МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКТ УКРАЇНИ

ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФІЗИКА

Методичні вказівки до практичних занять
по темі «**Елементи квантової механіки**»
для студентів спеціальності «**Електроніка**»
факультету електронних та інформаційних технологій

Обговорено і рекомендовано на
засіданні кафедри ІВТ,
метрології та фізики
протокол № 6 від 30.01.17 р.

Чернігів ЧНТУ 2017

ФІЗИКА. Методичні вказівки до практичних занять по темі «Елементи квантової механіки» для студентів спеціальності «Електроніка» факультету електронних та інформаційних технологій. Укл.: Ковтун А.О.– Чернігів, ЧНТУ, 2017 – 18 с.

Укладач: Ковтун Анатолій Олексійович, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Відповідальний за випуск: Приступа А.Л., завідувач кафедри інформаційно-вимірювальних технологій, метрології та фізики, кандидат технічних наук, доцент

Рецензент: Журко В.П. ст..викладач кафедри кафедри інформаційно-вимірювальних технологій, метрології та фізики Чернігівського національного технологічного університету

ЗМІСТ

ХВИЛІ ДЕ БРОЙЛЯ

Довжина хвилі хвильового процесу, що виникає при русі частинки, визначається за формулою де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p}; \tag{1}$$

де p – імпульс частинки;

h – постійна Планка.

У разі, якщо швидкість її руху значно менша швидкості світла у вакуумі ($\upsilon \ll c$),тобто в класичному випадку, імпульс виражають формулою:

$$p = m_o \upsilon; \tag{2}$$

m_o – маса спокою частинки.

Довжина хвилі де Бройля в цьому випадку:

$$\lambda = \frac{h}{m_o \upsilon}; \tag{3}$$

У релятивістському випадку, тобто коли швидкість частинки порівняна зі швидкістю світла у вакуумі, імпульс дорівнює:

$$p = m\upsilon = \frac{m_o \upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \tag{4}$$

Таким чином:

$$\lambda = \frac{h}{m_o \upsilon} \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \tag{5}$$

Часто при вирішенні завдань зручніше імпульс частинки виражати через її кінетичну енергію Т.

В класичному (нерелятивістському) випадку:

$$p = \sqrt{2 m_o T}; \tag{6}$$

Для релятивістського випадку

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2E_o)}; \tag{7}$$

E_o – енергія спокою частинки ($E_o = m_o c^2$).

Підставивши (6) та (7) в формулу (1) отримаємо вирази для довжини хвили де Бройля в релятивістському та класичному випадках відповідно:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T+2E_o)}}; \tag{8}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_oT}}; \tag{9}$$

В релятивістському випадку кінетична енергія частинки T більше її енергії спокою E_o, або порівняна з нею за величиною, в класичному – $T << E_o$.

Задача 1.

Електрон рухається зі швидкістю 200 $\frac{\text{Мм}}{\text{с}}$. Визначити довжину хвилі де-Бройля.

В умові задачі сказано, що електрон рухається зі швидкістю $2 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$. Ця швидкість порівнянна по своїй величині зі швидкістю світла в вакуумі $c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$, тому при вирішенні задачі нам необхідно враховувати зміни маси електрона зі швидкістю, тобто ми маємо релятивістський випадок.

Скористаємося формулою /5/ і визначимо довжину хвилі де-Бройля.

$$\lambda = \frac{h}{m_0 \upsilon}\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

$$\lambda = \frac{6.63 \cdot 10^{-34}}{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^8}\sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\right)^2}\ \text{м} = 2{,}7 \cdot 10^{-12}\ \text{м} = 2{,}7\text{нм}.$$

Задача 2.

Визначити довжину дебройлівської хвилі електронів, бомбардуючих антикатод рентгенівської трубки, якщо короткохвильова межа суцільного рентгенівського спектру становить 3 нм.

