{M-1} h(m) \cdot x(n-m) \quad (4.17)$$

Частотна характеристика фільтра може бути представлена рядом Фур'є:

$$H(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \exp[-j\omega \cdot m] \quad (4.18)$$

$$h(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) \exp[j\omega \cdot m] d\omega \quad (4.19)$$

Маючи $H(\omega)$, можна отримати відліки $h(m)$.

Проте використання відліків імпульсної характеристики для синтезу КИХ-фільтра пов'язано з двома труднощами:

1. Для досягнення необхідної частотної характеристики необхідно мати нескінченне число відліків імпульсної характеристики.
2. Фільтр фізично нереалізуем, так як імпульсна характеристика починається в негативній області значень.
3. Для отримання кінцевого фільтра покладемо

$$h(m) = 0 \quad \text{при} \quad |m| > (M-1)/2 \quad (4.20)$$

4. Для фізичної реалізованості здійснимо зрушення

$$h(m-\alpha) \quad \text{на} \quad \alpha = (M-1)/2 \quad \text{відліків} \quad (4.21)$$

5. Усічення імпульсної характеристики призводить до похибки в досягненні необхідної частотної характеристики.

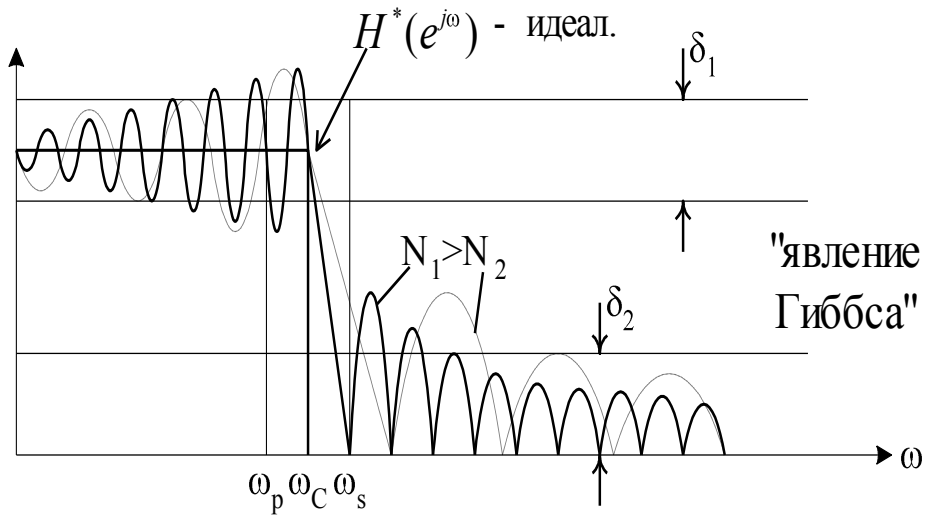


Рисунок 4.7 — Ідеальна та реальна частотна характеристика

6. Ефект виникнення пульсацій називається ефектом Гіббса. Для пояснення ефекту Гіббса розглянемо ідеальний

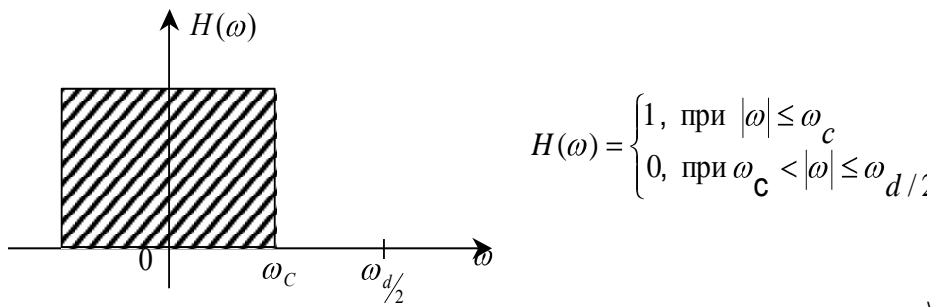


Рисунок 4.8 — Ідеальний ФНЧ

Знайдемо імпульсну характеристику ФНЧ:

$$h(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot \exp[j\omega \cdot m] d\omega = \frac{\sin \omega_c \cdot m}{\pi \cdot m} \tag{4.22}$$

Імпульсна характеристика має вигляд:

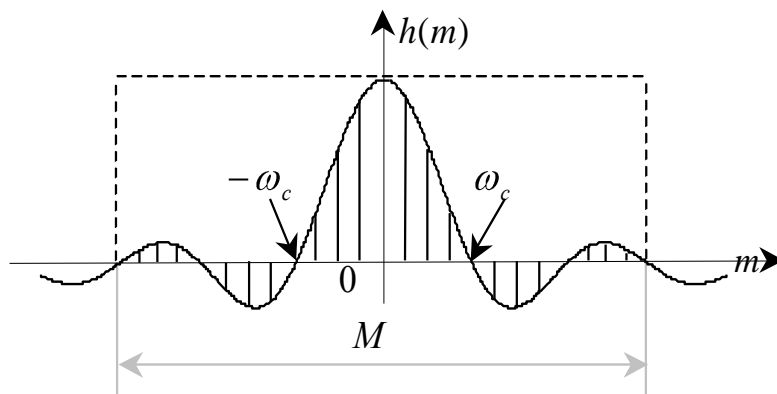


Рисунок 4.9 — Імпульсна характеристика

Якщо взяти відліків імпульсної характеристики, то частотна характеристика буде описуватися виразом:

$$\hat{H}(\omega) = \sum_{m=0}^{M-1} \hat{h}(m-\alpha) \cdot \exp \left[j\omega \cdot m \right], \quad \alpha = (M-1)/2 \quad (4.23)$$

Реальна частотна характеристика буде мати вигляд:

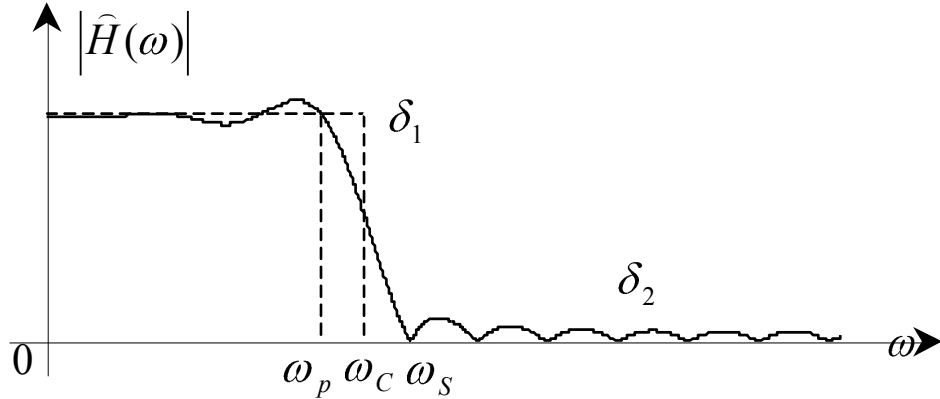


Рисунок 4.10 — Реальна частотна характеристика

Визначимо, від чого залежить перехідна смуга $\Delta\omega = \left| \omega_p - \omega_s \right|$ і рівні пульсацій δ_1 і δ_2 .

