

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**О.В. САВЧЕНКО**

# **ПРАКТИКУМ З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ**

Навчальний посібник  
для студентів вищих навчальних закладів

*Рекомендовано Інститутом  
інноваційних технологій і змісту освіти  
Міністерства освіти і науки України*

Ніжин  
“Видавництво ”Аспект-Поліграф”  
2007

УДК 539.3/.6(075.8)  
ББК 30.121  
С79

**Автор**

**Савченко О.В.**, доцент кафедри теоретичної і прикладної механіки Чернігівського державного технологічного університету

**Рецензенти:**

**Хільчевський В.В.**, доктор технічних наук, професор кафедри лазерної технології, конструювання машин та матеріалознавства Національного технічного університету України “КПІ”

**Дубенець В.Г.**, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної і прикладної механіки Чернігівського державного технологічного університету

*Рекомендовано Інститутом інноваційних технологій і змісту освіти Міністерства освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1.4/18-Г-797)*

**Савченко О.В.**

**С 79** Практикум з опору матеріалів: Навчальний посібник. – Ніжин: ООО “Видавництво “Аспект-поліграф”, 2007. – 318 с.  
ISBN 978-966-7496-19-7

У посібнику викладено короткі теоретичні відомості з основних розділів опору матеріалів і наведено приклади розв'язання задач у системі MathCAD.

Для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

318 с., іл. 183, бібліогр. 9

**УДК 539.3/.6(075.8)**  
**ББК 30.121**

ISBN 978-966-7496-19-7

© О.В. Савченко

© Чернігівський державний технологічний університет □

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	6
<b>РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ</b> .....	8
1.1. Побудова розрахункової схеми конструкції.....	9
1.1.1. Ідеалізація форми.....	9
1.1.2. Ідеалізація навантаження.....	11
1.1.3. Ідеалізація матеріалу.....	12
1.2. Основні принципи МТДТ і опору матеріалів.....	17
<b>РОЗДІЛ 2. ВИЗНАЧЕННЯ ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ У ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕІЗАХ СТЕРЖНІВ</b> .....	19
2.1. Умови рівноваги навантаженого тіла.....	19
2.2. Зв'язок між напруженнями та їх рівнодійними у поперечних перерізах стержнів.....	24
2.3. Залежності між внутрішніми силами і зовнішнім навантаженням.....	25
2.4. Визначення внутрішніх сил за допомогою узагальнених функцій.....	31
2.5. Визначення внутрішніх зусиль у стержнях при розтягу-стиску.....	34
2.6. Побудова епюр внутрішніх зусиль при крученні.....	40
2.7. Визначення внутрішніх зусиль у балках при плоскому згині.....	42
2.8. Визначення внутрішніх зусиль у балках із шарнірами.....	59
2.9. Визначення внутрішніх зусиль у рамах.....	64
2.10. Використання матричного методу для побудови епюр внутрішніх зусиль у рамах.....	71
<b>РОЗДІЛ 3. АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В ТОЧЦІ</b> .....	80
3.1. Тензор напружень. Напруження в довільній площадці. Головні напруження і головні площадки.....	80
3.2. Переміщення і деформації.....	86

<b>РОЗДІЛ 4. РОЗРАХУНКИ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ.....</b>	<b>104</b>
4.1. Визначення геометричних характеристик плоских перерізів..	104
4.2. Методика розрахунків стержнів на міцність.....	114
4.3. Розрахунки стержнів і стержневих систем на міцність у загальному випадку дії сил.....	116
4.4. Розрахунок стержнів на жорсткість за допомогою методу початкових параметрів.....	121
4.5. Розрахунок на міцність і жорсткість стержнів при розтягу-стиску.....	124
4.6. Розрахунок на міцність і визначення переміщень у статично-невизначуваних фермах.....	131
4.7. Розрахунок на міцність і жорсткість стержня при крученні....	146
4.8. Розрахунок на міцність балок при плоскому згині.....	151
4.9. Приклади розрахунку стержневих систем на міцність і жорсткість при складних навантаженнях.....	158
<b>РОЗДІЛ 5. ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ У СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМАХ.....</b>	<b>193</b>
5.1. Потенціальна енергія деформації.....	193
5.2. Теорема Кастильяно та інтеграл Мора.....	196
5.3. Обчислення інтегралів Мора за правилом Верещагіна.....	202
<b>РОЗДІЛ 6. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО-НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>208</b>
6.1. Поняття про статично-невизначувані системи.....	208
6.2. Метод сил.....	209
<b>РОЗДІЛ 7. РОЗРАХУНОК ТОНКОСТІННИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ОБОЛОНОК.....</b>	<b>239</b>
7.1. Безмоментна теорія розрахунку оболонок.....	239
7.2. Крайовий ефект у тонких циліндричних оболонках.....	250
<b>РОЗДІЛ 8. РОЗРАХУНОК НА СТІЙКІСТЬ СТЕРЖНІВ.....</b>	<b>257</b>
8.1. Визначення критичної сили. Задача Ейлера.....	257
8.2. Проектний розрахунок на стійкість.....	264
<b>РОЗДІЛ 9. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПОВТОРНО-ЗМІННИХ (ЦИКЛІЧНИХ) НАВАНТАЖЕННЯХ.....</b>	<b>269</b>
9.1. Поняття про циклічні навантаження.....	269
9.2. Характеристики циклу коливань.....	270
9.3. Характеристики витривалості.....	271
9.4. Розрахунки на міцність при симетричному циклі.....	272

---

9.5. Розрахунок на міцність при асиметричному циклі.....	273
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>	<b>284</b>
<b>ДОДАТОК А. ВБУДОВАНІ ОПЕРАТОРИ І ФУНКЦІЇ MathCAD.....</b>	<b>285</b>
<b>ДОДАТОК Б. ДОВІДКОВІ ДАНІ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ НА МІЦНІСТЬ, ЖОРСТКІСТЬ, СТІЙКІСТЬ, ВИТРИВАЛІСТЬ.....</b>	<b>297</b>
Б.1. Механічні характеристики матеріалів.....	297
Б.2. Довідкові дані для розрахунків на стійкість.....	301
Б.3. Довідкові дані при розрахунках на витривалість.....	302
Б.4. Геометричні характеристики плоских перерізів.....	306
<b>ДОДАТОК В. СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЇ СТАЛІ.....</b>	<b>308</b>

## ВСТУП

Ускладнення сучасних конструкцій і машин, умов їх експлуатації, необхідність створення економічно вигідних, надійних, естетичних споруд вимагають широкого впровадження в діяльність інженера-проектувальника нових сучасних методів розрахунку, пов'язаних із використанням обчислювальної техніки. У зв'язку з цим значно змінюються вимоги до змісту і методів курсу опору матеріалів. Курс повинен будуватися на алгоритмічній основі та передбачати вивчення як класичних основ, так і універсальних сучасних методів розрахунку на міцність, розкривати шляхи раціонального спрощення математичних моделей, орієнтувати майбутнього спеціаліста на роботу в умовах автоматизованого проектування (САПР).

Безпосереднє проведення розрахунків не передбачає розробки програмного забезпечення, направлено на повну автоматизацію розрахунку. Характерним стає інтерактивний діалог з комп'ютером. Така методика реалізується програмними комплексами САЕ (Computer Aided Design), до яких відносяться Matlab, Maple, Mathematica, MathCAD та ін.

Серед цих комплексів найбільш зручною для інженерних розрахунків є система MathCAD. Застосування пакетів типу MathCAD є альтернативою програмуванню за допомогою алгоритмічних мов. Перевагами обчислень у середовищі пакета над звичайною методикою розв'язування задач за допомогою обчислювальної техніки є можливість роботи з функціями, рівняннями, масивами та іншими математичними об'єктами безпосередньо на екрані, виведення текстової інформації та одержання результатів обчислень як у чисельній, так і у графічній формах. У зв'язку з можливістю безпосереднього використання математичних виразів суттєво змінюється більшість алгоритмів розв'язування задач у бік їх спрощення, з'являються нові підходи у використанні так званих "ручних методів". Пакет MathCAD надає користувачу необмежені можливості для діалогу з машиною, не вдаючись до спеціального кодування алгоритму.

Необхідність дотримання чіткого взаємного розміщення виразів на екрані дисциплінує користувача, виробляючи в нього якості, необхідні для підготовки звітних документів, а ефективна реалізація математичних операцій зі змінними, функціями, одно- і двовимірними масивами дозволяє зосередитися на методиці та алгоритмах розв'язання задач, не витрачаючи час на так звані спрощення розрахункових формул.

Посібник вміщує короткі теоретичні відомості з основних розділів опору матеріалів та приклади розв'язання задач за допомогою як класич-

них, так і сучасних методів розрахунку з варіантами широкого використання пакета MathCAD.

У першому розділі подано основні поняття опору матеріалів та напрямки ідеалізації конструкції для побудови розрахункової схеми.

У другому розділі розглядається визначення внутрішніх сил у поперечних перерізах стержнів і стержневих систем та методика побудови епюр внутрішніх зусиль.

Третій розділ присвячено аналізу напружено-деформованого стану у точці навантаженого об'єму.

У четвертому розділі розглядаються розрахунки стержнів і стержневих систем на міцність і жорсткість при різних видах навантажень.

У п'ятому розділі розглядається визначення переміщень у стержнях і стержневих системах за допомогою енергетичних методів.

Шостий розділ вміщує розрахунки статично-невизначуваних стержневих систем.

У сьомому розділі розглядаються розрахунки тонкостінних конструкцій, зокрема тонкостінних осесиметричних оболонок за безмоментною теорією, та крайові задачі.

Восьмий розділ вміщує розрахунки на стійкість.

Дев'ятий розділ присвячено розрахункам на повторно-змінне (циклічне) навантаження.

У додатках подано сортамент прокатної сталі, механічні характеристики різних видів матеріалів та інший довідковий матеріал, необхідний для проведення розрахунків на міцність, жорсткість, стійкість, витривалість. Крім того, додатки містять таблиці операторів та функцій пакета MathCAD.

Мета посібника – полегшити студентам засвоєння курсу опору матеріалів у процесі самостійної роботи над розв'язанням типових задач з основних розділів опору матеріалів. Крім того, посібник вміщує ряд нестандартних задач для більш поглибленого вивчення курсу.

## РОЗДІЛ 1

### ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

**Опір матеріалів** – це фундаментальна дисципліна, в якій викладаються основи розрахунків на міцність, жорсткість, стійкість, витривалість конструкцій, які зазнають впливу зовнішнього навантаження.

У широкому розумінні міцність – це здатність об'єктів живої та неживої природи протистояти зовнішнім та внутрішнім збуренням.

В опорі матеріалів під **міцністю** розуміють здатність конструкцій або їх елементів не руйнуватися під дією призначеного для них навантаження на протязі заданого проміжку часу.

**Жорсткість** – здатність конструкцій не деформуватися більше, ніж призначено проектом.

**Стойкість** – здатність конструкцій або їх елементів зберігати початкову форму при різних збуреннях.

**Витривалість** – здатність конструкцій працювати у встановленому режимі протягом заданого проміжку часу.

Дуже важливим поняттям в опорі матеріалів є **деформація**. На відміну від теоретичної механіки, яка розглядає абсолютно тверді тіла, в опорі матеріалів приймається, що тіла деформуються, тобто змінюють форму і об'єм при дії зовнішнього навантаження.

Аналіз міцності конструкцій та їх елементів, а також проектування надійних в експлуатації конструкцій, які відповідають вимогам міцності, жорсткості та стійкості, проводиться за допомогою побудови та аналізу математичних моделей конструкцій. Наука, яка займається цими питаннями, називається **механікою твердого деформівного тіла (МТДТ)**.

Опір матеріалів є введенням у МТДТ, оскільки подає основні поняття і термінологію розрахунків на міцність, а також методику побудови математичних моделей елементів конструкцій.

Основними методами опору матеріалів є експеримент і математичне моделювання. За допомогою експерименту визначаються характеристики матеріалів, параметри конструкцій при навантаженні та проводиться перевірка теоретичних висновків. Але основною задачею опору матеріалів є побудова й аналіз математичних моделей елементів конструкцій. Методи опору матеріалів використовуються в усіх дисциплінах, які стосуються розробки і проектування конструкцій і машин, наприклад, будівельній механіці, літакобудуванні, суднобудуванні, машинобудуванні тощо. Отже, опір матеріалів – дисципліна, яка важлива не тільки сама по собі, але і є основою для ряду наступних профільюючих дисциплін у технічному вузі. Крім того, не менш важливим призначенням опору матеріалів є формування у



майбутнього фахівця інженерного мислення, тобто вміння аналізувати поведінку конструкції при тому чи іншому навантаженні шляхом аналізу її моделі.

## 1.1. Побудова розрахункової схеми конструкції

Математична модель конструкції – це сукупність математичних об'єктів і зв'язків між ними, які відтворюють роботу конструкції у даних умовах. Побудова математичної моделі передбачає виявлення всіх суттєвих з точки зору міцності факторів і параметрів та формулювання математичних залежностей між ними. Сукупність цих факторів називають **розрахунковою схемою конструкції**. Розрахункова схема будується шляхом ідеалізації конструкції у трьох напрямках:

- ідеалізація форми;
- ідеалізація навантаження;
- ідеалізація матеріалу.

### 1.1.1. Ідеалізація форми

Вважається, що всі існуючі види конструктивних елементів можна звести до декількох простих типових форм.

– **Одновимірні об'єкти** (балка, стержень, брус, вал) – об'єкти, один розмір яких (довжина) набагато більший за розміри поперечного перерізу (рис. 1.1, а).

На розрахунковій схемі стержні позначаються своєю віссю (рис. 1.1, б).

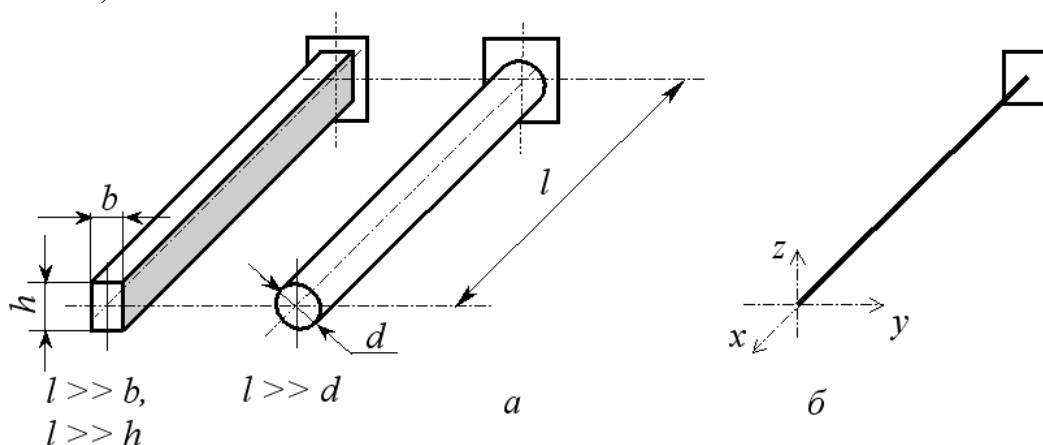


Рис. 1.1. Одновимірні об'єкти (а); розрахункова схема стержня (б)

Вісь стержня – множина точок центрів ваги поперечних перерізів.

Поперечний переріз – переріз стержня площиною, перпендикулярною осі. Поперечний переріз характеризується геометричними характеристиками, основними з яких є площа, статичні моменти площі, моменти інерції площі (див. Розділ 4).

– **Двовимірні об'єкти** (пластини та оболонки) – об'єкти, один розмір яких (товщина) набагато менший за габаритні розміри (рис. 1.2, а).

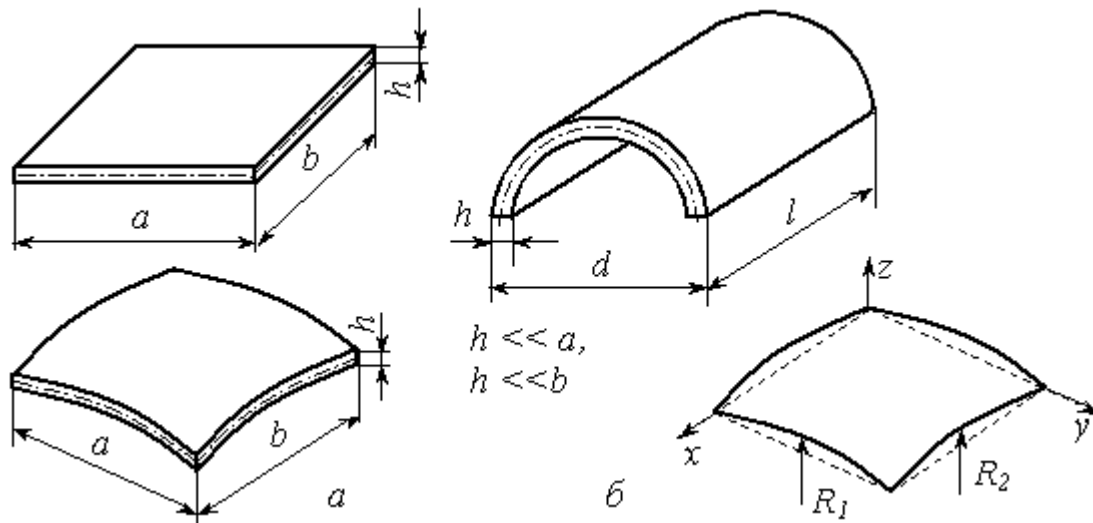


Рис. 1.2. Пластини та оболонки (а); розрахункова схема оболонки (б)

На розрахунковій схемі оболонки та пластини зображуються у вигляді серединної поверхні, рівновіддаленої від зовнішньої та внутрішньої поверхонь (рис. 1.2, б). Серединна поверхня характеризується радіусами кривизни у двох взаємно перпендикулярних напрямках.

– **Тривимірні об'єкти** або масиви – елементи конструкцій, в яких усі три габаритні розміри одного порядку (рис. 1.3).

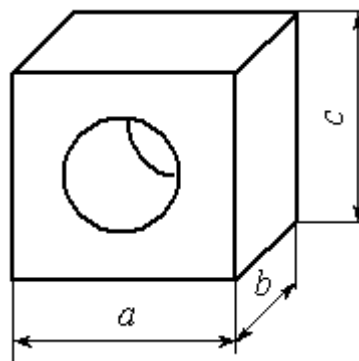


Рис. 1.3. Тривимірний об'єкт

Прикладами складних конструкцій є такі:

**Ферми** – конструкції, які складаються зі стержнів, з'єднаних у вузлах шарнірами (рис. 1.4).

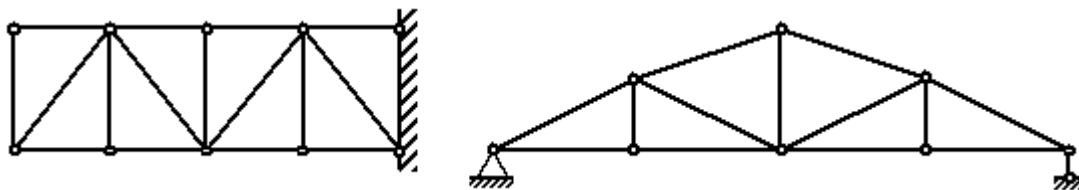


Рис. 1.4. Ферми

**Рами** – конструкції, які складаються зі стержнів, з'єднаних у вузлах жорстко (рис. 1.5, а).

**Перекриття** – конструкції, які складаються з пластин і стержнів – ребер жорсткості (рис. 1.5, б).

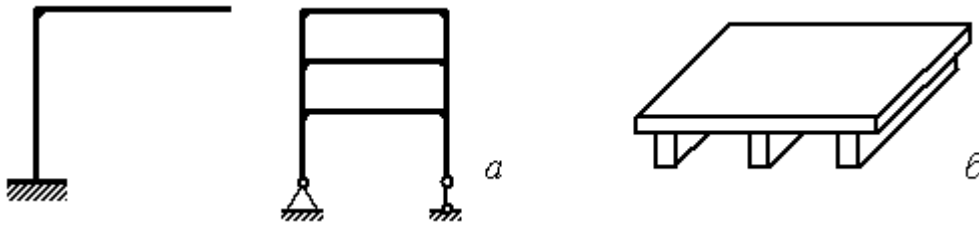


Рис. 1.5. Рами (а); перекриття (б)

Основними об'єктами вивчення в опорі матеріалів є стержні, стержневі системи, тонкостінні конструкції, деякі масивні елементи.

### 1.1.2. Ідеалізація навантаження

Усі існуючі види навантаження зводяться до двох видів:

– навантаження, розподілене по об'єму –  $p_V$  ( $H/m^3$ ) (сили ваги, сили інерції);

– навантаження, розподілене по площі –  $p_S$  ( $H/m^2$ ) (сили тиску, які направлені не обов'язково перпендикулярно до поверхні) (рис. 1.6, а).

При побудові розрахункової схеми навантаження зводять до деяких абстрактних понять:

– **розподілене** по лінії (погонне) навантаження –  $q$  ( $H/m$ );

– якщо навантаження діє на площі, невеликій порівняно з поверхнею самої конструкції, його замінюють **зосередженою силою**, яка є рівнодієюною навантаження і прикладена у центрі ваги площі –  $F$  ( $H$ ) (рис. 1.6, б);

– пара сил, яка називається **моментом**  $M$  ( $H \cdot m$ ).

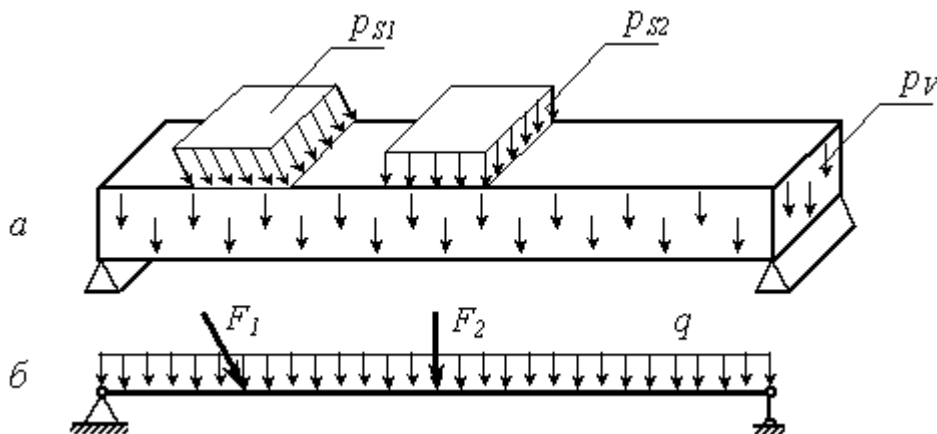


Рис. 1.6. Навантаження, що діє на балку (а); розрахункова схема (б)

Розглянемо приклад побудови розрахункової схеми для консольної балки (рис. 1.7, а).

Оскільки стержні позначаються на розрахунковій схемі своєю віссю, то виникає необхідність привести зовнішні сили, що діють на стержень, до осі стержня. Рівнодійною сил тиску, які діють на площі  $S$ , є зосереджена сила  $F$ . Якщо сили розподілені рівномірно, то рівнодійна  $F$  прикладається в центрі ваги площі  $S$  (рис. 1.7, б). Лінія дії сили не співпадає з віссю стержня, тож доцільно силу привести до осі. Згідно з правилами теоретичної механіки, у точці  $O$  треба прикласти дві сили  $F$ , протилежно направлені, і розглядати два силові фактори: зосереджену силу  $F$ , прикладену в точці  $O$ , і пару сил, або момент, який дорівнює добутку сили на відстань  $a$  від лінії дії сили до точки  $O$  (рис. 1.7, в).

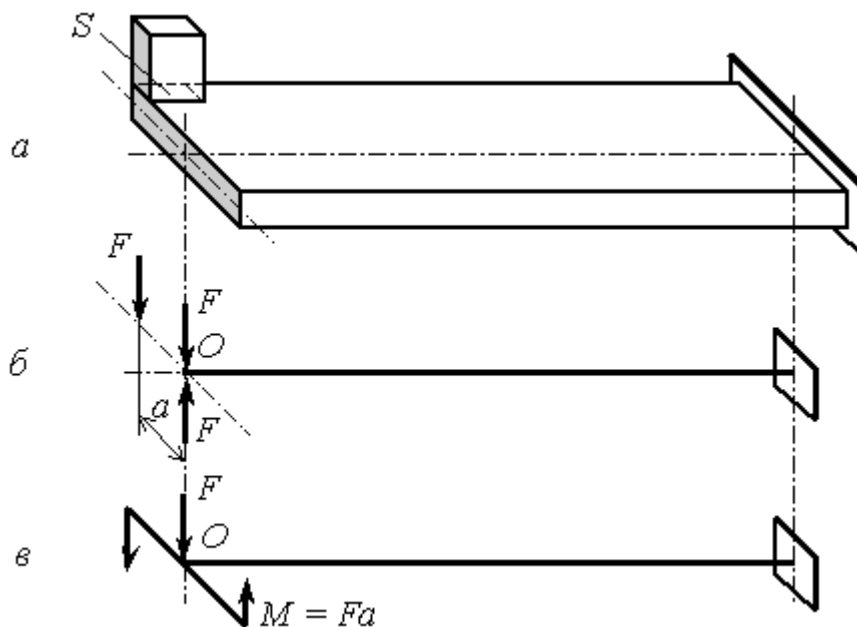


Рис. 1.7. Побудова розрахункової схеми для стержня

Зосереджені сили і моменти в опорі матеріалів також використовують для моделювання реакцій в'язей.

### 1.1.3. Ідеалізація матеріалу

Реальні об'єкти мають дискретну будову, тобто складаються з атомів і молекул. Але якщо враховувати реальну будову матеріалу, то аналіз процесів, які відбуваються в конструкції при навантажуванні, дуже ускладнюється.

В опорі матеріалів дискретною будовою матеріалу нехтують, матеріал вважається **суцільним середовищем**, яке заповнює даний об'єм без розривів і пустот.

Гіпотеза про суцільність матеріалу (гіпотеза Коші<sup>\*)</sup>), є основною гіпотезою механіки твердого деформівного тіла і дозволяє при розрахунках математичних моделей конструкцій застосувати аналіз нескінченно малих величин. Вважається, що будь-який малий представницький об'єм матеріалу має такі ж фізичні властивості, як і макрооб'єм.

Суцільне середовище наділяють спеціальними властивостями, вводячи ряд додаткових припущень:

– однорідність – матеріал має однакові властивості у різних точках об'єму;

– ізотропність – матеріал має однакові властивості у різних напрямках незалежно від орієнтації силового навантаження;

– пружність – матеріал повертається до початкової форми і об'єму після розвантаження, тобто вважається ідеально-пружним.

Згідно з гіпотезою суцільного середовища у ненавантаженому об'ємі відсутні сили взаємодії елементів об'єму, тобто існуючі міжатомні і міжмолекулярні сили не беруться до уваги. При навантажуванні тіла з'являються додаткові сили взаємодії, які є предметом вивчення у механіці твердого деформівного тіла і опорі матеріалів. Вважається, що на кожній поверхні, яка розділяє об'єм на дві частини, або навіть в окремій площадці, виділеній в об'ємі, діють сили взаємодії між об'ємами, які розділяються даною поверхнею або площадкою (рис. 1.8).

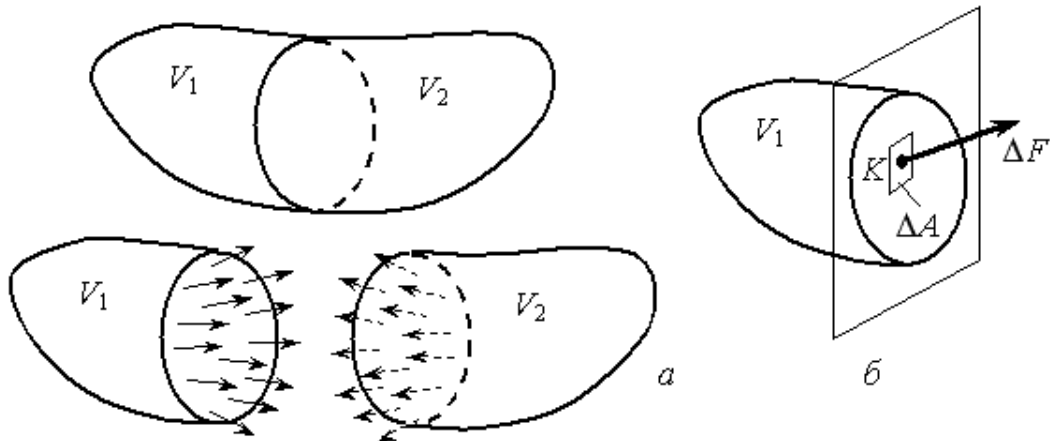


Рис. 1.8. Умовні сили взаємодії між елементами об'єму (а);  
напруження у точці  $K$  (б)

Якщо силу взаємодії між об'ємами  $\Delta F$ , яка приходиться на довільну площадку  $\Delta A$ , розділити на величину площадки, то одержимо середнє значення внутрішніх сил, розподілених по площадці  $\Delta A$ . Ця величина назива-

<sup>\*)</sup> **Огюстен Луї Коші** (*Augustin Louis Cauchy*; 1789-1857 pp.) – французький математик, член Паризької академії наук; найбільш відомими є його роботи з області математичного аналізу, теорії пружності, оптики, теорії чисел та ін.

ється середнім напруженням у площадці  $\Delta A$ . Якщо площадку  $\Delta A$  стягувати у точку  $K$ , яка лежить у цій площадці, то одержимо

$$\lim_{\substack{\Delta A \rightarrow 0 \\ \Delta A \rightarrow K}} \frac{\Delta F}{\Delta A} = p_K - \text{напруження у точці } K.$$

Розмірність напружень у системі одиниць СІ:  $\frac{\text{сила}}{\text{площа}} = \frac{N}{m^2} = Pa$ .

Через дану точку можна провести як завгодно багато площадок і одержати відповідну кількість напружень. Сукупність цих напружень називається **напруженим станом** у точці  $K$ . Напруження – це вектор  $\vec{p}$ , напружений стан – множина векторів  $\vec{p}^{(n)}$ .

Як використати поняття напруження для побудови алгоритму розрахунку конструкції на міцність? Якщо якимось чином визначити напруження в точці  $K$  в момент руйнування, то його можна вважати характеристикою міцності матеріалу. Порівнюючи далі максимальні напруження у конструкції, які виникають при дії зовнішнього навантаження, з цією характеристикою, можна зробити висновок про міцність конструкції.

На жаль, реалізувати цей простий на перший погляд алгоритм не так просто через складну поведінку матеріалу при навантажуванні.

Розглянемо процес осьового навантажування зразка матеріалу, виготовленого у вигляді сталевго стержня кругового перерізу (рис. 1.9, а). Побудуємо графік залежності сили  $F$  від подовження стержня  $\Delta l$ , або так звану **діаграму розтягу** для сталі (рис. 1.9, б).

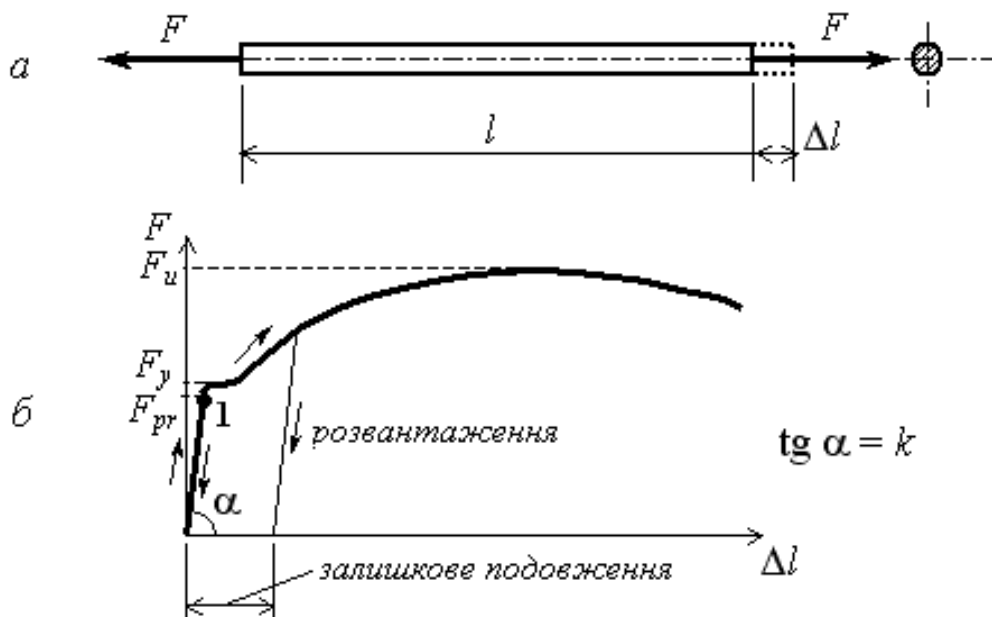


Рис. 1.9. Осьове навантаження стержня (а), діаграма розтягу (б)

Залежність  $F(\Delta l)$  є складною і неоднаковою для різних матеріалів.

У XVII ст. англійський учений Роберт Гук<sup>\*)</sup> визначив залежність  $F(\Delta l)$  і сформулював закон: для всіх матеріалів залежність  $F(\Delta l)$  є лінійною (закон Гука)

$$F = k \Delta l .$$

Але Гук зумів дослідити поведінку матеріалів тільки на початковій ділянці деформування – від початку навантаження до точки **1** (рис. 1.9, б) – і зробив хибний висновок, що залежність  $F(\Delta l)$  залишається лінійною до самого моменту руйнування матеріалу. Подальші дослідження виявили, що, по-перше, не в усіх матеріалів є лінійна ділянка на діаграмі розтягу, по-друге, починаючи від деякого значення сили  $F_y$ , зразок починає незворотно подовжуватися і після розвантажування не повертається до початкових розмірів. Це явище назвали пластичною деформацією, на відміну від пружної, про яку йдеться в законі Гука. Виявилися й інші особливості, які необхідно було враховувати при побудові моделі матеріалу, зокрема, залежність діаграми від напрямку виділення зразка з об'єму матеріалу, від розмірів зразка, від швидкості навантажування тощо.

Крім того, руйнівне значення сили залежить від площі поперечного перерізу. Розділивши силу на площу поперечного перерізу зразка, одержали механічну характеристику матеріалу – значення напруження, яке називається границею міцності  $\sigma_u = \frac{F_u}{A}$ . Відношення абсолютного подовження

до початкової довжини стержня є відносною деформацією  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ . Умовні діаграми розтягу матеріалів будують як залежності напруження від деформації (рис. 1.10).

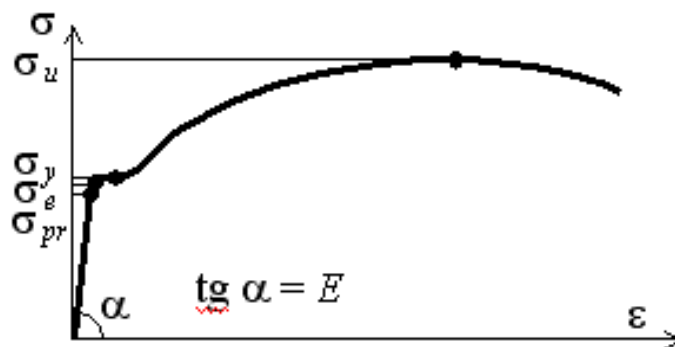


Рис. 1.10. Діаграма розтягу для маловуглецевої сталі

<sup>\*)</sup> **Роберт Гук** (*Robert Hooke; 1635-1703 pp.*) – англійський вчений-енциклопедист, якому належать багато наукових відкриттів, винаходів і вдосконалень в області механіки, фізики, хімії, біології та ін.

Користуючись значеннями сили у характерних точках діаграми і знаючи площу поперечного перерізу зразка, визначають основні механічні характеристики матеріалу:

**Границя пропорційності**  $\sigma_{pr} = \frac{F_{pr}}{A}$  – границя лінійної залежності між напруженням і деформацією (між силою і подовженням – закон Гука).

**Границя пружності**  $\sigma_e = \frac{F_e}{A}$  – найбільше напруження, при якому зразок зберігає пружні властивості.

**Границя текучості**  $\sigma_y = \frac{F_y}{A}$  – відповідає навантаженню, при якому зразок деформується без збільшення навантаження, на діаграмі виникає так звана площадка текучості.

**Границя міцності (тимчасовий опір)**  $\sigma_u = \frac{F_u}{A}$  – максимальне напруження, яке може витримати зразок.

Зараз закон Гука, який визначає лінійну залежність між напруженнями і деформаціями, формулюється так:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

де  $\varepsilon$  – лінійна деформація;  $E$  – коефіцієнт пропорційності, який називається **модулем пружності або модулем Юнга**. Англійський учений Томас Юнг першим визначив, що для кожного матеріалу існує стала величина, яка характеризує його здатність опиратися дії сили. Модуль пружності є механічною характеристикою, яка характеризує жорсткість конструкційного матеріалу. Модуль пружності чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу лінійної ділянки діаграми розтягу до осі  $x$  (рис. 1.10). Модулі пружності для матеріалів визначаються, як правило, експериментально.

Зважаючи на складну поведінку різних матеріалів при навантаженні, в механіці твердого деформівного тіла використовують спрощені моделі матеріалів, які умовно розділили на декілька груп. Умовні діаграми розтягу спрощених моделей показано на рис. 1.11 а-г. Окремі розділи механіки твердого деформівного тіла вивчають різні моделі матеріалів: модель (а), або модель Гука, використовується в теорії пружності, моделі (б), (в) і (г) – у теорії пластичності.

В опорі матеріалів для побудови математичних моделей поведінки матеріалів при навантаженні використовують модель Гука, тобто всі розрахунки проводяться при навантаженні, яке не перевищує границі пропорційності.



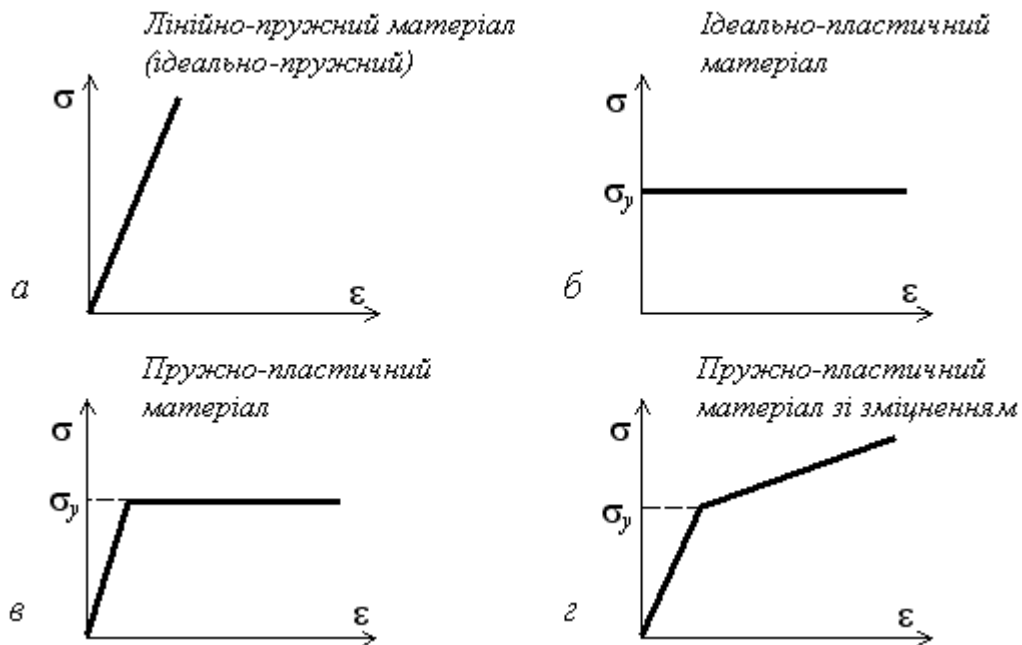


Рис. 1.11. Умовні діаграми розтягу

## 1.2. Основні принципи МТДТ і опору матеріалів

Зважаючи на складність задач розрахунку на міцність реальних конструкцій, у кожному з розділів МТДТ використовують ряд гіпотез і припущень, які дозволяють провести аналіз із необхідною точністю. Припущення, які найбільш часто використовуються у більшості розділів МТДТ, називаються принципами.

**1. Принцип відносної жорсткості системи** – деформації вважаються малими порівняно з габаритними розмірами конструкції настільки, що зміною положення і напрямків діючих зусиль при навантажуванні можна нехтувати.

**2. Принцип локальності дії сил** (принцип Сен-Венана) – особливості прикладеного навантаження виявляються у безпосередній близькості від місця прикладення сили.

**3. Принцип незалежності дії сил** – залежність між зусиллями і деформаціями є лінійною, або результат дії сукупності сил дорівнює сумі результатів дії кожної окремої сили.

Як же відбувається перехід від реальної навантаженої конструкції до її математичної моделі?

Ввівши припущення про матеріал як про суцільне середовище, ми одержуємо ідеалізовану модель матеріалу. Вводячи далі припущення про існування напружень, ми фактично переходимо від фізичної до математичної моделі (напруження – це вектор). Спрощуючи діаграму розтягу і записуючи залежність  $\sigma - \epsilon$  для кожного матеріалу, ми фактично одержує-

---

мо математичну модель матеріалу по відношенню до його деформування. Для того, щоб пов'язати між собою математичні залежності, які описують властивості матеріалу, форму конструкції, вид навантаження, тобто одержати математичну модель конструкції у цілому, необхідно застосувати фундаментальні закони фізики: закон збереження енергії, закони Ньютона, енергетичні принципи, побудовані на цих законах: принципи Лагранжа, Кастільяно та інші.

Після побудови математичної моделі конструкції проводиться її розрахунок із точністю, яку дозволяють початкові умови і використовувані методи, що є основною задачею МТДТ. В опорі матеріалів розглядаються простіші моделі, хоча поняття складності у зв'язку з можливостями обчислювальної техніки змістилися, і в інженерних курсах з'явилася можливість використати всі сучасні методики розрахунку.