Суцільний рентгенівський спектр виникає внаслідок гальмування електронів, розігнаних в трубці електричним полем, при їх ударах об антикатод. Існування короткохвильової межі суцільного рентгенівського спектру випливає з квантової природи випромінювання. Дійсно, підлітаючи до антикатоду, електрон має кінетичну енергію Т, рівну роботі, виконаній силами електричного поля, тобто.

$$T = eU$$

де e - заряд електрона;

U – прискорююча різниця потенціалів.

При ударі об антикатод енергія електрона Т частково або повністю перетворюється в квант енергії $h\nu$.

Найбільшій частоті /найменшій довжині хвилі/ відповідає випадок, коли вся енергія Т перетворюється в квант $h\nu_0$. Згадана частота /довжина хвилі/ називається короткохвильовою межею суцільного рентгенівського спектру.

Знаючи з умови згадану межу, визначимо кінетичну енергію електронів в рентгентрубці:

$$T = eU = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

$$T = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{3 \cdot 10^{-9}}\ \text{Дж} = 6{,}62 \cdot 10^{-17}\text{Дж} = 4{,}14 \cdot 10^{2} eB$$

Ця енергія набагато менша енергії спокою електрона /0,51МеВ/, отже для визначення довжини дебройлівської хвилі можна скористатися формулою (9) для нерелятивістського випадку:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0T}}\ ;$$

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 4{,}14 \cdot 10^{2} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}}\ \text{м} = 6 \cdot 10^{-11}\text{м} = 6 \cdot 10^{-2}\text{нм}.$$

Задача 3.

На грань деякого кристалу падає під кутом 60° до поверхні паралельний пучок електронів, що рухаються з однаковою швидкістю. Визначити швидкість електронів, якщо вони мають інтерференційне відбиття першого порядку. Відстань між атомними площинами кристалу 0,2 нм.

Дифракція електронів від кристалічної гратки цілком аналогічна дифракції рентгенівських променів довжина хвилі яких дорівнює довжині хвилі де-Бройля для електронів. Тому виходячи з даних умови цієї задачі за допомогою формули Вульфа-Брегга, можна визначити дебройлівскую довжину хвилі:

$$2d\sin\theta = k\lambda; \quad k = 0,1,2,\ldots$$

За умовою: $\theta = 60^{\circ}$, d = 0,2 *нм*, k = 1.

$$\lambda = \frac{2d\sin\theta}{k}; \lambda = \frac{2\cdot 10^{-10}\sqrt{3}}{2}\ м = 3{,}46\cdot 10^{-10} м$$

Довжина хвилі де-Бройля , як бачимо, значно більша комптонівської довжини хвилі для електрона ($\lambda \gg \lambda_o$)…. І тому зрозуміло, що маємо випадок нерелятивістський (класичний) і тому скористуємось формулою:

$$\lambda = \frac{h}{m_0\ v};$$

звідси:

$$v = \frac{h}{m_0\ \lambda};$$

$$v = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 3{,}46\cdot 10^{-10}}\ м = 2\cdot 10^{6}\frac{м}{с}$$

<u>Задача 4.</u>

Знайти довжину хвилі де-Бройля для протона, що пройшов прискорюючу різницю потенціалів 1кВ і 1 МВ.

У таких в умовах прискорення протон набуває енергію 1 кеВ і 1 МеВ відповідно, що набагато менше його енергії спокою /E_0 = 938 МеВ/. Таким чином маємо нерелятивістський випадок, а тому скористаємося формулою.

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0T}}; T = eU;\ T_1 = 1кеВ;\ T_2 = 1\ МеВ.$$

$$\lambda_1 = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}}{\sqrt{2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-16}}}\ м = 0{,}908\cdot 10^{-12} м = 908\ фм$$

$$\lambda_2 = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}}{\sqrt{2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-13}}}\ м = 2{,}85\cdot 10^{-14} м = 28{,}7\ фм$$

<u>Задача 5.</u>

Обчислити довжину хвилі де-Бройля для електрона, що пройшов прискорюючу різницю потенціалів 1,02 МВ.