Усічення імпульсної характеристики відповідає множенню $h(m)$ на вагову функцію (вікно) виду:

$$w(m) = \begin{cases} 1, & -(M-1)/2 \leq m \leq (M-1)/2 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Множення еквівалентно згортку в частотній області:

$$h(m) \cdot w(m) \Leftrightarrow H(\omega) * W(\omega), \quad (4.24)$$

де $W(\omega)$ — спектральна щільність вікна.

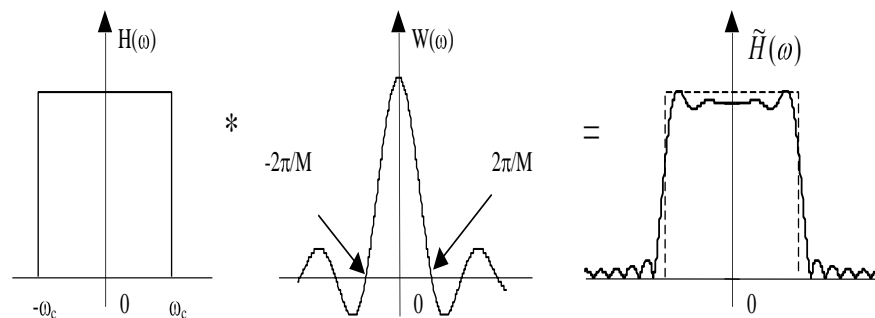


Рисунок 4.11 — Спектральна щільність вікна

1. Чим довше «вікно» (більше порядок фільтра), тим вже буде спектр «вікна»;

2. Рівень бічних складових буде незмінний;
3. При простому усіканні звужується тільки перехідна смуга.

Вагове «вікно» повинно мати мінімальну ширину головного пелюстка спектру, що мінімізує ширину перехідної смуги $\Delta\omega$, і мінімальний рівень бічних пелюстків спектра, що мінімізує рівень пульсацій.

Деякий з видів «вікон» та їх характеристики.