## РОЗДІЛ 2

### ВИЗНАЧЕННЯ ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ У ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕРІЗАХ СТЕРЖНІВ

#### 2.1. Умови рівноваги навантаженого тіла

У попередньому розділі ми детально розглянули методику побудови розрахункової схеми конструкції. Тепер проаналізуємо силові фактори, які виникають у стержневих системах при навантаженні (нагадаємо, що в ненавантаженому тілі внутрішні зусилля дорівнюють нулю). Процес визначення сил, що діють у конструкції – це фактично процес побудови математичної моделі, яка відповідає розрахунковій схемі.

Зосереджені сили і моменти в опорі матеріалів трактуються як вектори (рис. 2.1, а). Кожну силу або момент можна розкласти у будь-якій системі координат на складові (рис. 2.1, б).

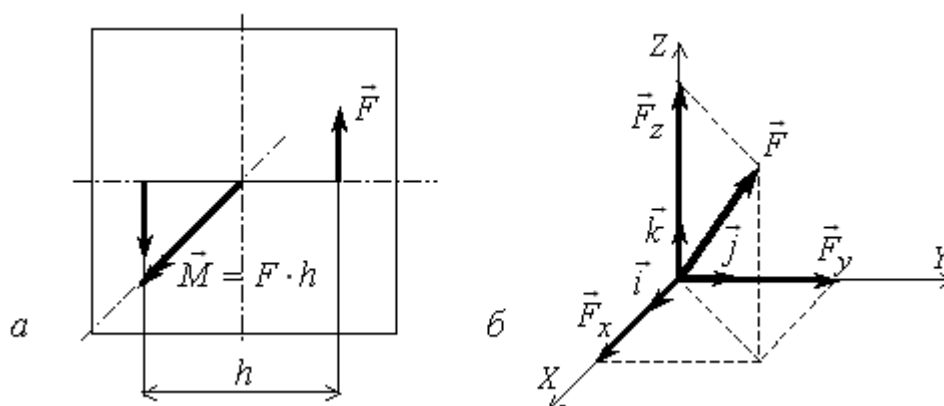


Рис. 2.1. Вектор момента як пари сил (а); розкладення вектора сили у довільній системі координат (б)

Вектор сили має вигляд

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \quad (2.1)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орти,  $F_x, F_y, F_z$  – компоненти вектора  $\vec{F}$ , які є проекціями сили  $\vec{F}$  на осі координат.

Аналогічно записується вектор момента

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}, \quad (2.2)$$

де  $M_x, M_y, M_z$  – проекції вектора  $\vec{M}$  на осі координат  $X, Y, Z$ , які є моментами сили  $\vec{F}$  відносно осей  $X, Y, Z$  (рис. 2.2). Їх можна визначити, записуючи векторний добуток вектора сили  $\vec{F}$  і радіус-вектора  $\vec{r}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(F_z y - F_y z) + \vec{j}(F_x z - F_z x) + \vec{k}(F_y x - F_x y),$$

де  $x, y, z$  – координати точки прикладення сили, або проекції радіус-вектора на осі координат.

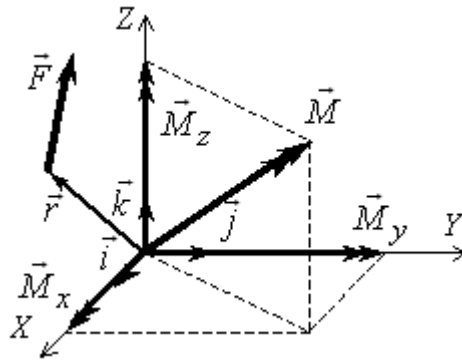


Рис. 2.2. Проекції вектора моменту сили  $F$  відносно осей  $X, Y, Z$

Таким чином, ми одержали вирази для проекцій моменту

$$M_x = F_z y - F_y z, \quad M_y = F_x z - F_z x, \quad M_z = F_y x - F_x y.$$

Як бачимо, складові моменту можна визначити за значеннями проекцій сили і відстаней до відповідної осі.

У матричній формі вектори сили і моменту записуються у вигляді стовпців компонент векторів у заданій системі координат:

$$F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}.$$

Ми будемо вважати, що всі навантажені тіла знаходяться під дією урівноваженої системи сил, тобто системи, головний вектор і головний момент якої дорівнюють нулю

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0.$$

Враховуючи (2.1), (2.2), можна записати

$$\sum_{i=1}^n (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k})_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n (M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k})_i = 0.$$

Таким чином, умови рівноваги системи сил мають вигляд

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{zi} = 0, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{zi} = 0,$$

тобто суми проекцій сил на осі координат і суми моментів сил відносно осей дорівнюють нулю.

Умови рівноваги можуть використовуватися для визначення сил взаємодії між окремими елементами конструкції (внутрішніх сил) або між конструкцією і фундаментом (реакцій в'язей).

Для визначення реакцій в'язей використовують відому з курсу теоретичної механіки аксіому вивільнення від в'язей, згідно з якою конструкція буде знаходитися в рівновазі, якщо відкинути в'язі і замінити їх дію відповідними силами, напрямки яких позначаються у відповідності з конструкцією в'язей (рис. 2.3).

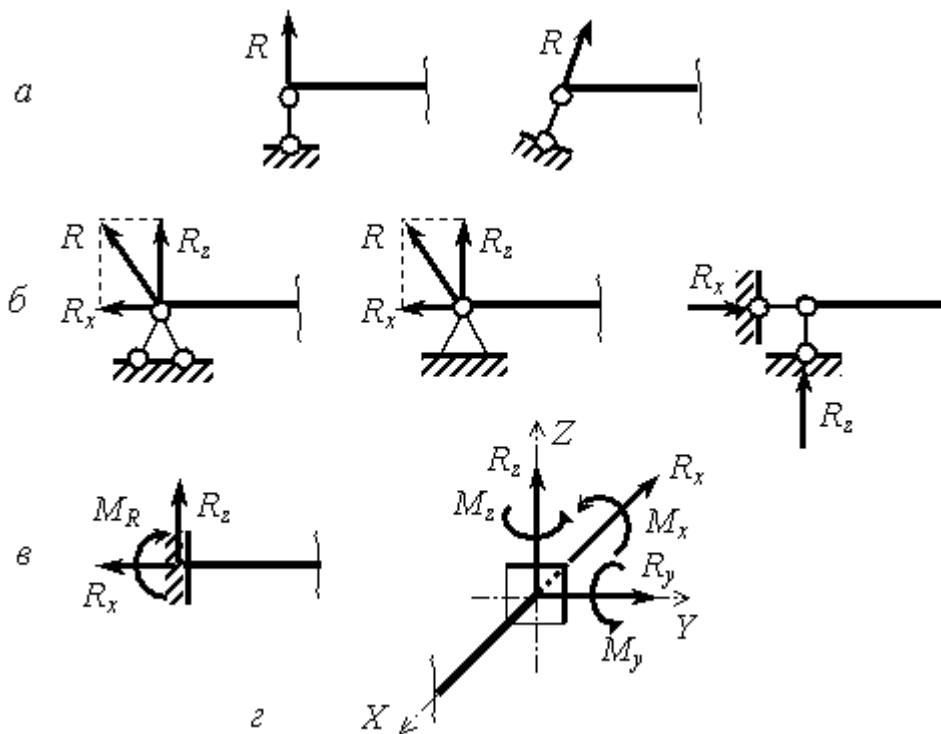


Рис. 2.3. Види опор: шарнірно-рухомі опори (а); шарнірно-нерухомі опори (б); жорстке закріплення плоскої конструкції (в); жорстке закріплення просторової конструкції (г)

Таким чином, для того, щоб визначити реакції опор, необхідно умовно відкинути опори, замінити їх відповідними силами і скласти рівняння рівноваги, кількість яких залежить від системи сил, яка діє на конструкцію, і від виду конструкції. Для плоскої системи сил складаємо три рівняння рівноваги, для просторової – шість (2.3).

**ПРИКЛАД 2.1.** Визначити опорні реакції для заданої балки (рис. 2.4).

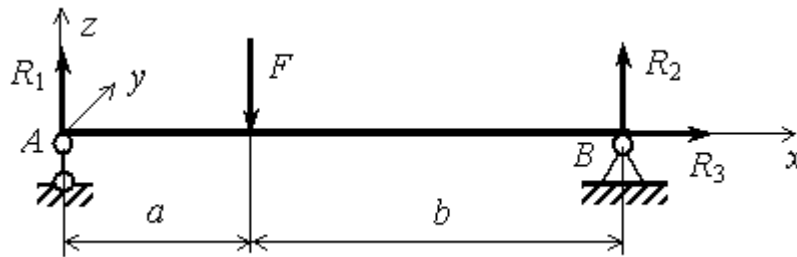


Рис. 2.4. Балка на двох опорах

Балку на двох опорах навантажено плоскою системою сил. Умовно відкинемо опори і позначимо невідомі реакції у відповідності з видом опор: у шарнірно-рухомій опорі  $A$  виникає одна реакція, напрямком якої співпадає з напрямком лінії, яка з'єднує умовні шарніри, у шарнірно-нерухомій опорі  $B$  – одна реакція, напрямком якої невідомий, тому ми замінюємо її двома проекціями у напрямках осей і вважаємо, що в шарнірно-нерухомій опорі виникає дві реакції (див. рис. 2.3).

Для плоскої системи сил, яку маємо в даному випадку, складаємо три рівняння рівноваги: суми проекцій сил на осі  $x$  і  $z$  та сума моментів сил відносно точки  $A$  дорівнюють 0:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_3 = 0; \quad (2.4)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 - F = 0; \quad (2.5)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Fa - R_2(a + b) = 0. \quad (2.6)$$

Розв'язуючи систему рівнянь, одержуємо значення реакцій:

$$R_2 = \frac{Fa}{a+b}, R_1 = \frac{Fb}{a+b}. \text{ Після визначення реакцій необхідно зробити перевірку – записати додаткове рівняння рівноваги, наприклад, скласти суму моментів відносно якоїсь іншої точки:}$$

Розглянемо розв'язок системи рівнянь (2.4)-(2.6) за допомогою математичного пакета MathCAD.

1) Вводимо вхідні дані<sup>\*)</sup>:

$$F := 20 \text{ кН} \quad a := 2 \text{ м} \quad b := 3 \text{ м}$$

2) Невідомим величинам надаємо початкові значення (початкові наближення):

$$R_1 := 0 \quad R_2 := 0 \quad R_3 := 0$$

3) Систему рівнянь у MathCAD розв'язуємо за допомогою обчислювального блоку **Given...Find**<sup>\*\*)</sup>:

<sup>\*)</sup> Оператор присвоювання := набирається клавішею <:=>.

<sup>\*\*)</sup> Оператор рівності у блоці **Given...Find** набирається клавішами <Ctrl=>.

$$\text{Given} \quad R_3 = 0$$

$$R_1 + R_2 - F = 0$$

$$F \cdot a - R_2 \cdot (a + b) = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(R_1, R_2, R_3) \quad \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) Виконуємо перевірку одержаних значень:

$$F \cdot b - R_1 \cdot (a + b) = 0$$

Таким чином, реакції визначено правильно.

**ПРИКЛАД 2.2.** Визначити опорні реакції для заданої консольної балки (рис. 2.5).

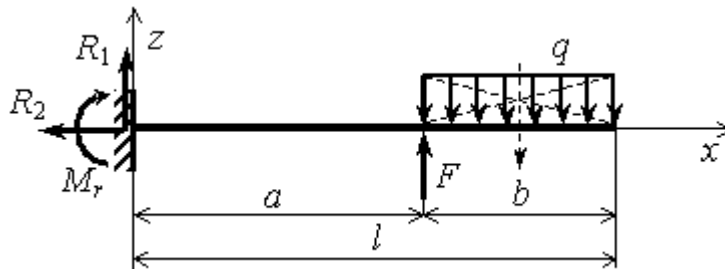


Рис. 2.5. Консольна балка

Скористаємося математичним пакетом MathCAD.

Вхідні дані:

$$F := 20 \text{ кН} \quad q := 15 \text{ кН/м} \quad a := 3 \text{ м} \quad b := 2 \text{ м}$$

Початкові наближення для невідомих реакцій:

$$R_1 := 0 \quad R_2 := 0 \quad M_r := 0$$

Розв'язок системи рівнянь рівноваги за допомогою блоку Given...Find:

$$\text{Given} \quad R_2 = 0$$

$$R_1 + F - q \cdot b = 0$$

$$M_r - F \cdot a + q \cdot b \cdot \left( a + \frac{b}{2} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ M_r \end{pmatrix} := \text{Find}(R_1, R_2, M_r) \quad \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ M_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -60 \end{pmatrix}$$

Від'ємне значення моменту означає, що напрямок його протилежний вибраному спочатку

Перевірка: сума моментів відносно кінцевого перерізу балки

$$Mr + F \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + Rl \cdot (a + b) = 0$$

## 2.2. Зв'язок між напруженнями та їх рівнодійними у поперечних перерізах стержнів

При навантажуванні тіла завжди мають місце два явища:  
 – тіло змінює свою форму і розміри – деформується;  
 – у кожній площадці, умовно проведеній в об'ємі, виникають внутрішні сили взаємодії між частинками об'єму – напруження.

Розглянемо стержень, навантажений урівноваженою системою сил (рис. 2.6, а). Визначимо внутрішні сили, які діють у довільному поперечному перерізі стержня. У кожному такому перерізі діють сили взаємодії між двома частинами стержня. Як відомо, ці сили мають електромагнітну природу, але в механіці вони замінюються умовними, розподіленими по площині силами, так званими напруженнями.

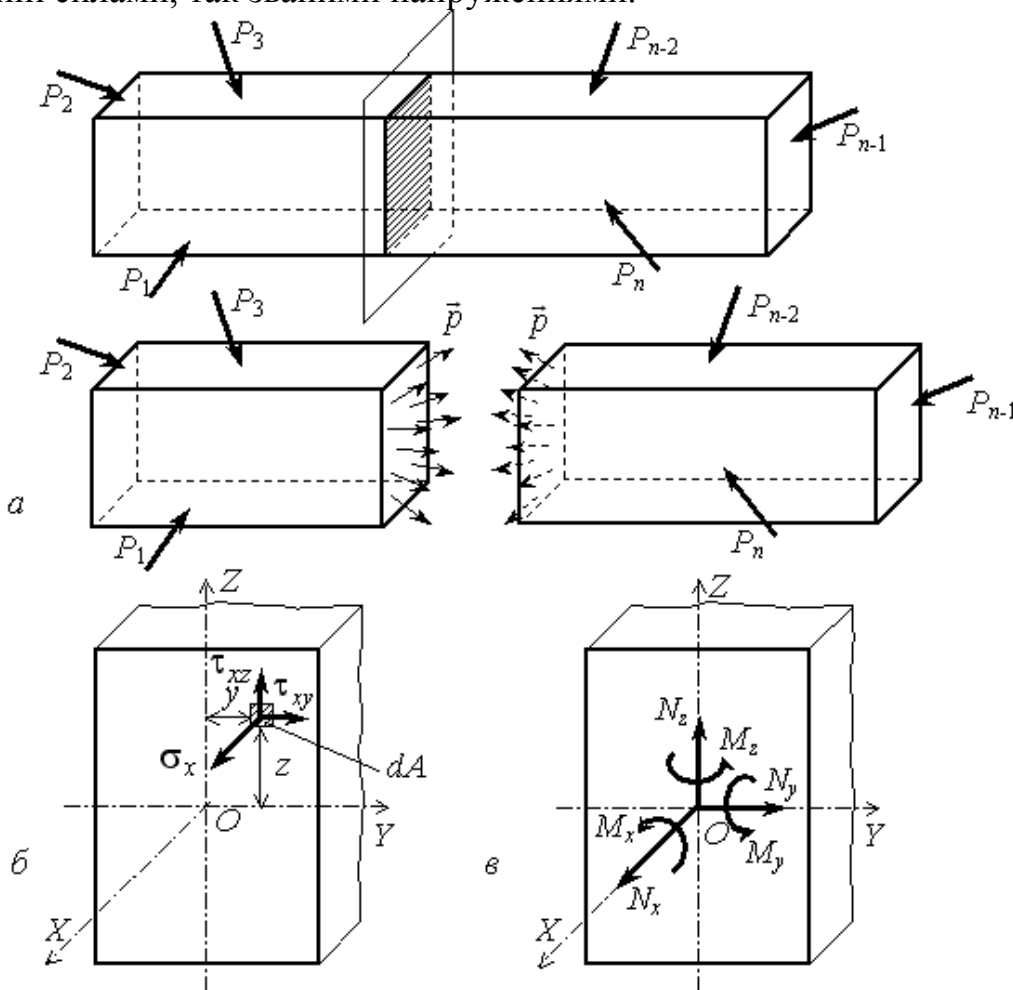


Рис. 2.6. Стержень, навантажений довільною урівноваженою системою сил (а); напруження в поперечному перерізі стержня (б); рівнодійні напружень (в)



Визначення напружень, які виникають при навантажуванні тіл, є однією з основних задач МТДТ і опору матеріалів. Оскільки безпосередньо визначити напруження в перерізах стержня досить складно, спочатку визначають рівнодійні напружень – складові головного вектора і головного моменту в системі координат, пов'язаній з перерізом. Ці рівнодійні називають внутрішніми силами або зусиллями.

Знайдемо зв'язок між напруженнями та їх рівнодійними. Виділимо в поперечному перерізі стержня нескінченно малу площадку  $dA = dy \cdot dz$ . Напруження, яке діє у площадці, розкладемо на складові  $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ , де  $\sigma_x$  – нормальне напруження,  $\tau_{xy}, \tau_{xz}$  – дотичні напруження. Координати площадки у центральних головних осях перерізу  $Y, Z$  позначимо  $y, z$  (рис. 2.6, б). Рівнодійні напружень, одержимо, приводячи елементарні сили, діючі на кожній з площадок  $dA$ , до центра ваги<sup>\*)</sup> перерізу  $O$  і осей  $X, Y, Z$  (рис. 2.6, в):

$$N_x = \int_A \sigma_x dA \text{ – поздовжня сила;}$$

$$N_y = \int_A \tau_{xy} dA \text{ – поперечна сила в напрямку осі } Y;$$

$$N_z = \int_A \tau_{xz} dA \text{ – поперечна сила в напрямку осі } Z;$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA \text{ – згинаючий момент відносно осі } Y;$$

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA \text{ – згинаючий момент відносно осі } Z;$$

$$M_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \text{ – момент кручення відносно осі } X.$$

Рівнодійні можна визначити за відомими зовнішніми силами, а потім знайти і напруження в довільній точці перерізу, щоб порівняти їх із руйнівним напруженням і зробити висновок про міцність конструкції.

### 2.3. Залежності між внутрішніми силами і зовнішнім навантаженням

Сформулюємо математичну модель для сил, що діють у перерізах балки і визначимо зв'язок між зовнішніми і внутрішніми силами.

Розглянемо стержень, навантажений довільним поздовжнім навантаженням (рис. 2.7, а). На відстані  $x$  від початку стержня виділимо нескінченно малий елемент довжиною  $dx$ . Позначимо рівнодійні сил, що діють у перерізах  $x$  і  $x + dx$ , відповідно  $N_x$  і  $N_x + dN_x$  (рис. 2.7, б). Сили, прикла-

<sup>\*)</sup> Поняття “центр ваги”, як і “центр мас” для плоского перерізу є умовним, оскільки переріз не має ваги (маси), і використовується за аналогією з такими ж поняттями для тіл з масою.

дені на торцях елемента – це ті сили, з якими ліва і права частини стержня діють на елемент. Зовнішнє навантаження  $q$  на нескінченно малій відстані  $dx$  може вважатися сталим.

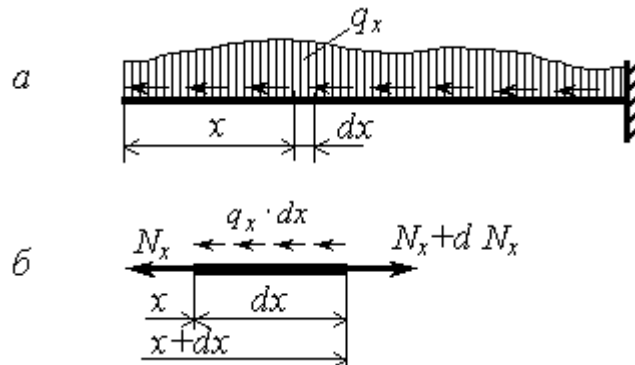


Рис. 2.7. Стержень, навантажений поздовжнім навантаженням (а); зовнішні і внутрішні сили, які діють на елемент довжиною  $dx$  (б)

Розглянемо рівновагу виділеного елемента, враховуючи всі прикладені сили. Під дією зовнішніх і внутрішніх сил елемент знаходиться у рівновазі. Запишемо умову рівноваги як суму проєкцій сил на вісь стержня

$$N_x + q_x \cdot dx - N_x - dN_x = 0.$$

Звідси маємо

$$\frac{dN_x}{dx} = q_x \Rightarrow N_x = \int q_x dx + C. \quad (2.7)$$

Одержаний вираз для поздовжньої сили  $N_x$  – це, по суті, математичне формулювання методу перерізів. Сила  $N_x$  дорівнює сумі проєкцій усіх зовнішніх сил на вісь стержня, діючих по один бік від перерізу. Стала  $C = N_x(0)$  – це поздовжня сила у початковому перерізі стержня при  $x = 0$ .

**ПРИКЛАД 2.3.** Визначити внутрішні сили у стержні, навантаженому розподіленим навантаженням, яке змінюється за заданим законом (рис. 2.8, а).

Розв'язання.

$q_x(x) = q \cdot x$  – зовнішнє навантаження змінюється за лінійним законом.

Згідно з (2.7)

$$N_x(x) = \int q_x(x) dx + C = \int q \cdot x dx + C = q \frac{x^2}{2} + C.$$

При  $x = 0$   $N_x(0) = C = 0$ . Графік залежності внутрішньої сили  $N_x(x)$  від  $x$  побудовано на рис. 2.8, б. Значення функції  $N_x(x)$  у трьох точках:

$$N_x(0) = 0; \quad N_x\left(\frac{l}{2}\right) = q \frac{l^2}{8}; \quad N_x(l) = q \frac{l^2}{2}.$$

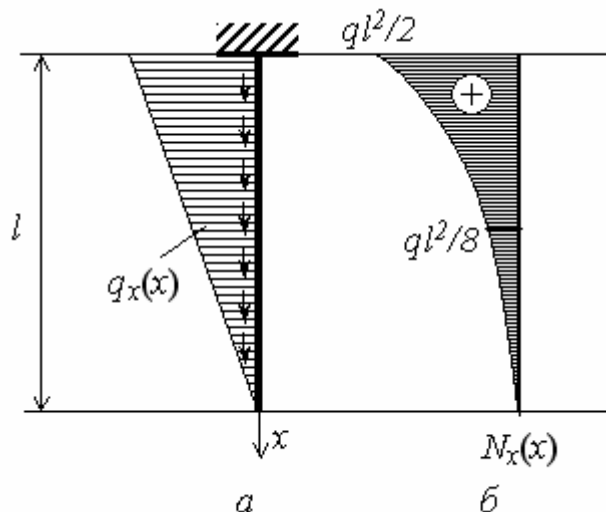


Рис. 2.8. Стержень із заданим навантаженням (а), графік зміни поздовжньої сили  $N_x(x)$  (б)

Розглянемо стержень, на який діє інший вид навантаження – довільне навантаження  $q_z$ , перпендикулярне осі  $X$  (рис. 2.9, а). Skorистаємося методикою, розглянутою вище, тобто виділимо нескінченно малий елемент довжиною  $dx$  на відстані  $x$  від початку стержня і розглянемо рівновагу виділеного елемента з урахуванням усіх прикладених сил (рис. 2.9, б). У даному випадку внутрішніми силами, які діють на торцях елемента, є поперечні сили  $N_z$  і  $N_z + dN_z$  та згинаючі моменти відносно осі  $Y$   $M_y$  і  $M_y + dM_y$ .

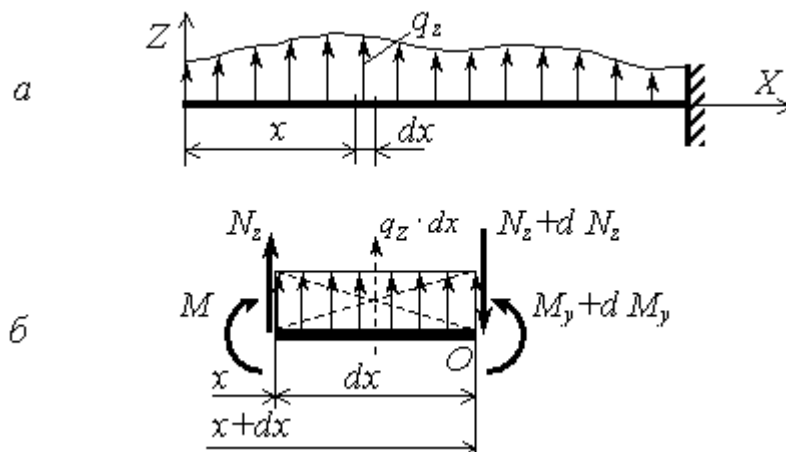


Рис. 2.9. Внутрішні сили у стержні при довільному поперечному навантаженні (а); внутрішні сили, які діють на елемент довжиною  $dx$  (б)

Складемо умови рівноваги елемента.

Сума проєкцій поперечних сил на вісь  $Z$

$$N_z + q_z \cdot dx - N_z - dN_z = 0;$$

$$\frac{dN_z}{dx} = q_z \Rightarrow N_z = \int q_z dx + C_z. \quad (2.8)$$

Сума моментів відносно точки  $O$

$$M_y + N_z \cdot dx + q_z \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - M_y - dM_y = 0.$$

Доданок  $q_z \cdot dx \cdot \frac{dx}{2}$  можна не враховувати як нескінченно малу величину другого порядку малості, тоді

$$\frac{dM_y}{dx} = N_z \Rightarrow M_y = \int N_z dx + C_z, \quad (2.9)$$

або 
$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = q_z \Rightarrow M_y = \iint q_z dx + C_z \cdot x + D_y, \quad (2.10)$$

де  $C_z = N_z(0)$ ,  $D_y = M_y(0)$  – початкові параметри: відповідно, поперечна сила і згинаючий момент при  $x = 0$ .

Використовуючи ті ж міркування, тобто записуючи умови рівності нулю головного вектора і головного момента при довільному навантаженні, можна одержати диференціальні залежності всіх внутрішніх сил від зовнішнього навантаження:

$$N_x = \int q_x dx + C_x, \quad N_z = \int q_z dx + C_z, \quad N_y = \int q_y dx + C_y, \quad (2.11)$$

$$M_x = \int m_x dx + D_x, \quad M_y = \int N_z dx + D_y = \iint q_z dx + C_z \cdot x + D_y, \quad (2.12)$$

$$M_z = \int N_y dx + D_z = \iint q_y dx + C_y \cdot x + D_z$$

**ПРИКЛАД 2.4.** Визначити внутрішні сили у балці, завантаженій заданим навантаженням (рис. 2.10, а).

Вхідні дані:  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $q = 20 \text{ кН/м}$ ,  $l = 2 \text{ м}$ .

Розв'язання.

Функція заданого навантаження є сталою  $q_z(x) = -q$ .

Запишемо функції внутрішніх сил, скориставшись залежностями (2.8), (2.10):

функція поперечних сил –

$$N_z(x) = \int q_z(x) dx + C_z = -qx + C_z;$$

функція згинаючих моментів –

$$M_y(x) = \iint q_z(x) dx + C_z \cdot x + D_y = -q \frac{x^2}{2} + C_z \cdot x + D_y.$$

Визначимо початкові параметри:

$$C_z = N_z(0) = F = 10, \quad D_y = M_y(0) = 0.$$

Функції внутрішніх сил матимуть вигляд:

$$N_z(x) = -qx + F; \quad M_y(x) = -q \frac{x^2}{2} + F \cdot x.$$

Побудуємо графіки цих функцій.

Графіки або діаграми, які показують, як змінюються внутрішні сили по довжині стержня, називаються **епюрами** внутрішніх сил.

$$N_z(0) = F = 10, \quad N_z(l) = -q \cdot l + F = -30 \text{ кН};$$

$$M_y(0) = 0, \quad M_y(l) = -q \frac{l^2}{2} + F = -20 \text{ кНм}, \quad M_y\left(\frac{l}{2}\right) = -q \frac{l^2}{8} + F = 0.$$

За одержаними значеннями будуюмо епюри поперечних сил і згинаючих моментів (рис. 2.10, б).

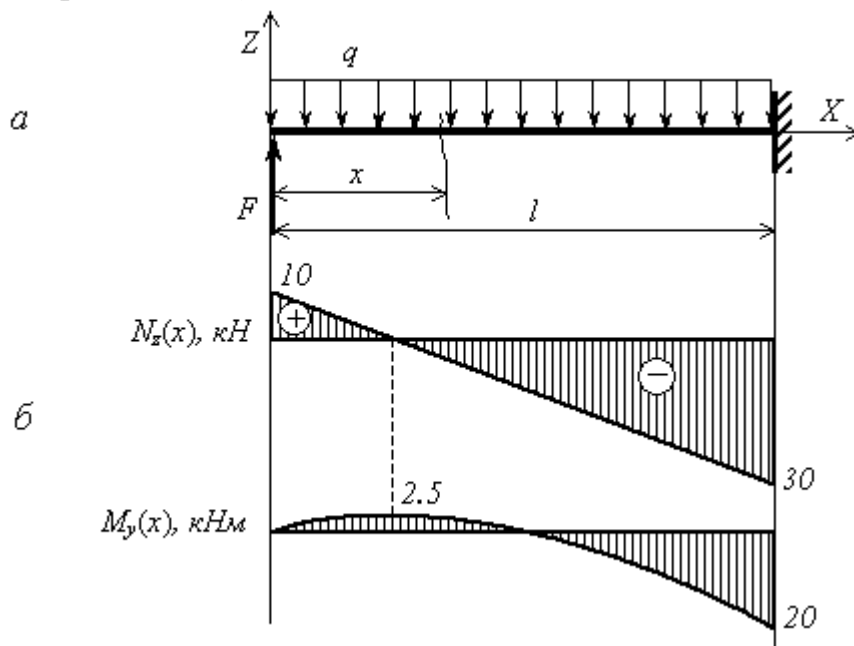


Рис. 2.10. Розрахункова схема навантаженої балки (а), епюри внутрішніх сил (б)

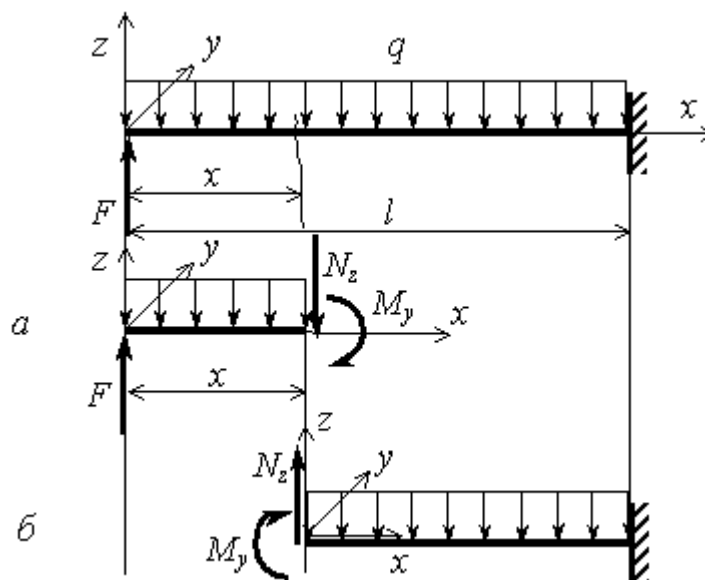
Аналіз виразів (2.11), (2.12) показує, що внутрішні зусилля можна знайти як суму сил, що діють на брус в інтервалі  $(0, x)$  і суму моментів сил, які діють у цьому інтервалі відносно відповідних осей перерізу  $x$ . У практиці визначення внутрішніх зусиль одержані рівняння є математичним формулюванням методу перерізів [1]. Метод перерізів дає змогу знайти зусилля, не вдаючись до інтегрування, а визначаючи відповідні суми сил по один бік від перерізу, як умови рівноваги відрізка балки довжиною  $x$  (рис. 2.11, а).

Проте, незважаючи на просте формулювання, на практиці для реальних конструкцій метод перерізів приводить до складних викладок, що пов'язано з визначенням початкових параметрів на кожній окремій ділянці, а головне – не дозволяє ефективно використати обчислювальну техніку. То-

му метод перерізів використовується здебільшого при визначенні внутрішніх сил у фермах.

Для визначення внутрішніх зусиль у стержнях і рамах частіше використовують метод приведення сил у формі правила: на кожній ділянці функції внутрішніх сил записуються як суми сил і моментів, які діють від самого початку конструкції до перерізу, тобто зовнішнє навантаження приводиться до системи координат, пов'язаної з перерізом, який розглядається. Цей метод дозволяє при розв'язанні прикладів скористатися можливостями математичного пакета MathCAD.

При цьому треба чітко зрозуміти, які сили визначаються у цих двох випадках. При використанні методу перерізів визначаються сили, діючі у перерізі частини, яка **відрізається**, а у методі приведення сил – у перерізі частини стержня, яка **залишається**. На *рис. 2.11.* це, відповідно, правий переріз (*рис. 2.11, а*) і лівий переріз (*рис. 2.11, б*).



*Рис. 2.11. Метод перерізів (а) і метод приведення сил (б)*

При запису рівнянь внутрішніх сил за допомогою методу приведення сил враховуємо правило знаків:

**Поздовжня сила вважається додатною, якщо вона спричинює розтяг** (*рис. 2.12, а*); **поперечна сила вважається додатною, якщо вона обертає частини розсіченої балки, яка розглядається, відносно перерізу за годинниковою стрілкою** (*рис. 2.12, б*); **момент вважається додатним зі сторони розтягнутих волокон** (*рис. 2.12, в*), таким чином, епюра згинаючих моментів в опорі матеріалів будується на стиснутих волокнах.

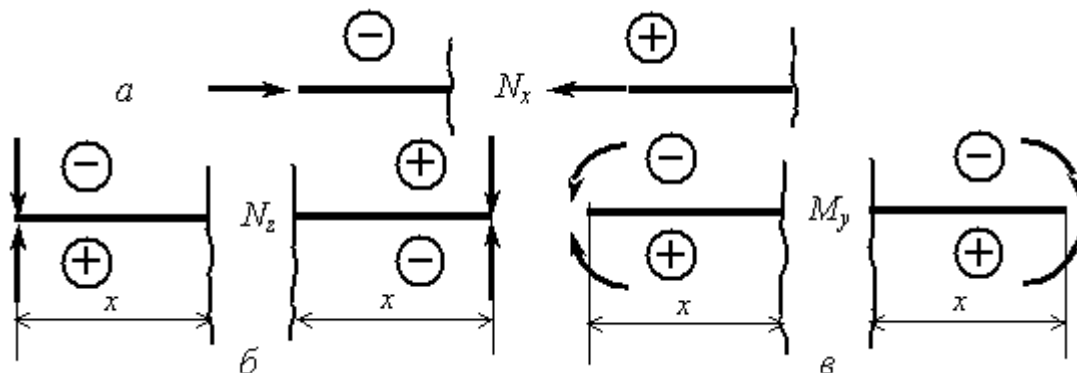


Рис. 2.12. Правило знаків для поздовжньої сили, поперечної сили і згинаючого моменту для балки

## 2.4. Визначення внутрішніх зусиль за допомогою узагальнених функцій

Застосування розв'язків (2.11), (2.12) ускладнюється тим, що зовнішні навантаження  $q(x)$  і  $t(x)$  здебільшого не можна записати як неперервні і розподілені по всій довжині стержня функції. Частіше ці функції є кусково-неперервними або з розривами першого роду (рис. 2.13). Додаткові труднощі пов'язані також із наявністю зосереджених сил і моментів. У такому випадку визначати внутрішні зусилля необхідно окремо на кожній ділянці, де функція зовнішнього навантаження є неперервною. При наявності великої кількості ділянок рівняння дуже ускладнюються. Уникнути цих труднощів можна, записавши рівняння внутрішніх сил за допомогою узагальнених функцій [2], зокрема, функції Хевісайда та  $\delta$ -функції Дірака.

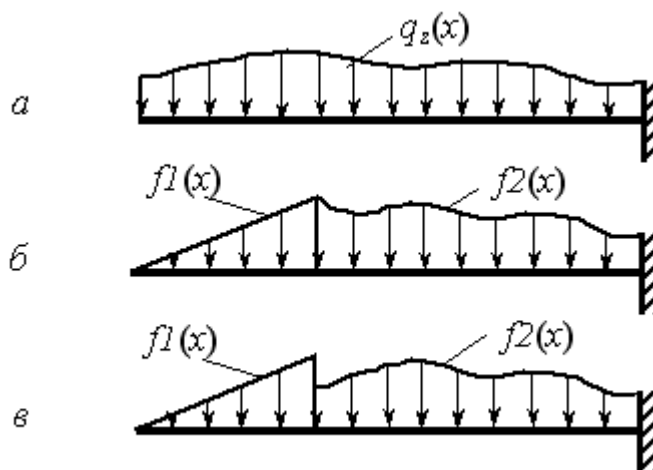


Рис. 2.13. Функції зовнішнього навантаження: неперервна (а); кусково-неперервна (б); з розривами першого роду (в)

Функція Хевісайда (ступінчаста або релейна) має вигляд

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \Phi(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \\ 1 & \text{при } x \geq a. \end{cases}$$

Функція Дірака – похідна від функції Хевісайда – має вигляд

$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = a \\ 0 & \text{при } x \neq a. \end{cases}$$

Таким чином, при наявності зосереджених сил і моментів функції зовнішнього навантаження можна записати так, як показано на *рис. 2.14*.

У загальному випадку рівняння зовнішнього навантаження для плоскої системи сил матиме вигляд<sup>\*)</sup>

$$q_z(x) = \sum_{i=1}^n q_{zi} \cdot \Phi(x-a_i) + \sum_{j=1}^m N_{zj} \cdot \delta(x-b_j) + \sum_{k=1}^p M_{yk} \cdot \delta'(x-c_k), \quad (2.13)$$

де  $a_i, b_j, c_k$  – координати перерізів, де діють відповідні сили.

Підставивши вираз (2.13) в інтеграли (2.11), (2.12), одержимо<sup>\*\*)</sup>

$$\begin{aligned} N_z(x) = & \sum_{i=1}^n q_{zi} \cdot (x-a_i) \cdot \Phi(x-a_i) + \sum_{j=1}^m N_{zj} \cdot \Phi(x-b_j) + \\ & + \sum_{k=1}^p M_{yk} \cdot \delta(x-c_k), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} M_y(x) = & \sum_{i=1}^n q_{zi} \cdot \frac{(x-a_i)^2}{2} \cdot \Phi(x-a_i) + \sum_{j=1}^m N_{zj} \cdot (x-b_j) \cdot \Phi(x-b_j) + \\ & + \sum_{k=1}^p M_{yk} \cdot \Phi(x-c_k). \end{aligned} \quad (2.15)$$

У рівнянні (2.14) останній доданок не враховується, тому що на осі  $x$  функція  $\delta(x)$  не має відповідного значення (момент не дає проекції у вигляді сили). Функція Хевісайда вказує, треба чи не треба враховувати той чи інший доданок у виразі функції при даному  $x$ . Співвідношення (2.14), (2.15) дають можливість побудувати епюри внутрішніх зусиль по всій довжині стержня як графіки функцій  $N_y(x)$  і  $M_z(x)$  і до того ж легко програмується на ЕОМ.

<sup>\*)</sup> Обмежуємося випадком  $q_z = const$ .

<sup>\*\*)</sup> Зверніть увагу на правило інтегрування доданків із функціями  $\Phi(x)$ ,  $\delta(x)$ ,  $\delta'(x)$



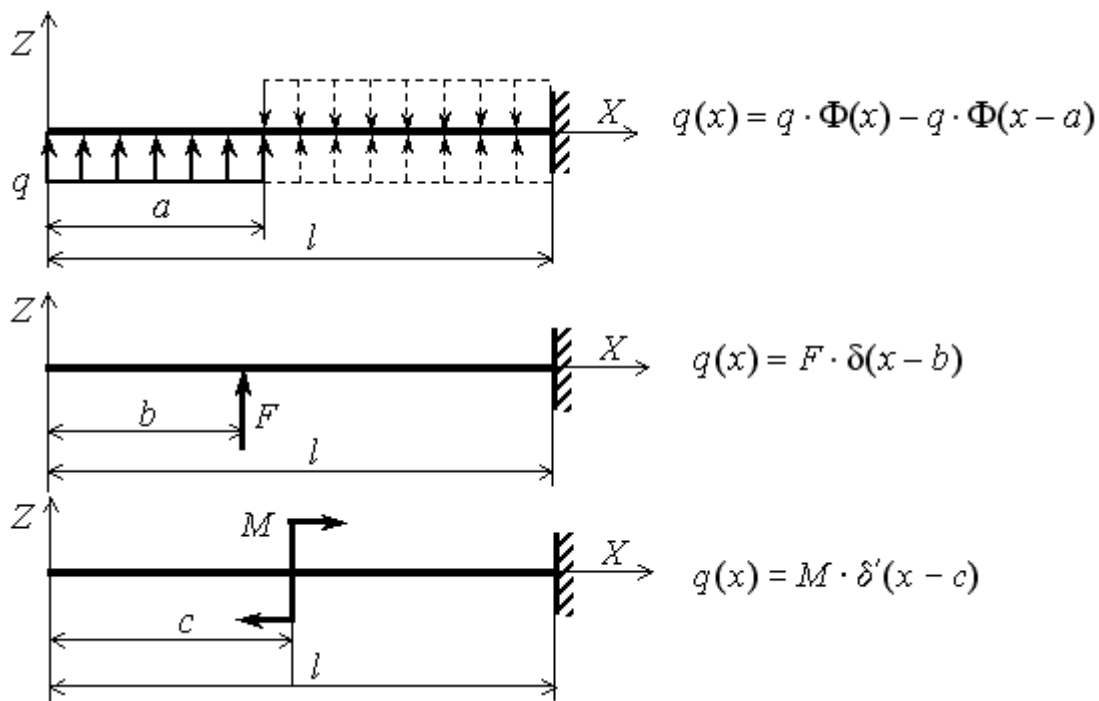


Рис. 2.14. Використання узагальнених функцій для запису функції зовнішнього навантаження

**ПРИКЛАД 2.5.** Скласти рівняння внутрішніх сил для консольної балки (рис. 2.14) за допомогою функції Хевісайда.

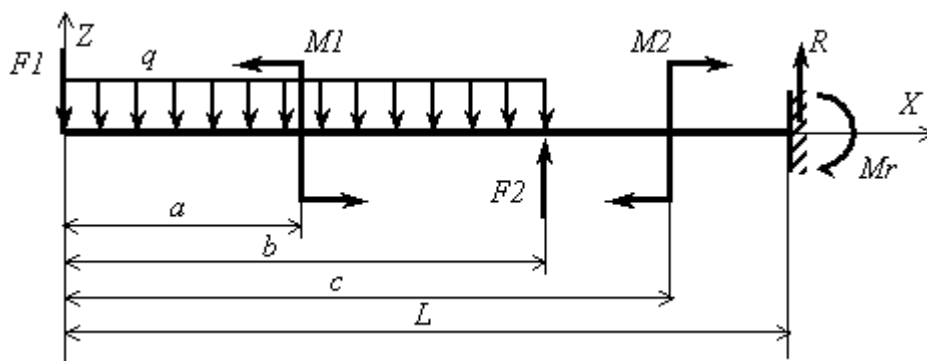


Рис. 2.14. Розрахункова схема консольного стержня

Розв'язання:

Використання функції Хевісайда передбачає розв'язання задачі розрахунку конструкції за допомогою математичного пакета MathCAD. Функція Хевісайда є вбудованою у MathCAD, як і велика кількість інших корисних функцій (див. Додаток А).