Визначимо кінетичну енергію Т, придбану електроном в електричному полі з різницею потенціалів υ = 1,02 МВ.

$$T = eU, \qquad T = 1{,}02\ МэВ$$

Бачимо що, кінетична енергія електрона Т виявилася більше його енергії спокою $E_0 (E_0 = 0{,}51 MeB.)$

Тому для визначення довжини хвилі де-Бройля слід користуватися формулою (8), тому що електрон при цих умовах є релятивістською частинкою.

$$\lambda = \frac{\mathrm{hc}}{\mathrm{T(T+2E_0)}} \qquad \text{За умовою } T = 2E_0\text{, таким чином } \lambda = \frac{\mathrm{hc}}{\mathrm{T\ \ 2}}$$

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}02 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}41} = 8{,}65 \cdot 10^{-13} м = 865\ фм$$

СПІВВІДНОШЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

Співвідношення невизначеностей є фундаментальним положенням квантової механіки. Воно вказує не те, що точне і одночасно визначення координати і швидкості (або імпульсу) частинки неможливе; неминучі неточності при одночасному визначенні координати та імпульсу частинки такі, що їх добуток завжди більше або дорівнює $\frac{h}{2\pi}$, тобто:

$$\Delta p_x \Delta x \gg\geq \frac{h}{2\pi} \qquad (10)$$

$$\Delta p_y \Delta y \gg \frac{h}{2\pi} \qquad (11)$$

$$\Delta p_z \Delta z \gg \frac{h}{2\pi} \qquad (12)$$

Значення координати та імпульсу одночасно є невизначеними не тому, що їх неможливо точно виміряти, а тому, що ця невизначеність є властивістю самої матерії, тобто положення частинки та її імпульс не можуть існувати одночасно як точно визначені величини. Співвідношення невизначеностей є наслідком об'єктивно існуючого дуалізму частинок мікросвіту – наявність в них корпускулярних та хвильових властивостей. Співвідношення невизначеностей вказує на об'єктивно існуючі обмеження в користуванні класичними поняттями «координата» та «імпульс».

Подібне співвідношення існує між енергією і часом:

$$\Delta E \cdot \Delta t \gg \frac{h}{2\pi} \qquad (13)$$

ΔE – невизначеність в значенні енергії, $\cdot\ \Delta t$ – час, протягом якого мікрочастинка має енергію $E \pm \Delta E$.

<u>Задача 1.</u>

Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей мінімальну кінетичну енергію T_{min} електрона, що рухається всередині сферичної області діаметром $d = 0{,}1$ нм.

Хай початок прямокутної системі координат знаходиться в центрі згаданої сферичної області.

Скористуємося співвідношенням невизначеностей (10):

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \gg \frac{h}{2\pi} \tag{10}$$

За умовою величина сферичної області руху дорівнює d, а тому величину невизначеності по координаті уздовж вісі x можна взяти рівної $\frac{d}{2}$.

Аналогічно можна б було міркувати і відносно напрямків осей у та z.

Напишемо співвідношення невизначеностей у вигляді:

$$\frac{d}{2} \cdot \Delta p_x \gg \hbar; \ \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Цілком логічним можна вважати справедливим наступний ланцюжок:

$$\Delta p_x \ll \Delta p \ll p$$

Підставивши замість Δp_x величину р в співвідношення невизначеностей, ми його не порушимо.