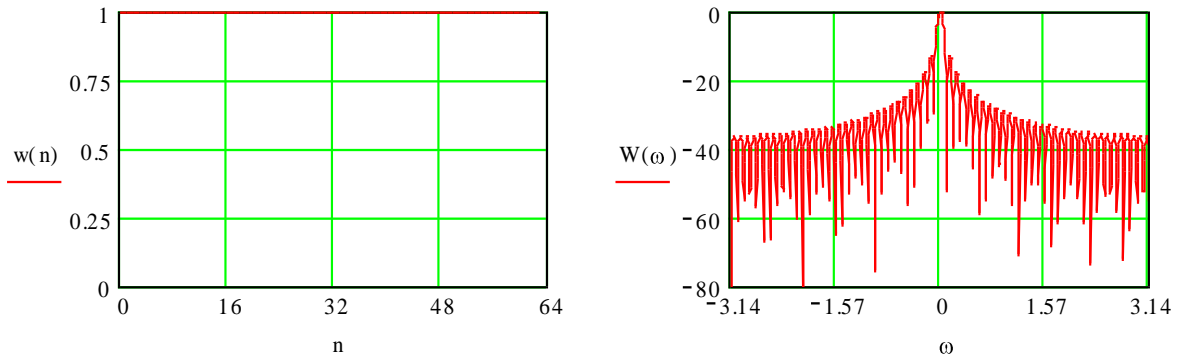


Рисунок 4.12 — Прямокутне вікно

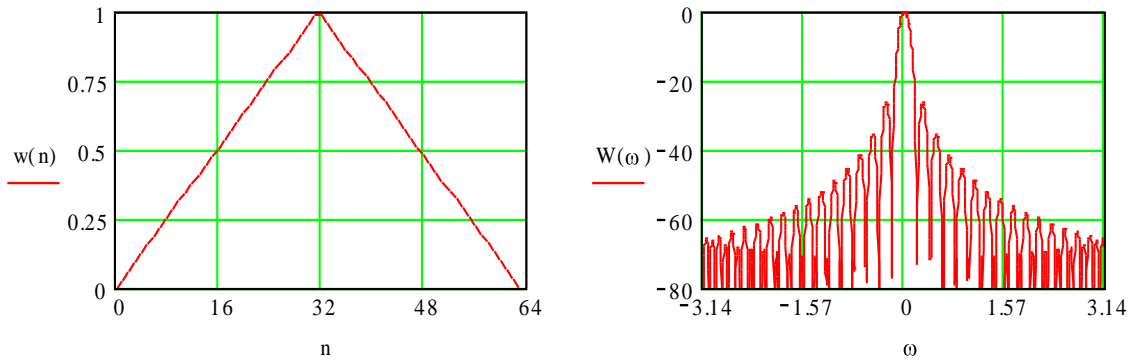


Рисунок 4.13 — Трикутне вікно

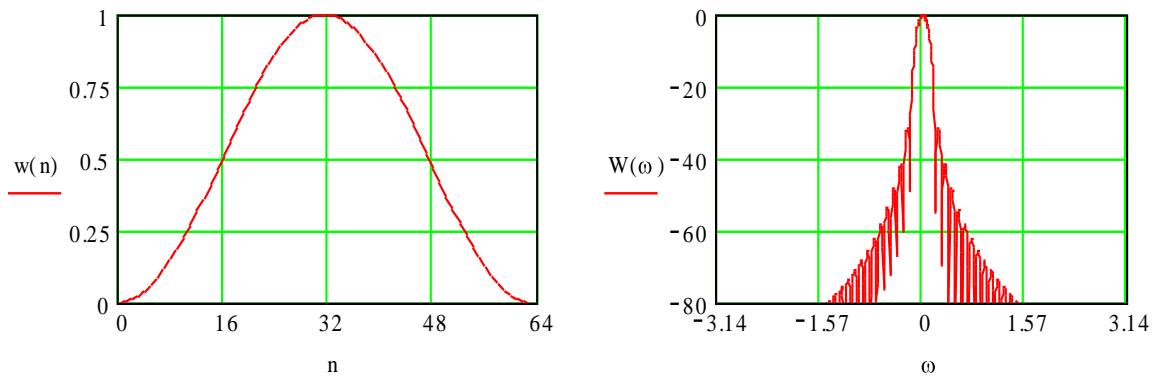


Рисунок 4.14 — Вікно Хана

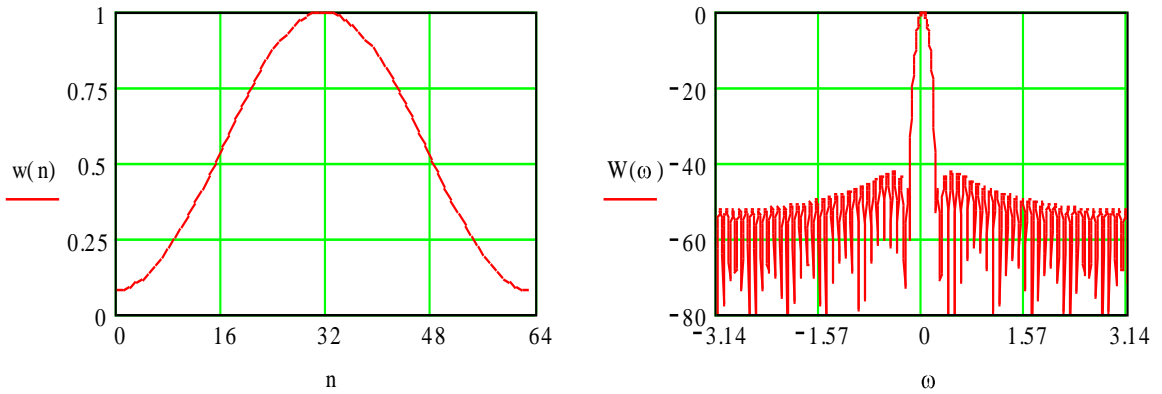


Рисунок 4.15 — Вікно Хеммінга

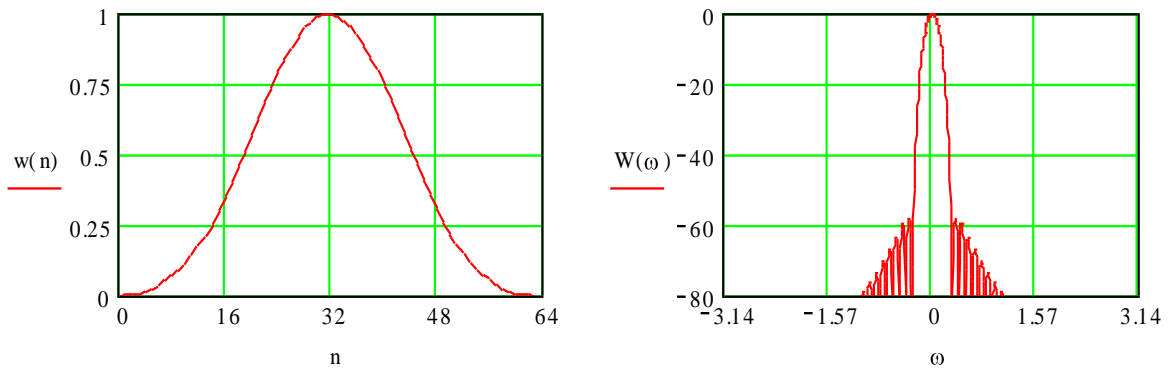


Рисунок 4.16 — Вікно Блекмана

Таблиця 4.2 — Характеристика «Віконних функцій»

Найменування вікна	вагова функція $W(m), m=0 \dots M-1$	Ширина спектра $\Delta\omega$	Рівень бічних пелюсток D_s dB
1 Прямокутне	1	$2\pi/M$	21
2 Трикутне	$1 - \left \frac{2m}{M-1} \right $	$5.6\pi/M$	25
3 Ханна	$0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi m}{M-1}\right) \right]$	$6.2\pi/M$	44
4 Хемінга	$0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi m}{M-1}\right)$	$6.6\pi/M$	53
5 Блекмана	$0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi m}{M-1}\right) +$ $+ 0.08 \cos\left(\frac{4\pi m}{M-1}\right)$	$11\pi/M$	58

Таблиця 4.3 — Аналітичний опис імпульсних характеристик

Тип фільтра	Імпульсна характеристика $h(m) \dots m-0..M-1$
ФНЧ	$h(0) = 2f_c; h(m) = \frac{\sin(2\pi f_c m)}{\pi m}$
ФВЧ	$h(0) = 1 - 2f_c; h(m) = -\frac{\sin(2\pi f_c m)}{\pi m}$
ППФ	$h(0) = 2(f_{c_2} - f_{c_1}); h(m) = \frac{\sin(2\pi f_{c_2} m) - \sin(2\pi f_{c_1} m)}{\pi m}$
ПЗФ	$h(0) = 2(f_{c_2} - f_{c_1}); h(m) = \frac{\sin(2\pi f_{c_1} m) - \sin(2\pi f_{c_2} m)}{\pi m}$

4.1.9 Методика синтезу КІХ-фільтрів з використанням рядів Фур'є

Методику синтезу обговоримо на прикладі проектування фільтра нижніх частот:

1. Вимоги до цифрового фільтру.

Частота пропускання: - $f_p = 1000$ Гц

Частота загородження: - $f_s = 1400$ Гц

Частота дискретизації: - $f_d = 8000$ Гц

Рівень ослаблення сигналу в смузі загородження: - $D_s = 50$ db

2. Обчислення нормативності частот.

Частота пропускання: - $\omega_p := 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_p}{f_d}$ $\omega_p = 0.785$

Частота загородження: - $\omega_s := 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_s}{f_d}$ $\omega_s = 1.1$

Частота зрізу фільтра: - $\omega_c := 2 \cdot \pi \cdot \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$ $\omega_c = 0.942$

3. Визначення порядку фільтра..

Рівень ослаблення сигналу: - $D_s = 50$ db

З таблиці 4.1 вибираємо вікно Хеммінга.

Перехідна смуга фільтра: - $\Delta\omega := |\omega_p - \omega_s|$ $\Delta\omega = 0.314$

порядок фільтра: - $M := \frac{6.6 \cdot \pi}{\Delta\omega}$ $M = 66$

4. Вибір виду фільтра.

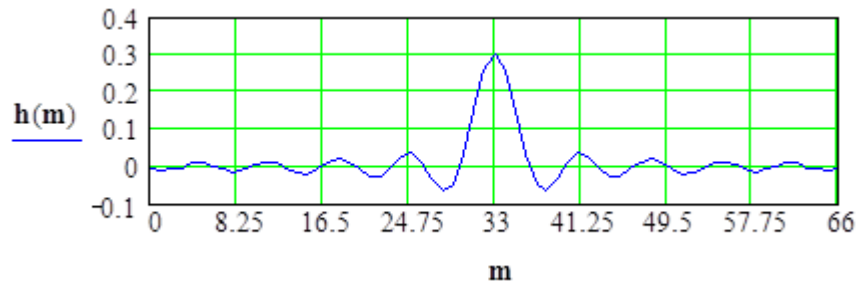
Непарний порядок фільтра: -

Симетрична імпульсна характеристика: $h(m) = h(M-1-m)$

Затримка фільтра: - $\alpha := \frac{M-1}{2}$ $\alpha = 33$

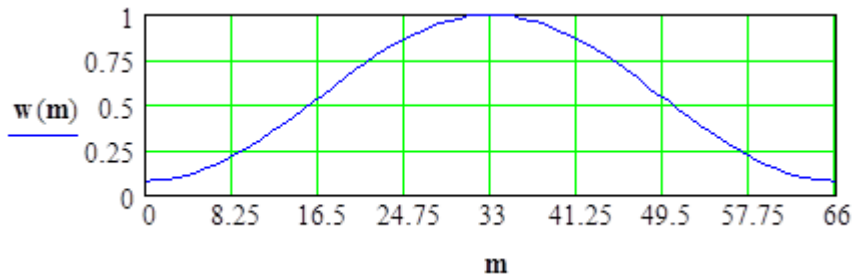
5. Обчислення імпульсної характеристики.

$$m := 0..M-1 \quad h(m) := \text{if} \left[m = \alpha, \frac{\omega_c}{\pi}, \frac{\sin \left[\omega_c \cdot (n - \alpha) \right]}{\pi \cdot (n - \alpha)} \right] \quad (4.25)$$



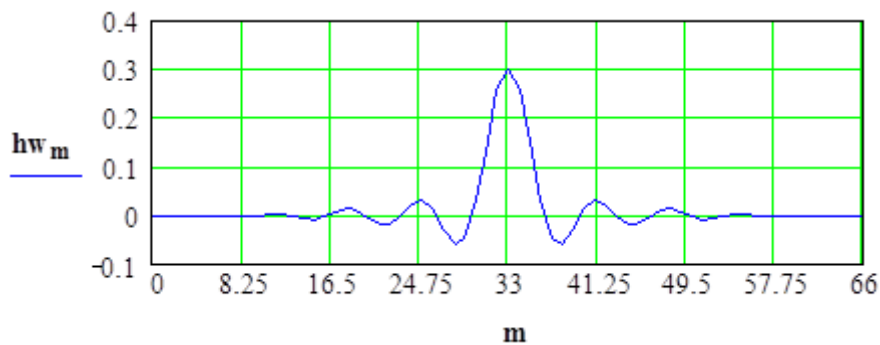
6 Обчислення вагової функції.

$$w(m) := 0.54 - 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot m}{M-1}\right)$$



7 Обчислення зваженої імпульсної характеристики.