Якщо вибрати початок координат зліва, то знаки для моменту і поперечної сили співпадають (рис. 2.12, б, в). Зі знаком + записують сили і моменти, які діють у додатному напрямку осі  $Z$ , проведеної на початку балки:

$$N_z(x) := -F1 \cdot \Phi(x) - q \cdot x \cdot \Phi(x) + q \cdot (x-b) \cdot \Phi(x-b) + F2 \cdot \Phi(x-b) \dots + R \cdot \Phi(x-L)$$

$$\begin{aligned}
 M_y(x) := & -F_1 \cdot x \cdot \Phi(x) - q \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \Phi(x) + q \cdot \frac{(x-b)^2}{2} \cdot \Phi(x-b) \dots \\
 & + F_2 \cdot (x-b) \cdot \Phi(x-b) + R \cdot (x-L) \cdot \Phi(x-L) \dots \\
 & + -M_1 \cdot \Phi(x-a) + M_2 \cdot \Phi(x-c) + M_r \cdot \Phi(x-L)
 \end{aligned}$$

Для побудови епюр внутрішніх зусиль необхідно попередньо визначити опорні реакції, склавши рівняння рівноваги, а далі епюри (графіки функцій  $N_z(x)$  і  $M_y(x)$ ) будуються у MathCAD за простим алгоритмом.

## 2.5. Визначення внутрішніх зусиль у стержнях при розтягу-стиску

**ПРИКЛАД 2.6.** Для заданого ступінчастого сталевго стержня побудувати епюри осьових зусиль з урахуванням власної ваги стержня (рис. 2.15, а).

Вхідні дані:

$$\begin{aligned}
 D_1 = 0.4 \text{ (м)}, \quad D_2 = 0.3 \text{ (м)}, \quad D_3 = 0.2 \text{ (м)}, \quad \gamma = 78 \text{ (кН/м}^3\text{)}, \\
 a = 0.8 \text{ (м)}, \quad b = 1.0 \text{ (м)}, \quad c = 0.5 \text{ (м)}.
 \end{aligned}$$

Розв'язання:

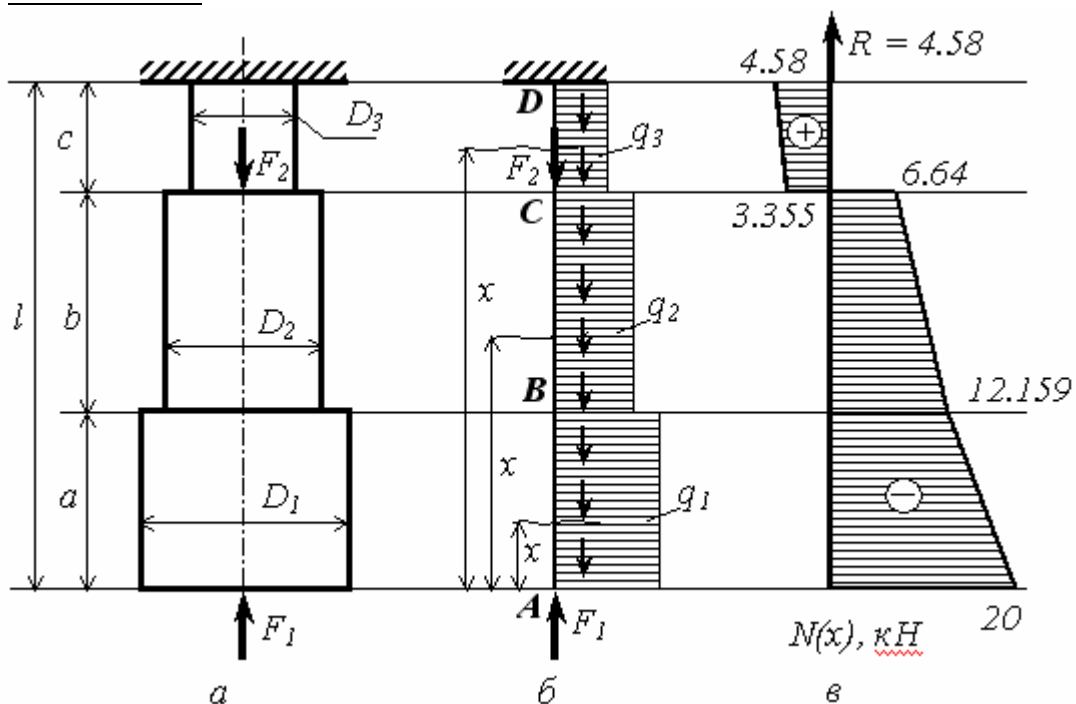


Рис. 2.15. Ступінчастий стержень (а), побудова розрахункової схеми стержня (б), побудова епюри внутрішніх сил (в)

Побудуємо розрахункову схему конструкції (рис. 2.15, б). У даному випадку РС – це умовне зображення стержня у вигляді його осьової лінії із заданим навантаженням. Власну вагу стержня покажемо як розподілене навантаження, прикладене вздовж осі стержня.

Конструкція розбивається на ділянки у відповідності зі зміною зовнішнього навантаження, площі поперечного перерізу або матеріалу. На протязі однієї ділянки кожний з цих факторів повинен бути неперервною функцією. Отже в даному випадку стержень розбивається на три ділянки.

Власна вага (розподілене навантаження) на протязі кожної ділянки є сталого, тому що площа поперечного перерізу не змінюється, отже інтенсивність власної ваги в кожному поперечному перерізі

$$q_i = A_i \cdot \gamma,$$

де  $A_i = \frac{\pi D_i^2}{4}$  – площа поперечного перерізу  $i$ -тої ділянки,

$\gamma$  – питома вага матеріалу.

Визначимо площі поперечних перерізів  $A_i$  та інтенсивності  $q_i$  на кожній ділянці:

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = 0.126 \text{ м}^2, \quad A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = 0.071 \text{ м}^2, \quad A_3 = \frac{\pi D_3^2}{4} = 0.036 \text{ м}^2;$$

$$q_1 = A_1 \cdot \gamma = 9.802 \text{ кН/м},$$

$$q_2 = A_2 \cdot \gamma = 5.513 \text{ кН/м},$$

$$q_3 = A_3 \cdot \gamma = 2.45 \text{ кН/м}.$$

Запишемо функції внутрішніх сил на кожній ділянці, враховуючи правило знаків для поздовжніх сил: (рис. 2.12).

$$x := 0, 0.02 \dots 1$$

$$\text{AB} \quad 0 \leq x \leq a \quad N_1(x) := -F_1 + q_1 \cdot x$$

$$\text{BC} \quad a \leq x \leq a + b \quad N_2(x) := -F_1 + q_1 \cdot a + q_2 \cdot (x - a)$$

$$\text{CD} \quad a + b \leq x \leq l \quad N_3(x) := -F_1 + q_1 \cdot a + q_2 \cdot b + F_2 + q_3 \cdot (x - a - b)$$

Визначимо внутрішні сили на початку і в кінці кожної ділянки, підставляючи у формули відповідні значення  $x$  (значення сил одержимо у кН):

$$N_1(0) = -20 \quad N_2(a) = -12.159 \quad N_3(a + b) = 3.355$$

$$N_1(a) = -12.159 \quad N_2(a + b) = -6.645 \quad N_3(l) = 4.58$$

Функції  $N_i(x)$  на всіх ділянках лінійні, отже, використовуючи одержані значення, будемо епюру поздовжніх сил для заданої конструкції (рис. 2.15, в).

Покажемо розв'язок задачі у математичному пакеті MathCAD.

Вводимо вхідні дані в єдиній системі одиниць: відстані в (м), сили в (кН), питому вагу в (кН/м<sup>3</sup>). Позначимо через  $i$  номер ділянки.

$$a := 0.8 \quad b := 1.0 \quad c := 0.5 \quad F1 := 20 \quad F2 := 10 \quad \gamma := 78$$

$$l := a + b + c \quad i := 1..3 \quad D_i :=$$

0.4
0.3
0.2

Визначимо площі поперечних перерізів ( $m^2$ ) та інтенсивності власної ваги ( $\kappa H/m$ ):

$$A_i := \frac{\pi \cdot (D_i)^2}{4} \quad A_i = \quad q_i := A_i \cdot \gamma \quad q_i =$$

0.126
0.071
0.031

9.802
5.513
2.45

Запишемо функції внутрішніх сил на кожній ділянці, враховуючи правило знаків:

$$x := 0, 0.02 .. 1$$

$$AB \quad 0 \leq x \leq a \quad N1(x) := -F1 + q_1 \cdot x$$

$$BC \quad a \leq x \leq a + b \quad N2(x) := -F1 + q_1 \cdot a + q_2 \cdot (x - a)$$

$$CD \quad a + b \leq x \leq l \quad N3(x) := -F1 + q_1 \cdot a + q_2 \cdot b + F2 + q_3 \cdot (x - a - b)$$

$$N1(0) = -20 \quad N2(a) = -12.159 \quad N3(a + b) = 3.355$$

$$N1(a) = -12.159 \quad N2(a + b) = -6.645 \quad N3(l) = 4.58$$

Оскільки функції  $N_i(x)$  на всіх ділянках лінійні, можна побудувати епюру поздовжніх сил для заданої конструкції вручну, використовуючи одержані значення (рис. 2.15, в).

При побудові епюр за допомогою пакета MathCAD є декілька способів врахувати розділення конструкції на ділянки.

Розглянемо використання функції **if** для побудови епюри:

**if(умова, вираз № 1, вираз № 2)** – якщо умова виконується, то функція визначається виразом № 1, якщо не виконується, то виразом № 2.

В даному випадку необхідно використати декілька функцій **if**:

$$N(x) := \text{if}(0 \leq x \leq a, N1(x), \text{if}(a \leq x \leq a + b, N2(x), \text{if}(a + b \leq x \leq l, N3(x), 0)))$$

$$N(0) = -20 \quad N(a) = -12.159 \quad N(a + b) = -6.645$$

$$N(a + b + 0.00001) = 3.355 \quad N(l) = 4.58$$

Як бачимо, при великій кількості ділянок рівняння функції поздовжніх сил стає громіздким і незручним для запису, а, головне, незрозумілим.

Інший, більш зручний і наглядний спосіб запису функції внутрішніх сил, трудомісткість якого не залежить від кількості ділянок, – це використання засобів програмування у пакеті MathCAD, зокрема, операторів

**Add line** та **if** на панелі **Програмування**. Функція поздовжніх сил матиме вигляд

$$N(x) := \begin{cases} (-F_1 + q_1 \cdot x) & \text{if } 0 \leq x \leq a \\ [-F_1 + q_1 \cdot a + q_2 \cdot (x - a)] & \text{if } a \leq x \leq a + b \\ [-F_1 + q_1 \cdot a + q_2 \cdot b + F_2 + q_3 \cdot (x - a - b)] & \text{if } a + b \leq x \leq L \end{cases}$$

Побудуємо епюру  $N(x)$  за допомогою пакета MathCAD<sup>\*)</sup> (рис. 2.16) і визначимо величину зусиль на границях ділянок:

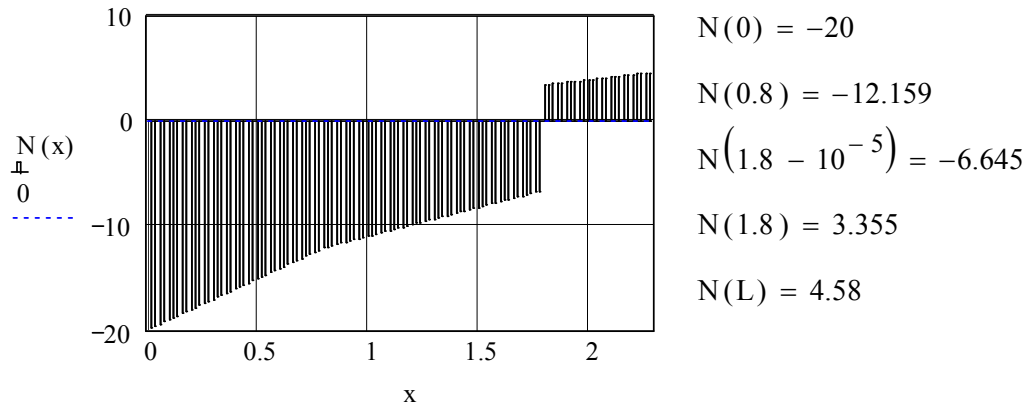


Рис. 2.16. Епюра поздовжніх сил

Як видно на епюрі поздовжніх сил, величини стрибків (розривів функції) у перерізах  $x = 0$  та  $x = a + b$  відповідають заданим зовнішнім силам. Величина реакції в закріпленні дорівнює значенню внутрішнього зусилля в кінці стержня (при  $x = L$ )  $R = 4.58 \text{ кН}$  (рис. 2.15, в).

**ПРИКЛАД 2.7.** Для заданого ступінчастого стержня змінного діаметра побудувати епюри осьових зусиль з урахуванням власної ваги стержня (рис. 2.17, а).

Вхідні дані:

$$F_1 := 10 \quad F_2 := 20 \quad (\text{кН})$$

$$a := 0.8 \quad b := 1.2 \quad c := 1 \quad l := a + b + c \quad (\text{м})$$

$$d_1 := 0.6 \quad d_2 := 0.4 \quad d_3 := 0.3 \quad d_4 := 0.5 \quad d_5 := 0.4 \quad (\text{м})$$

Розв'язання:

Для побудови розрахункової схеми заданої конструкції, необхідно визначити навантаження від власної ваги. На ділянці, де площа поперечного перерізу не змінюється, тобто на ділянці  $CD$ , розподілене навантаження є сталою величиною і визначається, як і у попередньому прикладі, досить просто:

<sup>\*)</sup> На графіку вісь  $x$  – горизонтальна. Епюри прийнято будувати паралельно осі стержня (рис. 2.15, в). У MathCAD це можна зробити, помінявши місцями  $x$  і  $N(x)$ , але при цьому не можна зробити штрихування (показати ординати графіка).

$$q_3(x) := \frac{\pi \cdot d_5^2}{4} \cdot \gamma \quad q_3(a+b) = 9.802$$

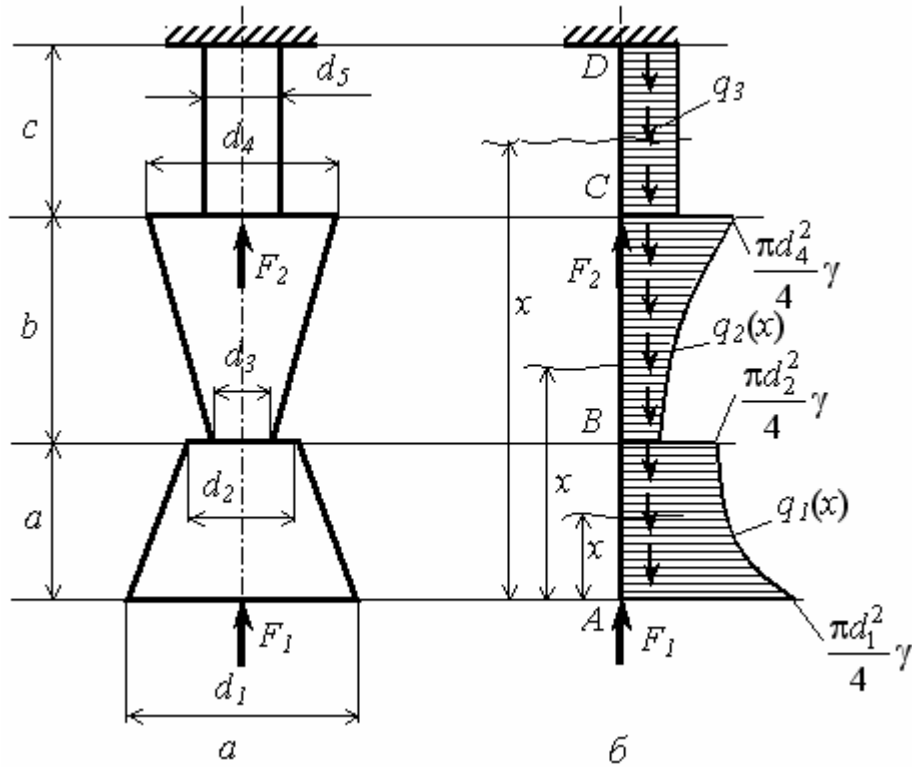


Рис. 2.17. Ступінчастий стержень (а); побудова розрахункової схеми стержня (б)

На ділянках  $AB$  і  $BC$  навантаження від власної ваги є нелінійною функцією, тому що залежить від площі поперечного перерізу, яка змінюється в залежності від квадрата діаметра.

Розглянемо ділянку  $AB$  (рис. 2.18).

Виділимо елементарний об'єм  $dV_1 = A_1(x) \cdot dx = \frac{\pi D_1(x)^2}{4} \cdot dx$ . Тоді сила, яка діє в об'ємі  $dV_1$ ,  $-dN_1 = dV_1 \cdot \gamma$ , а навантаження, розподілене по довжині  $dx$ , –

$$q_1(x) = \frac{dN_1}{dx} = \frac{dV_1 \cdot \gamma}{dx} = \frac{\pi D_1(x)^2 dx}{4 dx} \gamma = \frac{\pi D_1(x)^2}{4} \gamma.$$

Функцію  $D_1(x)$  можна записати, використовуюючи співвідношення у прямокутних трикутниках, як видно з рис. 2.18:

$$D_1(x) = d_1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot x = d_1 - \frac{d_1 - d_2}{a} x,$$

$$q_1(x) := \frac{\pi \cdot D_1(x)^2}{4} \cdot \gamma \quad q_1(0) = 22.054 \quad q_1(a) = 9.802 \quad \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}} \right)$$

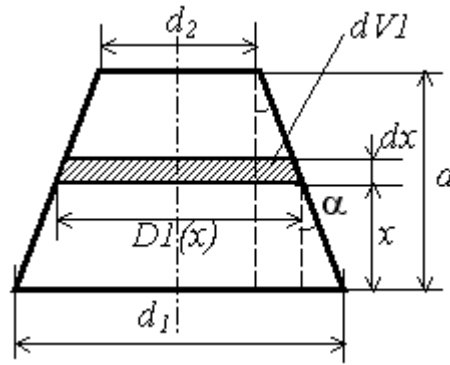


Рис. 2.18. Ділянка стержня зі змінною площею

На ділянці  $BC$  запишемо необхідні функції, виходячи з тих же міркувань:

$$D2(x) := d3 + \frac{d4 - d3}{b} \cdot (x - a)$$

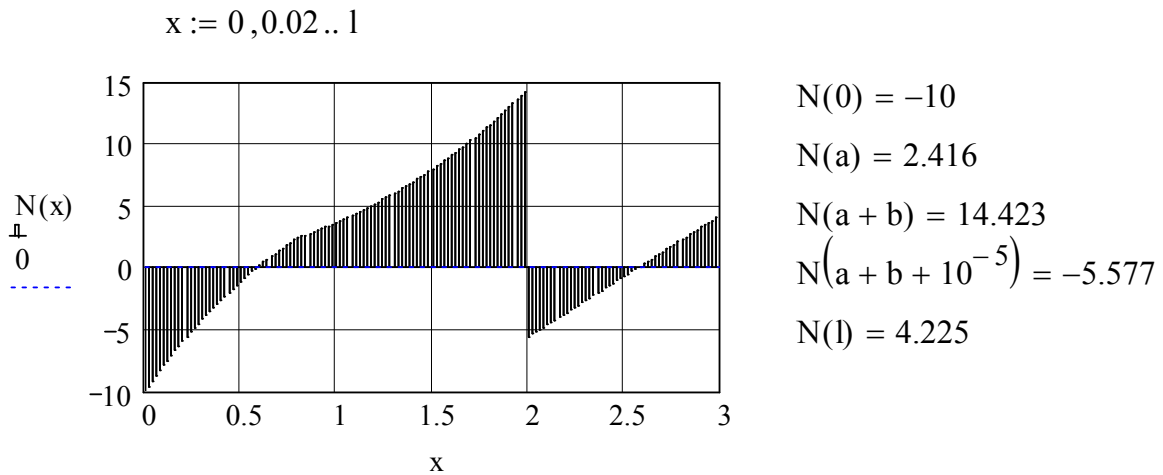
$$q2(x) := \frac{\pi \cdot D2(x)^2}{4} \cdot \gamma \quad q2(a) = 5.513 \quad q2(a + b) = 15.315 \quad \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}} \right)$$

Побудуємо розрахункову схему конструкції (рис. 2.17, б). Як видно, на першій і другій ділянці залежність розподіленого навантаження від діаметра у перерізі  $x$  є квадратичною.

Запишемо функцію поздовжніх сил:

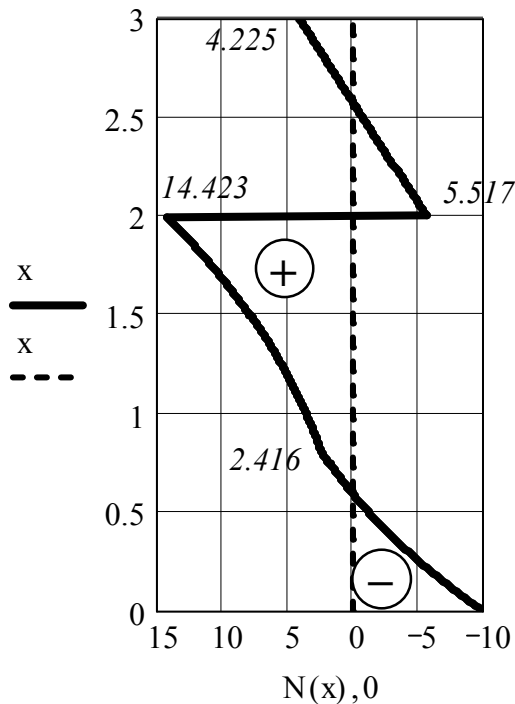
$$N(x) := \begin{cases} \left( -F1 + \int_0^x q1(x) dx \right) & \text{if } 0 \leq x \leq a \\ \left( -F1 + \int_0^a q1(x) dx + \int_a^x q2(x) dx \right) & \text{if } a \leq x \leq a + b \\ \left[ -F1 + \int_0^a q1(x) dx + \int_a^{a+b} q2(x) dx + q3(x) \cdot (x - a - b) - F2 \right] & \text{if } a + b \leq x \leq l \end{cases}$$

Побудуємо графік функції  $N(x)$  за допомогою MathCAD (рис. 2.19) і визначимо значення функції  $N(x)$  у характерних точках на границях ділянок.



*Рис. 2.19. Епюра поздовжніх сил*

Покажемо епюру паралельно осі стержня, як у попередній задачі (див. *рис. 2.15, в*), для цього на графіку поміняємо місцями  $x$  і  $N(x)$ :



Опорну реакцію в закріпленні ми не визначали, тому що відлік  $x$  був від вільного торця стержня. Величина опорної реакції дорівнює останній ординаті з протилежним знаком. В даному прикладі реакція  $R = 4.225 \text{ кН}$  і направлена вгору.

## 2.6. Побудова епюр внутрішніх зусиль при крученні

**ПРИКЛАД 2.8.** Для заданої схеми навантаження вала побудувати епюру моментів кручення (*рис. 2.20*).

Вхідні дані:

$$M_1 := 50 \quad M_2 := 60 \quad M_3 := 20 \quad M_4 := 30 \quad (\text{кН} \cdot \text{м})$$

$$m := 20 \quad \left( \frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{м}} \right) \quad a := 1 \quad (\text{м})$$



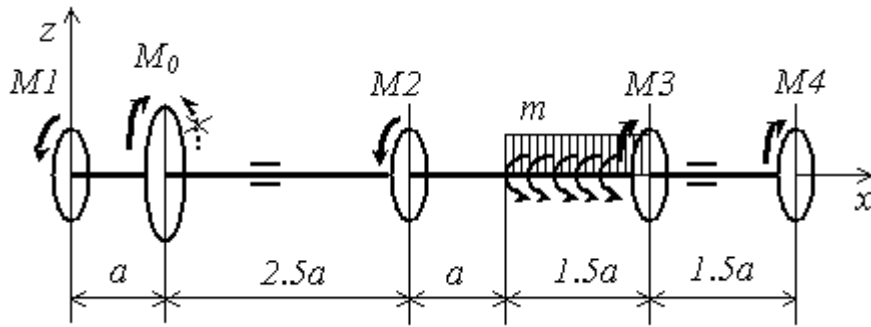


Рис. 2.20. Розрахункова схема вала

Розв'язання:

При крученні у поперечних перерізах стержня діють тільки моменти кручення.

Стержень, який працює переважно на кручення, називають валом.

Щоб визначити напрямок і величину невідомого момента  $M_0$ , позначимо його напрямок довільно (пунктир) і запишемо рівняння рівноваги для вала, враховуючи припущення про відсутність тертя у підшипниках:

$$M_0 := 0$$

$$\text{Given} \quad M_1 + M_0 + M_2 + m \cdot 1.5 \cdot a - M_3 - M_4 = 0$$

$$M_0 := \text{Find}(M_0) \quad M_0 = -90$$

Від'ємне значення момента  $M_0$  означає, що напрямок його протилежний напрямкові момента  $M_1$ , який вибраний додатнім.

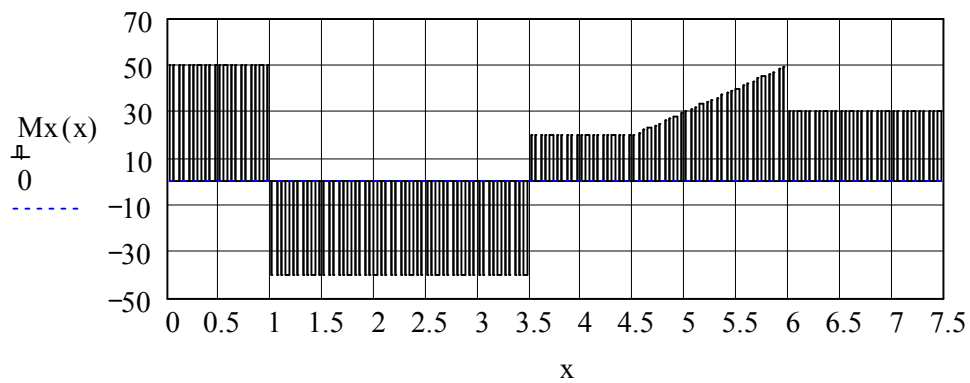
Запишемо функцію моментів кручення, при цьому напрям момента  $M_0$  залишаємо попереднім (MathCAD в рівняння підставляє від'ємне значення), хоча можна переписувати значення  $M_0 := -M_0$  і в рівняння підставляти момент  $M_0$  відповідно до правильного напрямку):

$$M_x(x) := \begin{cases} M_1 & \text{if } 0 \leq x \leq a \\ (M_1 + M_0) & \text{if } a \leq x \leq 3.5 \cdot a \\ (M_1 + M_0 + M_2) & \text{if } 3.5 \cdot a \leq x \leq 4.5 \cdot a \\ [M_1 + M_0 + M_2 + m \cdot (x - 4.5 \cdot a)] & \text{if } 4.5 \cdot a \leq x \leq 6 \cdot a \\ (M_1 + M_0 + M_2 + m \cdot 1.5 \cdot a - M_3) & \text{if } 6 \cdot a \leq x \leq 7.5 \cdot a \end{cases}$$

Епюру моментів кручення побудовано на *рис. 2.21*.

Проаналізуємо одержані результати і впевнимся, що стрибки на епюрі (розриви функції) дорівнюють величині прикладених у відповідному перерізі моментів, а значення функції в кінці розрахунку дорівнює значенню момента кручення  $M_4$ .

$x := 0, 0.05 \dots 7.5$



$$\begin{array}{lll}
 M_x(0) = 50 & M_x(3.49999) = -40 & M_x(5.99999) = 50 \\
 M_x(0.99999) = 50 & M_x(3.5) = 20 & M_x(6) = 30 \\
 M_x(1) = -40 & M_x(4.5) = 20 & M_x(7.5) = 30
 \end{array}$$

Рис. 2.21. Еюра моментів кручення

## 2.7. Визначення внутрішніх зусиль у балках при плоскому згині

**ПРИКЛАД 2.9.** Побудувати еюри внутрішніх сил для консольної балки (рис. 2.22).

Вхідні дані:  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ,  $b = 3 \text{ м}$ .

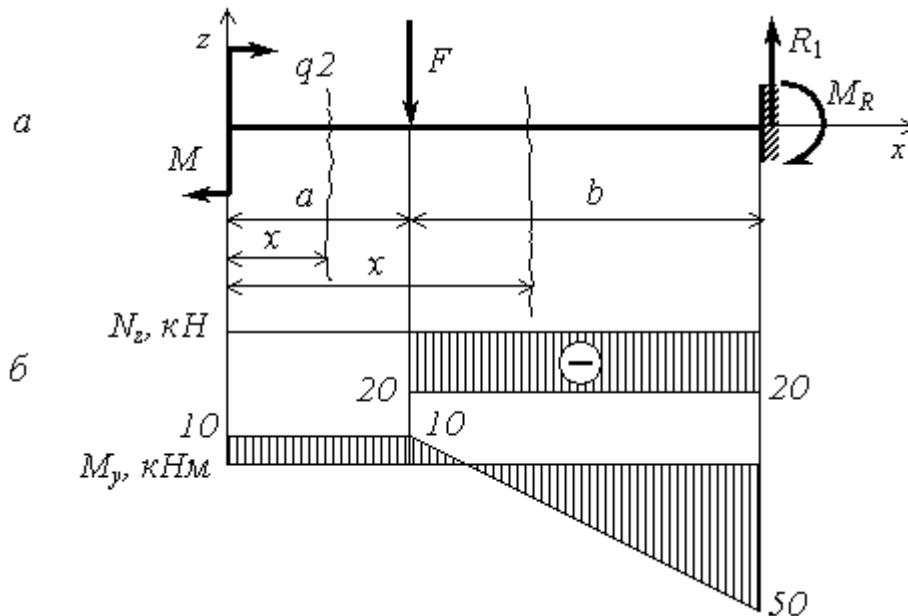


Рис. 2.22. Побудова еюр внутрішніх зусиль для консольної балки: схема балки (а); еюри поперечних сил і згинаючих моментів (б)

Розв'язання:

При дії на конструкцію навантаження в одній площині<sup>\*)</sup> виникає напружений стан, який називається “плоский згин”. В загальному випадку при плоскому згині в поперечних перерізах конструкції виникають три внутрішні зусилля – поздовжні сили  $N_x$ , поперечні сили  $N_z$  та згинаючі моменти  $M_y$ . Якщо зовнішнє навантаження прикладене перпендикулярно осі  $X$ , то у поперечних перерізах балки поздовжні сили дорівнюють 0, отже діють лише поперечні сили і згинаючі моменти.

У жорсткому закріпленні виникають дві реакції: сила  $R$  і момент  $M_R$  (горизонтальна складова реакції в закріпленні дорівнює 0). Як правило, визначення внутрішніх зусиль необхідно починати з визначення опорних реакцій у закріпленні. Але для консольної балки при умові вибору початку розрахунку з вільного кінця балки внутрішні сили можливо визначити, не шукаючи опорних реакцій.

Складемо рівняння поперечних сил і згинаючих моментів на кожній ділянці, скориставшись методом приведення сил. Для цього запишемо функції внутрішніх зусиль, як суми сил і моментів відносно перерізу для частини балки довжиною  $x$  з урахуванням правила знаків (рис. 2.12).

На першій ділянці:

$$0 \leq x \leq 2,$$

$$N_{z1}(x) = 0, \quad M_{y1}(x) = M = 10 \text{ кНм}.$$

На другій ділянці:

$$2 \leq x \leq 5,$$

$$N_{z2}(x) = -F = -20 \text{ кН},$$

$$M_{y2}(x) = M - F \cdot (x - 2), \quad M_{y2}(2) = 10 \text{ кНм}, \quad M_{y2}(5) = -50 \text{ кНм}.$$

За одержаними значеннями будуємо епюри поперечних сил і згинаючих моментів (рис. 2.22, б).

**ПРИКЛАД 2.10.** Побудувати епюри внутрішніх сил для балки на двох опорах (рис. 2.23, а).

Вхідні дані:  $F = 20 \text{ кН}$ ,  $M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ,  $b = 3 \text{ м}$ .

Розв'язання:

Для балки на двох шарнірних опорах першим етапом розрахунку є визначення опорних реакцій. Позначимо напрямки реакцій додатними (направленими в напрямку осі  $z$ ).

Складемо рівняння рівноваги.

Сума проекцій сил на горизонтальну вісь  $x$  показує, що реакція  $R_3$  дорівнює нулю.

Сума проекцій сил на вертикальну вісь  $z$ :

<sup>\*)</sup> Далі будемо вважати, що вертикальна  $XOZ$  і горизонтальна  $XOY$  площини є головними площинами стержня.

$$R_1 + R_2 + F = 0.$$

Сума моментів відносно точки  $B$ :

$$R_1 \cdot b + F \cdot (a + b) - M = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{-F \cdot (a + b) + M}{b} = -30 \text{ кН}.$$

$$\text{Тоді } R_2 = R_1 - F = 10 \text{ кН}.$$

Розрахунок показав, що напрямок реакції  $R_1$  є протилежним вибраному спочатку.

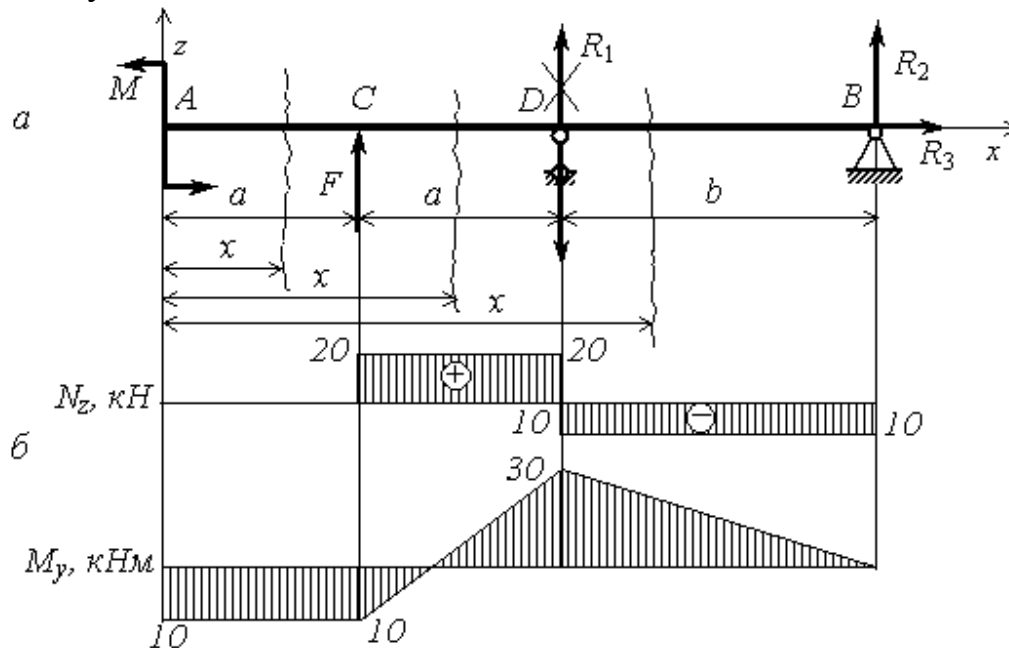


Рис. 2.23. Побудова епюр внутрішніх сил для балки на двох опорах: схема балки (а); епюри поперечних сил і згинаючих моментів (б)

Виконаємо перевірку правильності визначення опорних реакцій: складемо рівняння суми моментів відносно точки  $A$ :

$$M + F \cdot a - R_1 \cdot 2a + R_2 \cdot (2a + b) = 10 + 20 \cdot 2 - 30 \cdot 4 + 10 \cdot 7 = 0.$$

На кожній ділянці складаємо рівняння поперечних сил і згинаючих моментів з урахуванням правил знаків (рис. 2.12).

Ділянка  $AC$ :  $0 \leq x \leq a$ ;

$$Nz_1(x) = 0; \quad My_1(x) = -M = -10 \text{ кНм}.$$

Ділянка  $CD$ :  $a \leq x \leq 2a$ ;

$$Nz_2(x) = F = 20 \text{ кН};$$

$$My_2(x) = -M + F \cdot (x - a),$$

$$My_2(a) = -M = -10 \text{ кНм}, \quad My_2(2a) = -M + F \cdot a = 30 \text{ кНм}.$$

Ділянка  $DB$ :  $2a \leq x \leq 2a + b$ ;

$$Nz_3(x) = F - R_1 = -10 \text{ кН};$$

$$My_2(x) = -M + F \cdot (x - a) - R_1 \cdot (x - 2a),$$

$$My_2(2a) = -M + F \cdot a = 30 \text{ кНм}, \quad My_2(2a + b) = -M + F \cdot (a + b) - R_1 \cdot b = 0.$$

За одержаними значеннями будуюмо епюри (рис. 2.23, б).

**ПРИКЛАД 2.11.** Побудувати епюри внутрішніх сил для консольної балки (рис. 2.24).

Вхідні дані:

$$F_1 := 15 \text{ кН} \quad F_2 := 25 \text{ кН}$$

$$q_1 := 10 \text{ кН/м} \quad q_2 := 15 \text{ кН/м} \quad M_1 := 10 \text{ кНм} \quad M_2 := 40 \text{ кНм}$$

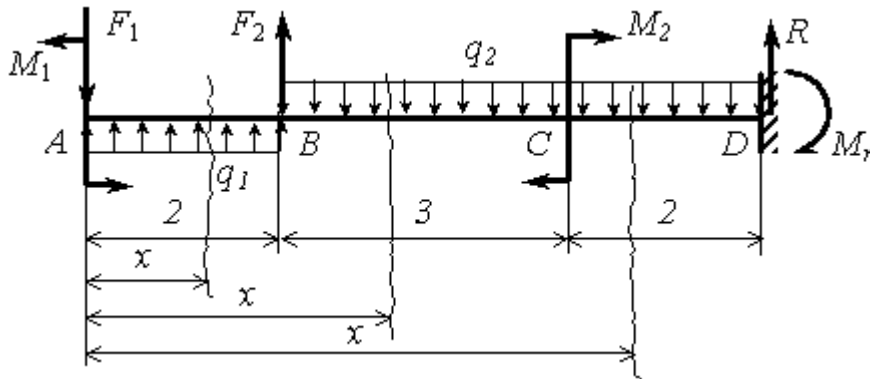


Рис. 2.24. Розрахункова схема балки

Розв'язання:

Консольна балка працює на плоский згин. Оскільки зовнішнє навантаження прикладене перпендикулярно осі стержня, то горизонтальна проекція опорної реакції в жорсткому закріпленні дорівнює нулю. Для визначення двох реакцій, що залишилися у жорсткому закріпленні, складемо рівняння рівноваги: суму проекцій сил на вісь  $z$  і суму моментів відносно точки  $D$

$$R := 0 \quad M_r := 0$$

$$\text{Given} \quad -F_1 + q_1 \cdot 2 + F_2 - q_2 \cdot 5 + R = 0$$

$$-M_1 - F_1 \cdot 7 + q_1 \cdot 2 \cdot 6 + M_2 - q_2 \cdot 5 \cdot 2.5 + M_r + F_2 \cdot 5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} R \\ M_r \end{pmatrix} := \text{Find}(R, M_r) \quad \begin{pmatrix} R \\ M_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 17.5 \end{pmatrix}$$

Виконаємо перевірку правильності визначення опорних реакцій – запишемо суму моментів відносно точки  $A$

$$M_r - R \cdot 7 + q_2 \cdot 5 \cdot 4.5 + M_2 - q_1 \cdot 2 \cdot 1 - M_1 - F_2 \cdot 2 = 0$$

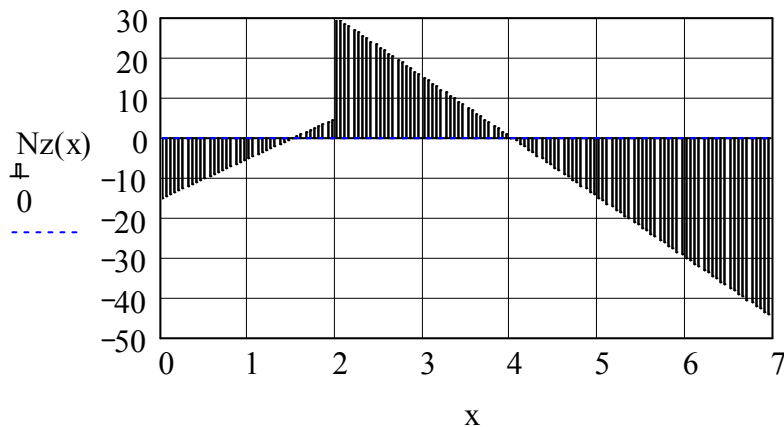
Балку розбиваємо на три ділянки у відповідності зі зміною зовнішнього навантаження. Запишемо рівняння поперечних сил і згинаючих моментів за допомогою операторів **Add line** та **if**:

$$N_z(x) := \begin{cases} (-F_1 + q_1 \cdot x) & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ [-F_1 + q_1 \cdot 2 + F_2 - q_2 \cdot (x - 2)] & \text{if } 2 \leq x \leq 5 \\ [-F_1 + q_1 \cdot 2 + F_2 - q_2 \cdot (x - 2)] & \text{if } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

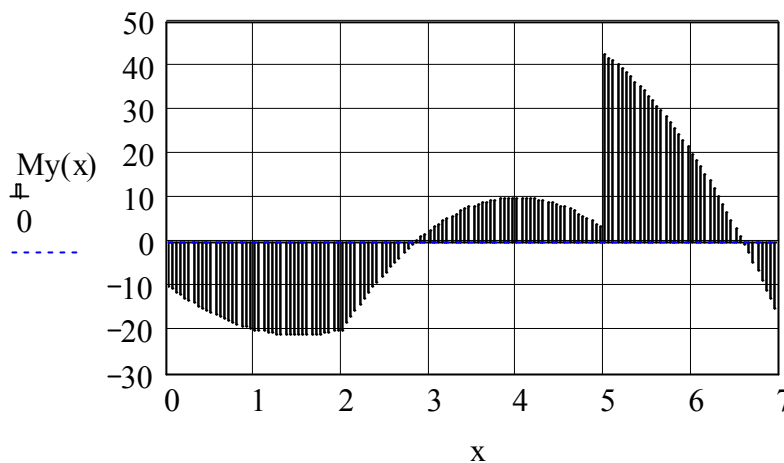
$$M_y(x) := \begin{cases} \left( -F_1 \cdot x + q_1 \cdot \frac{x^2}{2} - M_1 \right) & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ \left[ -F_1 \cdot x + q_1 \cdot 2 \cdot (x - 1) - M_1 + F_2 \cdot (x - 2) - q_2 \cdot \frac{(x - 2)^2}{2} \right] & \text{if } 2 \leq x \leq 5 \\ \left[ -F_1 \cdot x + q_1 \cdot 2 \cdot (x - 1) - M_1 + F_2 \cdot (x - 2) - q_2 \cdot \frac{(x - 2)^2}{2} + M_2 \right] & \text{if } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

Визначимо величину поперечних сил і згинаючих моментів у характерних точках (на границях ділянок) і побудуємо епюри внутрішніх сил (рис. 2.25).

$$x := 0, 0.05 \dots 7$$



$$\begin{aligned} N_z(0) &= -15 \\ N_z(1.99999) &= 5 \\ N_z(2) &= 30 \\ N_z(7) &= -45 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} M_y(0) &= -10 \\ M_y(1.99999) &= -20 \\ M_y(2) &= -20 \\ M_y(4.99999) &= 2.5 \\ M_y(5) &= 42.5 \\ M_y(7) &= -17.5 \end{aligned}$$

Рис. 2.25. Епюри внутрішніх сил для консольної балки

Як видно з епюр, опорні реакції у жорсткому закріпленні співпадають за значеннями із зусиллями в кінці розрахунку і протилежні їм за напрямком.