Таким чином: $\frac{d}{2} \cdot p \gg \hbar.$

Уподібнюючи дану в умові завдання сферичну область атому, скористаємося для визначення імпульсу електрона виразом (6) вважаючи випадок нерелятивістським, тому:

$$\frac{d}{2} \sqrt{2m_0T} \gg \hbar;$$

$$\frac{d}{2} \sqrt{2m_0T} \gg \frac{h}{2\pi};$$

$$d \sqrt{2m_0T} \gg \frac{h}{\pi};$$

Перейшовши до рівності, оцінимо мінімальне значення кінетичної енергії електрона:

$$\pi d \sqrt{2m_0T_{min}} = h,$$

$$T_{min} = \frac{h^2}{2\pi^2 d^2 m_0};$$

$$T_{min} = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot (3{,}14)^2 (10^{-10})^2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \text{ еВ} \approx 15 \text{ еВ}$$

<u>Задача 2.</u>

Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити енергетичний рівень електрона в незбудженому атомі водню. Прийняти лінійні розміри атома $l \sim 0{,}1$ нм.

Лінійні розміри області руху електрона $l{\sim}0{,}1$ нм. На практиці невизначеність Δx визначають так:

$$\Delta x = \frac{l}{2};$$

Цілком логічно, що Δp_x не повинно перевищувати $p = \sqrt{2m_0T}$, де Т – кінетична енергія електрона.

З теорії атома водню Бора відомо, що повна енергія орбітательно електрона $E = -T$. Тому, оцінивши зі співвідношення невизначеностей кінетичну енергію електрона, оцінимо і повну його енергію Е.

Таким чином:

$$\frac{l}{2} \cdot \sqrt{2m_0T} \gg \hbar;$$

Для оцінки Т перейдемо до рівності:

$$\frac{l}{2} \cdot \sqrt{2m_0T} = \hbar;$$

Звідси: $$T = \frac{4\hbar^2}{2l^2m_0}\ \frac{2\hbar^2}{l^2m_0};$$

$$T = \frac{2\cdot\ 1{,}05\cdot 10^{-34}\ ^{2}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}\ \text{эВ} = 15{,}2\ \text{еВ}$$

Енергетичний рівень електрона, як зрозуміло: Е $=- 15{,}2$ еВ.

<u>Задача 3.</u>

Показати , використавши співвідношення невизначеностей, що в ядрі не можуть перебувати електрони. Лінійні розміри ядра прийняти рівним $5\cdot 10^{-6}$нм.

У співвідношенні невизначеностей

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \gg \hbar;$$

Δx можна вважати рівною $\frac{d}{2}$.

Тому $\Delta p_x \gg \frac{2\hbar}{d}$;

Виходячи з логічності виразу $p \gg \Delta p \gg \Delta p_x$

Випливає, що $p \geq \frac{2\hbar}{d}$.

Оскільки енергія зв'язку в ядрі, яка припадає на одну частинку перевищує енергію спокою E_o=0,51МеВ для електронів, необхідно для визначення р користуватися релятивістською формулою (7).

При деякому мінімальному значенні Т можна записати наступну рівність:

$$\frac{1}{c}\sqrt{T_{min}(T_{min} + 2E_0)} = \frac{2\hbar}{d};$$

$$T_{min} \approx \frac{2\hbar c}{d};\ T_{min} \approx \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^{8}}{5 \cdot 10^{-15} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}\ \text{эВ} \ = 80\ \text{МеВ}$$

Бачимо, що ця енергія значно перевищує енергію зв'язку, що припадає на один нуклон в ядрі, то звідси зрозуміло, що перебування електронів в ядрі неможливе.

Задача 4.

Оцінити невизначеність Δx координати електрона, що має швидкість в атомі водню $1{,}5 \cdot 10^{6}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Невизначеність Δv швидкості складає 10% від її величини. Порівняти невизначеність Δx з діаметром атома водню d, визначеним з теорії Бора для основного стану, а також дати відповідь, чи можна застосовувати поняття траєкторії в даному випадку.

Згідно з умовою задачі, $\Delta v = 0{,}1v$, а тому логічно вважати, що $\Delta v_x = 0{,}1v_x$

v_x – проекція швидкості на вісь x, Δv_x – невизначеність проекції швидкості на вісь x.