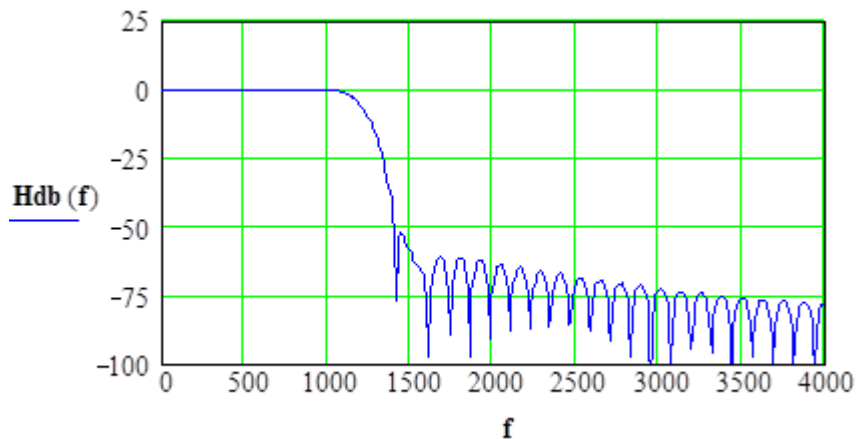
$$hw_m := h(m) \cdot w(m) \quad (4.26)$$



8 Обчислення частотної характеристики.

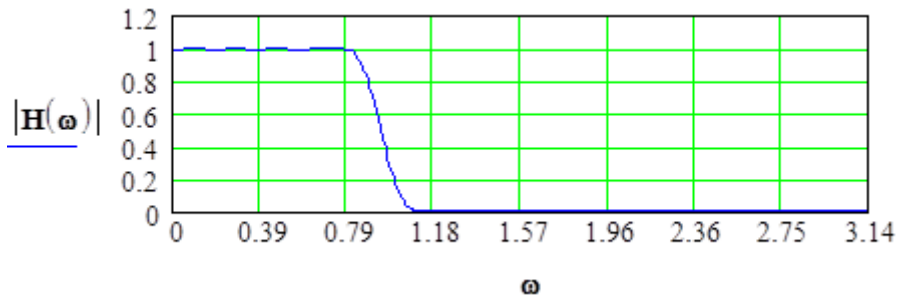
$$f := 0,10 \dots \frac{fd}{2} \quad H(f) := \sum_{m=0}^{M-1} hw_m \cdot e^{-i2\pi \cdot \frac{f}{fd} \cdot m}$$

$$Hdb(f) := 20 \cdot \log\left(\frac{|H(f)|}{|H(0)|}\right)$$



9 Обчислення нормованої частотної характеристики.

$$\omega := 0,001 \cdot \pi \quad H(\omega) := \sum_{m=0}^{M-1} hw_m \cdot e^{-i\omega \cdot m} \quad (4.27)$$



$$\omega_c = 0.942$$

$$\omega_p = 0.785$$

$$\omega_s = 1.1$$

$$f_p = 1000$$

$$f_s = 1400$$

Перевіряємо досягнення вимог частотної характеристики цифрового фільтра. Нехай $H(\omega)$ необхідна частотна характеристика цифрового фільтра. Покладемо, що порядок синтезованого фільтра дорівнює M .

Взявши частотні вибірки $H(k)$ з частотної характеристики $H(\omega)$ синтезованого цифрового фільтра з кроком $d\omega = 2\pi / M$ можна отримати:

$$h(m) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k) \cdot \exp(j \frac{2\pi}{M} km), \quad m=0 \dots M-1 \quad (4.28)$$

де: $H(k)$ комплексні відліки:

$$H(k) = |H(k)| \cdot \exp(j \cdot \Theta(k)}, \quad |H(k)| = M(k). \quad (4.29)$$

1, якщо $k \cdot d\omega$ - в смузі пропускання $M(k) = 0$, якщо $k \cdot d\omega$ - в смузі загородження

Щоб отримати дійсну імпульсну характеристику і частотну характеристику з лінійною фазою необхідно:

- 1 $H(k)$ повинні бути симетричними по амплітуді;
- 2 $\Theta(k)$ лінійну антисиметричного фазу на інтервалі $(0, 2\pi)$.

Фільтр виду -А: $\omega_k = 2\pi \cdot k / M$, M — непарне.

$$\begin{aligned} |H(k)| &= |H(M-1-k)|, \quad k = 1 \dots M-1 \\ \Theta(k) &= -\pi \cdot k(M-1) / M, \quad k = 0 \dots M-1 \end{aligned} \quad (4.30)$$

У зворотному ДПФ (4.7), отримаємо:

$$h(n) = \frac{1}{M} \left[M(0) + 2 \sum_{k=1}^{(M-1)/2} (-1)^k \cdot M(k) \cos \frac{\pi k(1+2n)}{M} \right] \quad (4.31)$$

Реальна частотна характеристика фільтра:

$$H(\omega) = \sum_{m=0}^{M-1} h(m) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot m} \quad (4.32)$$

1. Апроксимація частотної характеристики за допомогою частотних вибірок функцій незадовільна.
2. Зменшення помилки можна отримати за рахунок введення перехідної смуги та взяття в ній частотних вибірок відрізняються від 0 або 1.
3. Зменшення помилки можна досягти за допомогою вагових віконних функцій.

4.1.10 Методика синтезу КИХ-фільтрів з використанням частотних вибірок

Методику синтезу обговоримо на прикладі синтезу фільтра нижніх частот:

1) Вимоги до цифрового фільтру.

Частота пропускання: $f_p = 1000$ Гц

Частота загородження: $f_s = 1400$ Гц

Частота дискретизації: $f_d = 8000$ Гц

Рівень ослаблення сигналу в смузі загородження: $-D_s = 50$ db

2) Обчислення нормативності частот.

частота пропускання: $\omega_p := 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_p}{f_d} \quad \omega_p = 0.785$

частота загородження: $\omega_s := 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_s}{f_d} \quad \omega_s = 1.1$

Частота зрізу фільтра: $\omega_c := 2 \cdot \pi \cdot \frac{\omega_p + \omega_s}{2} \quad \omega_c = 0.942$

3) Визначення порядку фільтра.

Рівень ослаблення сигналу: $D_s = 50$ db

З таблиці 4.1 вибираємо вікно Хеммінга.

Перехідна смуга фільтра: $\Delta\omega := |\omega_p - \omega_s| \quad \Delta\omega = 0.314$

Порядок фільтра: $M := \frac{6.6 \cdot \pi}{\Delta\omega} \quad M = 66$

4) Вибір виду фільтра.