**ПРИКЛАД 2.12.** Для заданої консольної балки побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів (рис. 2.26).

Вхідні дані:

$$F = 20 \text{ кН}, \quad M_y = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad q_1 = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, \quad q_2 = 25 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

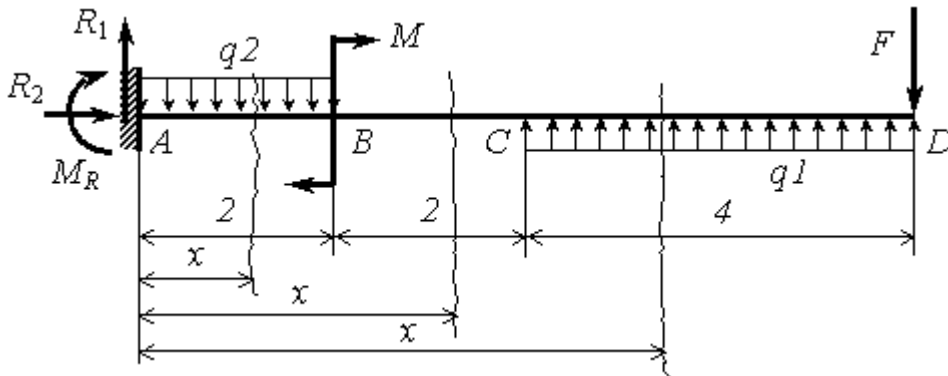


Рис. 2.26. Розрахункова схема консольної балки

Розв'язання:

Складемо рівняння рівноваги для визначення опорних реакцій<sup>\*)</sup> і розв'яжемо систему рівнянь за допомогою блоку Given...Find:

$$R_1 := 0 \quad R_2 := 0 \quad M_R := 0$$

$$\text{Given} \quad R_2 = 0$$

$$R_1 - q_2 \cdot 2 + q_1 \cdot 4 - F = 0$$

$$M_R + q_2 \cdot 2 \cdot 1 + M - q_1 \cdot 4 \cdot 6 + F \cdot 8 = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ M_R \end{pmatrix} := \text{find}(R_1, R_2, M_R) \quad \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ M_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Перевірка – сума моментів відносно точки D:

$$M_R + R_1 \cdot 8 - q_2 \cdot 2 \cdot 7 + M + q_1 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

Розбиваємо конструкцію на три ділянки у відповідності зі зміною зовнішнього навантаження.

<sup>\*)</sup> Для консольної балки шукати опорні реакції, які виникають у жорсткому закріпленні, не обов'язково, якщо почати розрахунок з вільного кінця, вони отримаються в кінці розрахунку, як однакові за значенням і протилежні за напрямком внутрішнім зусиллям в останньому перерізі (перед самим закріпленням).

На кожній ділянці умовно розріжемо балку на відстані  $x$  від початку і запишемо рівняння поперечних сил і згинаючих моментів, приводячи зовнішнє навантаження до перерізу  $x$  і враховуючи правила знаків (рис. 2.12).

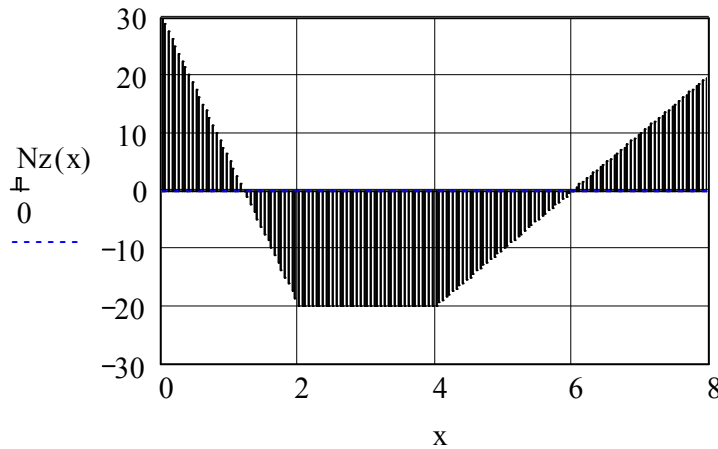
Функції поперечних сил і згинаючих моментів, записані у пакеті MathCAD, мають вигляд:

$$N_z(x) := \begin{cases} (R_1 - q_2 \cdot x) & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ (R_1 - q_2 \cdot 2) & \text{if } 2 \leq x \leq 4 \\ [R_1 - q_2 \cdot 2 + q_1 \cdot (x - 4)] & \text{if } 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

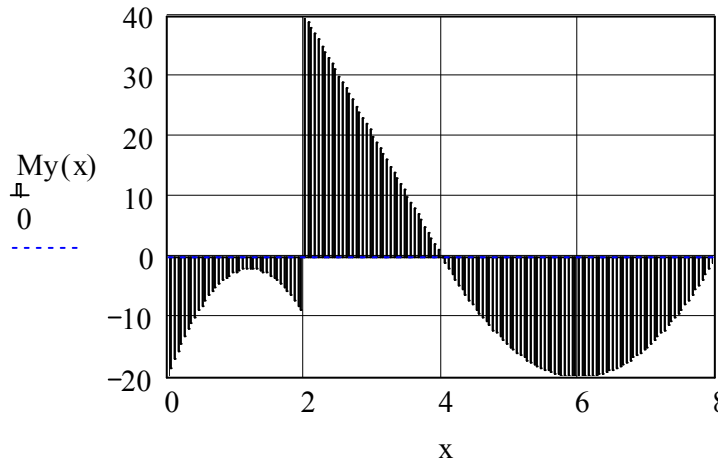
$$M_y(x) := \begin{cases} \left( R_1 \cdot x - q_2 \cdot \frac{x^2}{2} + MR \right) & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ [R_1 \cdot x - q_2 \cdot 2 \cdot (x - 1) + M + MR] & \text{if } 2 \leq x \leq 4 \\ \left[ R_1 \cdot x - q_2 \cdot 2 \cdot (x - 1) + M + MR + q_1 \cdot \frac{(x - 4)^2}{2} \right] & \text{if } 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Побудуємо епюри поперечних сил і згинаючих моментів і визначимо значення функцій у характерних перерізах (рис. 2.27).

$$x := 0, 0.05 \dots 8$$



$$\begin{aligned} N_z(0) &= 30 \\ N_z(4) &= -20 \\ N_z(6) &= 0 \\ N_z(8) &= 20 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} M_y(0) &= -20 \\ M_y(1.99999) &= -10 \\ M_y(2) &= 40 \\ M_y(4) &= 0 \\ M_y(5.99999) &= -20 \\ M_y(6) &= -20 \end{aligned}$$

Рис. 2.27. Епюри внутрішніх сил для консольної балки



Знайдемо значення моментів у точках екстремуму. Оскільки функція поперечних сил є похідною від функції згинаючих моментів (див. підрозд. 2.3), – функція моментів матиме екстремум в точках, де поперечні сили дорівнюють нулю. Скористаємось цією умовою (початкове наближення відстані  $x$  приймаємо близько до розшукуваного перерізу):

$$\begin{aligned} x &:= 1 \quad \text{Given} \quad N_z(x) = 0 \\ x &:= \text{Find}(x) \quad x = 1.2 \quad M_y(x) = -2 \\ x &:= 7 \quad \text{Given} \quad N_z(x) = 0 \\ x &:= \text{Find}(x) \quad x = 6 \quad M_y(x) = -20 \end{aligned}$$

Проаналізувавши побудовані епюри, впевнимися, що стрибки на епюрі поперечних сил відповідають прикладеним зосередженим силам, а на епюрі згинаючих моментів – моментам у даних перерізах, крім того, на ділянках, де функція поперечних сил додатна, функція моментів зростає і навпаки.

**ПРИКЛАД 2.13.** Для заданої балки на двох опорах побудувати епюри внутрішніх зусиль (рис. 2.28).

Вхідні дані:

$$F = 20 \text{ кН}, \quad M_y = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad q_1 = 40 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, \quad q_2 = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

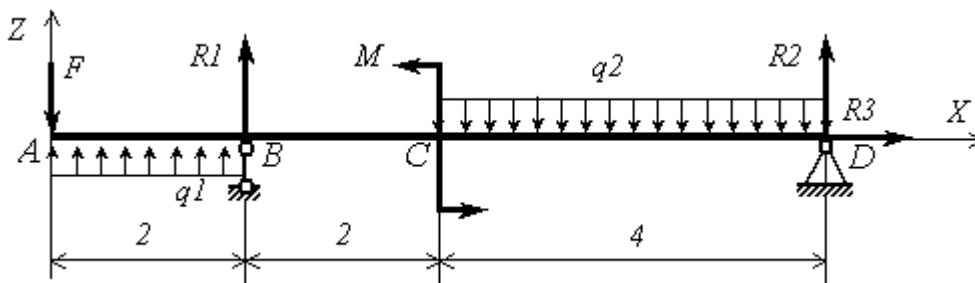


Рис. 2.28. Розрахункова схема балки на двох опорах

Розв'язання:

Балка працює на плоский згин, отже у поперечних перерізах виникають тільки поперечні сили  $N_z(x)$  і згинаючі моменти  $M_y(x)$ .

Для визначення реакцій скористаємось пакетом MathCAD. Запишемо рівняння рівноваги для заданої балки: сума проекцій усіх сил на вісь  $Z$  і сума моментів відносно точки  $D$  дорівнюють 0:

$$R1 := 0 \quad R2 := 0$$

$$\text{Given} \quad q1 \cdot 2 - F + R1 - q2 \cdot 4 + R2 = 0$$

$$q1 \cdot 2 \cdot 7 - F \cdot 8 + R1 \cdot 6 - q2 \cdot 4 \cdot 2 - My = 0$$

$$\begin{pmatrix} R1 \\ R2 \end{pmatrix} := \text{Find}(R1, R2) \quad \begin{pmatrix} R1 \\ R2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Від'ємне значення реакції означає, що насправді напрямок реакції протилежний вибраному спочатку.

Виконаємо перевірку – запишемо суму моментів відносно точки  $A$ :

$$q1 \cdot 2 \cdot 1 + R1 \cdot 2 - q2 \cdot 4 \cdot 6 + R2 \cdot 8 + My = 0$$

**Примітка:** якщо при запису рівняння перевірки враховуємо вибраний спочатку напрямок реакції  $R1$ , то підставляємо в рівняння від'ємне значення реакції (тобто те, яке отримали в результаті розрахунку).

Наступний етап – розбиваємо умовно конструкцію на ділянки у відповідності зі зміною зовнішнього навантаження. В даному випадку конструкція розділяється на три ділянки. Для кожної ділянки запишемо рівняння поперечних сил і згинаючих моментів з урахуванням правила знаків (рис. 2.12) і знайдемо значення внутрішніх сил на початку і в кінці кожної ділянки, підставляючи відповідне значення координати  $x$  (на ділянках, де функція згинаючих моментів змінюється за параболічним законом, для побудови графіка необхідно визначити значення функції у трьох точках):

$$\text{AB} \quad 0 \leq x \leq 2 \quad Nz1(x) := q1 \cdot x - F$$

$$Nz1(0) = -20 \quad Nz1(2) = 60$$

$$M1(x) := q1 \cdot \frac{x^2}{2} - F \cdot x$$

$$M1(0) = 0 \quad M1(2) = 40 \quad M1(1) = 0$$

$$\text{BC} \quad 2 \leq x \leq 4 \quad Nz2(x) := q1 \cdot 2 - F + R1$$

$$Nz2(2) = 15 \quad Nz2(4) = 15$$

$$M2(x) := q1 \cdot 2 \cdot (x - 1) - F \cdot x + R1 \cdot (x - 2)$$

$$M2(2) = 40 \quad M2(4) = 70$$

$$\text{CD} \quad 4 \leq x \leq 8 \quad Nz3(x) := q1 \cdot 2 + R1 - F - q2 \cdot (x - 4)$$

$$Nz3(4) = 15 \quad Nz3(8) = -25$$

$$M3(x) := q1 \cdot 2 \cdot (x - 1) + R1 \cdot (x - 2) - F \cdot (x) - q2 \cdot \frac{(x - 4)^2}{2} - My$$

$$M3(4) = 20 \quad M3(8) = 0 \quad M3(6) = 30$$

За одержаними значеннями будуюмо епюри вручну (рис. 2.29). Епюри завжди показують під зображенням балки

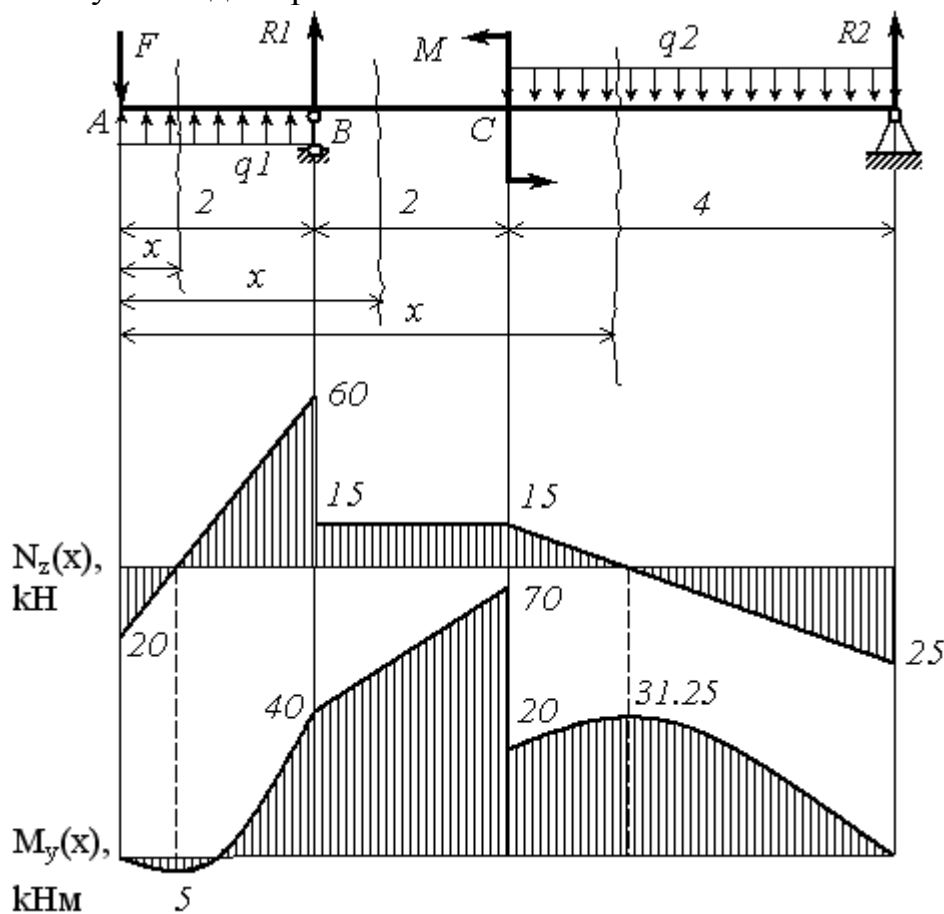


Рис. 2.29. Епюри поперечних сил і згинаючих моментів для балки на двох опорах

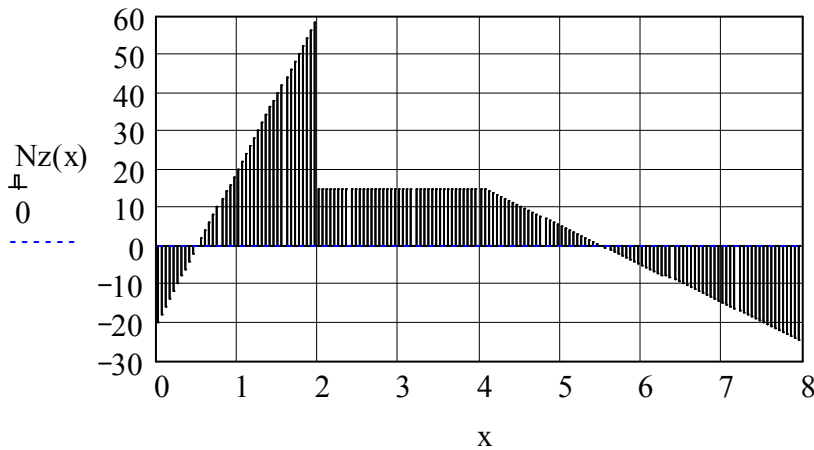
Побудуємо епюри внутрішніх сил за допомогою MathCAD.

Запишемо функції поперечних сил і згинаючих моментів, скориставшись операторами **Add line** та **if** на панелі **Програмування**.

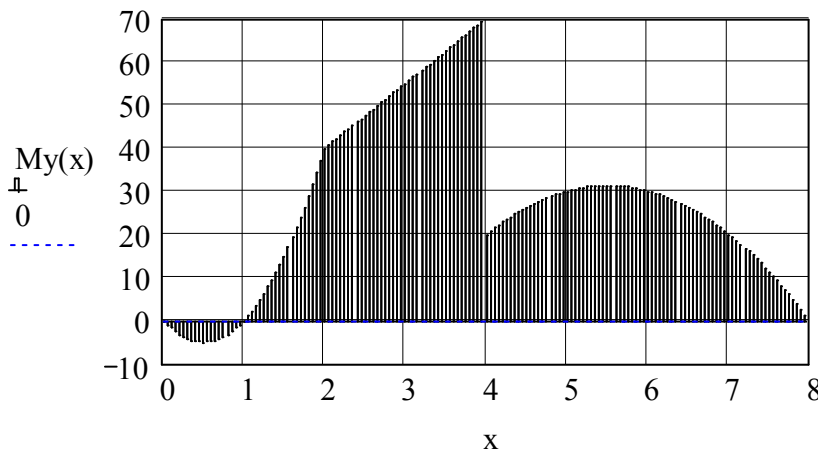
$$N_z(x) := \begin{cases} (q_1 \cdot x - F) & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ (q_1 \cdot 2 - F + R_1) & \text{if } 2 \leq x \leq 4 \\ [q_1 \cdot 2 + R_1 - F - q_2 \cdot (x - 4)] & \text{if } 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

$$M_y(x) := \begin{cases} \left( q_1 \cdot \frac{x^2}{2} - F \cdot x \right) & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ [q_1 \cdot 2 \cdot (x - 1) - F \cdot x + R_1 \cdot (x - 2)] & \text{if } 2 \leq x \leq 4 \\ \left[ q_1 \cdot 2 \cdot (x - 1) + R_1 \cdot (x - 2) - F \cdot (x) - q_2 \cdot \frac{(x - 4)^2}{2} - M_y \right] & \text{if } 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Побудувати графіки цих функцій за допомогою MathCAD не складає труднощів (рис. 2.30).

$x := 0, 0.05 \dots 8$ 


$$\begin{aligned} Nz(0) &= -20 \\ Nz(2 - 10^{-5}) &= 60 \\ Nz(2) &= 15 \\ Nz(4) &= 15 \\ Nz(8) &= -25 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} My(0) &= 0 \\ My(2) &= 40 \\ My(4 - 10^{-5}) &= 70 \\ My(4) &= 20 \\ My(8) &= 0 \end{aligned}$$

Рис. 2.30. Побудова епюр внутрішніх зусиль для балки за допомогою MathCAD

Для визначення поперечної сили або згинаючого моменту у будь-якому перерізі на відстані  $x$ , необхідно у відповідне рівняння підставити значення координати  $x$  і вручну або за допомогою MathCAD обчислити результат.

Знайдемо значення згинаючого моменту в точках екстремуму на першій і третій ділянках. Функція моменту набуває екстремального значення в точках, де поперечна сила дорівнює 0 (функція поперечної сили є похідною від функції моменту). Визначимо значення  $x$ , при якому  $Nz(x) = 0$ , а потім підставимо це значення в рівняння моменту.

На першій ділянці:

$$\begin{aligned} x := 1 \quad \text{Given} \quad Nz(x) &= 0 \\ x &:= \text{find}(x) \quad x = 0.5 \quad My(x) = -5 \end{aligned}$$

На третій ділянці:

$$\begin{aligned} x := 5 \quad \text{Given} \quad Nz(x) &= 0 \\ x &:= \text{Find}(x) \quad x = 5.5 \quad My(x) = 31.25 \end{aligned}$$

**ПРИКЛАД 2.14.** Побудувати епюри внутрішніх сил для балки на двох опорах (рис. 2.31).

Вхідні дані:

$$F1 := 20(\text{кН}) \quad F2 := 10(\text{кН}) \quad M1 := 20(\text{кНм}) \quad M2 := 20(\text{кНм})$$

$$q1 := 20 \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}} \right) \quad q2 := 10 \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}} \right)$$

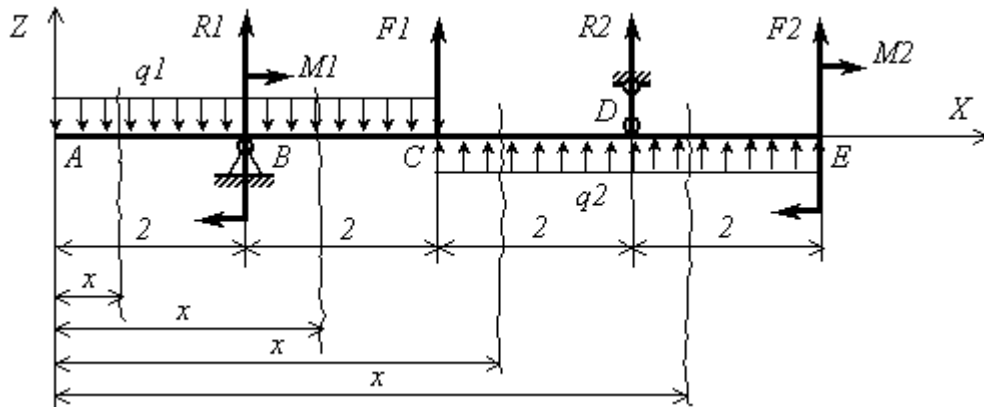


Рис. 2.31. Розрахункова схема балки на двох опорах

Розв'язання:

Балка працює на плоский згин. Горизонтальна складова реакції в опорі  $B$  дорівнює нулю. Для визначення двох невідомих реакцій складаємо два рівняння рівноваги: суму проєкцій на вісь  $Z$  і суму моментів відносно точки  $E$ :

$$R1 := 0 \quad R2 := 0$$

$$\text{Given} \quad -q1 \cdot 4 + R1 + F1 + q2 \cdot 4 + R2 + F2 = 0$$

$$-q1 \cdot 4 \cdot 6 + R1 \cdot 6 + F1 \cdot 4 + q2 \cdot 4 \cdot 2 + M1 + M2 + R2 \cdot 2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} R1 \\ R2 \end{pmatrix} := \text{Find}(R1, R2) \quad \begin{pmatrix} R1 \\ R2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ -55 \end{pmatrix}$$

Перевіримо правильність визначення реакцій – складемо рівняння суми моментів відносно точки  $A$ :

$$-M1 - M2 - q1 \cdot 4 \cdot 2 + R1 \cdot 2 + F1 \cdot 4 + q2 \cdot 4 \cdot 6 + F2 \cdot 8 + R2 \cdot 6 = 0$$

Запишемо рівняння поперечних сил і згинаючих моментів на всіх ділянках:

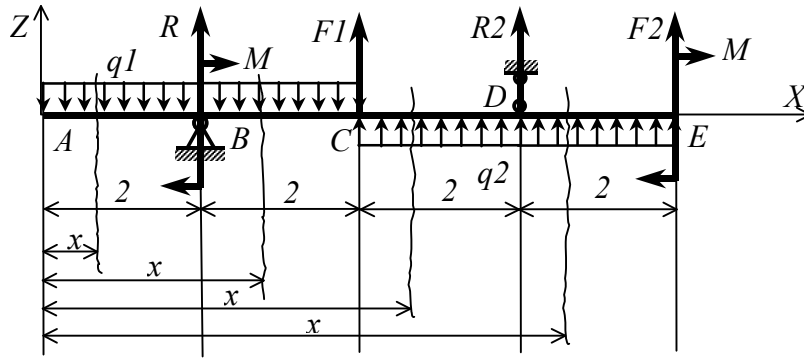
$$\begin{aligned}
 \text{AB } 0 \leq x \leq 2 \quad & Nz1(x) := -q1 \cdot x \\
 & Nz1(0) = 0 \quad Nz1(2) = -40 \\
 & My1(x) := -q1 \cdot \frac{x^2}{2} \\
 & My1(0) = 0 \quad My1(2) = -40 \quad My1(1) = -10 \\
 \text{BC } 2 \leq x \leq 4 \quad & Nz2(x) := -q1 \cdot x + R1 \\
 & Nz2(2) = 25 \quad Nz2(4) = -15 \\
 & My2(x) := -q1 \cdot \frac{x^2}{2} + R1 \cdot (x - 2) + M1 \\
 & My2(2) = -20 \quad My2(4) = -10 \quad My2(3) = -5 \\
 \text{CD } 4 \leq x \leq 6 \quad & Nz3(x) := -q1 \cdot 4 + R1 + F1 + q2 \cdot (x - 4) \\
 & Nz3(4) = 5 \quad Nz3(8) = 45 \\
 & My3(x) := -q1 \cdot 4 \cdot (x - 2) + R1 \cdot (x - 2) + F1 \cdot (x - 4) \dots \\
 & \quad + q2 \cdot \frac{(x - 4)^2}{2} + M1 \\
 & My3(4) = -10 \quad My3(6) = 20 \quad My3(5) = 0 \\
 \text{DE } 6 \leq x \leq 8 \quad & Nz4(x) := -q1 \cdot 4 + R1 + F1 + q2 \cdot (x - 4) + R2 \\
 & Nz4(4) = -50 \quad Nz4(8) = -10 \\
 & My4(x) := -q1 \cdot 4 \cdot (x - 2) + R1 \cdot (x - 2) + F1 \cdot (x - 4) \dots \\
 & \quad + q2 \cdot \frac{(x - 4)^2}{2} + M1 + R2 \cdot (x - 6) \\
 & My4(6) = 20 \quad My4(8) = -20 \quad My4(7) = -5
 \end{aligned}$$

За розрахованими значеннями можна вручну побудувати епюри внутрішніх сил.

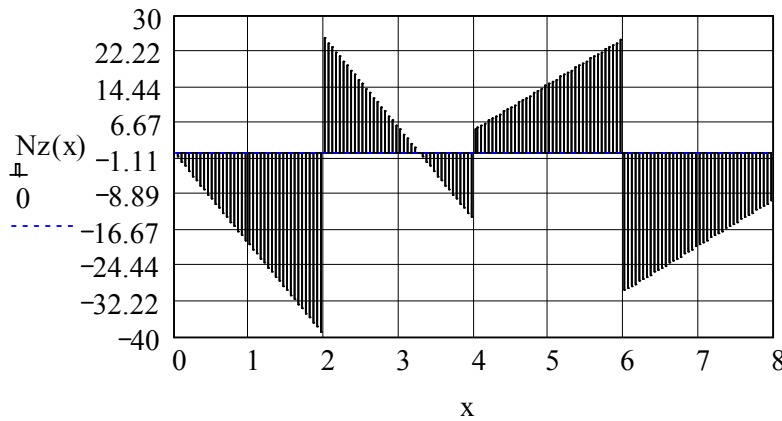
Для побудови епюр за допомогою MathCAD запишемо функції поперечних сил і згинаючих моментів, скориставшись записаними вище залежностями на кожній ділянці:

$$Nz(x) := \begin{cases} Nz1(x) & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ Nz2(x) & \text{if } 2 \leq x \leq 4 \\ Nz3(x) & \text{if } 4 \leq x \leq 6 \\ Nz4(x) & \text{if } 6 \leq x \leq 8 \end{cases} \quad My(x) := \begin{cases} My1(x) & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ My2(x) & \text{if } 2 \leq x \leq 4 \\ My3(x) & \text{if } 4 \leq x \leq 6 \\ My4(x) & \text{if } 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

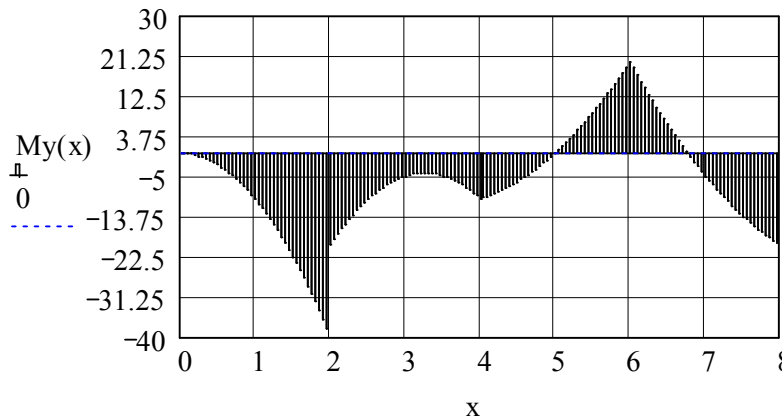
Побудуємо графіки функцій  $Nz(x)$  і  $My(x)$  (рис. 2.32).



$x := 0, 0.05 \dots 8$



- $N_z(0) = 0$
- $N_z(1.99999) = -40$
- $N_z(2) = 25$
- $N_z(3.99999) = -15$
- $N_z(4) = 5$
- $N_z(5.99999) = 25$
- $N_z(6) = -30$
- $N_z(8) = -10$



- $M_y(1.99999) = -40$
- $M_y(2) = -20$
- $M_y(4) = -10$
- $M_y(6) = 20$
- $M_y(8) = -20$

Рис. 2.32. Епюри поперечних сил і згинаючих моментів для балки на двох опорах

Проаналізуємо побудовані епюри і впевнимся, що стрибки на епюрі поперечних сил відповідають прикладеним зосередженим силам, а стрибки на епюрі моментів – заданим моментам. Функція згинаючих моментів спадає на ділянках, де поперечна сила від’ємна, і зростає при додатних значеннях функції поперечних сил. У точці, де поперечна сила дорівнює нулю, функція згинаючих моментів набуває екстремального значення. Знайдемо значення функції  $M_y(x)$  в точці екстремуму:

$$\begin{aligned}
 x &:= 3 \quad \text{Given} \quad N_z(x) = 0 \\
 x &:= \text{Find}(x) \quad x = 3.25 \quad M_y(x) = -4.375
 \end{aligned}$$

**ПРИКЛАД 2.15.** Побудувати епюри внутрішніх зусиль для балки на двох опорах (рис. 2.33).

Розв'язання:

У даному прикладі більш повно використаємо можливості пакета MathCAD.

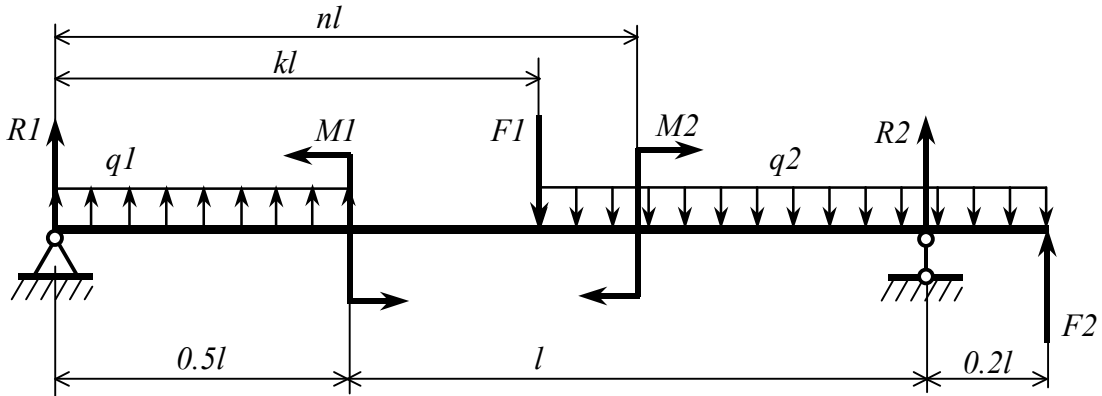


Рис. 2.33. Розрахункова схема балки на двох опорах

Задамо вхідні дані:

$$q1 := 20 \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}} \right) \quad q2 := 10 \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}} \right) \quad M1 := 40 \text{ (кН} \cdot \text{м)} \quad M2 := 10 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$$

$$F1 := 10 \text{ (кН)} \quad F2 := 20 \text{ (кН)} \quad l := 6 \text{ (м)} \quad n := 1 \quad k := \frac{5}{6}$$

$$nl := n \cdot l \quad kl := k \cdot l \quad L := l + 0.5 \cdot l + 0.2 \cdot l$$

$$nl = 6 \text{ (м)} \quad kl = 5 \text{ (м)} \quad L = 10.2 \text{ (м)}$$

Запишемо параметри масивів

$$i := 1..4 \quad j := 1..2 \quad p := 1..2 \quad ii := 4 \quad jj := 2 \quad pp := 2$$

$a_i :=$        $b_j :=$        $c_p :=$       - координати перерізів, де прикладені зовнішні сили

0	kl	0.5l
0.5l	L	nl
kl		
L		

де  $a_i$  – координати початку і кінця дії розподіленого навантаження;

$b_j$  – координати точок прикладення зосереджених сил;

$c_p$  – координати точок прикладення зосереджених моментів.

$q_i :=$        $F_j :=$        $M_p :=$       - зовнішнє навантаження у вигляді векторів-стовпців

q1	-F1	-M1
-q1	F2	M2
-q2		
q2		



Знак зусилля записується у відповідності з правилом знаків.

Запишемо функції поперечних сил і згинаючих моментів у загальному вигляді (2.14), (2.15), включаючи невідомі поки що реакції:

$$\begin{aligned}
 N_z(x, R_1, R_2) &:= \sum_{i=1}^{ii} q_i \cdot (x - a_i) \cdot \Phi(x - a_i) + \sum_{j=1}^{jj} F_j \cdot \Phi(x - b_j) \dots \\
 &+ R_1 \cdot \Phi(x) + R_2 \cdot \Phi(x - 1.5 \cdot l) \\
 M_y(x, R_1, R_2) &:= \sum_{i=1}^{ii} q_i \cdot \frac{(x - a_i)^2}{2} \cdot \Phi(x - a_i) + \sum_{j=1}^{jj} F_j \cdot (x - b_j) \cdot \Phi(x - b_j) \dots \\
 &+ \sum_{p=1}^{pp} M_p \cdot \Phi(x - c_p) \dots \\
 &+ R_1 \cdot x \cdot \Phi(x) + R_2 \cdot (x - 1.5 \cdot l) \cdot \Phi(x - 1.5 \cdot l)
 \end{aligned}$$

Для визначення опорних реакцій скористаємося блоком Given...Find. Використаємо функції внутрішніх зусиль для запису рівнянь рівноваги (замість змінної  $x$  підставляємо всю довжину балки):

$$R_1 := 0 \quad R_2 := 0$$

$$\text{Given} \quad N_z(L, R_1, R_2) = 0$$

$$M_y(L, R_1, R_2) = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} := \text{Find}(R_1, R_2) \quad \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31.467 \\ 13.467 \end{pmatrix}$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій, склавши рівняння суми моментів відносно початку балки

$$q_1 \cdot 3 \cdot 1.5 + M_1 - F_1 \cdot 5 - M_2 - q_2 \cdot 5.2 \cdot \left( kl + \frac{5.2}{2} \right) + R_2 \cdot 9 + F_2 \cdot L = 1.705 \times 10^{-13}$$

Тепер можна будувати епюри внутрішніх зусиль, як графіки заданих функцій (рис. 2.34):

$$N_z(x) := N_z(x, R_1, R_2) \quad M_y(x) := M_y(x, R_1, R_2)$$

Після побудови графіків треба обов'язково знайти значення внутрішніх зусиль у характерних перерізах, тобто на границях ділянок і у перерізах, де зусилля екстремальні (на графіках максимум або мінімум). Величини розривів (стрибків) функцій залежить від прикладених у цих перерізах зовнішніх зосереджених сил і моментів.

Визначимо величину момента у точках екстремуму:

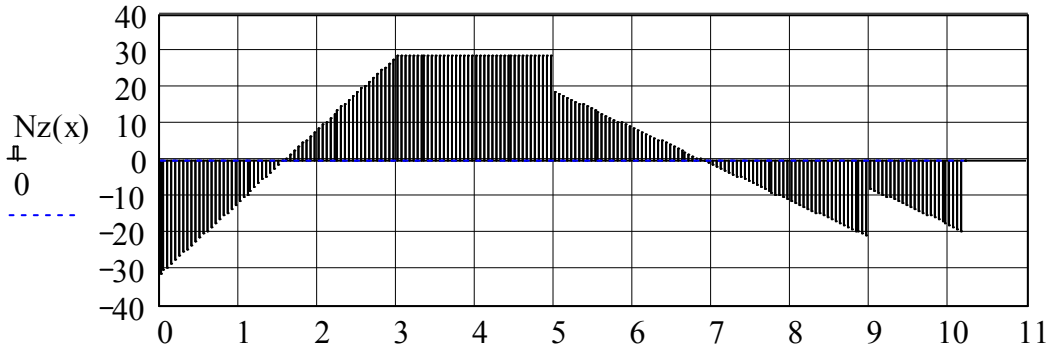
$$x := 1 \quad \text{Given} \quad Nz(x) = 0$$

$$x := \text{find}(x) \quad x = 1.573 \quad My(x) = -24.754$$

$$x := 7 \quad \text{Given} \quad Nz(x) = 0$$

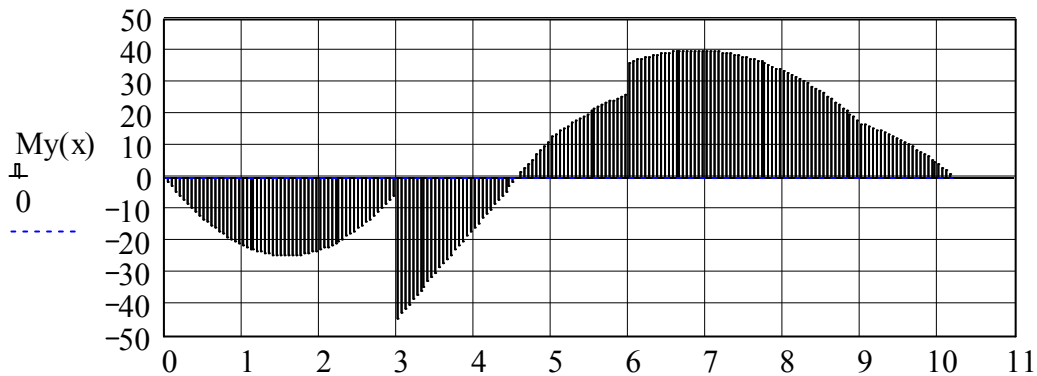
$$x := \text{Find}(x) \quad x = 6.853 \quad My(x) = 39.841$$

$$x := 0, 0.05 \dots L$$



$$Nz(0) = -31.467 \quad Nz(3) = 28.533 \quad Nz(5) = 18.533$$

$$Nz(8.99999) = -21.467 \quad Nz(9) = -8 \quad Nz(L - 10^{-5}) = -20$$



$$My(2.99999) = -4.4 \quad My(3) = -44.4 \quad My(5) = 12.667$$

$$My(5.99999) = 26.2 \quad My(6) = 36.2 \quad My(9) = 16.8$$

*Рис. 2.34. Епюри поперечних сил і згинаючих моментів для балки на двох опорах*

Проаналізуємо побудовані епюри і впевнимися, що величина стрибків на епюрі поперечних сил відповідає прикладеним зосередженим силам, а на епюрі згинаючих моментів – заданим моментам. Оскільки функція поперечних сил є похідною від функції моментів, то в перерізах, де поперечна сила дорівнює нулю, функція моментів має екстремальні значення (саме цю умову ми використали, коли визначали величину момента в точках екстремуму), крім того, на ділянках, де поперечні сили додатні, функція згинаючих моментів зростає, і навпаки.