Діаметр d атома водню, визначений згідно теорії Бора для основного стану, складає $1{,}06 \cdot 10^{-10}$м. Ми скористаємося цим результатом, як уже відомим, і визначати його не будемо.

Напишемо співвідношення невизначеностей та дещо перетворимо його:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \gg \hbar,$$

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \cdot m_0 \gg \hbar,$$

$$\Delta x \gg \frac{\hbar}{\Delta v_x \cdot m_0} = \frac{\hbar}{0{,}1v_x \cdot m_0}$$

Замінимо в останньому виразі v_x на v. Це не порушить нерівності.

$$\text{Таким чином,} \qquad \Delta x \gg \frac{\hbar}{0{,}1v_x \cdot m_0};$$

Перейдемо до рівності, визначимо Δx:

$$\Delta x = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{1{,}5 \cdot 10^{5} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}\ \text{м} \ = 7{,}73 \cdot 10^{-10}\text{м}$$

Бачимо, що неточність Δx в визначенні координати електрона більша діаметра атома водню по Бору, а тому поняття траєкторії електрона не є змістовним.

$$\frac{\Delta x}{d} \cdot 100\% = \frac{7{,}73\ \cdot 10^{-10}}{1{,}06 \cdot 10^{-10}} \cdot 100\% = 730\%$$

Задача 5.

Оцінити відносне розширення спектральної лінії $\frac{\Delta \nu}{\nu}$,якщо відомі час життя атома в збудженому стані ($\Delta t{\sim}10^{-8}$с) і довжина хвилі фотона, що випромінюється ($\lambda = 0{,}6$ мкм)

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{h\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Delta E}{\mathrm{h}\nu} = \frac{\Delta E}{2\pi\hbar\nu}$$

ΔE – невизначеність у значенні енергії, hν – енергія випромінюваного фотона.

ΔE визначимо із співвідношення невизначеностей (13), переходячи до рівності:

$$\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$$

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t}$$

Тепер можна визначити відносне розширення спектральної лінії:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Delta E}{2\pi\hbar\nu} = \frac{\hbar}{2\pi\hbar\nu\Delta t} = \frac{\lambda}{2\pi\Delta t \cdot c};$$

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{6{,}28 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^{8}} \approx 3 \cdot 10^{8}$$

РУХ ЕЛЕКТРОНА В ПОТЕНЦІАЛЬНІЙ ЯМІ

У квантовій механіці поведінка електрона в незмінному з часом силовому полі описується за допомогою стаціонарного рівняння Шредингера (рівняння Шредингера без часу):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2}\ E - \Pi\ \ x, y, z\ \ \ \psi = 0 \qquad (14)$$

E – повна енергія електрона,

$\Pi\ \ x, y, z$ – потенціальна енергія,

m_0 – маса електрона,

$\psi\ \ x, y, z$ – координатна або амплітудна частина хвильової функції будемо називати її просто хвильовою функцією.

Квадрат модуля хвильової функції визначає густину імовірності /імовірність, віднесену до одиниці об'єму/ знаходження частинки в відповідному місці простору. Густина імовірності $\psi(x, y, z)\ ^2$, помножена на елемент об'єма dV, дає імовірність знаходження електрона в цьому елементі об'єму.

Одномірне рівняння Шредингера для стаціонарних станів має вигляд:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2}\ E - \Pi\ \ x, y, z\ \ \ \psi\ \ x\ \ = 0; \qquad (15)$$

Імовірність $d\omega$ виявити частинку в інтервалі від x до $x + dx$ в одновимірному випадку виражається формулою:

$$d\omega = \ \psi(x)\ ^2 dx \quad ; \qquad (16)$$

Імовірність ω виявити частинку в інтервалі від x_1до x_2 знаходиться шляхом інтегрування в зазначених межах:

$$\omega = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx \tag{17}$$

У рівняння Шредінгера входить в якості параметра повна енергія частинки Е.