Непарний порядок фільтра:

Симетрична імпульсна характеристика: $h(m) = h(M-1-m)$

затримка фільтра: $\alpha := \frac{M-1}{2} \quad \alpha = 33$

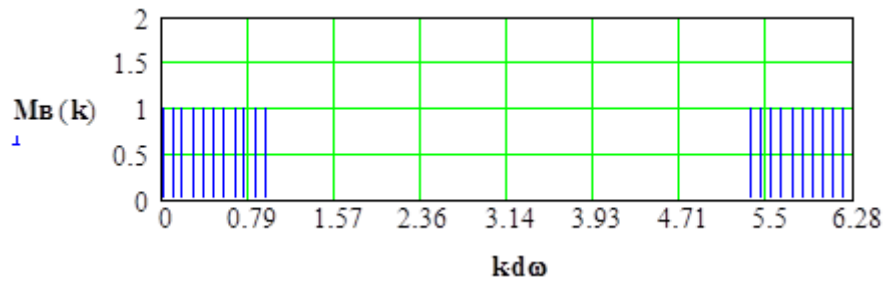
5) Обчислення звітів частотної характеристики.

Визначення кроку вибірки: $d\omega := \frac{2 \cdot \pi}{M} \quad d\omega = 0.094$

Обчислення частотних вибірок: $\omega_c = 0.942$

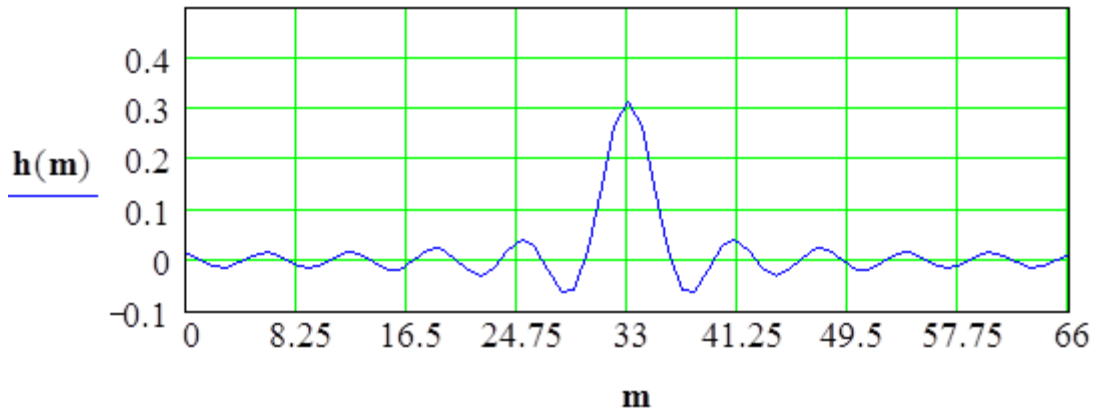
$k := 0..M-1$ $Mg(k) := \begin{cases} 1 & \text{if } k \cdot d\omega \leq \omega_c \\ 0 & \text{if } k \cdot d\omega \geq \omega_c + \pi \end{cases}$

$\Theta(k) := -\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{M} \cdot \alpha$ $H(k) := Mg(k) \cdot e^{i\Theta(k)}$



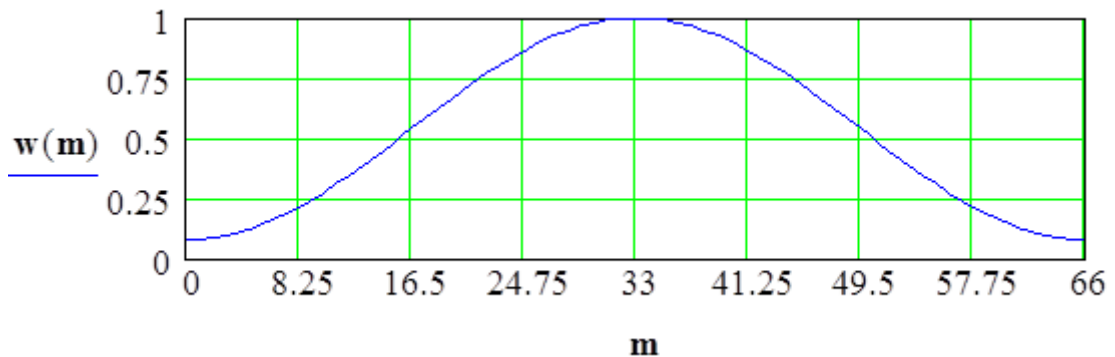
6) Обчислення імпульсної характеристики.

$$m := 0..M-1 \quad h(m) := \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k) \cdot e^{i \frac{2\pi}{M} k \cdot m}$$



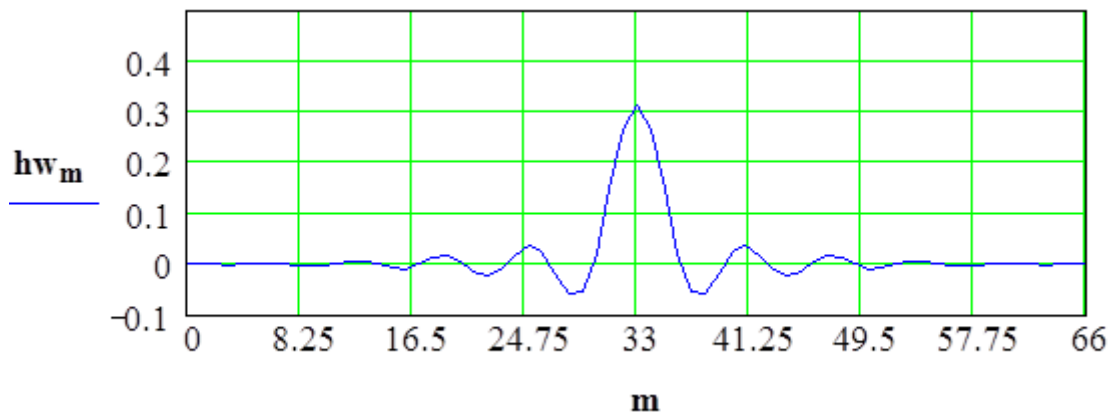
7) Обчислення вагової функції.

$$m := 0..M-1 \quad w(m) := 0.54 - 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot m}{M-1}\right)$$



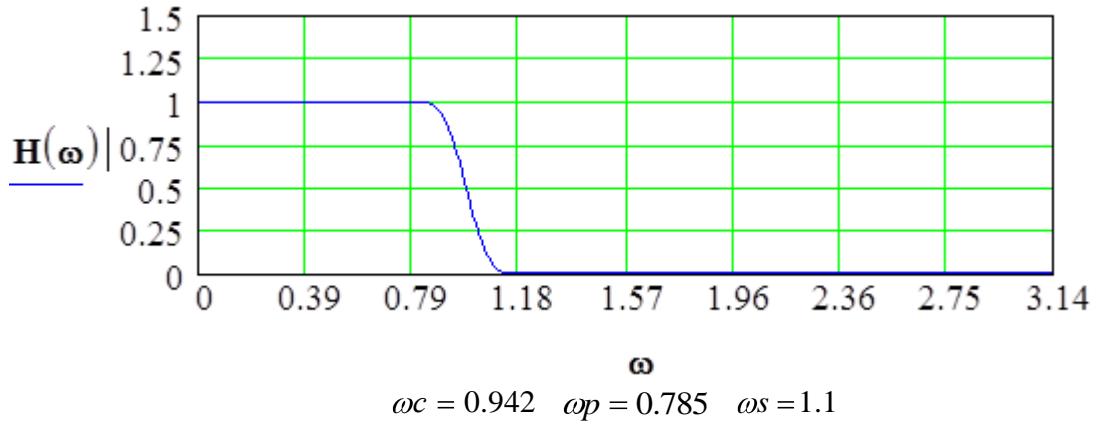
8) Обчислення зваженої імпульсної характеристики.

$$m := 0..M-1 \quad hw_m := h(m) \cdot w(m)$$



9) Обчислення нормованої частотної характеристики.