## 2.8. Визначення внутрішніх зусиль у балках із шарнірами

**ПРИКЛАД 2.16.** Для балки з шарніром визначити внутрішні зусилля в поперечних перерізах і побудувати відповідні епюри (рис. 2.35).

Вхідні дані:

$$F := 40 \text{ (кН)} \quad M := 30 \text{ (кНм)} \quad q := 15 \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}} \right)$$

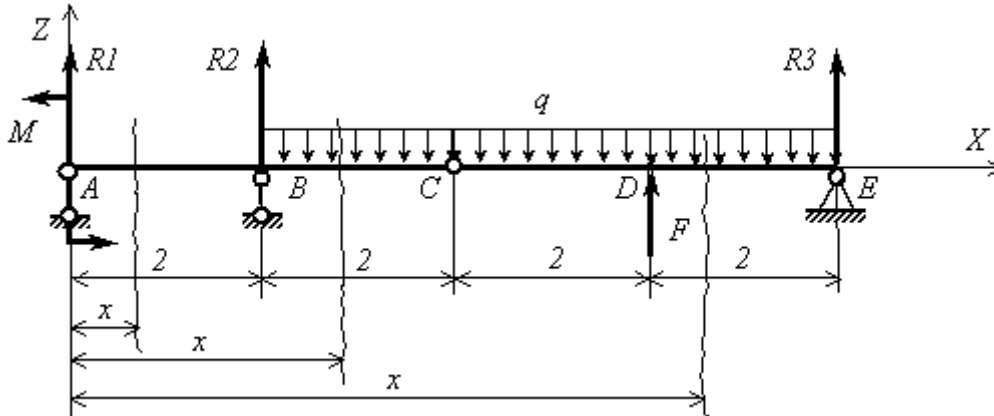


Рис. 2.35. Розрахункова схема балки з шарніром

Розв'язання:

Проаналізуємо розрахункову схему балки з шарніром. Балка працює на плоский згин. Горизонтальна складова реакції в опорі  $E$  дорівнює нулю, для визначення трьох невідомих реакцій маємо два рівняння рівноваги і умову рівності нулю момента в шарнірі. Складемо рівняння суми сил на вісь  $Z$  і суми моментів відносно точки  $E$ . Додаткове рівняння – сума моментів відносно шарніра  $C$  з однієї сторони балки дорівнює нулю. Для визначення реакцій скористаємося блоком Given...Find:

$$R1 := 0 \quad R2 := 0 \quad R3 := 0$$

$$\text{Given} \quad -q \cdot 6 + R1 + R2 + R3 + F = 0$$

$$-q \cdot 6 \cdot 3 + R1 \cdot 8 + R2 \cdot 6 - M + F \cdot 2 = 0$$

$$R3 \cdot 4 + F \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \end{pmatrix} := \text{Find}(R1, R2, R3) \quad \begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Рівняння перевірки – сума моментів відносно точки  $A$

$$M - q \cdot 6 \cdot 5 + R2 \cdot 2 + F \cdot 6 + R3 \cdot 8 = 0$$

Визначимо внутрішні сили, які виникають у перерізах балки. У відповідності зі зміною зовнішнього навантаження розбиваємо балку на три ділянки і складаємо рівняння поперечних сил і згинаючих моментів:

$$N_z(x) := \begin{cases} R1 & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ R1 + R2 - q \cdot (x - 2) & \text{if } 2 \leq x \leq 6 \\ R1 + R2 - q \cdot (x - 2) + F & \text{if } 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

$$M_y(x) := \begin{cases} (R1 \cdot x - M) & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ \left[ R1 \cdot x - M + R2 \cdot (x - 2) - q \cdot \frac{(x - 2)^2}{2} \right] & \text{if } 2 \leq x \leq 6 \\ \left[ R1 \cdot x - M + R2 \cdot (x - 2) - q \cdot \frac{(x - 2)^2}{2} + F \cdot (x - 6) \right] & \text{if } 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Побудуємо епюри внутрішніх сил і визначимо значення функцій поперечних сил і згинаючих моментів у характерних точках (рис. 2.36).

Визначимо величину згинаючого момента в точках екстремумів:

$$x := 4 \quad \text{Given} \quad N_z(x) = 0$$

$$x := \text{Find}(x) \quad x = 4.667 \quad M_y(x) = 3.333$$

$$x := 7 \quad \text{Given} \quad N_z(x) = 0$$

$$x := \text{Find}(x) \quad x = 7.333 \quad M_y(x) = 3.333$$

$$x := 0, 0.05 \dots 8$$

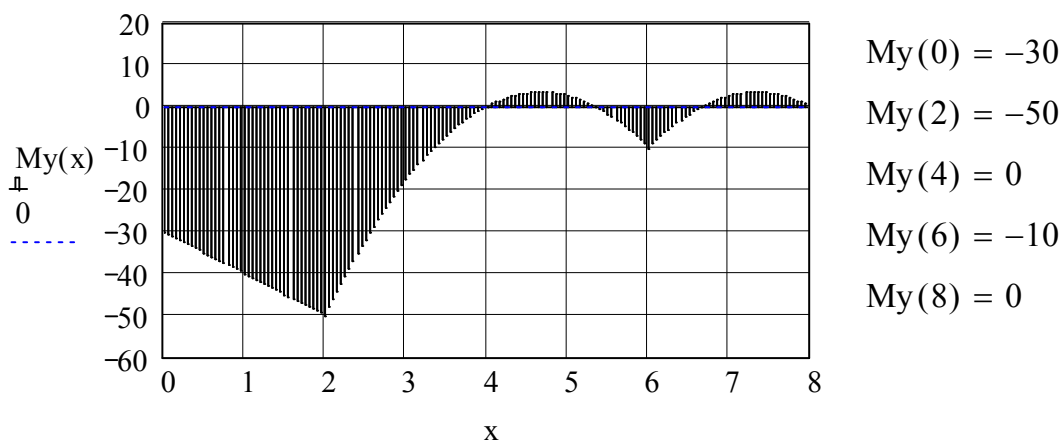
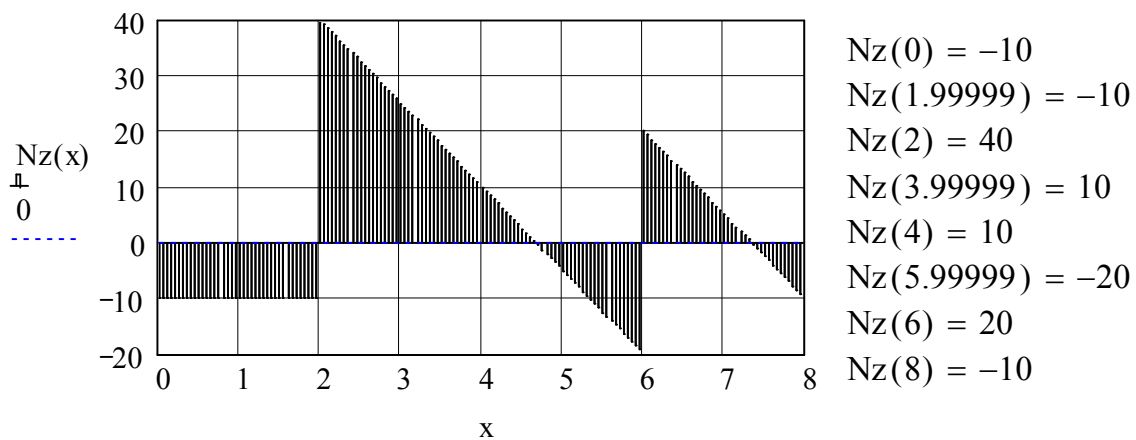


Рис. 2.36. Епюри внутрішніх сил для балки з шарніром

**ПРИКЛАД 2.17.** Побудувати епюри внутрішніх сил для балки з шарнірами (рис. 2.37).

Вхідні дані:

$$F := 10 \text{ (кН)} \quad M := 15 \text{ (кН} \cdot \text{м)} \quad q := 20 \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}} \right) \quad a := 1 \text{ (м)}$$

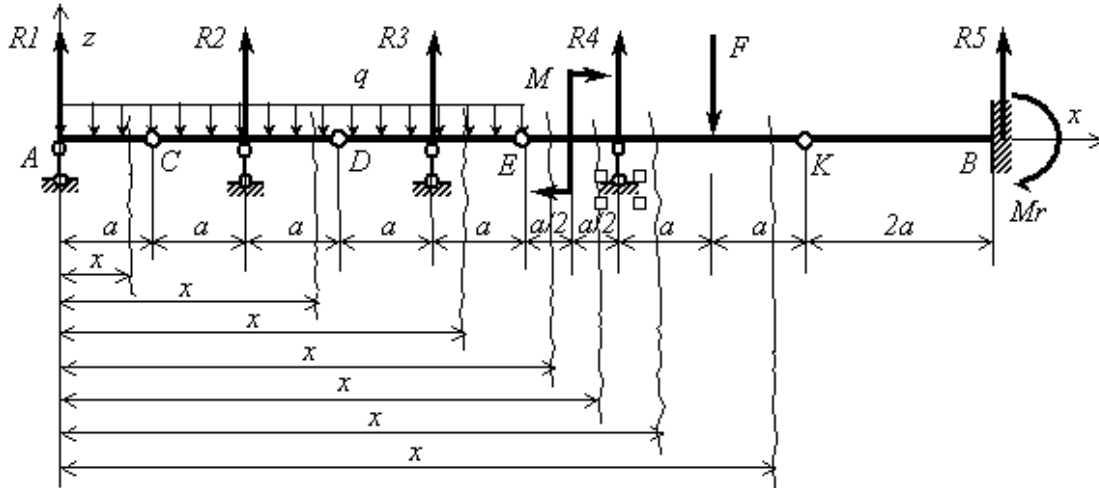


Рис. 2.37. Розрахункова схема балки з шарнірами

Розв'язання:

Для визначення опорних реакцій складемо рівняння рівноваги – суму сил на вісь  $Z$  і суму моментів відносно точки  $B$ , крім того, використаємо умови рівності нулю моментів в шарнірах (сума моментів відносно шарніра з однієї сторони балки дорівнює нулю):

$$R1 := 0 \quad R2 := 0 \quad R3 := 0 \quad R4 := 0 \quad R5 := 0 \quad Mr := 0$$

Given

$$-q \cdot 5a + R1 + R2 + R3 + R4 + R5 - F = 0$$

$$-q \cdot 5a \cdot 7.5a + R1 \cdot 10a + R2 \cdot 8a + R3 \cdot 6a + R4 \cdot 4a + M + Mr - F \cdot 3a = 0$$

$$-q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + R1 \cdot a = 0$$

$$-q \cdot 3a \cdot 1.5a + R1 \cdot 3a + R2 \cdot a = 0$$

$$-M - F \cdot 2a + R4 \cdot a + R5 \cdot 5a - Mr = 0$$

$$R5 \cdot 2a - Mr = 0$$

$$\begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \\ R5 \\ Mr \end{pmatrix} := \text{Find}(R1, R2, R3, R4, R5, Mr) \quad \begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \\ R5 \\ Mr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \\ 20 \\ 12.5 \\ 7.5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Зробимо перевірку правильності визначення реакцій – складемо рівняння суми моментів відносно точки  $A$

$$-q \cdot 5a \cdot 2.5a - M - Mr - F \cdot 7a + R2 \cdot 2a + R3 \cdot 4a + R4 \cdot 6a + R5 \cdot 10a = -3.979 \times 10^{-13}$$

Запишемо функції поперечних сил і згинаючих моментів:

$$Nz(x) := \begin{cases} -q \cdot x + R1 & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ -q \cdot x + R1 + R2 & \text{if } 2 \leq x \leq 4 \\ -q \cdot x + R1 + R2 + R3 & \text{if } 4 \leq x \leq 5 \\ (-q \cdot 5 + R1 + R2 + R3) & \text{if } 5 \leq x \leq 6 \\ (-q \cdot 5 + R1 + R2 + R3 + R4) & \text{if } 6 \leq x \leq 7 \\ (-q \cdot 5 + R1 + R2 + R3 + R4 - F) & \text{if } 7 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

$$My(x) := \begin{cases} -q \cdot \frac{x^2}{2} + R1 \cdot x & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ -q \cdot \frac{x^2}{2} + R1 \cdot x + R2 \cdot (x - 2) & \text{if } 2 \leq x \leq 4 \\ \left[ -q \cdot \frac{x^2}{2} + R1 \cdot x + R2 \cdot (x - 2) + R3 \cdot (x - 4) \right] & \text{if } 4 \leq x \leq 5 \\ \left[ -q \cdot 5 \cdot (x - 2.5) + R1 \cdot x + R2 \cdot (x - 2) \dots \right. \\ \left. + R3 \cdot (x - 4) \right] & \text{if } 5 \leq x \leq 5.5 \\ \left[ -q \cdot 5 \cdot (x - 2.5) + R1 \cdot x + R2 \cdot (x - 2) \dots \right. \\ \left. + R3 \cdot (x - 4) + M \right] & \text{if } 5.5 \leq x \leq 6 \\ \left[ -q \cdot 5 \cdot (x - 2.5) + R1 \cdot x + R2 \cdot (x - 2) \dots \right. \\ \left. + R3 \cdot (x - 4) + M + R4 \cdot (x - 6) \right] & \text{if } 6 \leq x \leq 7 \\ \left[ -q \cdot 5 \cdot (x - 2.5) + R1 \cdot x + R2 \cdot (x - 2) \dots \right. \\ \left. + R3 \cdot (x - 4) + M + R4 \cdot (x - 6) - F \cdot (x - 7) \right] & \text{if } 7 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Побудуємо епюри внутрішніх сил і визначимо значення функцій в характерних точках (рис. 2.38).

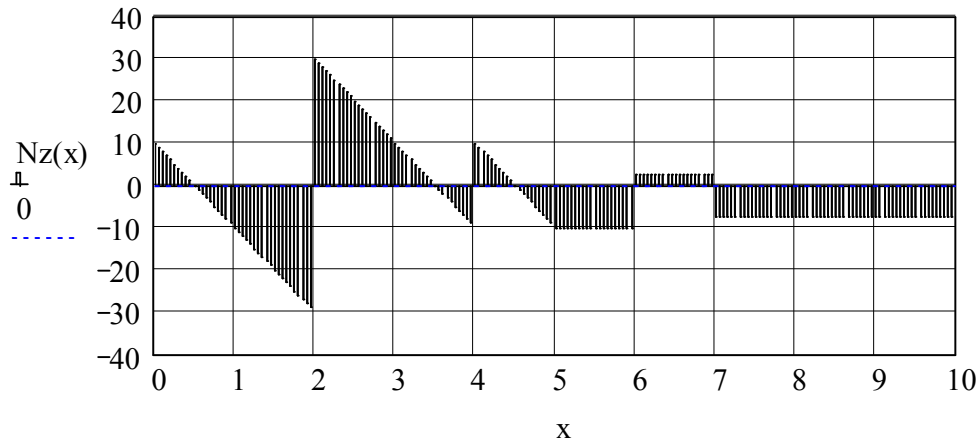
Визначимо значення моментів в точках екстремумів

$$\begin{aligned} x := 1 & \quad \text{Given} \quad Nz(x) = 0 \\ & \quad x := \text{Find}(x) \quad x = 0.5 \quad My(x) = 2.5 \\ x := 3 & \quad \text{Given} \quad Nz(x) = 0 \\ & \quad x := \text{Find}(x) \quad x = 3.5 \quad My(x) = 2.5 \\ x := 4.5 & \quad \text{Given} \quad Nz(x) = 0 \\ & \quad x := \text{Find}(x) \quad x = 4.5 \quad My(x) = 2.5 \end{aligned}$$

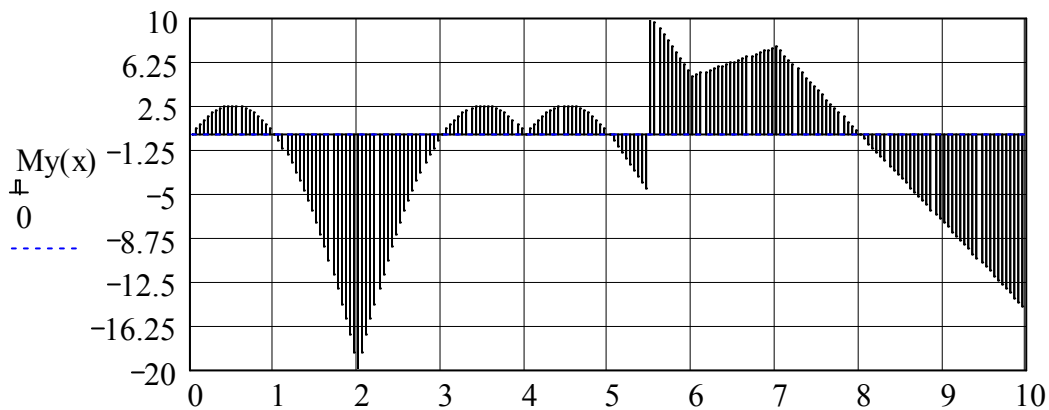
Проаналізуємо одержані результати і впевнимися, що значення функції моментів в шарнірах дорівнює нулю, стрибки на епюрах відповідають прикладеним зосередженим силам і моментам.

Зверніть увагу, що початок відліку  $x$  був єдиним для всіх ділянок – на лівому торці балки.

$$x := 0, 0.05 \dots 10$$



$Nz(0) = 10$	$Nz(3.99999) = -10$	$Nz(5.99999) = -10$	$Nz(7) = -7.5$
$Nz(1.99999) = -30$	$Nz(4) = 10$	$Nz(6) = 2.5$	$Nz(10) = -7.5$
$Nz(2) = 30$	$Nz(5) = -10$	$Nz(6.99999) = 2.5$	



$My(1) = 0$	$My(4) = 0$	$My(5.5) = 10$	$My(8) = 0$
$My(2) = -20$	$My(5) = 0$	$My(6) = 5$	$My(10) = -15$
$My(3) = 0$	$My(5.49999) = -5$	$My(7) = 7.5$	

Рис. 2.38. Епюри поперечних сил і згинаючих моментів для балки з шарнірами

Як бачимо, рівняння внутрішніх сил для балки з великою кількістю ділянок стають дуже громіздкими. Розглянемо спосіб запису рівнянь поперечних сил і згинаючих моментів за допомогою функції Хевісайда (див. підрозд. 2.4):

$$\begin{aligned}
 Nz(R1, R2, R3, R4, R5, x) &:= -q \cdot x \cdot \Phi(x) + q \cdot (x - 5a) \cdot \Phi(x - 5a) \dots \\
 &\quad + -F \cdot \Phi(x - 7a) + R1 \cdot \Phi(x) \dots \\
 &\quad + R2 \cdot \Phi(x - 2a) + R3 \cdot \Phi(x - 4a) \dots \\
 &\quad + R4 \cdot \Phi(x - 6a) + R5 \cdot \Phi(x - 10a) \\
 My(R1, R2, R3, R4, R5, Mr, x) &:= -q \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \Phi(x) + q \cdot \frac{(x - 5a)^2}{2} \cdot \Phi(x - 5a) \dots \\
 &\quad + R1 \cdot x \cdot \Phi(x) - F \cdot (x - 7a) \cdot \Phi(x - 7a) \dots \\
 &\quad + M \cdot \Phi(x - 5.5 \cdot a) + R2 \cdot (x - 2a) \cdot \Phi(x - 2a) \dots \\
 &\quad + R3 \cdot (x - 4 \cdot a) \cdot \Phi(x - 4 \cdot a) \dots \\
 &\quad + R4 \cdot (x - 6 \cdot a) \cdot \Phi(x - 6 \cdot a) \dots \\
 &\quad + R5 \cdot (x - 10 \cdot a) \cdot \Phi(x - 10 \cdot a) \dots \\
 &\quad + Mr \cdot \Phi(x - 10 \cdot a)
 \end{aligned}$$

Записані рівняння використаємо для визначення опорних реакцій. У блок Given...Find запишемо умови рівноваги та умови рівності нулю моментів в шарнірах:

$$R1 := 0 \quad R2 := 0 \quad R3 := 0 \quad R4 := 0 \quad R5 := 0 \quad Mr := 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{Given} \quad Nz(R1, R2, R3, R4, R5, 10a) &= 0 \\
 My(R1, R2, R3, R4, R5, Mr, 10a) &= 0 \\
 My(R1, R2, R3, R4, R5, Mr, a) &= 0 \\
 My(R1, R2, R3, R4, R5, Mr, 3a) &= 0 \\
 My(R1, R2, R3, R4, R5, Mr, 5a) &= 0 \\
 My(R1, R2, R3, R4, R5, Mr, 8a) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \\ R5 \\ Mr \end{pmatrix} := \text{Find}(R1, R2, R3, R4, R5, Mr) = \begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \\ R5 \\ Mr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \\ 20 \\ 12.5 \\ 7.5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Після визначення опорних реакцій можна будувати епюри внутрішніх сил як графіки функцій  $Nz(x) := Nz(R1, R2, R3, R4, R5, x)$  і  $My(x) := My(R1, R2, R3, R4, R5, Mr, x)$  (рис. 2.38).

## 2.9. Визначення внутрішніх зусиль у рамах

Рама – це системи, які складаються з прямолінійних стержнів, жорстко з'єднаних у вузлах.

Вісь рами – ламана лінія. Кожний прямолінійний елемент можна розглядати як балку, в якій діють поперечні сили, поздовжні сили та згинаючі



моменти. Таким чином, для плоскої рами необхідно будувати три епюри внутрішніх сил:

$N(x)$  – епюра поздовжніх сил;

$Q(x)$  – епюра поперечних сил;

$M_y(x)$  – епюра згинаючих моментів.

Якщо рама консольна – реакції в'язей можна не визначати, вони одержуються після визначення внутрішніх сил у кінцевому перерізі як однакові за значенням і протилежні за напрямком внутрішнім зусиллям. В такому випадку починати розрахунок потрібно з вільних кінців рами і розглядати ділянки послідовно до закріплення.

Рівняння внутрішніх сил записуються з урахуванням правил знаків:

– поздовжня сила  $N$  вважається додатною, якщо вона діє на розтяг;

– поперечна сила  $Q$  вважається додатною, якщо її вектори намагаються обертати частини розсіченої рами відносно перерізу за годинниковою стрілкою;

– для моментів немає правила знаків: в опорі матеріалів епюри згинаючих моментів будуються на стиснутих волокнах.

**ПРИКЛАД 2.18.** Побудувати епюри внутрішніх зусиль для плоскої консольної рами (рис. 2.39).

Вхідні дані:  $q_1 = 20(\text{кН/м})$ ,  $q_2 = 40(\text{кН/м})$ ,  $F_1 = 20(\text{кН})$ ,  $F_2 = 10(\text{кН})$ ,

$M = 60(\text{кН} \cdot \text{м})$ ,  $a = 2(\text{м})$ ,  $b = 5(\text{м})$ ,  $c = 6(\text{м})$ .

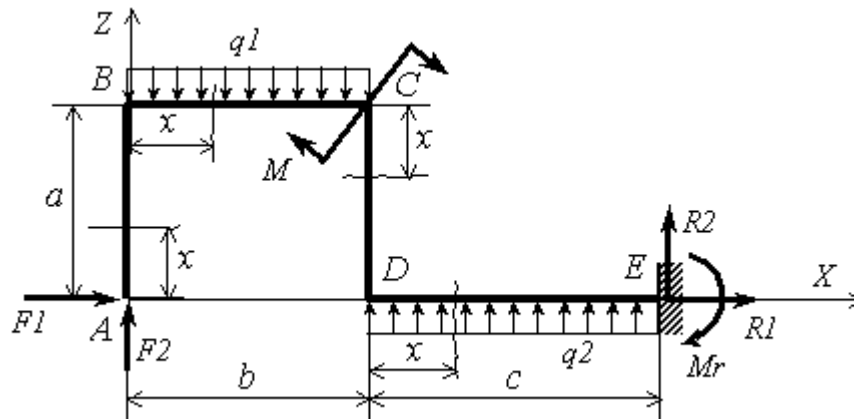


Рис. 2.39. Розрахункова схема консольної плоскої рами

Розв'язання:

Розглянемо раму із заданим навантаженням. Визначимо опорні реакції, склавши рівняння рівноваги: суми проекцій сил на горизонтальну вісь  $X$  і вертикальну вісь  $Z$  та суму моментів відносно довільної точки, наприклад, відносно точки закріплення  $E^*$ ):

$$R_1 := 0 \quad R_2 := 0 \quad M_r := 0$$

\*) При умові початку розрахунку з вільного кінця рами опорні реакції можна не визначати.

$$\text{Given} \quad F1 + R1 = 0$$

$$F2 - q1 \cdot b + q2 \cdot c + R2 = 0$$

$$F2 \cdot (b + c) - q1 \cdot b \cdot \left( c + \frac{b}{2} \right) + M + q2 \cdot \frac{c^2}{2} + Mr = 0$$

$$\begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ Mr \end{pmatrix} := \text{Find}(R1, R2, Mr) \quad \begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ Mr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -150 \\ -40 \end{pmatrix}$$

Виконаємо перевірку – запишемо суму моментів відносно точки  $A$ :

$$-q1 \cdot \frac{b^2}{2} - M + q2 \cdot c \cdot \left( b + \frac{c}{2} \right) + R2 \cdot (b + c) - Mr = 0$$

Почнемо розрахунок з вільного кінця рами – точки  $A$ .

Для кожної ділянки окремо складаємо рівняння внутрішніх сил, шукаємо значення функції на початку і в кінці ділянки, будуємо епюри:

$$\text{AB} \quad x := 0, 0.01 \cdot a .. a$$

$$N1(x) := -F2 \quad N1(0) = -10 \quad N1(a) = -10$$

$$Q1(x) := -F1 \quad Q1(0) = -20 \quad Q1(a) = -20$$

$$M1(x) := -F1 \cdot x \quad M1(0) = 0 \quad M1(a) = -80$$

Побудувати епюри на I ділянці легко можна вручну: функції  $N1(x)$  і  $Q1(x)$  є сталими, а функція моментів лінійно змінюється від 0 до 80. Епюра моментів будується справа від ділянки (на стиснутих волокнах) (рис. 2.40).

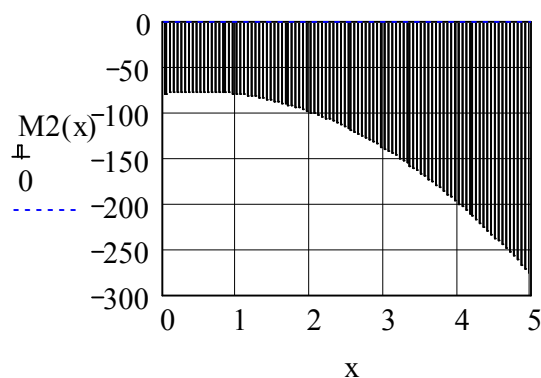
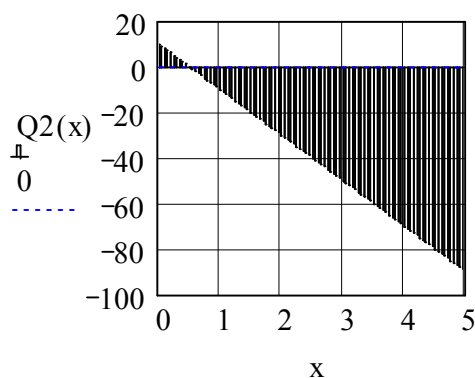
$$\text{BC} \quad x := 0, 0.01 \cdot b .. b$$

$$N2(x) := -F1 \quad N2(0) = -20 \quad N2(b) = -20$$

$$Q2(x) := F2 - q1 \cdot x \quad Q2(0) = 10 \quad Q2(b) = -90$$

$$M2(x) := -F1 \cdot a + F2 \cdot x - q1 \cdot \frac{x^2}{2} \quad M2(0) = -80 \quad M2(b) = -280$$

Скористаємось пакетом MathCAD для побудови епюр поперечних сил і згинаючих моментів на II ділянці:



Епюра згинаючих моментів має екстремум у точці, де поперечна сила дорівнює 0. Знайдемо значення моменту на цій ділянці:

$$x := 0$$

$$\text{Given } Q2(x) = 0$$

$$x := \text{find}(x) \quad x = 0.5$$

$$M2(x) = -77.5$$

Розглянемо наступну ділянку:

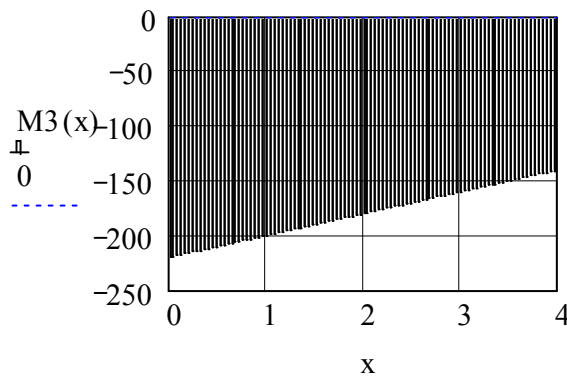
$$\text{CD } x := 0, 0.01 \cdot a .. a$$

$$N3(x) := F2 - q1 \cdot b \quad N3(0) = -90 \quad N3(a) = -90$$

$$Q3(x) := F1 \quad Q3(0) = 20 \quad Q3(a) = 20$$

$$M3(x) := F2 \cdot b - F1 \cdot (a - x) + M - q1 \cdot \frac{b^2}{2}$$

Епюри подовжніх і поперечних сил будуються дуже просто вручну, епюру згинаючих моментів побудуємо за допомогою MathCAD:



$$M3(0) = -220$$

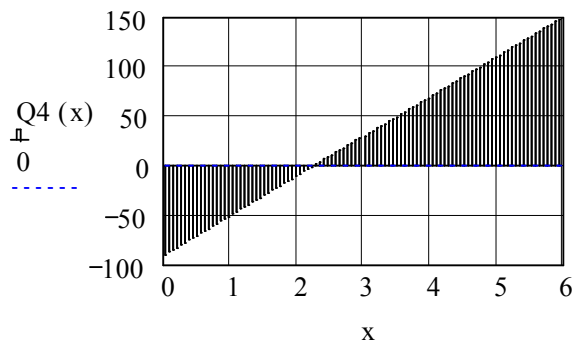
$$M3(4) = -140$$

Розглянемо останню ділянку:

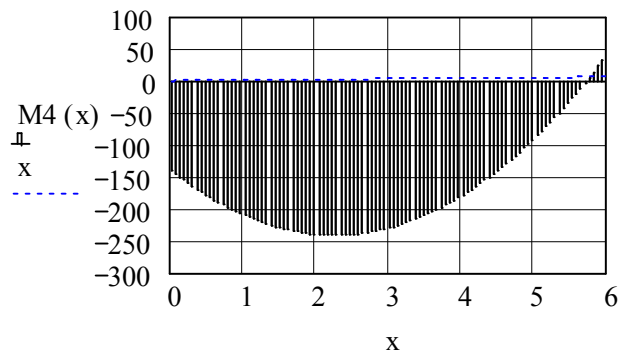
$$\text{DE } x := 0, 0.01 \cdot c .. c$$

$$N4(x) := -F1 \quad N4(0) = -20 \quad N4(c) = -20$$

$$Q4(x) := F2 - q1 \cdot b + q2 \cdot x \quad Q4(0) = -90 \quad Q4(c) = 150$$



$$M4(x) := F2 \cdot (b + x) + M - q1 \cdot b \cdot \left(\frac{b}{2} + x\right) + q2 \cdot \frac{x^2}{2}$$



$$M4(0) = -140$$

$$M4(c) = 40$$

$$x := 0$$

$$\text{Given } Q4(x) = 0$$

$$x := \text{Find}(x)$$

$$x = 2.25$$

$$M4(x) = -241.25$$

Покажемо сумарні епюри на контурі рами (рис. 2.40):

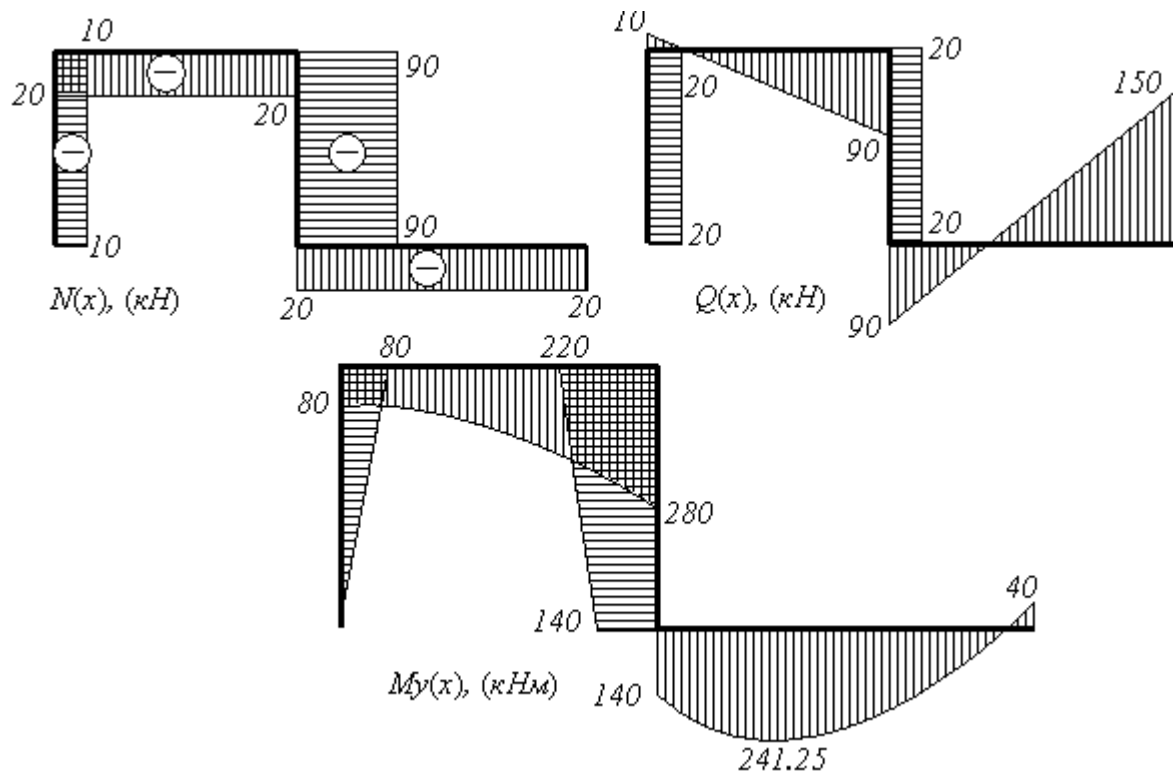


Рис. 2.40. Епюри внутрішніх сил для плоскої консольної рами

**ПРИКЛАД 2.19.** Побудувати епюри внутрішніх зусиль для плоскої рами на двох шарнірних опорах (рис. 2.41).

Вхідні дані:

$$q := 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad F1 := 60 \text{ kN} \quad F2 := 20 \text{ kN} \quad M := 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$a := 2 \text{ m} \quad b := 3 \text{ m}$$

Розв'язання:

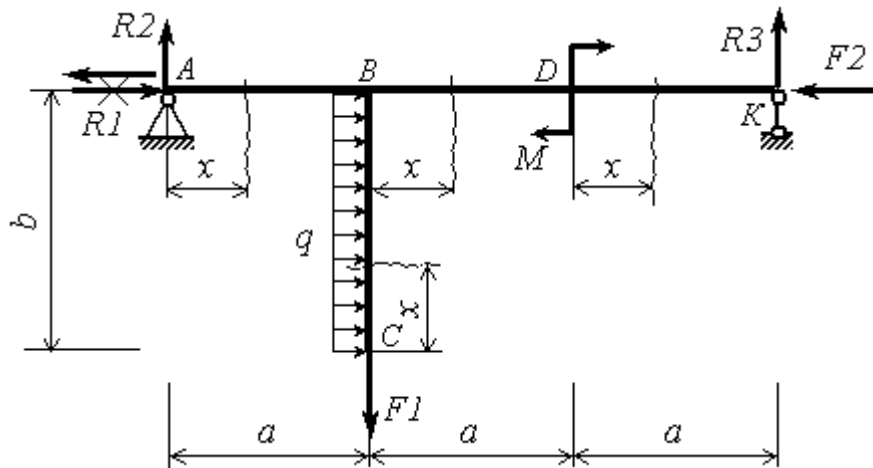


Рис. 2.41. Розрахункова схема плоскої рами на двох шарнірних опорах

Першим етапом розв'язання задачі є визначення опорних реакцій. Складемо три рівняння рівноваги: суми проекцій сил на горизонтальну і вертикальну осі і суму моментів відносно точки *A*:

$$R1 := 0 \quad R2 := 0 \quad R3 := 0$$

$$\text{Given} \quad R1 - F2 + q \cdot 3 = 0$$

$$R2 - F1 + R3 = 0$$

$$q \cdot 3 \cdot 1.5 - F1 \cdot 2 - M + R3 \cdot 6 = 0$$

$$\begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \end{pmatrix} := \text{Find}(R1, R2, R3) \quad \begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Перевіримо правильність визначення реакцій, склавши додаткове рівняння рівноваги, наприклад, суму моментів відносно точки *B* (напрямок реакції *R1* змінимо на правильний):

$$R1 := -R1$$

$$q \cdot 3 \cdot 1.5 + M + R2 \cdot 2 - R1 \cdot 3 - R3 \cdot 4 - F2 \cdot 3 = 0$$

Складемо рівняння поздовжніх, поперечних сил і згинаючих моментів на кожній ділянці і визначимо значення на початку і в кінці кожної ділянки..

AB	$0 \leq x \leq 2$	$N1(x) := R1$	$N1(0) = 40$	$N1(2) = 40$
		$Q1(x) := R2$	$Q1(0) = 50$	$Q1(2) = 50$
		$My1(x) := R2 \cdot x$	$My1(0) = 0$	$My1(2) = 100$
CB	$0 \leq x \leq 3$	$N2(x) := F1$	$N2(0) = 60$	$N2(2) = 60$
		$Q2(x) := -q \cdot x$	$Q2(0) = 0$	$Q2(2) = -40$

$$M_{y2}(x) := -q \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M_{y2}(0) = 0 \quad M_{y2}(3) = -90 \quad M_{y2}(1.5) = -22.5$$

$$\text{CD } 0 \leq x \leq 2 \quad N_3(x) := R_1 - q \cdot 3 \quad N_3(0) = -20 \quad N_3(2) = -20$$

$$Q_3(x) := R_2 - F_1 \quad Q_3(0) = -10 \quad Q_3(2) = -10$$

$$M_{y3}(x) := R_2 \cdot (x + 2) - q \cdot 3 \cdot 1.5 - F_1 \cdot x$$

$$M_{y3}(0) = 10 \quad M_{y3}(2) = -10$$

$$\text{DK } 0 \leq x \leq 2 \quad N_4(x) := R_1 - q \cdot 3 \quad N_4(0) = -20 \quad N_4(2) = -20$$

$$Q_4(x) := R_2 - F_1 \quad Q_4(0) = -10 \quad Q_4(2) = -10$$

$$M_{y4}(x) := R_2 \cdot (x + 4) - q \cdot 3 \cdot 1.5 - F_1 \cdot (x + 2) + M$$

$$M_{y4}(0) = 20 \quad M_{y4}(2) = 0$$

За одержаними значеннями побудуємо епюри внутрішніх сил (рис. 2.42).

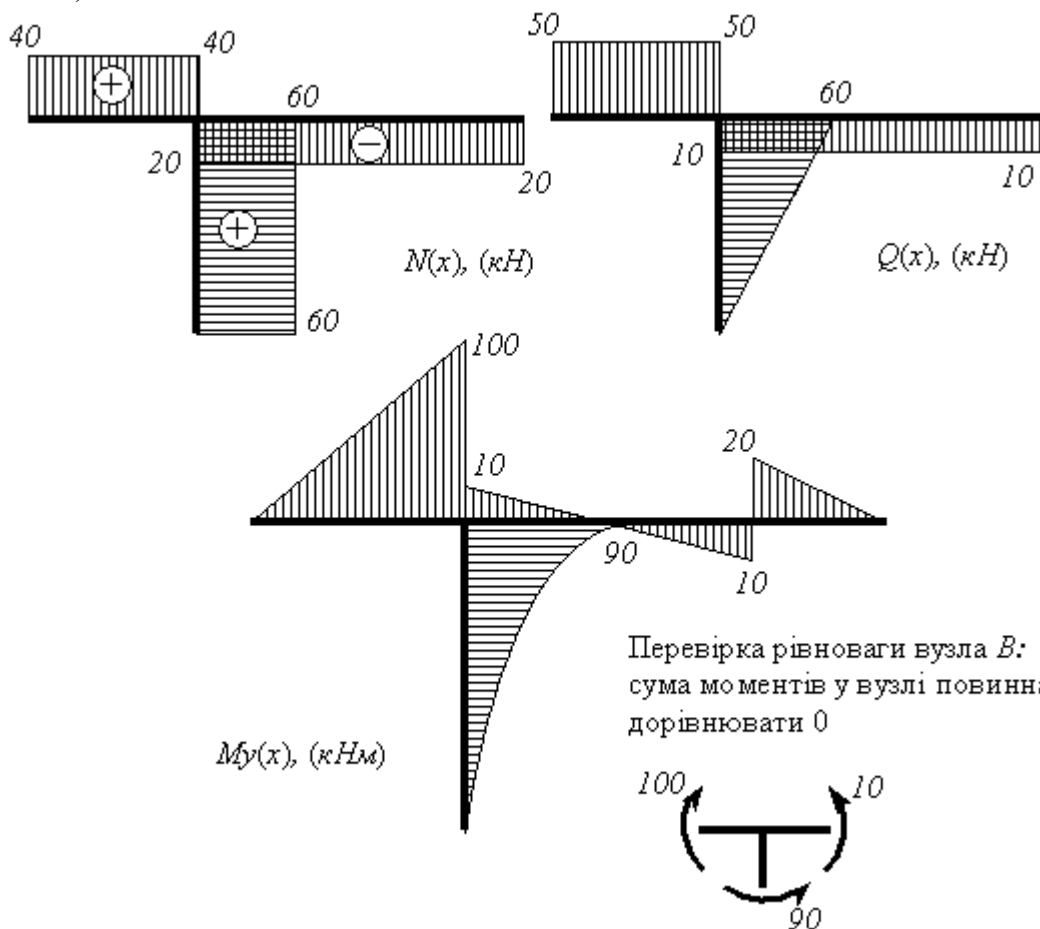


Рис. 2.42. Епюри внутрішніх сил для рами на шарнірних опорах

Як видно з наведених прикладів, епюри для рам будуються окремо для кожної ділянки, як для “самостійної” балки, але з урахуванням усіх сил, діючих на раму по один бік від перерізу. При використанні MathCAD необхідно уважно слідкувати за відповідністю початку координат дійсному на розрахунковій схемі.