В теорії диференціальних рівнянь доводиться, що рівняння такого типу мають розв'язки, що задовольняють стандартні умови, не при любих значеннях параметра Е, а лише при деяких вибраних. Ці вибрані значення називаються ***власними значеннями енергії***:

Розв'язки, що відповідають власним значенням Е, називаються ***власними функціями (власними хвильовими функціями)***.

Часто в практиці вирішення задач розглядають випадок, коли електрон, що знаходиться в одновимірній прямокутній потенціальній ямі (потенціальному ящику) шириною l має потенціальну енергію рівну нулю, а за її межами – нескінченність, тобто:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 < x < l \\ \infty \text{ при } x \ll 0, x \gg l \end{cases}$$

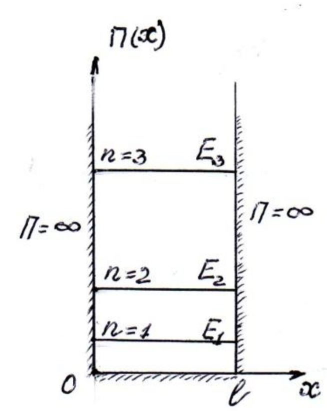

Рисунок 1

Власне значення енергії електрона E_n, що знаходиться на n-ному енергетичному рівні в нескінченно глибокій одномірній прямокутній потенціальній ямі, визначається формулою:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2 m_0 l^2} \tag{18}$$

де l – ширина потенціального ящика.

Відповідна цій енергії власна хвильова функція має вигляд:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi}{l} x \tag{19}$$

На рис.2 приведені графіки залежності густини імовірності виявлення електрона $|\psi(x)|^2$ від його координати в потенціальній ямі для n = 1,2,3.

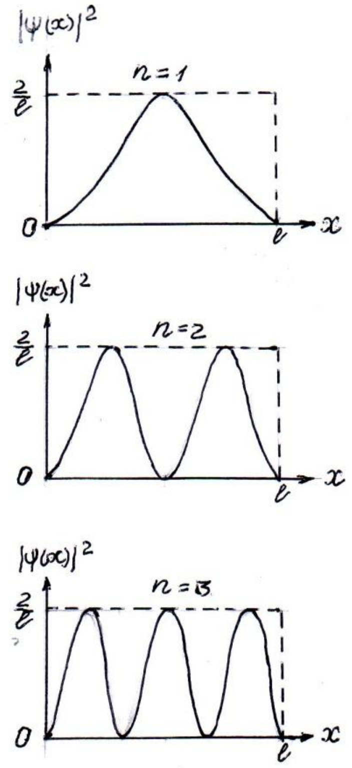

Рисунок 2

Бачимо, наприклад, що в стані n = 2 електрон не може бути виявленим в середині ями, ала однаково часто буває як в лівій, так і в правій її половині. Така поведінка частинки явно несумісна з уявленням про траєкторію. Згідно класичним уявленням всі положення частинки в ямі рівноімовірні.

<u>Задача 1.</u>

Електрон знаходитися в потенціальному ящику шириною $l = 0{,}5$ нм. Визначити найменшу різницю $\Delta E_{n,n+1}$ енергетичних рівнів електрона. Відповідь представити в електронвольтах.

Рівні дозволеної енергії електрона в одновимірному потенціальному ящику, як показано раніше, визначаються за формулою (18):

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m_0 l^2} \quad (n = 1,2,3, \dots)$$

Різниця енергетичних рівнів $\Delta E_{n,n+1}$ дорівнює:

$$\Delta E_{n,n+1} = \frac{(n+1)^2 \pi^2 \hbar^2}{2m_0 l^2} - \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m_0 l^2} = \frac{(2n+1)^2 \pi^2 \hbar^2}{2m_0 l^2}$$

Видно, що ця різниця буде мінімальною при мінімальному значенні, «n» тобто при n=1.

$$\Delta E_{n,n+1\ \min} = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2m_0 l^2};$$

$$\Delta E_{n,n+1\ \min} = \frac{3\,(3{,}14)^2\,(1{,}05\cdot10^{-34})^2}{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\cdot0{,}25\cdot10^{-18}}\ \text{Дж} = 7{,}2\cdot10^{-19}\text{Дж};$$

$$\Delta E_{n,n+1\ \min} = \frac{7{,}2\cdot10^{-19}}{1{,}6\cdot10^{-19}}\ \text{еВ} = 4{,}5\ \text{еВ}.$$

Задача 2.