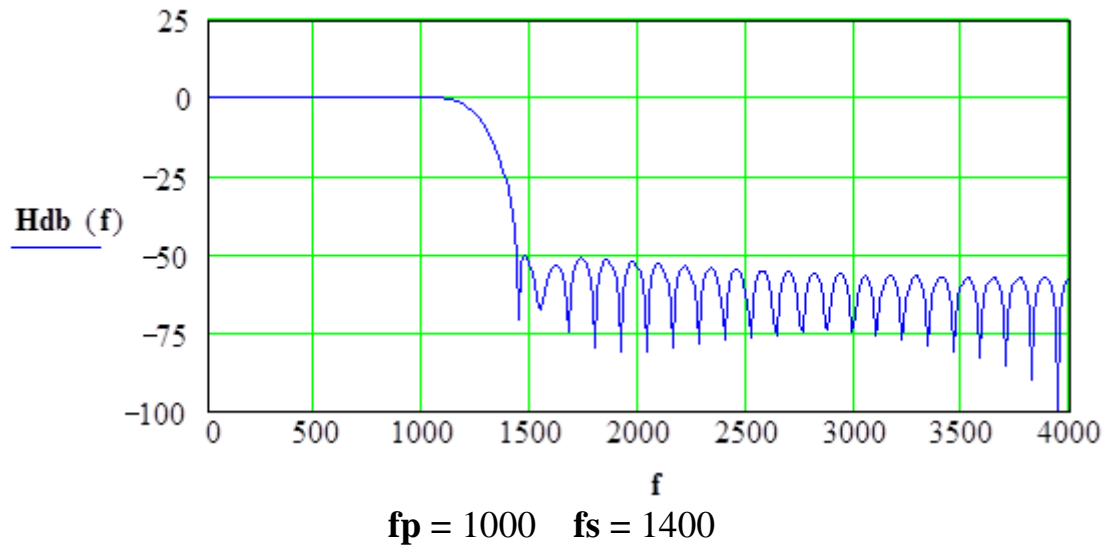
$$\omega := 0,001 \cdot \pi \quad H(\omega) := \sum_{m=0}^{M-1} h w_m \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot m}$$



10) Обчислення частотної характеристики.

$$f := 0,10 \cdot \frac{fd}{2} \quad H(f) := \sum_{m=0}^{M-1} h w_m \cdot e^{-i 2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{fd} \cdot m}$$

$$Hdb(f) := 20 \cdot \log \left(\frac{|H(f)|}{|H(0)|} \right)$$



4.2 Виконання роботи

4.2.1 Вихідні дані до лабораторної роботи

В таблиці 4.4 подані вихідні до лабораторної роботи.

Таблиця 4.4 – Вихідні дані

n/n	метод синтезу фільтра	Тип базового фільтра	Ds, дБ
1	зважування	ФНЧ	10
2	частотних вибірок	ФВЧ	20
3	зважування	ФПЗ	30
4	частотних вибірок	ФНЧ	40
5	зважування	ФВЧ	50
6	частотних вибірок	ФПЗ	10
7	зважування	ФНЧ	20
8	частотних вибірок	ФВЧ	30
9	зважування	ФПЗ	40
10	частотних вибірок	ФНЧ	50
11	зважування	ФВЧ	10
12	частотних вибірок	ФПЗ	20
13	зважування	ФНЧ	30
14	частотних вибірок	ФВЧ	40
15	зважування	ФПЗ	50
16	частотних вибірок	ФНЧ	10
17	зважування	ФВЧ	20
18	частотних вибірок	ФПЗ	30
19	зважування	ФНЧ	40
20	частотних вибірок	ФВЧ	50
21	зважування	ФПЗ	10
22	частотних вибірок	ФНЧ	20
23	зважування	ФВЧ	30
24	частотних вибірок	ФПЗ	40
25	зважування	ФНЧ	50

Тип базового фільтра - фільтр, який використовується для реалізації заданого (смугового). Тобто якщо зазначений тип фільтра НЧ, отже, необхідно визначити структурну схему фільтра ПП, що складається з декількох ФНЧ з різними частотами зрізу і суматорів, які забезпечать отримання бажаної частотної характеристики полоснопропускаючого фільтра (ФПП)

Умовні позначення:

Ds – рівень ослаблення сигналу в смузі загородження.

4.2.2 Завдання до виконання лабораторної роботи

1. Визначити необхідну частотну характеристику смугового нерекурсівние фільтра виділяє гармонійну складову сумарного сигналу (вихідні дані до лабораторної роботи № 1). Тобто гармонійний сигнал вважається корисним, а інші складові є перешкодами і їх необхідно видалити з сумарного сигналу.

2. Визначити структуру системи для реалізації необхідного смугового фільтра із заданого типу фільтра (ФНЧ, ФВЧ, ФПЗ). Визначити коефіцієнти нерекурсівние фільтра. Тип частотної характеристики базового фільтра і метод синтезу заданий у вихідних даних до роботи.

3. Дослідити характеристики базового фільтра і фільтра для виділення гармонійного сигналу.

4. Уявити результати застосування фільтра в тимчасовій і частотній області

4.2.3 Порядок виконання лабораторної роботи

1. По виду спектру гармонійної функції задатися шириною смуги пропускання реалізованого фільтра для виділення гармонійної складової і придушення інших складових (перешкод).

2. Скласти структурну схему фільтра для виділення гармонійної складової виходячи із заданого базового і визначити вимоги до базового (им) Фільри (ам).

3. Визначити необхідний порядок фільтра N_1 . Визначити коефіцієнти фільтра. Реалізувати фільтр і досліджувати його характеристики.

4. Прийняти порядок фільтра $N_2 = N_1/3$. Визначити коефіцієнти фільтра. Реалізувати фільтр і досліджувати його характеристики. Порівняти характеристики.

5. Уявити результати застосування фільтрів для виділення гармонійної складової до заданого сигналу.

4.2.4 Зміст звіту до лабораторної роботи

1. Вихідні дані на синтез ЦФ.
 2. Структурна схема ЦФ.
 3. Результати розрахунків із зазначенням методу синтезу і параметрів синтезу, наприклад:

3.1. Обґрунтування вибору типу вагової функції і розрахунок її довжини.

3.2. Розрахункові графіки ваговій функції та її частотної характеристики.

3.3. Графіки розрахункової імпульсної і частотної характеристик ЦФ, параметри частотної характеристики (в лінійному і логарифмічному масштабі).

3.4. Розрахункові значення масштабних множників.

3.5. Графіки відгуків фільтра на задані впливу.

4. Необхідний обсяг пам'яті і число арифметичних операцій на один відлік сигналу при програмній реалізації ЦФ.