## 2.10. Використання матричного методу для побудови епюр внутрішніх зусиль у рамах

Для побудови епюр внутрішніх зусиль у перерізах рам ми використали метод перерізів, згідно з яким внутрішні сили у кожному перерізі обчислюють як відповідні суми проекцій сил, а моменти – як суми моментів, які діють з одного боку перерізу відносно осей координат, пов'язаних із перерізом.

Це правило, як вказувалося вище, можна розглядати як приведення сил до точки, тобто внутрішні сили можна знайти, приводячи усі сили, які діють з одного боку перерізу, до центра ваги цього перерізу. Формули приведення сили  $F_i$  до деякої точки  $K$  мають вигляд

$$\vec{N}_k = \vec{F}_i, \quad \vec{M}_k = \vec{r} \times \vec{F}_i, \quad (2.16)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор, напрямлений з точки  $K$  до точки прикладення  $F_i$ .

Введемо деяку глобальну систему координат  $XYZ$ , єдину для усієї системи (рис. 2.43), тоді внутрішні зусилля відносно цієї системи координат матимуть вигляд:

$$\vec{N}_k = \vec{F}_i, \quad \vec{M}_k = (\vec{R}_i - \vec{r}_K) \times \vec{F}_i. \quad (2.17)$$

За наявності кількох сил і моментів

$$\vec{N}_k = \sum_i^{n_k} \vec{F}_i, \quad \vec{M}_k = \sum_i^{n_k} (\vec{R}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_i + \sum_i^{m_k} \vec{M}_i, \quad (2.18)$$

де  $n_k$  – кількість сил з одного боку перерізу,  $m_k$  – кількість моментів з одного боку перерізу.

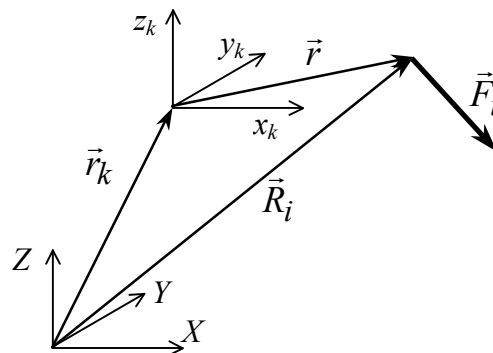


Рис. 2.43. Приведення сили до глобальної системи координат

Як видно з (2.18), для визначення вектора сили у  $k$ -му перерізі достатньо скласти усі сили, що діють з одного боку перерізу, а для визначення моменту – скласти відповідні векторні добутки. Радіус-вектори  $\vec{R}_i$ ,  $\vec{r}_k$  визначають, відповідно, положення сили  $F_i$  і положення  $k$ -го перерізу в глобальній системі координат.

Зрозуміло, що кількість доданків  $n_k$  і  $m_k$  у сумах (2.18) для кожного перерізу буде різною, що суттєво ускладнює реалізацію формул (2.18) на ЕОМ.

У зв'язку з цим формули (2.18) доцільно трансформувати до такого вигляду:

$$\vec{N}_k = \sum_i^n \vec{F}_i \cdot m_{i,k}, \quad \vec{M}_k = \sum_i^n ((\vec{R}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_i + \vec{M}_i) \cdot m_{i,k}, \quad (2.19)$$

де  $n$  – кількість вузлів, де діють зовнішні сили або моменти;

$m_{i,k}$  – компоненти деякої матриці індексів, які набувають значень 1 або 0 залежно від того, треба чи ні враховувати сили, прикладені до  $i$ -го вузла, при визначенні внутрішніх сил у  $k$ -му перерізі. Кожний стовпець матриці відповідає номеру перерізу, а кожний рядок – номеру вузла, який враховується.

Розглянемо побудову матриці на прикладі. Нехай у рамі (рис. 2.44) необхідно визначити внутрішні сили у шести перерізах (позначені рисками). Кількість вузлів – три<sup>\*)</sup>.

При визначенні внутрішніх сил у першому перерізі треба враховувати тільки сили першого вузла, у другому – теж тільки першого, у третьому – першого і другого тощо. Таким чином, матриця індексів матиме вигляд:

$$m_{i,k} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad i := 1..n, \quad k := 1..m,$$

де  $n$  – кількість вузлів,  $m$  – кількість перерізів.

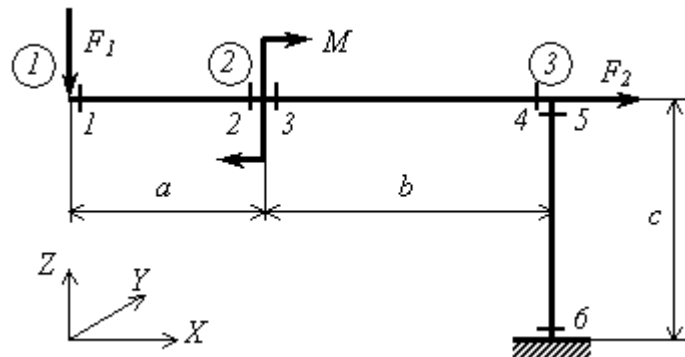


Рис. 2.44. Розрахункова схема плоскої рами

<sup>\*)</sup> Вузол у закріпленні можна не враховувати, оскільки він знаходиться за останнім (шостим) перерізом.



Векторні вирази (2.19) можна записати у проекціях на осі глобальної системи координат:

$$\begin{aligned}
 Nx_k &= \sum_{i=1}^n Fx_i \cdot mi_{i,k}, & Ny_k &= \sum_{i=1}^n Fy_i \cdot mi_{i,k}, & Nz_k &= \sum_{i=1}^n Fz_i \cdot mi_{i,k}, \\
 Mx_k &= \sum_{i=1}^n ((Y_i - y_k) \cdot Fz_i - (Z_i - z_k) \cdot Fy_i + Mx_i) \cdot mi_{i,k}, \\
 My_k &= \sum_{i=1}^n ((Z_i - z_k) \cdot Fx_i - (X_i - x_k) \cdot Fz_i + My_i) \cdot mi_{i,k}, \\
 Mz_k &= \sum_{i=1}^n ((X_i - x_k) \cdot Fy_i - (Y_i - y_k) \cdot Fx_i + Mz_i) \cdot mi_{i,k},
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

де  $Fx_i, Fy_i, Fz_i$  – проекції сил;  $Mx_i, My_i, Mz_i$  – проекції моментів;  $x_k, y_k, z_k$  – координати перерізів, де необхідно визначити внутрішні сили;  $X_i, Y_i, Z_i$  – координати вузлів, де діють зовнішні сили, у глобальній системі координат.

Таким чином, послідовність визначення внутрішніх сил буде такою:

1) Позначають перерізи, де необхідно визначити внутрішні сили і записують координати перерізів  $x_k, y_k, z_k$  у вигляді матриці. Наприклад, для рами, зображеної на рис. 2.46, матриця координат перерізів матиме вигляд:

$$r = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a+b & a+b & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & c & c & c & c & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

2) Аналогічна матриця формується з координат вузлів:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & a & a+b \\ 0 & 0 & 0 \\ c & c & c \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}$$

3) Визначають проекції сил і моментів на осі глобальної системи координат:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & F_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -F_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4) Проводять обчислення за формулами (2.20). Система MathCAD дозволяє здійснити операцію векторного множення, що значно полегшує обчислення. Отже, з урахуванням введених матриць вхідних даних маємо

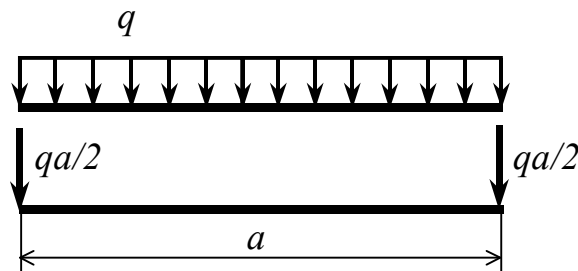
$$N^{(k)} = \sum_i F^{(i)} \cdot mi_{i,k}, \quad M^{(k)} = \sum_i \left( \left( R^{(i)} - r^{(k)} \right) \times F^{(i)} + M_F^{(i)} \right) \cdot mi_{i,k},$$

де  $N^{(k)}$ ,  $M^{(k)}$  – стовпці матриць  $N$  і  $M$ , які вміщують усі внутрішні сили у заданих перерізах:

$$N = \underbrace{\begin{bmatrix} Nx_1 & Nx_2 & \dots \\ Ny_1 & Ny_2 & \dots \\ Nz_1 & Nz_2 & \dots \end{bmatrix}}_{m \text{ перерізів}}, \quad M = \underbrace{\begin{bmatrix} Mx_1 & Mx_2 & \dots \\ My_1 & My_2 & \dots \\ Mz_1 & Mz_2 & \dots \end{bmatrix}}_{m \text{ перерізів}}$$

Зазначимо, що проекції зусиль у цих матрицях відповідають орієнтації глобальних осей, і тому проекції з однаковими індексами у різних стовпцях мають різний фізичний смисл (наприклад,  $N_x$  для першого перерізу (див. *рис. 2.44*) буде поздовжньою силою, а для п'ятого – поперечною). У зв'язку з цим при побудові епюр внутрішніх сил одержані проекції внутрішніх сил варто переозначити у фізичні позначення ( $N$  – поздовжня сила,  $Q_y, Q_z$  – поперечні сили,  $M_x$  – момент кручення,  $M_y, M_z$  – згинальні моменти).

Ще одне зауваження стосується розподіленого навантаження. Для використання викладеної методики необхідно привести розподілене навантаження до вузлів (замінити його відповідними зосередженими силами) згідно з *рис. 2.45*. При цьому для підвищення точності можна розбити ділянку  $a$  на декілька ділянок.



*Рис. 2.45. Приведення розподіленого навантаження до вузлів*

**ПРИКЛАД 2.19.** Визначити внутрішні сили у перерізах плоскої рами (*рис. 2.46*).

Вхідні дані:

$$F1 := 10 \text{ кН} \quad F2 := 30 \text{ кН} \quad q := 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad M := 20 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad a := 2 \text{ м}$$

Розв'язання:

Позначаємо номери вузлів і перерізів на розрахунковій схемі рами і задаємо їх:

$$\begin{aligned} n &:= 4 && \text{- кількість вузлів} && i &:= 1..n \\ m &:= 8 && \text{- кількість перерізів} && k &:= 1..m \end{aligned}$$

Задаємо проекції зовнішніх сил у вибраній глобальній системі координат. Оскільки у плоскій рамі діють тільки проекції сил на осі  $X$  і  $Z$ , та момент відносно осі  $Y$ , задаємо зовнішні сили у вигляді векторів:

$F_{X_i} :=$	$F_{X_i} =$	$F_{Z_i} :=$	$F_{Z_i} =$	$M_{y_i} :=$	$M_{y_i} =$
F1	10	0	0	0	0
0	0	0	0	M	20
$\frac{q \cdot a}{2}$	20	-F2	-30	0	0
$\frac{q \cdot a}{2}$	20	0	0	0	0

Задаємо координати вузлів та координати перерізів:

$X_i :=$	$Z_i :=$	$x_k :=$	$z_k :=$
0	a	0	a
0	0	0	0
a	0	a	0
a	-a	a	0
		a	-a
		a	0
		2a	0

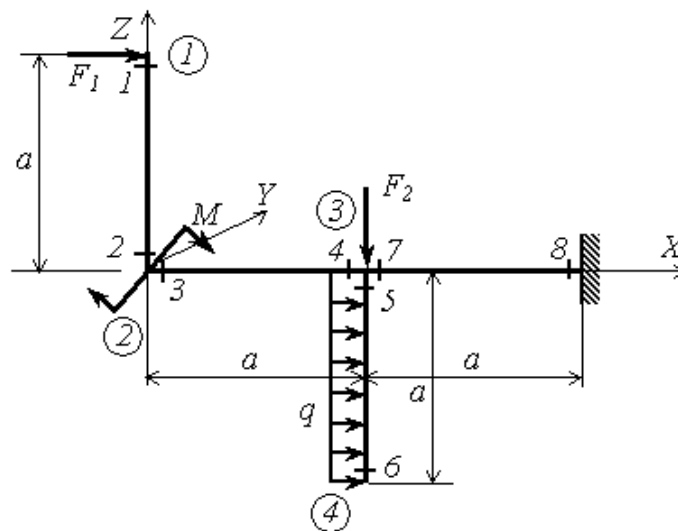


Рис. 2.44. Розрахункова схема плоскої рами

Задаємо матрицю індексів, яка показує, які сили треба враховувати в тому чи іншому перерізі:

$$m_i := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Визначимо проекції внутрішніх сил у перерізах:

$$NX_k := \sum_i FX_i \cdot m_{i,k} \quad NZ_k := \sum_i FZ_i \cdot m_{i,k}$$

$$M_k := \sum_i [(Z_i - z_k) \cdot FX_i - (X_i - x_k) \cdot FZ_i + My_i] \cdot m_{i,k}$$

Результати обчислення:

$$NX^T = (10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 20 \ 20 \ 50 \ 50)$$

$$NZ^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -30 \ -30)$$

$$M^T = (0 \ 20 \ 40 \ 40 \ -40 \ 0 \ 0 \ -60)$$

Побудуємо епюри внутрішніх сил (*рис. 2.47*). Ми одержали в результаті розрахунку внутрішні сили у глобальній системі координат. Оскільки епюри будуються на кожній ділянці окремо, визначимо поздовжні і поперечні сили на кожній ділянці.

Поздовжні сили не змінюються по довжині ділянки, тому можна записати їх значення тільки на початку кожної ділянки, враховуючи правило знаків: поздовжня сила вважається додатною, якщо ділянка рами під дією цієї сили розтягується, і від'ємною, якщо стискається:

$$N1 := NZ_1 \quad N1 = 0 \quad N2 := (-NX)_3 \quad N2 = -10$$

$$N3 := NZ_6 \quad N3 = 0 \quad N4 := (-NX)_7 \quad N4 = -50$$

Значення поперечних сил запишемо на початку і в кінці кожної ділянки<sup>\*)</sup>. На ділянці, де діє розподілене навантаження, епюру треба виправити з урахуванням приведення розподіленого навантаження до вузлів. Оскільки ми замінили розподілене навантаження двома силами, які дорівнюють половині рівнодіючої, прикладеними на початку і в кінці ділянки, у початковому перерізі віднімаємо значення сили, а в кінцевому додаємо:

$$Q11 := NX_1 \quad Q11 = 10 \quad Q12 := NX_2 \quad Q12 = 10$$

$$Q23 := NZ_3 \quad Q23 = 0 \quad Q24 := NZ_4 \quad Q24 = 0$$

$$Q36 := NX_6 - \frac{q \cdot a}{2} \quad Q36 = 0 \quad Q35 := NX_5 + \frac{q \cdot a}{2} \quad Q35 = 40$$

$$Q47 := NZ_7 \quad Q47 = -30 \quad Q48 := NZ_8 \quad Q48 = -30$$

Аналогічно визначаються згинаючі моменти.

<sup>\*)</sup> Поперечні сили позначені двома цифрами, які означають номер ділянки і номер перерізу.

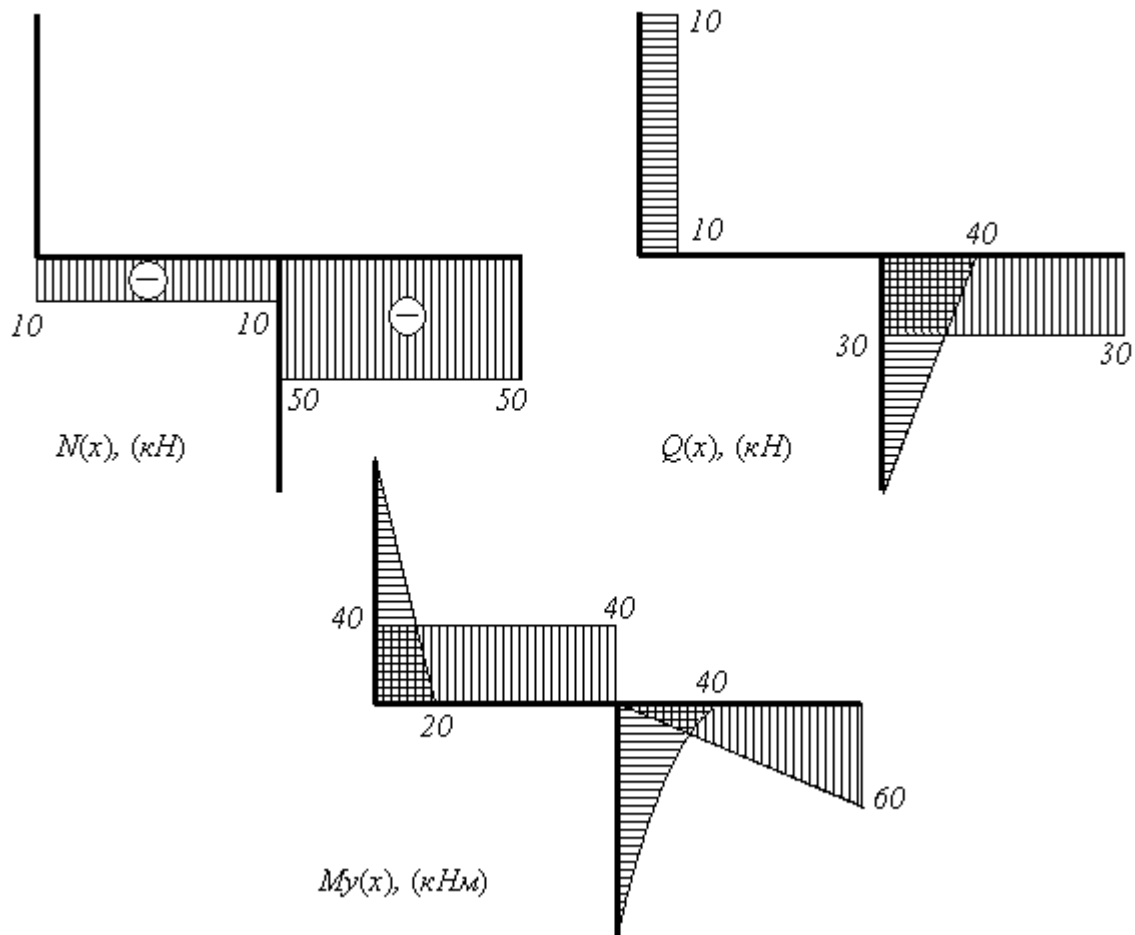


Рис. 2.45. Епюри внутрішніх сил для плоскої рами з рис. 2.46

**ПРИКЛАД 2.19.** Визначити внутрішні зусилля у перерізах просторової рами (рис. 2.48).

Вхідні дані:

$$F1 := 10 \text{ кН} \quad F2 := 20 \text{ кН} \quad F3 := 20 \text{ кН} \quad F4 := 20 \text{ кН}$$

$$q := 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad M1 := 20 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad a := 2 \text{ м}$$

Розв'язання:

$$n := 3 \quad \text{- кількість вузлів} \quad i := 1..n$$

$$m := 6 \quad \text{- кількість перерізів} \quad k := 1..m$$

Складаємо матрицю проєкцій зовнішніх сил у вузлах рами:

$$F := \begin{bmatrix} -F1 & -F4 & 0 \\ \left( \frac{q \cdot a}{2} - F2 \right) & \frac{q \cdot a}{2} & 0 \\ F3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -10 & -20 & 0 \\ -10 & 10 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

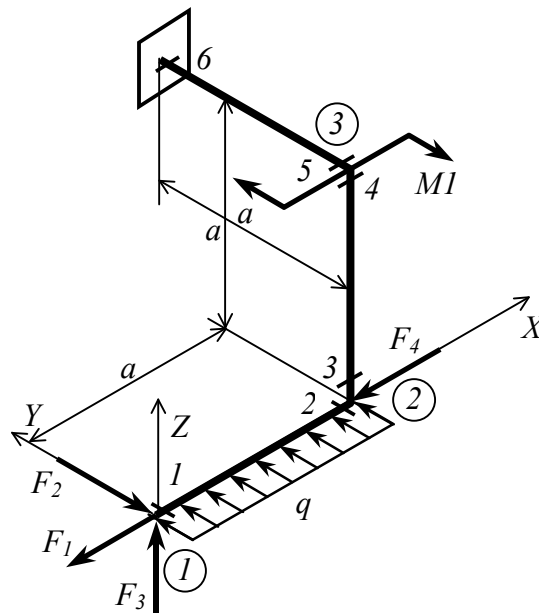


Рис. 2.48. Розрахункова схема просторової рами

Складаємо матрицю проєкцій моментів:

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

Складаємо матрицю координат вузлів  $R$  і матрицю координат перерізів  $r$ :

$$R := \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad r := \begin{pmatrix} 0 & a & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a & a \end{pmatrix}$$

Складаємо матрицю індексів:

$$m_i := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Визначаємо внутрішні сили у поперечних перерізах:

$$N^{(k)} := \sum_i F^{(i)} \cdot m_{i,k}$$

$$MM^{(k)} := \sum_i \left[ (R^{(i)} - r^{(k)}) \times F^{(i)} + M^{(i)} \right] \cdot m_{i,k}$$

Результати обчислення:

$$N = \begin{pmatrix} -10 & -10 & -30 & -30 & -30 & -30 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \end{pmatrix} \quad MM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 40 & 40 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 20 & 20 & 20 & 0 & -60 \end{pmatrix}$$

За одержаними результатами побудуємо епюри внутрішніх сил (рис. 2.49). На кожній ділянці виберемо локальну систему координат так, щоб вісь  $x$  проходила вздовж осі ділянки. **Правила побудови епюр** внутрішніх сил для просторової рами є такими: епюри поздовжніх сил і моментів кручення орієнтуються довільно, на епюрі поздовжніх сил позначаються знаки – мінус, якщо під дією сили ділянка стиснута, плюс, якщо розтягнута; на епюрі моментів кручення позначаються напрямки кручення або знаки у відповідності з правилами теоретичної механіки. Епюри поперечних сил та згинаючих моментів орієнтуються у площині, в якій діють відповідні сили, в напрямку дії сили; епюри згинаючих моментів будуються зі сторони стиснутих волокон.

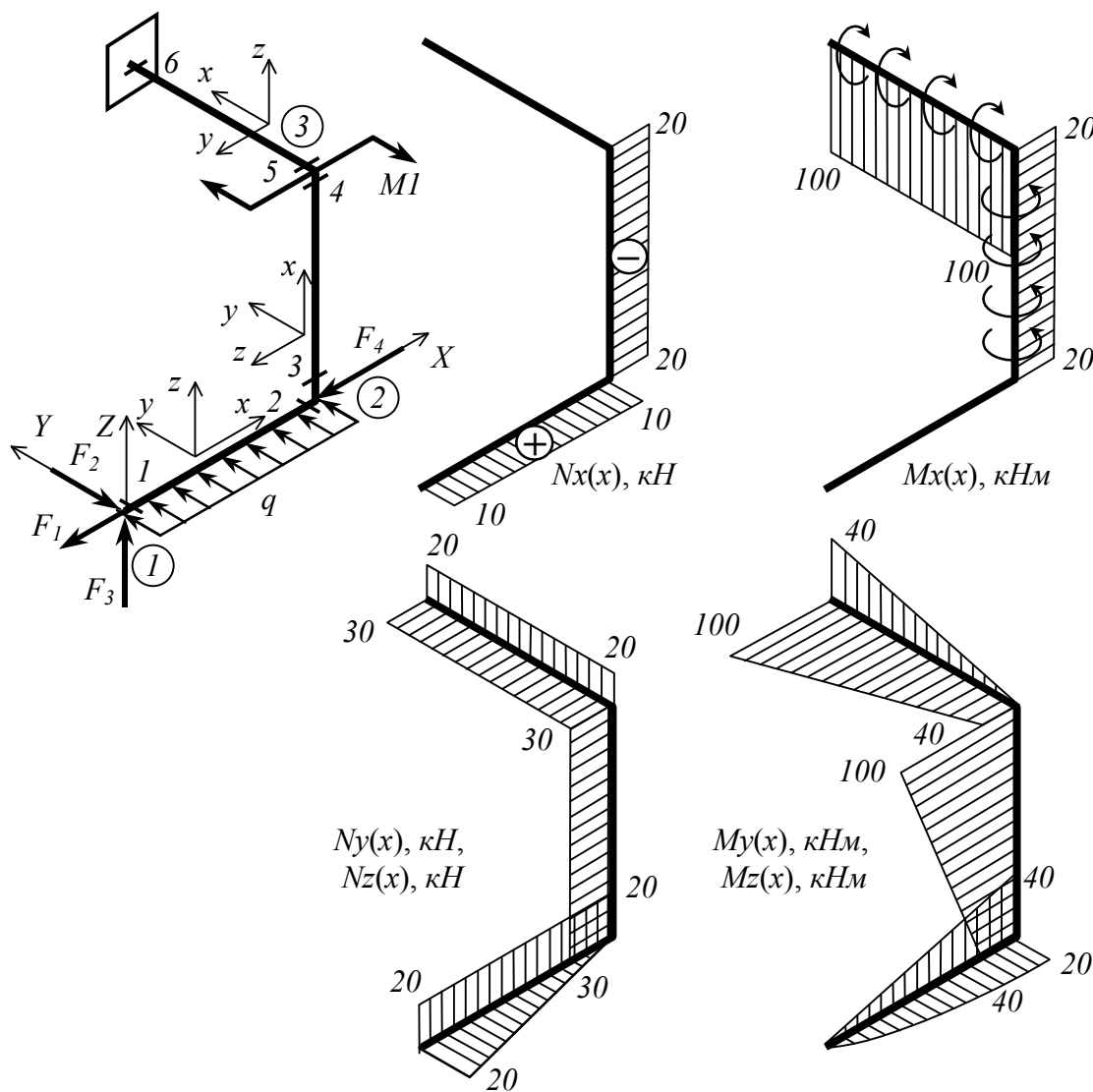


Рис. 2.49. Епюри внутрішніх сил для просторової рами

## РОЗДІЛ 3

### АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В ТОЧЦІ

#### 3.1. Тензор напружень. Напруження в довільній площадці. Головні напруження і головні площадки

Напружений стан у точці об'єму, який знаходиться під дією зовнішніх навантажень, описується тензором напружень  $\mathbf{T}_\sigma$ , який у системі координат  $x, y, z$  складається з дев'яти компонент. Матриця тензора напружень є проекцією тензора напружень у даній системі координат і має вигляд

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

де  $\sigma$  – нормальні напруження,  $\tau$  – дотичні напруження.

Компоненти цієї матриці визначають напруження у трьох взаємно перпендикулярних площадках, які проходять через дану точку. У МТДТ за три взаємно перпендикулярні площадки приймають грані куба, виділеного навколо точки (рис. 3.1).

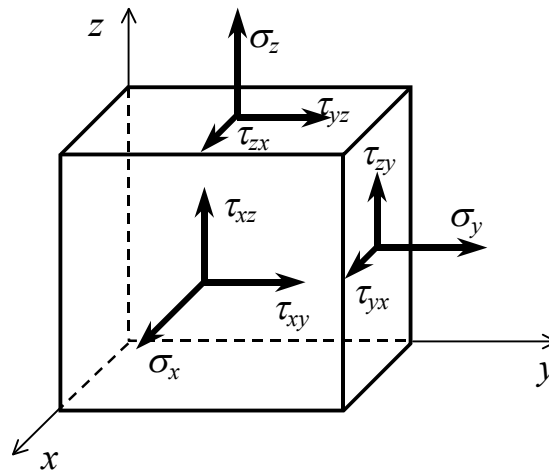


Рис. 3.1. Напружений стан у точці

За однією проекцією тензора можна знайти всі інші проекції. Розглянемо дві ортогональні декартові системи координат  $Oxyz, Ox'y'z'$  (рис. 3.2). Взаємне положення осей визначимо матрицею напрямних косинусів



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos(x', x), & \alpha_{12} &= \cos(x', y), & \alpha_{13} &= \cos(x', z), \\ \alpha_{21} &= \cos(y', x), & \alpha_{22} &= \cos(y', y), & \alpha_{23} &= \cos(y', z), \\ \alpha_{31} &= \cos(z', x), & \alpha_{32} &= \cos(z', y), & \alpha_{33} &= \cos(z', z). \end{aligned}$$

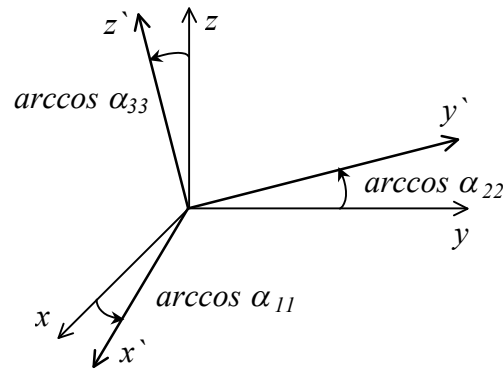


Рис. 3.2. Декартова система координат при повороті осей

Компоненти тензора напружень у двох системах координат пов'язані співвідношенням

$$\mathbf{T}'_{\sigma} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{\sigma} \cdot \mathbf{A}^T, \quad (3.3)$$

або, в розгорнутому вигляді

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

Якщо відомі напруження у трьох взаємно перпендикулярних площадках, тобто відомим є тензор напружень, то можна визначити напруження в довільній похилій площадці з вектором напрямної нормалі  $\vec{n}$  (рис. 3.3, а)

$$\mathbf{p} = \mathbf{T}_{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (3.4)$$

де  $\mathbf{p} = \{X \ Y \ Z\}^T$ ;  $X, Y, Z$  – проекції вектора  $\vec{p}$  на осі  $x, y, z$ ;

$$\mathbf{n} = \{n_1 \ n_2 \ n_3\}^T; \quad n_1 = \cos \alpha, \quad n_2 = \cos \beta, \quad n_3 = \cos \gamma.$$

Таким чином, щоб визначити компоненти вектора напружень у площадці, необхідно помножити матрицю тензора напружень на вектор напрямних косинусів нормалі до площадки. Компоненти вектора  $\mathbf{p}$  є паралельними осям  $x, y, z$ , вони не перпендикулярні й не дотичні до площадки, а отже не зовсім зручні для характеристики напружень у площадці, тому визначають нормальні й дотичні компоненти вектора  $\mathbf{p}$  (рис. 3.3, б).

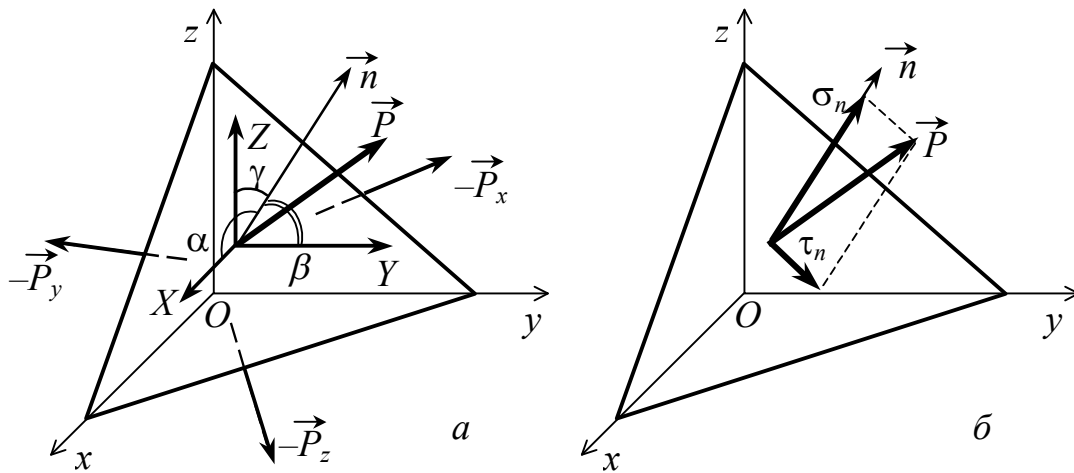


Рис. 3.3. Напруження у довільній похилій площадці: проєкції напруження на осі (а); нормальна і дотична складові напруження у площадці (б)

Нормальна складова напруження в похилій площадці

$$\sigma_n = \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{T}_\sigma \cdot \mathbf{n}. \quad (3.5)$$

Дотичне напруження

$$\tau_n = \sqrt{\mathbf{n}^T \mathbf{T}_\sigma \mathbf{T}_\sigma^T \mathbf{n} - \sigma_n^2}. \quad (3.6)$$

Серед множини площадок, що вміщують дану точку, необхідно виділити три взаємно перпендикулярні площадки, в яких відсутні дотичні напруження, тобто діють лише нормальні напруження. Ці площадки, а також напруження, що діють у них, називають головними.

Матриця тензора напружень у головних осях має вигляд

$$\mathbf{T}_{\sigma 0} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

де  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Головні напруження є власними значеннями матриці тензора напружень  $\mathbf{T}_\sigma$ . Щоб визначити головні напруження, необхідно знайти корені характеристичного рівняння матриці  $\mathbf{T}_\sigma$

$$|\mathbf{T}_\sigma - \sigma \mathbf{I}| = 0, \quad (3.8)$$

де  $\mathbf{I}$  – одинична матриця.

Розкриваючи визначник, одержимо рівняння відносно невідомої  $\sigma$

$$\sigma^3 - \Sigma_1 \sigma^2 + \Sigma_2 \sigma - \Sigma_3 = 0, \quad (3.9)$$

де  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  – інваріанти напруженого стану:

$$\Sigma_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad \Sigma_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_x \end{vmatrix}, \quad \Sigma_3 = |\mathbf{T}_\sigma|,$$

Рівняння (3.9) завжди має три дійсні корені<sup>\*)</sup>, які є головними напруженнями для заданого напруженого стану.

Якщо  $\Sigma_3 = 0$ , один із коренів рівняння (3.9) є нульовим, і рівняння спрощується:

$$\sigma(\sigma^2 - \Sigma_1\sigma + \Sigma_2) = 0, \quad (3.10)$$

звідки

$$\sigma = 0, \quad \sigma = \frac{\Sigma_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Sigma_1}{2}\right)^2 - \Sigma_2}. \quad (3.11)$$

Якщо  $\Sigma_3 = \Sigma_2 = 0$ , рівняння (3.9) має лише один ненульовий корінь  $\sigma = \Sigma_1$ .

Напружений стан, при якому одне з трьох головних напружень дорівнює нулю, називають плоским, а якщо два головні напруження нульові – лінійним, або одновісним. В загальному випадку напружений стан називають об'ємним.

Положення головних площадок визначимо, розв'язавши систему рівнянь для кожного значення  $i$

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_\sigma - \sigma_i \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}_i &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{n}_i^T \cdot \mathbf{n}_i &= 1, \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (3.12)$$

де  $\sigma_i$  – головні напруження,  $\mathbf{n}_i$  – вектор напрямних косинусів нормалі до  $i$ -ї головної площадки.

В розгорнутому вигляді система рівнянь (3.12) має вигляд

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i)n_{ix} + \tau_{xy}n_{iy} + \tau_{xz}n_{iz} &= 0; \\ \tau_{yx}n_{ix} + (\sigma_y - \sigma_i)n_{iy} + \tau_{yz}n_{iz} &= 0; \\ \tau_{zx}n_{ix} + \tau_{zy}n_{iy} + (\sigma_z - \sigma_i)n_{iz} &= 0 \\ n_{ix}^2 + n_{iy}^2 + n_{iz}^2 &= 1, \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (3.13)$$

де  $n_{ix}, n_{iy}, n_{iz}$  – косинуси кутів між  $i$ -ю головною віссю і осями координат початкової системи координат.

Тричі розв'язавши систему координат (3.13) відносно  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , одержимо компоненти векторів нормалей до трьох головних площадок

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \\ n_{2z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} n_{3x} \\ n_{3y} \\ n_{3z} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Вектори нормалей складають матрицю повороту до головних осей

<sup>\*)</sup> Оскільки матриця  $\mathbf{T}_\sigma$  є симетричною.

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} n_{1x} & n_{1y} & n_{1z} \\ n_{2x} & n_{2y} & n_{2z} \\ n_{3x} & n_{3y} & n_{3z} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Матрицю тензора головних напружень можна одержати, скориставшись формулою (3.3)

$$\mathbf{T}_{\sigma 0} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{T}_{\sigma} \cdot \mathbf{A}_0^T. \quad (3.16)$$

Формула (3.16) використовується, як правило, для перевірки.

У розрахунках на міцність широко використовуються дві характерні складові тензора напружень: шаровий тензор  $\mathbf{III}_{\sigma}$  і тензор-девіатор  $\mathbf{D}_{\sigma}$

$$\mathbf{III}_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_c & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_c & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_c & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_c \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\sigma_c = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Скористаємося виразами для інваріантів тензора напружень і запишемо інваріанти цих двох тензорів

$$\Sigma_1^{III} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_c, \quad \Sigma_2^{III} = 3\sigma_c^2, \quad \Sigma_3^{III} = \sigma_c^3,$$

$$\Sigma_1^D = 0, \quad \Sigma_2^D = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)],$$

$$\Sigma_3^D = \left\| \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_c & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_c & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_c \end{bmatrix} \right\|. \quad (3.18)$$

Ці інваріанти, зокрема  $\Sigma_2^D$ , широко використовуються у моделюванні міцності матеріалу.

Серед нескінченної кількості площадок, які можна виділити навколо точки, існують площадки, в яких діють екстремальні дотичні напруження.

Ці площадки розташовані під кутами  $45^\circ$  до головних площадок (рис. 3.4). Вектори нормалей до таких площадок:

$$n_{13} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \pm\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad n_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{2}/2 \\ \pm\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad n_{12} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2}/2 \\ \pm\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

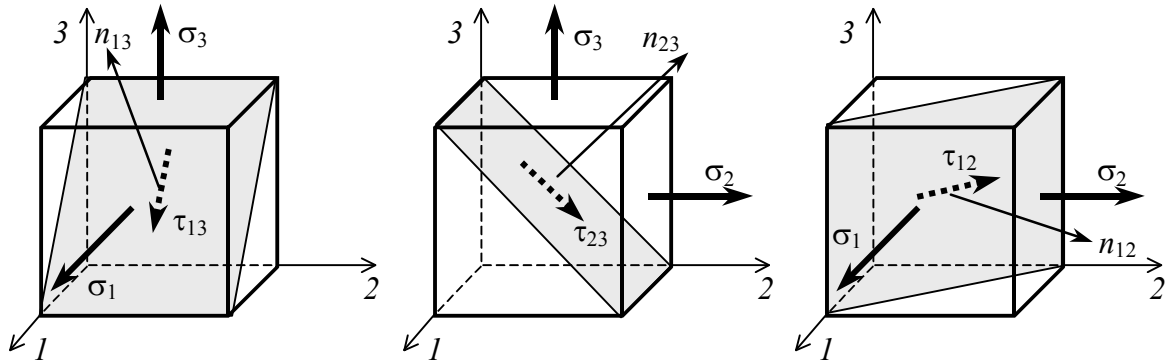


Рис. 3.4. Напруження в площадках, розташованих під кутом 45° до головних площадок

Визначимо екстремальні значення дотичних напружень в площадках, розташованих під кутами 45° до головних площадок, використавши формулу дотичного напруження у довільній похилій площадці (3.6)

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (3.19)$$

Проаналізуємо одержані залежності і зробимо висновок, що максимального значення дотичне напруження набуває у площадці, розташованій під кутами 45° до першої і третьої головних площадок ( $\sigma_1$  завжди є максимальним, а  $\sigma_3$  – мінімальним).

Як правило, при аналізі складного напруженого стану визначають напруження в октаедричній площадці, тобто площадці, рівнонахиленій до трьох головних площадок (рис. 3.5). Вектор нормалі до такої площадки

$$n_{окт} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3}/3 \\ \pm\sqrt{3}/3 \\ \pm\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

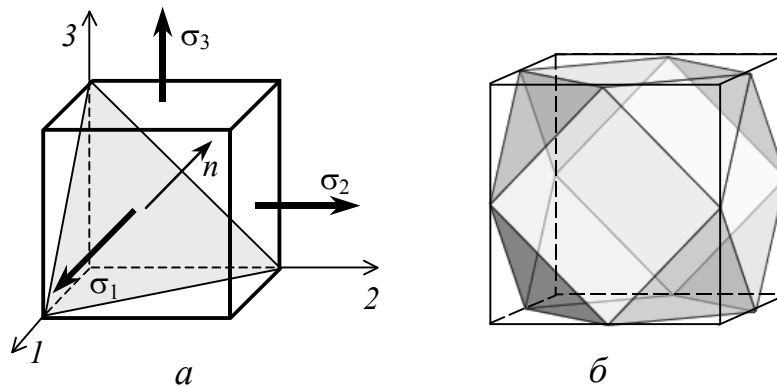


Рис. 3.5. Октаедрична площадка (а); можливе положення площадки (б)

Нормальне і дотичне напруження в октаедричній площадці визначаються як напруження у похилій площадці (3.5)-(3.6):

$$\sigma_{окт} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (3.20)$$

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (3.21)$$

### 3.2. Переміщення і деформації

При навантажуванні тіла у ньому відбувається зміна відносного положення точок об'єму. Кожна точка переміщується на деяку величину, проекції якої на осі координат, пов'язані з тілом, позначимо  $u, v, w$ .

Вектор  $(u \ v \ w)^T$  називають вектором переміщень у точці.