Власна функція, яка описує стан частинки в одновимірному потенціальному ящику, має вигляд $\psi_n(x) = C\sin\frac{n\pi}{l}x$. Використовуючи умови нормування, визначити постійну С.

Умова нормування означає, що імовірність знаходження електрона в потенціальному ящику шириною l дорівнює 1, тобто:

$$\int_0^l \psi_n(x)\,dx = 1$$

$$\text{З умови: } \psi_n(x) = C\sin\frac{n\pi}{l}x\,;$$

Тому

$$C^2\int_0^l \sin^2\frac{n\pi}{l}x\,dx = 1;$$

$$C^2\left[\frac{1}{2}x - \frac{l}{4n\pi}\sin\frac{2n\pi}{l}\right]_0^l = 1;$$

$$C^2\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4\pi n}\sin 2n\pi\right) = 1;$$

$$C = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

Задача 3.

Частинка в потенціальному ящику шириною l знаходитися в першому збудженому стані. Визначити, в яких точках інтервалу $(0 < x < l)$ густина імовірності знаходження частинки має максимальне та мінімальне значення.

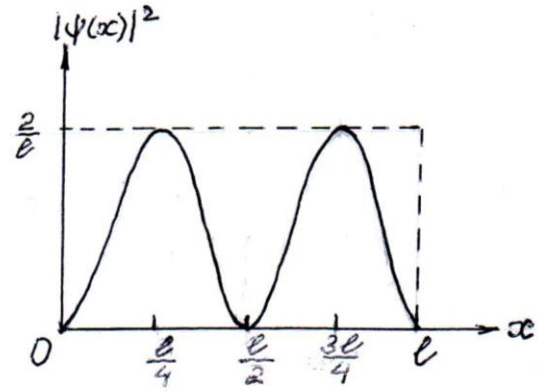

Рисунок 3

Аналітичний вигляд власної хвильової функції для частинки в потенціальному ящику:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x;$$

В нашому випадку n=2, тому:

$$\psi_2(x) = \sqrt{\tfrac{2}{l}}\sin\tfrac{2\pi}{l}x;$$

Точки, в яких функція $|\psi_2(x)|^2$ має максимальне та мінімальне значення визначимо дослідивши згадану функцію на екстремум. Для цього треба взяти похідну $\psi(x)\ ^{2}\ '$ та прирівняти її нулю.

$$\psi(x)\ ^{2}\ ' = \frac{2}{l}\,\frac{2\pi}{l}\sin\frac{4\pi}{l}x = \frac{4\pi}{l^2}\sin\frac{4\pi}{l}x = 0;$$

Ця рівність справедлива при $\frac{4\pi}{l} = k\pi$;

Звідси: $x = \frac{k\pi}{4\pi}l = \frac{k}{4}l$;

$k=1$; $x=\frac{l}{4}$;

$k=2$; $x=\frac{l}{2}$;

$k=3$; $x=\frac{3}{4}l$;

Точки $x = 0$ та $x = l$, де $\psi_2(x)\ ^2 = 0$ в інтервал $0 < x < l$ не входять.

Задача 4.

Частинка в потенціальному ящику знаходитися в основному стані. Яка імовірність виявити частинку в крайній третині ящика?