5. Графіки амплітудних спектрів вхідних і вихідних сигналів НЦФ в сталому режимі, отримані методом ДПФ і значення відповідних їм параметрів спектрального аналізу (в лінійному і логарифмічному масштабі). Графіки сигналів у часовій області.

6. Висновки за результатами роботи.

4.3 Питання до захисту лабораторної роботи

1. Що є метою синтезу НЦФ? Чим відрізняються імпульсні характеристики (ІХ) РЦФ і НЦФ?

2. У чому полягає синтез НЦФ методом вагових функцій?

3. Які основні етапи синтезу НЦФ методом вагових функцій?

4. Як знаходиться ІХ НЦФ при синтезі методом вагових функцій?

5. Від чого залежить порядок (довжина ІХ) НЦФ, синтезованого методом вагових функцій?

6. Як виражається усічення ІХ, відповідної заданої ЧХ $H_d(j\omega)$? Як проявляється усічення на якості апроксимації заданої ЧХ $H_d(j\omega)$?

7. До чого призводить усічення ряду Фур'є (ІХ $h_d(n)$) за допомогою вагових функцій кінцевої довжини?

8. Як виражається ЧХ синтезованого фільтра через ЧХ вагової функції і задану ЧХ?

9. Як пов'язані параметри ЧХ фільтра з параметрами вагової функції?

10. Який математичний алгоритм обробки реалізують НЦФ?

11. Як обчислюються відліки вихідного сигналу НЦФ відповідно до алгоритму дискретної вагової згортки (ДВЗ)?

12. Який обсяг пам'яті і обчислень необхідний для реалізації НЦФ на основі ДВС?

13. Чому дорівнює тривалість перехідного процесу в НЦФ?

14. Покажіть, як виконується дискретна тимчасова згортка на прикладі прямокутного сигналу завдовжки $N_1 = 8$ відліків і прямокутної ІХ довжиною $N_2 = 4$.

15. Чому дорівнює тривалість вихідного сигналу НЦФ при вхідній дії кінцевої тривалості N_1 ?

16. Як впливає обмеження розрядності коефіцієнтів НЦФ?

17. За якої умови можуть бути відсутні шуми квантування творів у НЦФ?

18. Які вихідні дані на синтез НЦФ і як вони використовуються в процесі синтезу?

19. Як залежить складність реалізації НЦФ від вимог, що пред'являються до його АЧХ?

20. Який типовий вигляд і параметри ЧХ вагової функції?

21. Які вимоги пред'являються до вагової функції?

22. До чого призводить зменшення довжини вагової функції?

23. Від чого залежить ширина головного пелюстка вагової функції?

24. Від чого залежить рівень бічних пелюстків вагової функції?

25. Як можна зменшити перехідну смугу синтезованого НЦФ?

26. Як можна зменшити згасання в смузі затримування синтезованого НЦФ?

27. З яких умов вибирається тип ваговій функції?
28. Чим відрізняються один від одного різні вагові функції?
29. Як забезпечується необхідне загасання АЧХ фільтра в смузі затримання?
30. Який типовий вид АЧХ НЦФ, синтезованого методом вагових функцій і чим він обумовлений?
31. Як досягається заданий ослаблення АЧХ ап на частотах зрізу НЦФ?
32. Яке ослаблення АЧХ має місце на заданих частотах зрізу НЦФ при синтезі методом вагових функцій?
33. Чому метод вагових функцій відносять до ітераційним методам синтезу ЦФ?
34. Який вигляд має ФЧХ НЦФ і як вона описується математично?
35. Как визначається ГВЗ НЦФ, синтезованого методом вагових функцій?
36. Які вимоги звичайно пред'являються до ФЧХ НЦФ і як вони забезпечуються?

5 САМОСТІЙНА РОБОТА

5.1 Зміст дисципліни

5.1.1 Методи математичного представлення сигналів і завад

Класифікація сигналів і завад. Основи теорії випадкових процесів. Дискретне та швидке перетворення Фур'є. Подання сигналів з обмеженою смугою частот рядом Котельникова.

5.1.2 Кореляційний аналіз детермінованих сигналів

Властивості функції кореляції. Функція кореляції необмежено протяжного сигналу. Зв'язок між кореляційною функцією і спектральними характеристиками сигналу. Ефективна ширина спектра й інтервал кореляції. Дискретна функція кореляції. Взаємна функція кореляції двох сигналів.

5.1.3 Спектральний аналіз сигналів

Подання сигналу у вигляді ряду та інтеграла Фур'є. Співвідношення між спектрами періодичного і неперіодичного сигналів. Властивості перетворення Фур'є. Спектральна щільність потужності випадкових процесів. Співвідношення між спектральною щільністю і кореляційною функцією випадкового процесу.

5.1.4 Вузькосмугові сигнали

Аналітичний сигнал і його параметри. Перетворення Гільберта. Вузькосмугові сигнали. Властивості вузько смугових сигналів.

5.1.5 Призначення й типи фільтрів

Нерекурсивні цифрові фільтри. Рекурсивні цифрові фільтри. Короткі відомості з теорії аналогових фільтрів.

5.1.6 Оптимальне приймання дискретних повідомлень

Статистичні критерії приймання дискретних сигналів. Реалізація приймача Котельникова на кореляторах та узгоджених фільтрах. Основні характеристики і властивості узгодженого фільтра.

5.1.7 Методи підвищення завадостійкості каналів зв'язку

Принципи завадостійкого кодування дискретних повідомлень. Принципи побудови систем передачі з виявленням та виправленням помилок. Завадостійкість оптимального приймання дискретних сигналів. Принципи передачі повідомлень складними сигналами.

5.1.8 Розподіл обсягу самостійної роботи за видами робіт

Розподіл обсягу самостійної роботи за видами робіт указано в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 - Розподіл обсягу самостійної роботи за видами робіт

Вид роботи	Обсяг, годин
1 Робота з конспектом лекцій, методичними вказівками, основною та додатковою літературою	25
2 Підготовка до лабораторних занять	10
3 Підготовка звітів по лабораторним роботам	10
4 Виконання розрахунково-графічної роботи	15
Усього	60

5.2 Екзаменаційні питання

1 Фізична величина. Тип величини, числове значення, одиниці вимірювання.

2 Постійна, змінна, змішана, випадкова величина.

3 Гармонічне коливання. Полігармонічний сигнал.

4 Імпульс. Послідовність імпульсів. Коефіцієнт сквапності та заповнення.

5 Випадкові сигнали.

6 Динамічне представлення довільного сигналу за допомогою функцій включення (Хевісайда) і дельта-функцій (функції Дираку).

7 Визначити розмах коливань величини, максимальне значення величини, середнє значення, середнєвипрямлене значення, діюче значення величини, коефіцієнт форми і амплітуди.

8 Як визначити величину потужності електричного сигналу, величину електричної енергії що виділяється на навантаженні, величину середньої потужності електричного сигналу?

9 Абсолютний і відносний рівень сигналу. По напрузі (струму), по потужності.

10 Диференціювання безперервних функцій. Фізичний і геометричний сенс. Постановка завдання чисельного диференціювання. Особливість завдання чисельного диференціювання.

11 Інтегрування безперервних функцій. Фізичний і геометричний сенс. Постановка завдання чисельної інтеграції. Методи чисельної інтеграції.

12 Постійна, змінна, змішана, випадкова величина.

13 Гармонічне коливання. Полігармонічний сигнал. Імпульс. Послідовність імпульсів. Випадкові сигнали.