Відносні деформації у кожній точці об'єму можна описати за допомогою тензора деформацій, який будується за аналогією з тензором напружень. Матриця тензора деформацій має вигляд

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

де  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – лінійні деформації у напрямках  $x, y, z$ ,

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  – кутові деформації у площадках  $Oxy, Oyz, Oxz$ .

Якщо тензор напружень є відомим, деформації можна визначити за допомогою фізичних залежностей між напруженнями і деформаціями, тобто закону Гука.

У загальному випадку об'ємного напруженого стану для ізотропного матеріалу ці залежності зручно записати в матричній формі, маючи на увазі векторні позначення для напружень і деформацій:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.23)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.24)$$

Матрицю  $\mathbf{C}$  називають матрицею пружних модулів і записують у вигляді

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

де  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $G = E/2(1 + \nu)$  – модуль зсуву,  
 $\lambda = 2\nu G/(1 - 2\nu)$  – параметр Ляме.

Обернена до неї матриця (матриця модулів податливості)

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Обидві матриці є симетричними відносно головної діагоналі, їх компоненти залежать від двох констант – модуля пружності  $E$  і коефіцієнта Пуассона  $\nu$ , – або величин, похідних від цих двох. Зауважимо, що для анізотропних матеріалів кількість констант збільшується і в загальному випадку може дорівнювати 21 [1].

В розгорнутому вигляді рівняння (3.24) можна записати для ізотропного матеріалу у вигляді системи з шести рівнянь

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

За аналогією з теорією напруженого стану можна показати, що в кожній точці мають місце три взаємно перпендикулярних напрямки, в яких змінюється тільки об'єм, а деформації зсуву відсутні. Ці деформації називають головними. Вони визначаються як корені кубічного рівняння

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0, \quad (3.28)$$

де  $I_1, I_2, I_3$  – інваріанти тензора деформацій

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad (3.29)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_z \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Шаровий тензор деформації

$$\mathbf{Ш}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_c & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_c & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_c \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_c = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \quad (3.30)$$

Девіатор

$$\mathbf{D}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_c & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_c & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_c \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Шаровий тензор деформацій характеризує об'ємну деформацію у точці тіла, а девіатор – деформацію зміни форми. Зокрема, перший інваріант шарового тензора

$$I_1^{III} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3.32)$$

характеризує відносну зміну об'єму, його також можна зв'язати з осьовою деформацією в напрямку, перпендикулярному октаедричній площадці

$$\varepsilon_{окт} = \varepsilon_c = \frac{I_1}{3}, \quad (3.33)$$

а другий інваріант девіатора деформацій

$$I_2^D = \frac{1}{6}[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)] \quad (3.34)$$

– з кутом зсуву у цій же площадці

$$\gamma_{окт} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}, \quad (3.35)$$



$$\gamma_{окт}^2 = \frac{8}{3} I_2^D.$$

Якщо головні напруження відомі, головні деформації можна знайти за законом Гука для складного напруженого стану

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)), \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_2 + \sigma_1)).\end{aligned}\quad (3.36)$$

Тензор головних деформацій має вигляд

$$\mathbf{T}_{\varepsilon 0} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Напрями головних деформацій співпадають з векторами нормалей до головних площадок і визначаються аналогічно (3.12)-(3.14), тільки замість компонент матриці тензора напружень записуються відповідні компоненти матриці тензора деформацій. Матриці повороту до головних площадок і матриці напрямків головних деформацій для пружного матеріалу повинні співпадати.

**ПРИКЛАД 3.1.** Провести аналіз складного напруженого стану для елемента, виділеного у деякій точці об'єму (рис. 3.6).

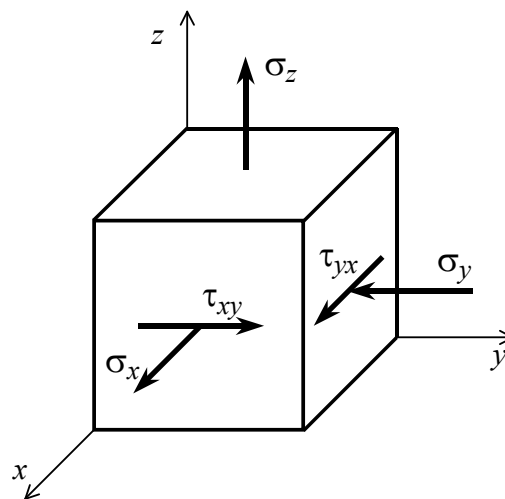


Рис. 3.6. Елемент, виділений у деякій точці об'єму

На гранях елемента діють задані напруження:

$$\sigma_x = 10 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right), \quad \sigma_y = -5 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right), \quad \sigma_z = 7 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 2 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right),$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0; \quad \beta = 90^\circ, \quad \gamma = 30^\circ, \quad \beta_1 = 40^\circ, \quad \gamma_1 = 60^\circ,$$

Матеріал: Ст.3,  $E = 2 \cdot 10^5$  (МПа),  $\nu = 0.3$ ,  $\sigma_u = 400$  (МПа),  $\sigma_T = 220$  (МПа).

### Розв'язання:

Для розв'язку задачі аналізу напруженого стану використаємо математичний пакет MathCAD.

Вхідні дані:

$$\sigma_x := 10 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \quad \sigma_y := -5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \quad \sigma_z := 7 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \quad \tau_{xy} := 2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \quad \tau_{yx} := 2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

$$\tau_{xz} := 0 \quad \tau_{zx} := 0 \quad \tau_{yz} := 0 \quad \tau_{zy} := 0$$

$$E := 2 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \quad \nu := 0.3 \quad G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$$\sigma_u := 40 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \quad \sigma_t := 24 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

$$\beta := 90 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \beta_1 := 40 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \gamma := 30 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \gamma_1 := 60 \cdot \frac{\pi}{180}$$

1) Побудуємо матрицю тензора напружень у початковій системі координат. Загальний вигляд матриці:

$$T\sigma := \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

де  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – нормальні напруження, які мають додатні значення, якщо направлені від площадки (напрямок співпадає з відповідною віссю);

$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$  – дотичні напруження, знак яких залежить від напрямку порівняно з віссю координат. За законом парності дотичних напружень  $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ .

Для даного елемента матриця тензора напружень буде такою:

$$T\sigma = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2) Побудуємо матрицю тензора напружень у системі координат, повернутій відносно заданої. Положення однієї з осей нової системи задають кути  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ . Можна вибрати будь-яку вісь –  $x_1, y_1$  або  $z_1$ . Задамо, наприклад, положення осі  $z_1$  (рис. 3.7). За умовою задачі задано кути  $\beta_1$  – кут між  $z_1$  і початковою віссю  $y$  та  $\gamma_1$  – кут між  $z_1$  і початковою віссю  $z$ . У MathCADі кути задаємо в радіанах (див. вхідні дані).

Трьох кутів, які задають положення осі  $z_1$ , недостатньо, щоб зафіксувати положення системи координат, тому задаємо довільний додатковий кут, який визначає положення ще однієї осі. Прийmemo кут  $\phi = \frac{\pi}{6}$  між осями  $x$  і  $x_1$ .

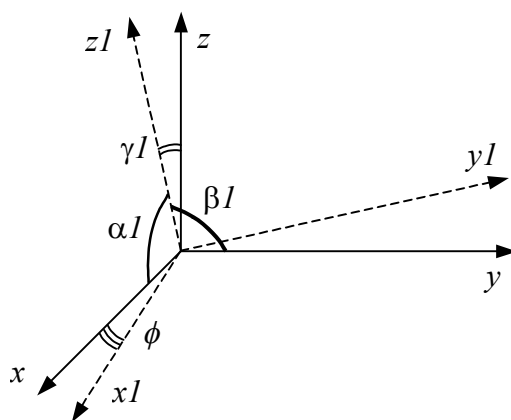


Рис. 3.7. Декартові системи координат, повернуті одна відносно іншої на задані кути

Матриця повороту до нової системи координат має вигляд (3.2).

З цієї матриці нам відомі поки що три компоненти:

$$\alpha_{11} := \cos(\phi) \quad \alpha_{32} := \cos(\beta_1) \quad \alpha_{33} := \cos(\gamma_1)$$

Невідомі компоненти знайдемо з умов

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad \text{де } \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

У розгорнутому вигляді ці рівняння записуються так: суми квадратів елементів рядків або стовпців матриці  $\mathbf{A}$  дорівнюють 1, а суми добутків елементів різних стовпців або рядків дорівнюють 0, – всього 12 рівнянь.

Для розв'язку системи рівнянь скористаємося блоком Given...Find.

$$\alpha_{31} := \sqrt{1 - \alpha_{32}^2 - \alpha_{33}^2} \quad \alpha_{31} = 0.404$$

$$\alpha_{12} := 0 \quad \alpha_{13} := 0 \quad \alpha_{21} := 0 \quad \alpha_{22} := 0 \quad \alpha_{23} := 0$$

Given

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 &= 1 & \alpha_{11} \cdot \alpha_{21} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{22} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{23} &= 0 \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 &= 1 & \alpha_{21} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{22} \cdot \alpha_{32} + \alpha_{23} \cdot \alpha_{33} &= 0 \\ \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 &= 1 & \alpha_{11} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{32} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{33} &= 0 \\ \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 &= 1 & \alpha_{12} \cdot \alpha_{13} + \alpha_{22} \cdot \alpha_{23} + \alpha_{32} \cdot \alpha_{33} &= 0 \\ \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 &= 1 & \alpha_{11} \cdot \alpha_{12} + \alpha_{21} \cdot \alpha_{22} + \alpha_{31} \cdot \alpha_{32} &= 0 \\ \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 &= 1 & \alpha_{11} \cdot \alpha_{13} + \alpha_{21} \cdot \alpha_{23} + \alpha_{31} \cdot \alpha_{33} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{pmatrix} := \text{Find}(\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.144 \\ -0.479 \\ 0.295 \\ -0.626 \\ 0.722 \end{pmatrix}$$

Задаємо матрицю повороту

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0.866 & -0.144 & -0.479 \\ -0.295 & 0.626 & -0.722 \\ 0.404 & 0.766 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Скористаємося формулою (3.3) і визначимо матрицю тензора напружень у новій системі координат (рис. 3.8).

$$T_{\sigma 1} := A \cdot T_{\sigma} \cdot A^T \quad T_{\sigma 1} = \begin{pmatrix} 8.501 & 1.488 & 3.585 \\ 1.488 & 1.814 & -6.061 \\ 3.585 & -6.061 & 1.685 \end{pmatrix}$$

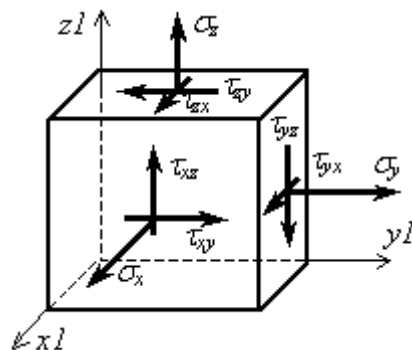


Рис. 3.8. Напруження на гранях елемента у системі координат  $x_1, y_1, z_1$

Якщо записана вище система рівнянь для визначення  $\alpha_{ij}$  не має розв'язку (таке буває, якщо при заданих початкових умовах система координат не існує), то треба для прив'язки вибрати іншу вісь.

3) Визначимо напруження в похилій площадці, нормаль до якої визначається кутами  $\alpha, \beta, \gamma$  (рис. 3.9). Кути  $\beta$  і  $\gamma$  задано в умові задачі, а  $\cos(\alpha)$  визначимо з теореми Піфагора  $\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1$

$$\begin{aligned} n_y &:= \cos(\beta) & n_z &:= \cos(\gamma) \\ n_x &:= \sqrt{1 - n_y^2 - n_z^2} \end{aligned}$$

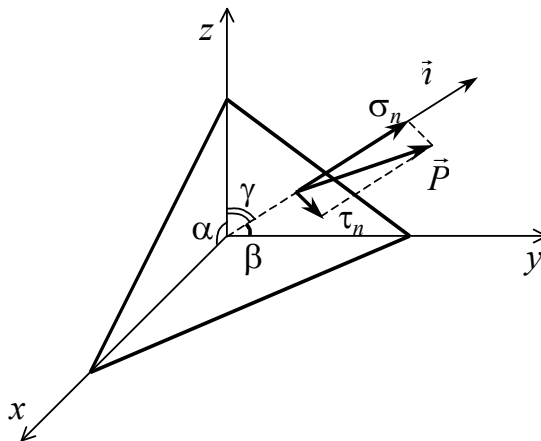


Рис. 3.9. Напруження в похилій площадці

Запишемо компоненти вектора нормалі до похилої площадки

$$n := \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.866 \end{pmatrix}$$

Напруження в похилій площадці

$$P := T\sigma^T \cdot n \quad P = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6.062 \end{pmatrix}$$

Нормальне напруження в похилій площадці

$$\sigma_n := n^T \cdot T\sigma \cdot n \quad \sigma_n = (7.75)$$

Дотичне напруження в похилій площадці

$$\tau_n := \sqrt{(n^T \cdot T\sigma \cdot (T\sigma)^T \cdot n - \sigma_n^2)} \quad \tau_n = (1.639)$$

4) Визначимо головні напруження і положення головних площадок.

Головні напруження є власними числами матриці тензора напружень, отже для їх визначення треба знайти корені характеристичного рівняння матриці тензора напружень (3.9). Визначимо інваріанти напруженого стану

$$\Sigma 1 := \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad \Sigma 1 = 12$$

$$\Sigma 2 := \left| \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{pmatrix} \right| \quad \Sigma 2 = -19$$

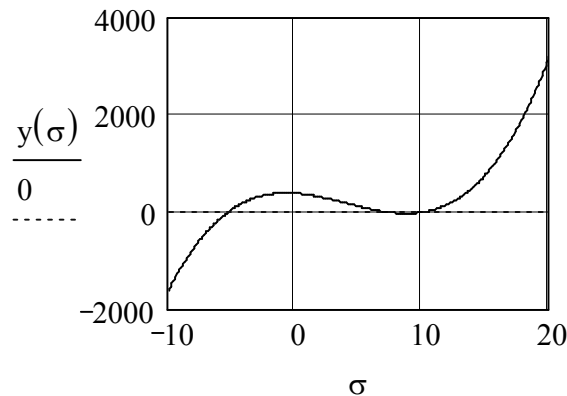
$$\Sigma 3 := |T\sigma| \quad \Sigma 3 = -378$$

Отже, характеристичне рівняння заданої матриці тензора напружень буде мати вигляд

$$\sigma^3 - 12\sigma^2 - 19\sigma + 378 = 0.$$

Характеристичне рівняння матриці тензора напружень завжди має три дійсні корені, для їх пошуку запишемо рівняння у вигляді функції і побудуємо її графік

$$y(\sigma) := \sigma^3 - \Sigma 1 \cdot \sigma^2 + \Sigma 2 \cdot \sigma - \Sigma 3 \quad \sigma := -10, -9.9.. 20$$



На графіку видно, які початкові наближення треба надати змінній для пошуку коренів. Скористаємося функцією **root(y(σ), σ)**, за допомогою якої в MathCAD відбувається пошук коренів рівняння

$$\sigma := -7$$

$$\text{root}(y(\sigma), \sigma) = -5.262 \quad \sigma 3 := \text{root}(y(\sigma), \sigma) \quad \sigma 3 = -5.262$$

$$\sigma := 7$$

$$\text{root}(y(\sigma), \sigma) = 7 \quad \sigma 2 := 7$$

$$\sigma := 13$$

$$\text{root}(y(\sigma), \sigma) = 10.262 \quad \sigma 1 := \text{root}(y(\sigma), \sigma) \quad \sigma 1 = 10.262$$

Прийнято, що  $\sigma 1 \geq \sigma 2 \geq \sigma 3$ , отже у відповідності з цією умовою надаємо знайденим кореням відповідні значення.

У MathCAD існує можливість визначити всі корені полінома одночасно за допомогою функції **polyroots(a)**. Компоненти вектора **a** – коефіцієнти полінома, в даному випадку – інваріанти напруженого стану

$$a := \begin{pmatrix} -\Sigma 3 \\ \Sigma 2 \\ -\Sigma 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(a) = \begin{pmatrix} -5.262 \\ 7 \\ 10.262 \end{pmatrix}$$

Для виконання умови  $\sigma 1 \geq \sigma 2 \geq \sigma 3$  компоненти вектора коренів рівняння необхідно поставити у порядку зменшення, це можна зробити за допомогою функції сортування **reverse(x)**

$$\sigma := \text{reverse}(\text{polyroots}(a)) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 10.262 \\ 7 \\ -5.262 \end{pmatrix}$$

Задаємо матрицю тензора напружень у головних осях

$$T_{\sigma 0} := \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad T_{\sigma 0} = \begin{pmatrix} 10.262 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5.262 \end{pmatrix}$$

Аналіз одержаних значень показав, що  $\sigma_2$  співпадає із заданим напруженням  $\sigma_z$ . Оскільки напруження  $\sigma_z$  діє в площадці, де відсутні дотичні напруження, воно є одним із головних, у чому ми впевнились, провівши розрахунок. Таким чином, вісь  $z$  співпадає з другою головною віссю.

Визначимо положення головних площадок. Для цього розв'яжемо систему рівнянь (3.13) тричі, підставляючи значення головних напружень:

$$n1x := 0 \quad n1y := 0 \quad n1z := 0$$

$$\text{Given } (\sigma_x - \sigma_1) \cdot n1x + \tau_{xy} \cdot n1y + \tau_{xz} \cdot n1z = 0$$

$$\tau_{yx} \cdot n1x + (\sigma_y - \sigma_1) \cdot n1y + \tau_{yz} \cdot n1z = 0$$

$$\tau_{zx} \cdot n1x + \tau_{zy} \cdot n1y + (\sigma_z - \sigma_1) \cdot n1z = 0$$

$$(n1x)^2 + (n1y)^2 + (n1z)^2 = 1$$

$$n1 := \text{Find}(n1x, n1y, n1z) \quad n1 = \begin{pmatrix} 0.992 \\ 0.13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n2x := 0 \quad n2y := 0 \quad n2z := 0$$

$$\text{Given } (\sigma_x - \sigma_2) \cdot n2x + \tau_{xy} \cdot n2y + \tau_{xz} \cdot n2z = 0$$

$$\tau_{yx} \cdot n2x + (\sigma_y - \sigma_2) \cdot n2y + \tau_{yz} \cdot n2z = 0$$

$$\tau_{zx} \cdot n2x + \tau_{zy} \cdot n2y + (\sigma_z - \sigma_2) \cdot n2z = 0$$

$$(n2x)^2 + (n2y)^2 + (n2z)^2 = 1$$

$$n2 := \text{Find}(n2x, n2y, n2z) \quad n2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$n3x := 0 \quad n3y := 0 \quad n3z := 0$$

$$\text{Given } (\sigma_x - \sigma_3) \cdot n3x + \tau_{xy} \cdot n3y + \tau_{xz} \cdot n3z = 0$$

$$\tau_{yx} \cdot n3x + (\sigma_y - \sigma_3) \cdot n3y + \tau_{yz} \cdot n3z = 0$$

$$\tau_{zx} \cdot n3x + \tau_{zy} \cdot n3y + (\sigma_z - \sigma_3) \cdot n3z = 0$$

$$(n3x)^2 + (n3y)^2 + (n3z)^2 = 1$$

$$n3 := \text{Find}(n3x, n3y, n3z) \quad n3 = \begin{pmatrix} -0.13 \\ 0.992 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матриця повороту до головних осей має вигляд:

$$A_0 := \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0.992 & 0.13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.13 & 0.992 & 0 \end{pmatrix}$$

Зробимо перевірку – за допомогою цієї матриці визначимо тензор головних напружень:

$$T_{\sigma 0} := A_0 \cdot T_{\sigma} \cdot A_0^T \quad T_{\sigma 0} = \begin{pmatrix} 10.262 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5.262 \end{pmatrix}$$

Порівнюючи одержану матрицю тензора головних напружень із матрицею, одержаною вище, впевнимися, що вони однакові.

Оскільки жодне з головних напружень не дорівнює нулю, ми маємо тривісний напружений стан (рис. 3.10). Оскільки напруження  $\sigma_3$  від'ємне, направляємо його до площадки (в напрямку третьої головної осі відбувається стиск, а в напрямку першої і другої головних осей – розтяг).

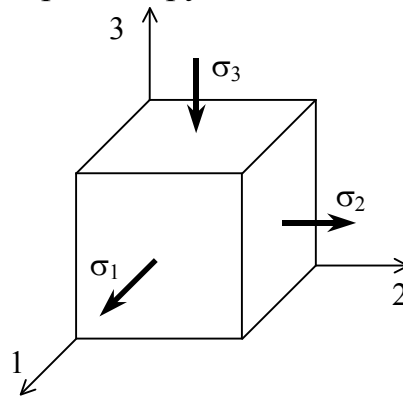


Рис. 3.10. Головні напруження

5) Визначимо екстремальні дотичні напруження, які діють у площадках, розміщених під кутами  $45^\circ$  до головних площадок. (рис. 3.11).

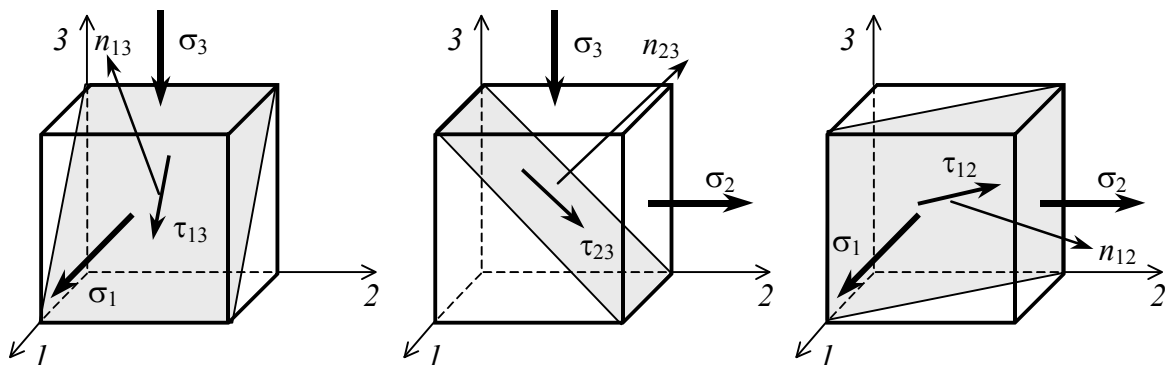


Рис. 3.11. Дотичні напруження в площадках, розміщених під кутами  $45^\circ$  до головних площадок



$$\tau_{13} := \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \tau_{13} = 7.762$$

$$\tau_{23} := \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \tau_{23} = 6.131$$

$$\tau_{21} := \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \tau_{21} = 1.631$$

Максимального значення дотичне напруження набуває в площадці, розташованій під кутом  $45^\circ$  до першої і третьої головних площадок.

6) Визначимо нормальне і дотичне напруження в октаедричній площадці (рис. 3.5, а):

$$\sigma_0 := \frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad \sigma_0 = 4$$

$$\tau_0 := \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad \tau_0 = 6.683$$

7) Визначимо компоненти тензора деформацій у заданій системі координат.

Модуль зсуву (у  $\text{кН/см}^2$ ) є таким:

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad G = 7.692 \times 10^3$$

Тензор деформацій у заданій системі координат має вигляд (3.22). Компоненти матриці тензора деформацій зручніше визначити у вигляді вектора за допомогою закону Гука для складного напруженого стану (3.24).

Задаємо вектор напружень, компонентами якого є задані напруження, та матрицю модулів податливості (3.26):

$$\sigma_v := \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix}$$

Визначаємо компоненти тензора деформацій:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} := \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4.7 \times 10^{-4} \\ -5.05 \times 10^{-4} \\ 2.75 \times 10^{-4} \\ 2.6 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Використовуючи компоненти вектора деформацій, складемо матрицю тензора деформацій у заданій системі координат:

$$\gamma_{yx} := \gamma_{xy} \quad \gamma_{zx} := \gamma_{xz} \quad \gamma_{zy} := \gamma_{yz}$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon := \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4.7 \times 10^{-4} & 1.3 \times 10^{-4} & 0 \\ 1.3 \times 10^{-4} & -5.05 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 2.75 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

8) Визначимо матрицю тензора деформацій у системі координат, повернутій відносно початкової на задані кути (див. підрозд. 3.2), за допомогою вже визначеної матриці повороту:

$$\mathbf{T}_{\varepsilon 1} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_\varepsilon \cdot \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{T}_{\varepsilon 1} = \begin{pmatrix} 3.726 \times 10^{-4} & 9.673 \times 10^{-5} & 2.33 \times 10^{-4} \\ 9.673 \times 10^{-5} & -6.212 \times 10^{-5} & -3.939 \times 10^{-4} \\ 2.33 \times 10^{-4} & -3.939 \times 10^{-4} & -7.045 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

9) Визначимо лінійну деформацію у напрямку, заданому вектором нормалі до похилої площадки (див. підрозд 3.3)

$$\varepsilon_n := \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{T}_\varepsilon \cdot \mathbf{n} \quad \varepsilon_n = \left( 3.237 \times 10^{-4} \right)$$

10) Визначимо головні деформації як корені характеристичного рівняння матриці тензора деформацій (3.28). Спочатку знайдемо інваріанти (3.29)

$$I1 := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad I1 = 2.4 \times 10^{-4}$$

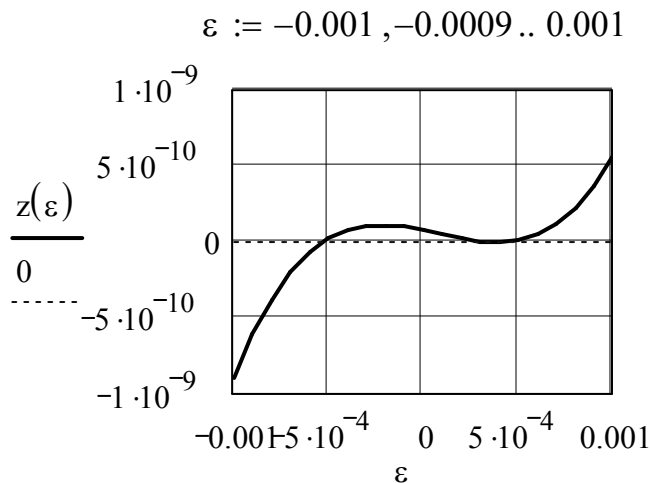
$$I2 := \left| \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \right|$$

$$I2 = -2.639 \times 10^{-7}$$

$$I3 := |T\varepsilon| \quad I3 = -6.992 \times 10^{-11}$$

Далі аналогічно п.4 визначимо корені характеристичного рівняння

$$z(\varepsilon) := \varepsilon^3 - I1 \cdot \varepsilon^2 + I2 \cdot \varepsilon - I3$$



$$c := \begin{pmatrix} -I3 \\ I2 \\ -I1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(c) = \begin{pmatrix} -5.22 \times 10^{-4} \\ 2.75 \times 10^{-4} \\ 4.87 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon := \text{reverse}(\text{polyroots}(c)) \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 4.87 \times 10^{-4} \\ 2.75 \times 10^{-4} \\ -5.22 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

За допомогою закону Гука для складного напруженого стану перевіримо одержані значення<sup>\*)</sup>

<sup>\*)</sup> Зверніть увагу на величини деформацій (відносні деформації безрозмірні).

$$\varepsilon_1 := \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)] \quad \varepsilon_1 = 4.87 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 := \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)] \quad \varepsilon_2 = 2.75 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_3 := \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_1)] \quad \varepsilon_3 = -5.22 \times 10^{-4}$$

і впевнимися, що вони співпадають із одержаними вище.

Складаємо матрицю головних деформацій

$$T_{\varepsilon 0} := \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad T_{\varepsilon 0} = \begin{pmatrix} 4.87 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 2.75 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & -5.22 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Визначимо головні напрямки тензора деформацій аналогічно під-розд. 3.4:

$$n_{11} := 1 \quad n_{12} := 1 \quad n_{13} := 1$$

$$\text{Given} \quad (\varepsilon_x - \varepsilon_1) \cdot n_{11} + \gamma_{xy} \cdot n_{12} \cdot \frac{1}{2} + \gamma_{xz} \cdot n_{13} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\gamma_{yx} \cdot n_{11} \cdot \frac{1}{2} + (\varepsilon_y - \varepsilon_1) \cdot n_{12} + \gamma_{yz} \cdot n_{13} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\gamma_{zx} \cdot n_{11} \cdot \frac{1}{2} + \gamma_{zy} \cdot n_{12} \cdot \frac{1}{2} + (\varepsilon_z - \varepsilon_1) \cdot n_{13} = 0$$

$$n_{11}^2 + n_{12}^2 + n_{13}^2 = 1$$

$$N1 := \text{Find}(n_{11}, n_{12}, n_{13}) \quad N1 = \begin{pmatrix} 0.992 \\ 0.13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n_{21} := 0 \quad n_{22} := 0 \quad n_{23} := 0$$

$$\text{Given} \quad (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \cdot n_{21} + \gamma_{xy} \cdot n_{22} \cdot \frac{1}{2} + \gamma_{xz} \cdot n_{23} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\gamma_{yx} \cdot n_{21} \cdot \frac{1}{2} + (\varepsilon_y - \varepsilon_2) \cdot n_{22} + \gamma_{yz} \cdot n_{23} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\gamma_{zx} \cdot n_{21} \cdot \frac{1}{2} + \gamma_{zy} \cdot n_{22} \cdot \frac{1}{2} + (\varepsilon_z - \varepsilon_2) \cdot n_{23} = 0$$

$$n_{21}^2 + n_{22}^2 + n_{23}^2 = 1$$

$$N2 := \text{Find}(n_{21}, n_{22}, n_{23}) \quad N2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$n_{31} := 1 \quad n_{32} := 1 \quad n_{33} := 1$$

$$\text{Given} \quad (\varepsilon_x - \varepsilon_3) \cdot n_{31} + \gamma_{xy} \cdot n_{32} \cdot \frac{1}{2} + \gamma_{xz} \cdot n_{33} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\gamma_{yx} \cdot n_{31} \cdot \frac{1}{2} + (\varepsilon_y - \varepsilon_3) \cdot n_{32} + \gamma_{yz} \cdot n_{33} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\gamma_{zx} \cdot n_{31} \cdot \frac{1}{2} + \gamma_{zy} \cdot n_{32} \cdot \frac{1}{2} + (\varepsilon_z - \varepsilon_3) \cdot n_{33} = 0$$

$$n_{31}^2 + n_{32}^2 + n_{33}^2 = 1$$

$$N3 := \text{Find}(n_{31}, n_{32}, n_{33}) \quad N3 = \begin{pmatrix} -0.13 \\ 0.992 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Головні напрямки тензора деформацій визначаються векторами  $N1, N2, N3$ . На підставі одержаних даних побудуємо матрицю повороту системи координат до головних осей тензора деформацій

$$A_{\varepsilon 0} := \begin{pmatrix} N1_1 & N1_2 & N1_3 \\ N2_1 & N2_2 & N2_3 \\ N3_1 & N3_2 & N3_3 \end{pmatrix} \quad A_{\varepsilon 0} = \begin{pmatrix} 0.992 & 0.13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.13 & 0.992 & 0 \end{pmatrix}$$

і впевнімося, що вона повністю співпадає з матрицею повороту до головних осей тензора напружень  $A_{\varepsilon 0} = A_0$ .

Для перевірки за допомогою матриці повороту визначимо головні деформації

$$E := A_{\varepsilon 0} \cdot T_{\varepsilon} \cdot A_{\varepsilon 0}^T$$

$$E = \begin{pmatrix} 4.87 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 2.75 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & -5.22 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Вони повинні співпасти з визначеними раніше.

11) Визначимо відносну деформацію об'єму

$$\varepsilon_V := \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad \varepsilon_V = 2.4 \times 10^{-4}$$

12) Повна потенціальна енергія деформації

$$U := \frac{1}{2} \cdot \sigma_V^T \cdot \varepsilon_V \quad U = (4.835 \times 10^{-3})$$

13) Визначимо енергію зміни об'єму.

Середнє арифметичне нормальних напружень і лінійних деформацій

$$\sigma_c := \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad \varepsilon_c := \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \quad \sigma_c = 4 \quad \varepsilon_c = 8 \times 10^{-5}$$

Запишемо вектори напружень і деформацій, які характеризують зміну об'єму і визначимо енергію зміни об'єму

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} \sigma_c \\ \sigma_c \\ \sigma_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_0 := \begin{pmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_c \\ \varepsilon_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_0 := \frac{1}{2} \cdot \sigma_0^T \cdot \varepsilon_0$$

$$u_0 = (4.8 \times 10^{-4})$$

Визначимо енергію зміни форми як різницю повної потенціальної енергії деформації і енергії зміни об'єму

$$u_f := \frac{1}{2} \cdot (\sigma_v - \sigma_0)^T \cdot (\varepsilon_v - \varepsilon_0)$$

$$u_f = (4.355 \times 10^{-3})$$

Разом енергія зміни об'єму і енергія формозміни складають потенціальну енергію деформації

$$u_0 + u_f = (4.835 \times 10^{-3})$$

14) Визначимо і порівняємо розрахункові напруження за III, IV теоріями міцності, а також теоріями Мора і Писаренка-Лебедева.

Допустиме напруження для сталі Ст.3:

$$\sigma_{adm} := \frac{\sigma_t}{1.5} \quad \sigma_{adm} = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

Умова міцності:

$$\sigma_{ekv} \leq \sigma_{adm}$$

За III теорією міцності еквівалентне напруження складає

$$\sigma_{III} := \sigma_1 - \sigma_3 \quad \sigma_{III} = 15.524 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

За IV теорією міцності еквівалентне напруження складає

$$\sigma_{IV} := \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad \sigma_{IV} = 14.177 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

За теорією Мора<sup>\*)</sup> еквівалентне напруження для пластичних матеріалів таке ж, як і за третьою, тому що границя міцності при розтягу і стиску однакова (матеріал однаково працює на розтяг і на стиск):

$$\sigma_{uc} := 40$$

$$\sigma_V := \sigma_1 - \frac{\sigma_u}{\sigma_{uc}} \cdot \sigma_3 \quad \sigma_V = 15.524 \quad \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

За теорією Писаренка-Лебедєва еквівалентне напруження складає

$$\sigma_{VI} := \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma_u}{\sigma_{uc}} \cdot \tau_0 + \left(1 - \frac{\sigma_u}{\sigma_{uc}}\right) \cdot \sigma_1 \quad \sigma_{VI} = 14.177$$

Для пластичних матеріалів еквівалентне напруження за теорією Писаренка-Лебедєва дорівнює еквівалентному напруженню за IV теорією міцності.

Таким чином, за всіма теоріями еквівалентні напруження менші, ніж допустиме, отже умови міцності для даного елемента виконуються.

---

<sup>\*)</sup> За теорією Мора, як правило, перевіряють розрахункове напруження для крихких матеріалів.

## РОЗДІЛ 4

### РОЗРАХУНКИ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ

#### 4.1. Визначення геометричних характеристик плоских перерізів

Геометричні характеристики площ поперечних перерізів стержнів використовують в обчисленнях на міцність як основні параметри, які треба визначити або перевірити їх прийнятність для даної конструкції при заданому навантаженні. У зв'язку з цим визначення геометричних характеристик є важливим етапом розрахунків на міцність.

Основними геометричними характеристиками є моменти виду

$$I_{m,n} = \int_A y^m z^n dydz, \quad (4.1)$$

де  $y, z$  – координати, пов'язані з площею  $A$ .

Залежно від значень показників  $m, n$  можна записати відомі характеристики перерізу:

при  $m = 0, n = 0$

$$I_{0,0} = \int_A dydz = A \text{ – площа поперечного перерізу;}$$

при  $m = 1, n = 0$

$$I_{1,0} = \int_A y dydz = S_z \text{ – статичний момент площі } A \text{ відносно осі } z;$$

при  $m = 0, n = 1$

$$I_{0,1} = \int_A z dydz = S_y \text{ – статичний момент площі } A \text{ відносно осі } y;$$

при  $m = 1, n = 1$

$$I_{1,1} = \int_A yz dydz = I_{yz} \text{ – відцентровий момент інерції площі } A \text{ в осях}$$

$y, z$ ;

при  $m = 2, n = 0$

$$I_{2,0} = \int_A y^2 dydz = I_z \text{ – осьовий момент інерції площі } A \text{ відносно осі } z;$$



при  $m = 0, n = 2$

$$I_{0,2} = \int_A z^2 dydz = I_y - \text{осьовий момент інерції площі } A \text{ відносно осі } y.$$

При розрахунках стержнів кругового перерізу використовують полярний момент інерції

$$I_\rho = \int_A (y^2 + z^2) dydz = \int_A \rho^2 dydz.$$

Моменти більш високих порядків використовують рідко. У розрахункових формулах використовують і такі характеристики, як моменти опору:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} - \text{осьові моменти опору}, \quad (4.2)$$

де  $z_{\max}, y_{\max}$  – координати точок перерізу, найбільш віддалених від осей  $Y, Z$ ;

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}} - \text{полярний момент опору},$$

де  $\rho_{\max}$  – максимальна відстань від центра.

При визначенні геометричних характеристик складних за формою перерізів користуються правилами перетворення інтеграла (4.1) при зміні осей координат, зокрема, при їх повороті і паралельному переносі [1], а також адитивною властивістю інтеграла, згідно з якою моменти складної площі визначають як суму моментів окремих складових площ, на які можна розбити складну площу\*).

Розглянемо переріз довільної форми, обмежений прямими лініями (рис. 4.1). Для визначення геометричних характеристик скористаємось алгоритмом, який використовує масив координат контуру площі перерізу в деякій довільно вибраній системі координат.

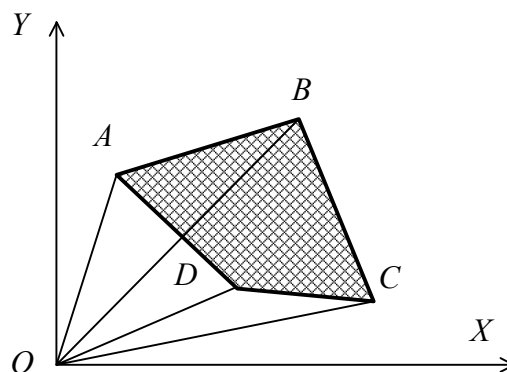


Рис. 4.1. Переріз довільної форми

\*) Це правило не відноситься до моментів опору.

У довільній системі координат  $XOY$  кожна геометрична характеристика може бути подана у вигляді алгебраїчної суми відповідних характеристик трикутників, які мають спільну вершину – початок координат  $O$ . Наприклад, осьовий момент інерції  $I_x$  визначають таким чином:

$$I_x = I_x^{OAB} + I_x^{OBC} - I_x^{OCD} - I_x^{OAD}. \quad (4.3)$$

Для одного з трикутників (рис. 4.2) матимемо співвідношення: площа

$$A_k = \frac{1}{2}(x_i y_j - x_j y_i), \quad (4.4)$$

(вважається додатною, якщо поворот осі  $O_i$  до  $O_j$  відбувається проти годинникової стрілки);

статичні моменти площі

$$S_x^k = \frac{1}{3} A_k (y_i + y_j), \quad S_y^k = \frac{1}{3} A_k (x_i + x_j); \quad (4.5)$$

координати центра ваги

$$x_0^k = \frac{1}{3}(x_i + x_j), \quad y_0^k = \frac{1}{3}(y_i + y_j); \quad (4.6)$$

осьові моменти інерції площі

$$I_x^k = \frac{1}{6} A_k (y_i^2 + y_i y_j + y_j^2), \quad I_y^k = \frac{1}{6} A_k (x_i^2 + x_i x_j + x_j^2); \quad (4.7)$$

відцентровий момент інерції

$$I_{xy}^k = \frac{1}{12} A_k (x_i y_j + x_j y_i + 2x_i y_i + 2x_j y_j). \quad (4.8)$$

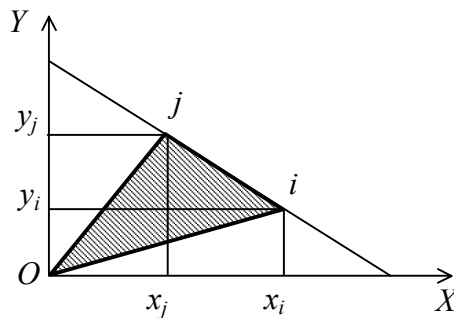


Рис. 4.2. Один із трикутників, які складають переріз довільної форми

Для довільної фігури, яка описана  $n$  характерними точками (рис. 4.3), розрахункові формули будуть такими:

площа

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_i y_j - x_j y_i); \quad (4.9)$$

статичні моменти площі

$$S_x = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n (x_i y_j - x_j y_i) (y_i + y_j), \quad S_y = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n (x_i y_j - x_j y_i) (x_i + x_j); \quad (4.10)$$

координати центра ваги

$$x_0 = \frac{S_y}{A}, \quad y_0 = \frac{S_x}{A}; \quad (4.11)$$

осьові моменти інерції площі

$$I_{xc} = \sum_{k=1}^n I_x^k - y_0^2 A, \quad I_{yc} = \sum_{k=1}^n I_y^k - x_0^2 A; \quad (4.12)$$

відцентровий момент інерції

$$I_{xc yc} = \sum_{k=1}^n I_{xy}^k - x_0 y_0 A. \quad (4.13)$$

Головні центральні моменти інерції

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_{xc} + I_{yc}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xc} - I_{yc}}{2}\right)^2 + I_{xc yc}^2}. \quad (4.14)$$

Положення першої головної центральної осі

$$\alpha = \arctg \frac{I_{xc yc}}{I_{yc} - I_{\min}}. \quad (4.15)$$

Мінімальний радіус інерції

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}. \quad (4.16)$$

Наближене значення моменту інерції при крученні (полярного)

$$I_{\rho} = \frac{4I_{xc yc}}{I_{xc} + I_{yc}}.$$

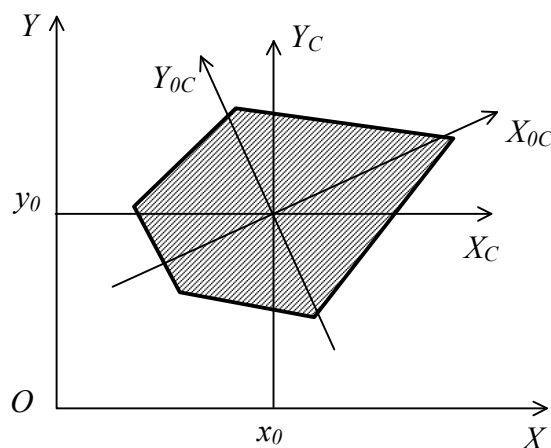


Рис. 4.3. Довільна фігура, описана  $n$  характерними точками

Якщо переріз складається зі стандартних профілів, характеристики кожної з фігур треба визначити окремо, після чого скористатися послідовністю обчислень за формулами (4.10)-(4.16).