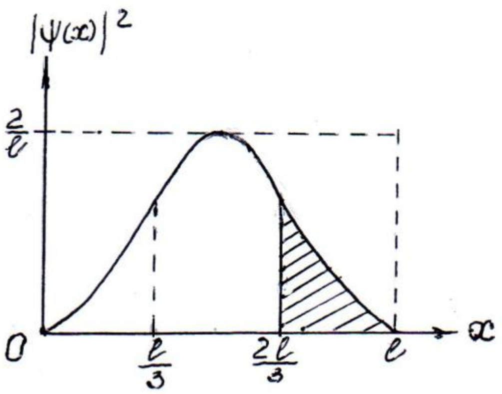

Рисунок 4

Власна функція для основного стану частинки в потенціальному ящику згідно (19) має вигляд:

$$\psi\ x\ = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi}{l}x\ ;$$

тому що $n=1$.

Для визначення імовірності згідно (17) необхідно обчислити інтеграл:

$$\omega = \frac{2}{l}\int_{x_1}^{x_2}\sin^2\frac{\pi}{l}x dx,$$

$$\text{де } x_1 = \frac{2}{3}l;\quad x_2 = l.$$

Імовірність знаходження частинки в крайній третині потенціального ящика відповідає заштрихованій частині фігури. Таким чином

$$\omega = \frac{2}{l}\int_{\frac{2}{3}l}^{l}\sin^2\frac{\pi}{l}x dx;\qquad \frac{\pi}{l} = a;$$

$$\omega = 2\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax\ \Big|_{\frac{2}{3}l}^{l} = \frac{2}{l}\ \frac{l}{2} - \frac{l}{3} + \frac{l}{4\pi}(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin 2\pi)\ \approx 0.195$$

<u>Задача 5.</u>

Частинка в потенціальному ящику шириною l знаходитися в першому збудженому стані. Визначити імовірність знаходження частинки в інтервалі $\frac{l}{4}$, що рівновіддалений від стінок ящика.

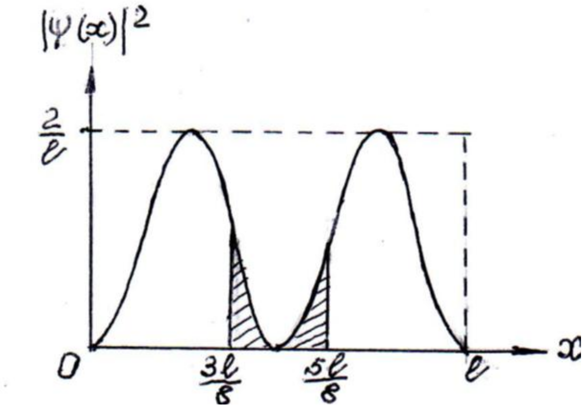

Рисунок 5

Перший збуджений стан, як відомо, відповідає n=2, а тому вираз для власної функції $\psi(x)$ матиме вигляд:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi}{l}x;$$

Імовірність знаходження частинки в інтервалі від x_1, до x_2 визначаємо згідно формули (17):

$$\omega = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$$

За умови: $x_1 = \frac{3}{8}l,\ x_2 = \frac{5}{8}l$

$$\omega = \frac{2}{l}\int_{\frac{3}{8}l}^{\frac{5}{8}l} x dx \ \frac{2\pi}{l}x = \frac{2}{l}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax\right)\Big|_{\frac{3}{8}l}^{\frac{5}{8}l};$$

$$a = \frac{2\pi}{l};$$

$$\omega = \frac{2}{l}\left(\frac{5}{16}l - \frac{3}{16}l + \frac{l}{8\pi}\left(\sin\frac{3}{2}\pi - \sin\frac{5}{2}\pi\right)\right) \approx 0{,}091.$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Квантовая физика. [Берклиевский курс физики] том IV. Изд. «Наука». Москва. 1977.

2. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики.: Москва. 1963.

3. Савельев И.В. Курс общей физики. Том 3. Москва. Изд. «Наука».1979.