14 Як визначити величину потужності електричного сигналу, величину електричної енергії що виділяється на навантаженні, величину середньої потужності електричного сигналу?

15 Скалярний добуток векторів.

16 Ортогональні сигнали. Ортонормовані базиси.

17 АКФ. Властивості. Приклади функцій.

18 ВКФ. Властивості. Приклади функцій.

- 19 Зв'язок кореляційних функцій сигналів і їх спектрів.
- 20 Побудувати КФ шуму.
- 21 Уміти визначати по КФ інтервали кореляції.
- 22 Коли справедливе твердження: некорельовані перерізи незалежні? Коли це твердження несправедливо?
- 23 Чи можна по КФ визначити числові характеристики СП?
- 24 Речові і комплексні числа. Арифметична і показова форма комплексних чисел. Перетворення форм. Модуль і аргумент. Парні комплексні числа. Формула Ейлера.
- 25 Скалярний добуток векторів. Ортогональні сигнали. Ортонормированного базиси.
- 26 Ортогональні і ортонормированного системи функцій. Розкладання в ряд Фур'є, Уолша.
- 27 Ряд Фур'є. Форми розкладання в ряд Фур'є. Спектр сигналу. Властивості. Приклади розкладання в ряд найпростіших сигналів. Поняття лінійної і кругової частоти, позитивної та негативної частоти, нульової частоти, постійної складової, амплітудного і фазового спектру.
- 28 Перетворення Фур'є. Властивості.
- 29 Дискретизація і квантування безперервних сигналів. Теорема про рівномірну дискретизації (Шеннона-Котельникова). Практичний вибір частоти дискретизації.
- 30 Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ). Властивості. У чому полягає аналіз спектра сигналів, на основі ДПФ і які його особливості? Які види спектрів можуть бути отримані за допомогою ДПФ?
- 31 Які основні параметри аналізаторів спектра на основі ДПФ? Що розуміється під роздільною здатністю за частотою аналізатора спектра на основі ДПФ? Що таке частоти аналізу ДПФ? Як знайти значення частоти періодичного сигналу з його спектру на основі ДПФ?
- 32 Яка базова структура аналізатора спектра на основі ДПФ, ДПФ, фільтрів?
- 33 Що розуміється під частотної характеристикою k-го каналу аналізатора спектра на основі ДПФ і повної частотної характеристикою аналізатора спектра, як вони пов'язані з ваговою функцією?
- 34 Принципи зменшення обчислювальної складності алгоритму ДПФ. Підстава алгоритму ШПФ.
- 35 Особливості реалізації алгоритмів ШПФ. Структура та обсяги необхідної пам'яті. Кількість операцій додавання і множення.
- 36 Алгоритм Гертцеля.
- 37 Що розуміється під явищем розмиття або просочування спектру при спектральному аналізі? Яка роль вагових функцій при спектральному аналізі? Необхідна довжина ваговій функції при спектральному аналізі періодичних сигналів.
- 38 Параметри вагових вікон. Вплив вагових вікон на роздільну здатність за частотою і амплітудою. Практичний вибір вагових вікон.
- 39 Оптимальні вагові вікна. Критерії формування оптимальних вагових вікон.

- 40 Цілочисельні вагові вікна. Алгоритм оптимізації при зміні числа рівнів квантування.
- 41 Взаємозв'язок вагових вікон і фільтрації. Частотні характеристики вагових вікон і найпростіших методів згладжування.
- 42 Що є метою синтезу НЦФ? Чим відрізняються імпульсні характеристики (ІХ) РЦФ і НЦФ?
- 43 У чому полягає синтез НЦФ методом вагових функцій?
- 44 Які основні етапи синтезу НЦФ методом вагових функцій?
- 45 Як знаходиться ІХ НЦФ при синтезі методом вагових функцій?
- 46 Від чого залежить порядок (довжина ІХ) НЦФ, синтезованого методом вагових функцій?
- 47 Як виробляється усічення ІХ, відповідної заданої ЧХ $H_d(j\omega)$? Як проявляється усічення на якості апроксимації заданої ЧХ $H_d(j\omega)$?
- 48 До чого призводить усічення ряду Фур'є (ІХ $h_d(n)$) за допомогою вагових функцій кінцевої довжини?
- 49 Як виражається ЧХ синтезованого фільтра через ЧХ вагової функції і задану ЧХ?
- 50 Як пов'язані параметри ЧХ фільтра з параметрами вагової функції?
- 51 Який математичний алгоритм обробки реалізують НЦФ?
- 52 Як обчислюються відліки вихідного сигналу НЦФ відповідно до алгоритму дискретної вагової згортки (ДВЗ)?
- 53 Який обсяг пам'яті і обчислень необхідний для реалізації НЦФ на основі ДВС?
- 54 Чому дорівнює тривалість перехідного процесу в НЦФ?
- 55 Покажіть, як виконується дискретна тимчасова згортка на прикладі прямокутного сигналу завдовжки $N_1 = 8$ відліків і прямокутної ІХ довжиною $N_2 = 4$.
- 56 Чому дорівнює тривалість вихідного сигналу НЦФ при вхідній дії кінцевої тривалості N_1 ?
- 57 Як впливає обмеження розрядності коефіцієнтів НЦФ?
- 58 За якої умови можуть бути відсутні шуми квантування творів у НЦФ?
- 59 Які вихідні дані на синтез НЦФ і як вони використовуються в процесі синтезу?
- 60 Як залежить складність реалізації НЦФ від вимог, що пред'являються до його АЧХ?
- 61 Який типовий вигляд і параметри ЧХ вагової функції?
- 62 Які вимоги пред'являються до вагової функції?
- 63 До чого призводить зменшення довжини вагової функції?
- 64 Від чого залежить ширина головного пелюстка вагової функції?
- 65 Від чого залежить рівень бічних пелюстків вагової функції?
- 66 Як можна зменшити перехідну смугу синтезованого НЦФ?
- 67 Як можна зменшити згасання в смузі затримування синтезованого НЦФ?
- 68 З яких умов вибирається тип вагової функції?
- 69 Чим відрізняються один від одного різні вагові функції?

70 Як забезпечується необхідне загасання АЧХ фільтра в смузі затримання?

71 Який типовий вид АЧХ НЦФ, синтезованого методом вагових функцій і чим він обумовлений?

72 Як досягається заданий ослаблення АЧХ ап на частотах зрізу НЦФ?

73 Яке ослаблення АЧХ має місце на заданих частотах зрізу НЦФ при синтезі методом вагових функцій?

74 Чому метод вагових функцій відносять до ітераційним методам синтезу ЦФ?

75 Який вигляд має ФЧХ НЦФ і як вона описується математично?

76 Як визначається ГВЗ НЦФ, синтезованого методом вагових функцій?

77 Які вимоги звичайно пред'являються до ФЧХ НЦФ і як вони забезпечуються?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш. шк., 1988. – 448с
2. Бахвалов Н.С. Численные методы.
3. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1985. – 312с. (1990. – 256с.)
4. Гутников В.С. Фильтрация измерительных сигналов. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 192 с.: ил.
5. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2-х томах. Пер. с франц. М.: Мир, 1983
6. Цифровая обработка сигналов. А.Б.Сергиенко – СПб.: Питер, 2003. – 608с.
7. Шрюфер Е. Обробка сигналів: цифрова обробка дискретних сигналів.