**ПРИКЛАД 4.1.** Обчислити геометричні характеристики складної фігури (рис. 4.4).

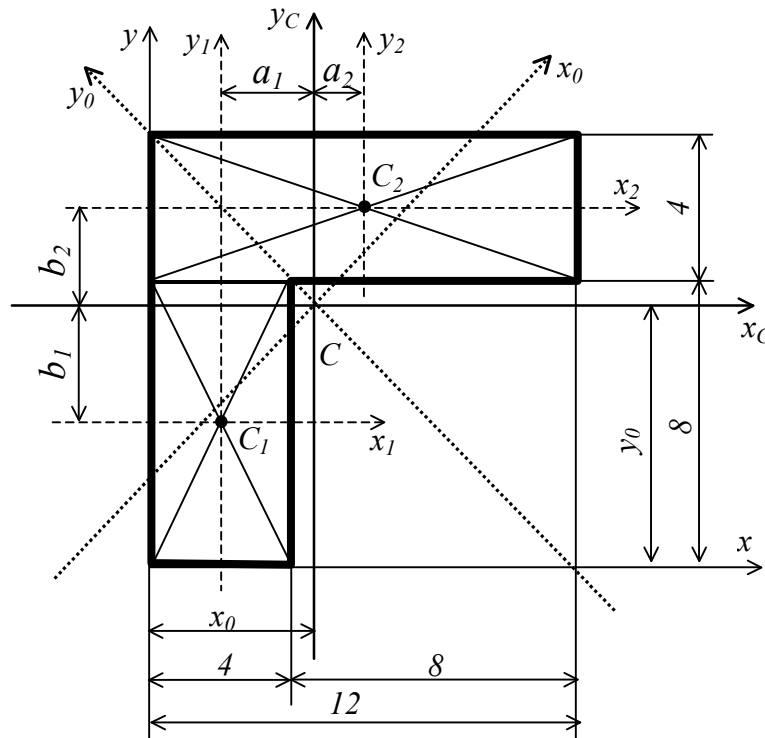


Рис. 4.4. Складна фігура

Розв'язання:

Розіб'ємо складну фігуру на два прямокутники з центрами мас  $C_1$  і  $C_2$ .

Визначимо площу фігури:

$$A_1 := 4 \cdot 8 \quad A_1 = 32 \text{ см}^2$$

$$A_2 := 4 \cdot 12 \quad A_2 = 48 \text{ см}^2$$

$$A := A_1 + A_2 \quad A = 80 \text{ см}^2$$

Визначимо статичні моменти площі відносно початкових осей  $x$  і  $y$ :

$$S_x := A_2 \cdot 10 + A_1 \cdot 4 \quad S_x = 608 \text{ см}^3$$

$$S_y := A_2 \cdot 6 + A_1 \cdot 2 \quad S_y = 352 \text{ см}^3$$

Визначимо координати центра мас перерізу:

$$y_0 := \frac{S_x}{A} \quad y_0 = 7.6 \text{ см} \quad x_0 := \frac{S_y}{A} \quad x_0 = 4.4 \text{ см}$$

Через точку з координатами  $(x_0, y_0)$  проведемо осі координат  $x_c, y_c$  паралельні початковим  $x$  і  $y$ . Ці осі є центральними осями фігури.

Координати центрів мас окремих площ відносно центральних осей фігури:

$$a_1 := -2.4 \text{ см} \quad a_2 := 1.6 \text{ см}$$

$$b_1 := -3.6 \text{ см} \quad b_2 := 2.4 \text{ см}$$

Визначимо моменти інерції кожного прямокутника відносно своїх центральних осей, паралельних початковим (для прямокутників ці осі є головними):

$$I_{x1} := \frac{4 \cdot 8^3}{12} \quad I_{x1} = 170.667 \text{ см}^4 \quad I_{y1} := \frac{8 \cdot 4^3}{12} \quad I_{y1} = 42.667 \text{ см}^4$$

$$I_{x2} := \frac{12 \cdot 4^3}{12} \quad I_{x2} = 64 \text{ см}^4 \quad I_{y2} := \frac{4 \cdot 12^3}{12} \quad I_{y2} = 576 \text{ см}^4$$

Визначимо моменти інерції кожного прямокутника відносно центральних осей, паралельних головним осям<sup>\*)</sup> і сумарні моменти інерції усієї фігури:

$$I_{xc1} := I_{x1} + A1 \cdot b1^2 \quad I_{xc1} = 585.387 \text{ см}^4$$

$$I_{xc2} := I_{x2} + A2 \cdot b2^2 \quad I_{xc2} = 340.48 \text{ см}^4$$

$$I_{xc} := I_{xc1} + I_{xc2} \quad I_{xc} = 925.867 \text{ см}^4$$

$$I_{yc1} := I_{y1} + A1 \cdot a1^2 \quad I_{yc1} = 226.987 \text{ см}^4$$

$$I_{yc2} := I_{y2} + A2 \cdot a2^2 \quad I_{yc2} = 698.88 \text{ см}^4$$

$$I_{yc} := I_{yc1} + I_{yc2} \quad I_{yc} = 925.867 \text{ см}^4$$

Визначимо відцентровий момент інерції усієї фігури<sup>\*\*)</sup>:

$$I_{xy} := a1 \cdot b1 \cdot A1 + a2 \cdot b2 \cdot A2 \quad I_{xy} = 460.8 \text{ см}^4$$

Головні моменти інерції складної фігури визначимо за формулою (4.14):

$$I_{x0} := \frac{I_y + I_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad I_{x0} = 1.387 \times 10^3 \text{ см}^4$$

$$I_{y0} := \frac{I_y + I_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad I_{y0} = 465.067 \text{ см}^4$$

Для визначення кута, під яким розташовані головні центральні осі площі, скористаємося формулою

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = -\frac{2I_{xy}}{I_{xc} - I_{yc}}$$

Оскільки  $I_{xc} = I_{yc}$  і  $I_{xy} \neq 0$ , то  $\operatorname{tg}(2\alpha) = \infty$ ,  $2\alpha = 90^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

<sup>\*)</sup> Скористаємося формулою для визначення моментів інерції площ відносно паралельних осей, аналогічною відомій з курсу теоретичної механіки формулі Штайнера для моментів інерції мас.

<sup>\*\*)</sup> Оскільки відцентрові моменти інерції прямокутників відносно своїх центральних осей дорівнюють 0, у формулі (4.13) залишається тільки другий доданок.

В цьому випадку головні осі  $x_0$ ,  $y_0$  нахилені до центральних осей  $x_C$ ,  $y_C$  під кутами  $45^\circ$  (рис. 4.4).

Проведемо розрахунок геометричних характеристик складної фігури (рис. 4.4) за допомогою пакета MathCAD. У формулах, за якими визначаються геометричні характеристики, використовуються координати точок контуру фігури (4.4)-(4.15).

Вхідні дані:

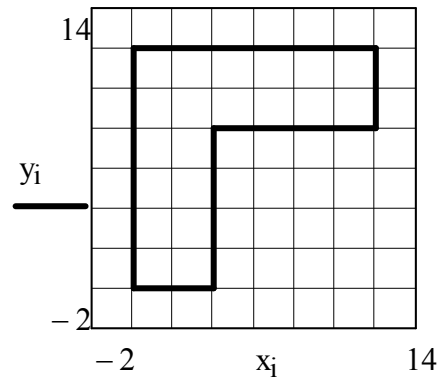
$i := 1..9$

$x_i :=$

$y_i :=$

0
0
12
12
4
4
0

0
12
12
8
8
0
0



Розв'язання:

Площа поперечного перерізу:

$$A := \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sum_i (y_{i-1} \cdot x_i - y_i \cdot x_{i-1}) \quad A = 80 \text{ см}^2$$

Статичні моменти площі відносно осей  $x$  і  $y$ :

$$S_y := \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \sum_i (x_{i-1} + x_i) \cdot (y_{i-1} \cdot x_i - y_i \cdot x_{i-1}) \quad S_y = 352 \text{ см}^3$$

$$S_x := \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \sum_i (y_{i-1} + y_i) \cdot (y_{i-1} \cdot x_i - y_i \cdot x_{i-1}) \quad S_x = 608 \text{ см}^3$$

Координати центра мас площі перерізу:

$$y_0 := \frac{S_x}{A} \quad y_0 = 7.6 \text{ см} \quad x_0 := \frac{S_y}{A} \quad x_0 = 4.4 \text{ см}$$

Осьові моменти інерції відносно центральних осей, паралельних початковим:

$$I_y := \sum_i \left( \frac{1}{12} \right) \cdot \left[ (x_i)^2 + x_i \cdot x_{i-1} + (x_{i-1})^2 \right] \cdot (y_{i-1} \cdot x_i - y_i \cdot x_{i-1}) - x_0^2 \cdot A$$

$$I_x := \sum_i \left( \frac{1}{12} \right) \cdot \left[ (y_i)^2 + y_i \cdot y_{i-1} + (y_{i-1})^2 \right] \cdot (y_{i-1} \cdot x_i - y_i \cdot x_{i-1}) - y_0^2 \cdot A$$

$$I_y = 925.867 \text{ см}^4 \quad I_x = 925.867 \text{ см}^4$$

Відцентровий момент інерції відносно центральних осей, паралельних початковим:

$$I_{xy} := \sum_i \left( \frac{1}{24} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} y_{i-1} \cdot x_i + y_i \cdot x_{i-1} \dots \\ + 2 \cdot y_{i-1} \cdot x_{i-1} + 2 \cdot y_i \cdot x_i \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} -y_i \cdot x_{i-1} \dots \\ + y_{i-1} \cdot x_i \end{array} \right) - x_0 \cdot y_0 \cdot A$$

$$I_{xy} = 460.8 \text{ см}^4$$

Осьові моменти інерції відносно головних центральних осей (головні моменти інерції):

$$I_{x0} := \frac{I_y + I_x}{2} + \sqrt{\left( \frac{I_y - I_x}{2} \right)^2 + I_{xy}^2} \quad I_{x0} = 1.387 \times 10^3 \text{ см}^4$$

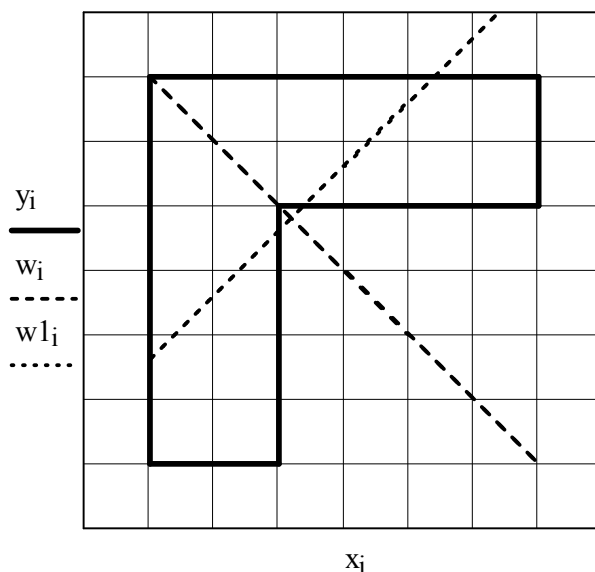
$$I_{y0} := \frac{I_y + I_x}{2} - \sqrt{\left( \frac{I_y - I_x}{2} \right)^2 + I_{xy}^2} \quad I_{y0} = 465.067 \text{ см}^4$$

Кут повороту головних осей відносно початкових:

$$\text{alfa} := \text{atan} \left( \frac{I_{xy}}{I_x - I_{x0}} \right) \quad \text{alfa} = -0.785$$

Побудова головних осей:

$$w_i := y_0 + (x_i - x_0) \cdot \tan(\text{alfa}) \quad w_{1i} := y_0 + (x_i - x_0) \cdot \tan \left( \text{alfa} + \frac{\pi}{2} \right)$$



**ПРИКЛАД 4.2.** Визначити положення головних центральних осей і обчислити величину головних моментів інерції перерізу, складеного з прокатних профілів: швелера №18а і рівнобічного кутника №9/8 (рис. 4.5).

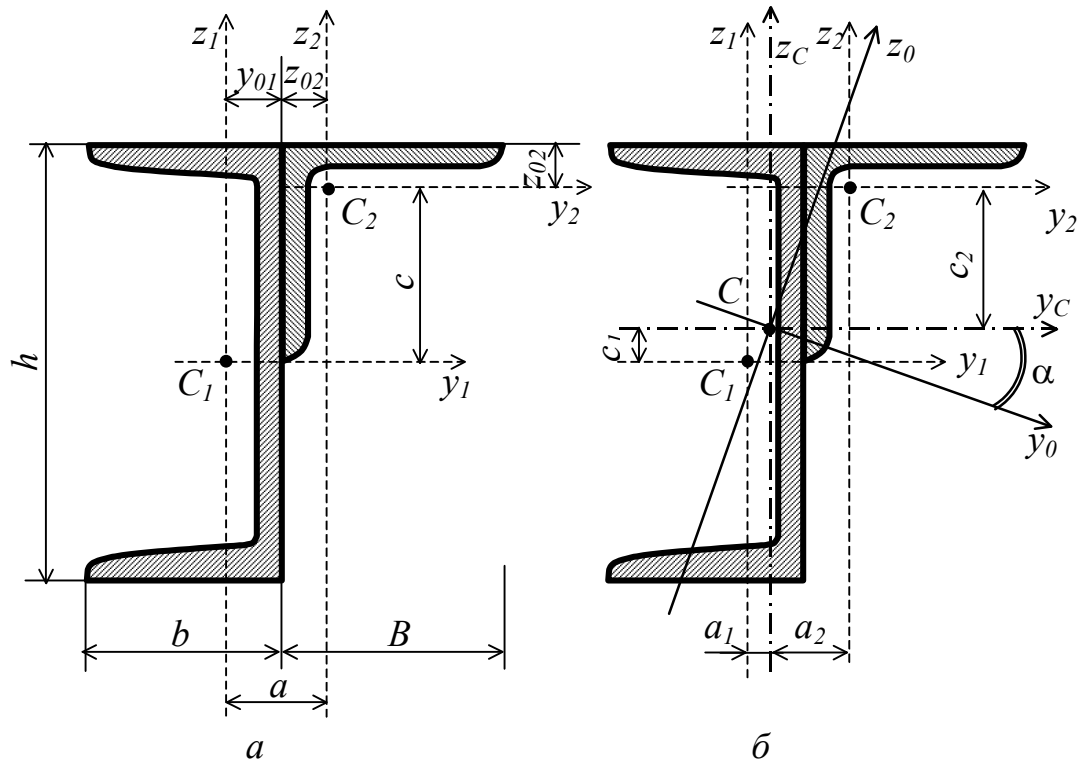


Рис. 4.5. Складний переріз із прокатних профілів (а); положення головних осей (б)

Із сортаменту випишемо необхідні дані:

Для швелера №18а:

$$h := 18 \text{ см} \quad b := 7.4 \text{ см} \quad A_1 := 22.2 \text{ см}^2$$

$$J_{y1} := 1190 \text{ см}^4 \quad J_{z1} := 105 \text{ см}^4 \quad y_{01} := 2.13 \text{ см}$$

для кутника №9/8:

$$B := 9 \text{ см} \quad A_2 := 13.92 \text{ см}^2 \quad J_{y2} := 106.11 \text{ см}^4 \quad J_{z2} := J_{y2}$$

$$J_{\max} := 168.42 \text{ см}^4 \quad J_{\min} := 43.8 \text{ см}^4 \quad z_{02} := 2.51 \text{ см}$$

Загальна площа перерізу:

$$A := A_1 + A_2 \quad A = 36.12 \text{ см}^2$$

Виберемо головні осі швелера  $y1, z1$  як початкові.

Відстані від цих осей до центра ваги кутника складають

$$a := y_{01} + z_{02} \quad a = 4.64 \text{ см}$$

$$c := \frac{h}{2} - z_{02} \quad c = 6.49 \text{ см}$$

Статичні моменти площі перерізу відносно осей  $y1, z1$ :



$$S_{y1} := A_2 \cdot c \quad S_{y1} = 90.341 \text{ см}^3$$

$$S_{z1} := A_2 \cdot a \quad S_{z1} = 64.589 \text{ см}^3$$

Визначимо відстані від початкових осей до центра ваги перерізу:

$$a_1 := \frac{S_{z1}}{A} \quad a_1 = 1.788 \text{ см} \quad c_1 := \frac{S_{y1}}{A} \quad c_1 = 2.501 \text{ см}$$

$$c_2 := c - c_1 \quad c_2 = 3.989 \text{ см} \quad a_2 := a - a_1 \quad a_2 = 2.852 \text{ см}$$

Скориставшись формулами переходу до паралельних осей, визначимо моменти інерції перерізу відносно центральних осей  $yc, zc$ :

$$J_{yc} := (J_{y1} + A_1 \cdot c_1^2) + (J_{y2} + A_2 \cdot c_2^2) \quad J_{yc} = 1.656 \times 10^3 \text{ см}^4$$

$$J_{zc} := (J_{z1} + A_1 \cdot a_1^2) + (J_{z2} + A_2 \cdot a_2^2) \quad J_{zc} = 395.306 \text{ см}^4$$

Відцентровий момент інерції швелера відносно власних головних осей  $y1, z1$  дорівнює 0, а для кутника відцентровий момент інерції відносно осей  $y2, z2$  визначається за формулою  $J_{y2z2} = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} \sin(2\beta)$ , де

$\beta = 45^\circ$ . Таким чином, відцентровий момент інерції площі всього перерізу:

$$J_{yczc} := (A_1 \cdot c_1 \cdot a_1) + \left( \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} + A_2 \cdot c_2 \cdot a_2 \right) \quad J_{yczc} = 319.946 \text{ см}^4$$

Кут нахилу головних осей інерції до центральних осей  $yc, zc$ :

$$\text{tg}2\alpha := \frac{2 \cdot J_{yczc}}{J_{zc} - J_{yc}} \quad \text{tg}2\alpha = -0.507$$

$$\alpha := \text{atan}(\text{tg}2\alpha) \quad \alpha = -0.47 \quad \alpha := \frac{\alpha}{2} \quad \alpha = -0.235 \text{ рад}$$

У градусах кут  $\alpha$  складає

$$\alpha := \frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \quad \alpha = -13.451$$

Проведемо головні осі перерізу  $y0, z0$  (рис.4.5, б).

Головні моменти інерції перерізу:

$$J_{y0} := J_{yc} \cdot \cos(\alpha)^2 + J_{zc} \cdot \sin(\alpha)^2 - J_{yczc} \cdot \sin(2\alpha) \quad J_{y0} = 1.733 \times 10^3 \text{ см}^4$$

$$J_{z0} := J_{yc} \cdot \sin(\alpha)^2 + J_{zc} \cdot \cos(\alpha)^2 + J_{yczc} \cdot \sin(2\alpha) \quad J_{z0} = 318.782 \text{ см}^4$$

Головні моменти можна визначити за іншими формулами:

$$J_{y0} := \frac{J_{yc} + J_{zc}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{yc} - J_{zc}}{2}\right)^2 + J_{yczc}^2} \quad J_{y0} = 1.733 \times 10^3 \text{ см}^4$$

$$J_{z0} := \frac{J_{yc} + J_{zc}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{yc} - J_{zc}}{2}\right)^2 + J_{yczc}^2} \quad J_{z0} = 318.782 \text{ см}^4$$

Проведемо перевірку правильності визначення геометричних характеристик перерізу:

1) сума моментів інерції відносно центральних осей є сталою величиною:

$$J_{yc} + J_{zc} = 2.052 \times 10^3$$

$$J_{z0} + J_{y0} = 2.052 \times 10^3$$

2) відцентровий момент інерції перерізу відносно головних осей повинен дорівнювати 0:

$$J_{y0z0} := \frac{J_{yc} - J_{zc}}{2} \cdot \sin(2\alpha) + J_{yczc} \cdot \cos(2\alpha) \quad J_{y0z0} = 0$$

Перевірка показала, що геометричні характеристики визначені правильно.

## 4.2. Методика розрахунків стержнів на міцність

Розрахунок на міцність – це процес забезпечення міцності при проектуванні конструкції.

В основу розрахунків на міцність у машинобудуванні покладено положення: руйнування починається у тій точці об'єму конструкції, де напруження досягають критичних або руйнівних значень, характерних для даного матеріалу.

Критичними або руйнівними напруженнями вважаються

$$\sigma_{кр} = \begin{cases} \sigma_u & \text{для крихких матеріалів,} \\ \sigma_T & \text{для пластичних матеріалів,} \end{cases}$$

де  $\sigma_u$  – границя міцності,  $\sigma_T$  – границя текучості матеріалу.

Таким чином, умова руйнування має вигляд

$$\sigma_{\max} = \sigma_{кр}.$$

Розрахунок на міцність у більшості випадків можна провести, порівнюючи максимальне напруження, яке виникає в конструкції при заданому навантаженні, з допустимим напруженням для даного матеріалу.

Таким чином, умова міцності має вигляд

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}, \quad (4.17)$$

де  $\sigma_{\max}$  – максимальне напруження, яке виникає в найбільш небезпечній точці даної конструкції при заданому навантаженні, так зване розрахункове напруження;

$\sigma_{adm}$  – максимальне напруження, яке можна допустити у даному матеріалі.

Допустиме напруження визначається з урахуванням необхідного гарантованого запасу, а також неточності інформації про діюче навантаження і властивості матеріалу та неточності методів розрахунку.

Коефіцієнт, який враховує останні три фактори, не перевищує 1.5 для пластичних матеріалів і 2.5-3 для крихких матеріалів. Таким чином, допустиме напруження

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_T}{1.5} \text{ для пластичних матеріалів;}$$

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{3} \text{ для крихких матеріалів.}$$

Зауважимо, що коефіцієнт запасу може бути зменшений чи збільшений, якщо на це є поважні причини. Складнішим є питання вибору розрахункового напруження. При одновісному напруженому стані за розрахункове напруження приймається, звичайно, найбільше нормальне напруження в конструкції або на тій ділянці, де проводиться розрахунок на міцність. Якщо напружений стан складний – дво- чи тривісний, – розрахункове напруження обчислюється за допомогою гіпотез міцності [1], які пропонують критерії міцності матеріалу, еквівалентні найбільшому нормальному напруженню при одновісному напруженому стані. Ця задача не є коректною з точки зору математики, оскільки гіпотези міцності намагаються прирівняти три числа (головні напруження при об'ємному напруженому стані) – одному (головному напруженню, відповідальному за міцність при одновісному напруженому стані). Саме з цієї причини не вдається знайти універсальний критерій для всіх матеріалів і напружених станів.

Гіпотези, які встановлюють критерії переходу від пружного до пластичного стану, називаються гіпотезами пластичності. Найпоширенішими серед них є дві: гіпотеза найбільших дотичних напружень (третя гіпотеза міцності) і гіпотеза потенціальної енергії зміни форми (четверта гіпотеза міцності). Еквівалентні напруження відповідно мають вигляд:

$$\sigma_{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm}; \quad (4.18)$$

$$\sigma_{IV} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)} \leq \sigma_{adm}. \quad (4.19)$$

Якщо матеріал має різні границі міцності на розтяг і стиск, користуються гіпотезою Мора (п'ята гіпотеза міцності)

$$\sigma_V = \sigma_1 - \frac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}} \sigma_3 \leq \sigma_{adm}. \quad (4.20)$$

Критерії, що встановлюють момент крихкого руйнування, пов'язуються з теорією розвитку і поширення тріщин і не сформульовані у закінченому вигляді. Саме тому на практиці для розрахунку на міцність крихких матеріалів користуються гіпотезою Мора.

Недоліки розглянутих теорій, а також поява нових матеріалів стимулювали розробку нових теорій міцності. Однією з таких теорій є теорія Писаренка-Лебедева, в якій автори запропонували визначати критерії міцності у вигляді функцій дотичних напружень і максимального нормального напруження, інваріантних до напружених станів

$$\sigma_{VI} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}} \tau_{okt} + \left( 1 - \frac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}} \right) \sigma_1 \leq \sigma_{adm}. \quad (4.21)$$

Для матеріалів, що перебувають у пластичному стані,  $\sigma_{ut} = \sigma_{uc}$ , і еквівалентне напруження за теорією Писаренка-Лебедева дорівнює еквівалентному напруженню за IV теорією міцності.

Для ідеально-крихких матеріалів  $\frac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}} = 0$ , і вираз (4.21) перетворюється на умову руйнування за першою теорією міцності (4.17).

### 4.3. Розрахунок стержнів і стержневих систем на міцність у загальному випадку дії сил

У загальному випадку навантаження внутрішні сили у поперечних перерізах приводяться до шести рівнодійних: трьох складових головного вектора (поздовжня сила  $N_x$  і поперечні сили  $N_y$  і  $N_z$ ) і трьох складових головного момента (момент кручення  $M_x$  і згинаючі моменти  $M_y$  і  $M_z$ ). Напруження у поперечних перерізах зручно обчислювати як суму напружень, пов'язаних із відповідною рівнодійною. Рівнодійні внутрішніх сил визначаються при побудові епюр.

Залежності між напруженнями та їх рівнодійними у прямокутному перерізі мають такий вигляд:

**Нормальні напруження:**

– при розтягу-стиску (рис. 4.6, а):

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A}, \quad (4.22)$$

де  $N_x$  – поздовжня сила,  $A$  – площа поперечного перерізу;

– при згині у площині  $XOZ$  (рис. 4.6, б): :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z, \quad (4.23)$$

де  $M_y$  – згинаючий момент відносно осі  $Y$ ,  $I_y$  – осьовий момент інерції,  $z$  – відстань точки перерізу від осі  $Y$ ;

– при згині у площині  $XOY^*$  (рис. 4.6, в): :

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y, \quad (4.24)$$

де  $M_z$  – згинаючий момент відносно осі  $Z$ ,  $I_z$  – осьовий момент інерції,  $y$  – відстань точки перерізу від осі  $Z$ .

**Дотичні напруження** при зсуві визначають за формулою Журавського:

– у площині  $XOZ$  (рис. 4.6, г): :

$$\tau_{xz} = \frac{N_z S_y}{I_y b}, \quad (4.25)$$

де  $N_z$  – поперечна сила,  $S_y$  – статичний момент частини площі перерізу, яка міститься між лінією, де визначається напруження, та краєм перерізу, відносно осі  $Y$ ,  $b$  – ширина перерізу;

– у площині  $XOY$  (рис. 4.6, д): :

$$\tau_{xy} = \frac{N_y S_z}{I_z h}, \quad (4.26)$$

де  $N_y$  – поперечна сила,  $S_z$  – статичний момент частини площі перерізу відносно осі  $Z$ ,  $h$  – висота перерізу.

Для прямокутного перерізу дотичні напруження набувають максимальних значень на осі, перпендикулярній лінії дії сили (рис. 4.6, г, д) і мають значення:

$$\tau_{xz \max} = \frac{3}{2} \frac{N_z}{A}, \quad \tau_{xy \max} = \frac{3}{2} \frac{N_y}{A}.$$

При крученні дотичні напруження визначають за наближеними формулами в точках посередині сторін (рис. 4.6, е): :

$$\tau_{xz \max} = \frac{M_x}{\alpha h b^2}, \quad \tau_{xy \max} = \gamma \tau_{xz \max}, \quad (4.27)$$

де  $M_x$  – момент кручення,  $\alpha, \gamma$  – коефіцієнти, які залежать від співвідношення сторін  $h/b$ .

Розподілення напружень у прямокутному перерізі показано на рис. 4.6.

Напруження від розтягу-стиску розподіляється по площі поперечного перерізу рівномірно, а напруження від згинаючих моментів залежать від відстані до відповідної осі, отже максимальних значень набувають у точках, найбільш віддалених від головних осей перерізу.

Максимальні напруження від згинаючих моментів у перерізі прямокутної форми визначаються за формулами:

\*) Площини  $XOY, XOZ$  повинні бути головними.

$$\sigma_{\max}^{(My)} = \frac{M_y}{I_y} z_{\max}, \quad \sigma_{\max}^{(Mz)} = \frac{M_z}{I_z} y_{\max}, \quad (4.28)$$

де  $z_{\max} = \frac{h}{2}$ ,  $y_{\max} = \frac{b}{2}$  – максимальні відстані від головних осей;

$I_y = \frac{bh^3}{12}$ ,  $I_z = \frac{hb^3}{12}$  – осьові моменти інерції прямокутного перерізу відносно головних осей.

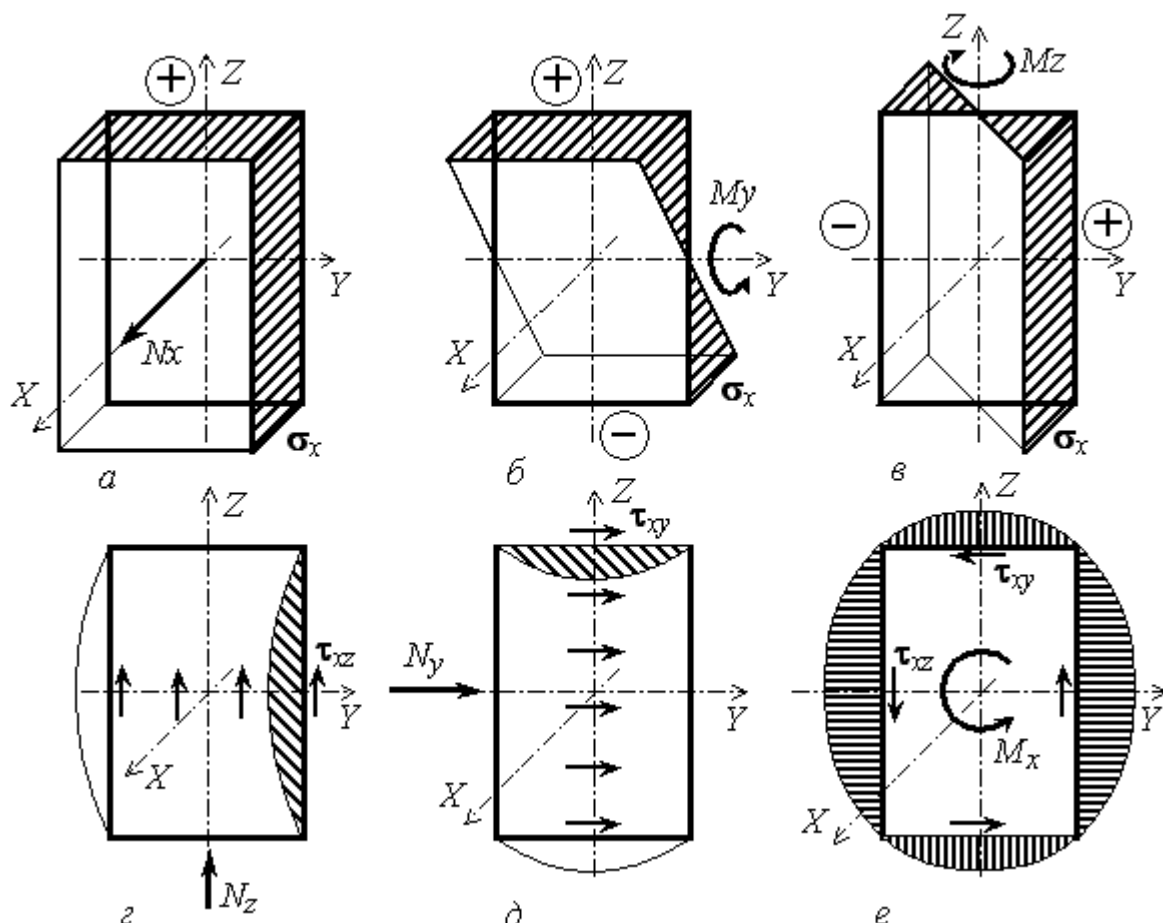


Рис. 4.6. Епюри розподілення напружень у площині перерізу: нормальне напруження від поздовжньої сили  $N_x$  (а); нормальні напруження від згинаючих моментів  $M_y$  і  $M_z$  (б) і (в); дотичні напруження від поперечних сил  $N_z$  і  $N_y$  (г) і (д); дотичне напруження від момента кручення (е)

У загальному випадку максимальні напруження від згинаючих моментів визначаються за формулами

$$\sigma_{\max}^{(My)} = \frac{M_y}{W_y}, \quad \sigma_{\max}^{(Mz)} = \frac{M_z}{W_z}, \quad (4.29)$$

де  $W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}$ ,  $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$  – осьові моменти опору.

Для прямокутного перерізу

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{bh^2}{6}, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{hb^2}{6}.$$

Найбільш небезпечними точками перерізу є точки, найбільш віддалені від головних осей перерізу, а саме кутові точки, де виникають максимальні нормальні напруження. В одній з кутових точок нормальні напруження від усіх силових факторів мають однаковий знак. Для цієї точки і записується умова міцності при одновісному напруженому стані (оскільки дотичні напруження в кутових точках дорівнюють нулю)

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \left| \frac{Nx}{A} + \frac{My}{W_y} + \frac{Mz}{W_z} \right| \leq \sigma_{adm}. \quad (4.30)$$

Умову міцності (4.30) використовують для визначення розмірів поперечного перерізу.

Для врахування впливу дотичних напружень у перерізі проводять перевірку умови міцності у точках перерізу, де дотичні напруження є максимальними, тобто в точках посередині сторін. Умова міцності для цих точок за III теорією міцності

$$\sqrt{\sigma_i^2 + 4\tau_i^2} \leq \sigma_{adm}.$$

Якщо умова міцності з урахуванням дотичних напружень не виконується, то розміри поперечного перерізу визначають із цієї умови.

Для перерізу кругової форми нормальні напруження визначаються за такими ж формулами, як і для прямокутного:

$$\sigma_{\max}^{(My)} = \frac{M_y}{W_0}, \quad \sigma_{\max}^{(Mz)} = \frac{M_z}{W_0}, \quad \sigma^{(Nx)} = \frac{N_x}{A}, \quad (4.31)$$

де  $W_0 = W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32}$  – осьовий момент опору,  $A$  – площа.

Таким чином, найбільш небезпечними точками перерізу є точки, що лежать у площині дії сумарного згинаючого момента на контурі перерізу (рис. 4.7, б). Напруження від сумарного згинаючого момента

$$\sigma_{\max} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W_0}. \quad (4.32)$$

Дотичні напруження від кручення в перерізі кругової форми направлені перпендикулярно радіусу (рис. 4.7, в) і дорівнюють

$$\tau = \frac{M_x}{I_\rho} \rho, \quad (4.33)$$

де  $I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$  – полярний момент інерції,  $\rho$  – полярна координата точки, де визначається напруження.

Максимальне дотичне напруження виникає при  $\rho_{\max} = \frac{d}{2}$ , тобто на контурі перерізу, в точках, найбільш віддалених від центра, і визначається за формулою

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_\rho}, \quad (4.34)$$

де  $W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$  – полярний момент опору.

Максимальні напруження від зсуву [1] (рис. 4.7, з, д)

$$\tau_{xz \max} = \frac{4 N_z}{3 A}, \quad \tau_{xy \max} = \frac{4 N_y}{3 A}. \quad (4.35)$$

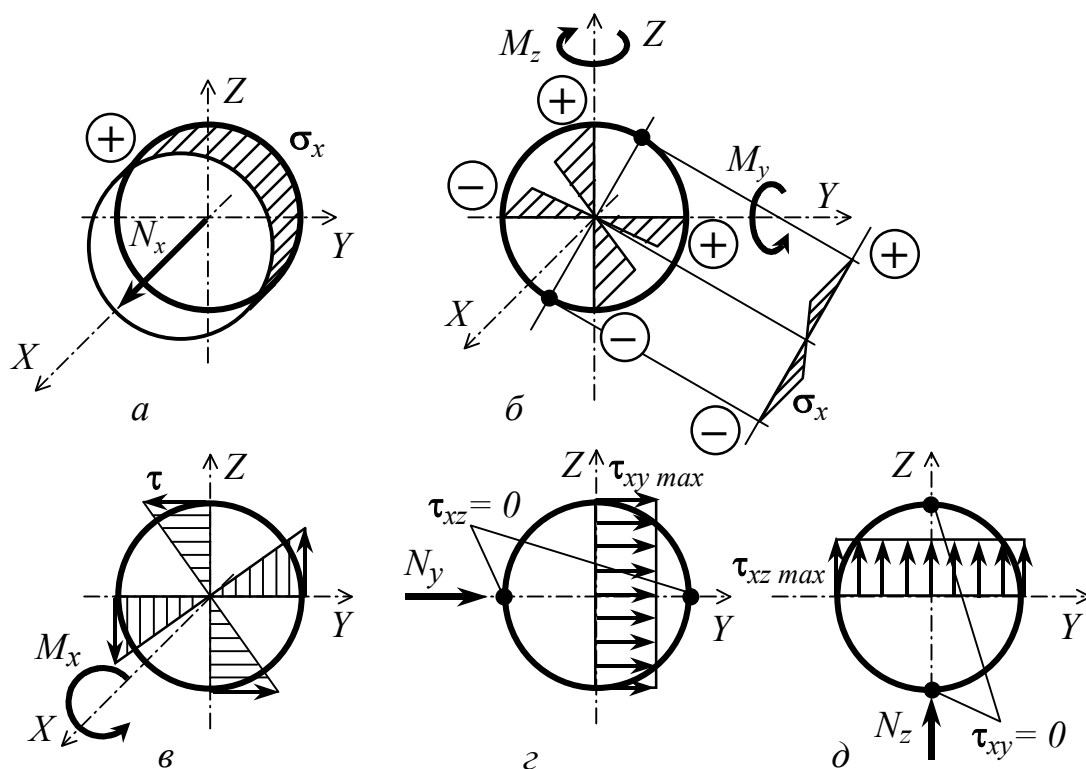


Рис. 4.7. Епюри розподілення напружень у перерізі: нормальне напруження від поздовжньої сили  $N_x$  (а); нормальне напруження від згинаючих моментів  $M_y$  і  $M_z$  (б); дотичне напруження від момента кручення (в); дотичні напруження від поперечних сил  $N_z$  і  $N_y$  (з) і (д)

Для перерізів більш складної форми формули для визначення нормальних напружень залишаються незмінними (4.21)-(4.23), дотичні ж напруження необхідно визначати окремо для кожної форми. Формула Журавського (4.24)-(4.25) може використовуватись для визначення максимальних дотичних напружень у перерізах, які відрізняються за формою від прямо-



кутного, але бокові сторони яких перпендикулярні до нейтральної лінії у точках перетину сторони з нейтральною лінією.

Для визначення дотичних напружень при крученні стержнів складного профілю необхідно скористатися існуючими розв'язками задач теорії пружності.

Розрахунок на міцність кругового перерізу проводиться для найбільш небезпечної точки з урахуванням нормальних напружень і дотичних напружень від момента кручення. Другим етапом є перевірка міцності за дотичними напруженнями у точках, де вони максимальні, за умовою

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{2}.$$

#### 4.4. Розрахунок стержнів на жорсткість за допомогою методу початкових параметрів

Переміщення у довільних стержневих системах доцільно визначати енергетичними методами, зокрема, за формулами Кастільяно-Мора (див. далі розд. 5).

При визначенні переміщень у стержнях сталого профілю найбільш ефективним виявляється метод початкових параметрів, який дозволяє одержати функціональну залежність переміщення від координати, пов'язаної з віссю стержня. Метод початкових параметрів оснований на застосуванні диференційних рівнянь і дозволяє скористатися можливостями математичного пакета MathCAD для визначення переміщень у стержнях.

Розглянемо визначення переміщень у стержнях за допомогою методу початкових параметрів при розтягу-стиску, крученні, плоскому згині.

Диференційне рівняння розтягу-стиску має вигляд:

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{EA}, \quad (4.36)$$

де  $u$  – переміщення при розтягу-стиску,  $N_x$  – поздовжня сила,  $E$  – модуль Юнга,  $A$  – площа поперечного перерізу.

Розв'язок диференційного рівняння

$$u = \int_0^l \frac{N_x}{EA} dx + u_0, \quad (4.37)$$

де  $u_0$  – початковий параметр, а саме переміщення на початку ділянки.

При сталому навантаженні подовження ділянки при розтягу-стиску дорівнює

$$u = \frac{N_x l}{EA}, \quad (4.38)$$

де  $EA$  – жорсткість стержня при розтягу-стиску.

Диференційне рівняння кручення має вигляд:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_\rho}, \quad (4.40)$$

де  $\varphi$  – кут закручування,  $M_x$  – момент кручення,  $G$  – модуль зсуву,  $I_\rho$  – полярний момент інерції.

Розв'язок рівняння:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_x}{GI_\rho} dx + \varphi_0, \quad (4.41)$$

де  $\varphi_0$  – кут закручування при  $x=0$ ,  $GI_\rho$  – жорсткість стержня при крученні.

При сталому навантаженні кут закручування на ділянці довжиною  $l$

$$\varphi = \frac{M_x l}{GI_\rho}. \quad (4.42)$$

При необхідності визначення розмірів поперечного перерізу за умовою жорсткості використовують нерівність

$$\theta_i \leq \theta_{adm},$$

де  $\theta_i = \frac{\varphi}{l}$  – відносний кут закручування на ділянці,  $\theta_{adm}$  – допустимий кут закручування, який приймається не більше  $2 \text{ град/м}$ .

Тоді умова жорсткості набуває вигляду

$$\frac{M_x}{GI_\rho} \leq \theta_{adm}, \quad (4.43)$$

і діаметр стержня за умовою жорсткості

$$d = \sqrt[4]{\frac{M_x \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot \theta_{adm}}}. \quad (4.44)$$

Диференціальне рівняння плоского згину має вигляд

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_y}{EI_y}, \quad (4.45)$$

де  $w$  – прогин стержня в перерізі  $x$ ,  $M_y$  – згинаючий момент,

$I_y$  – осьовий момент інерції,  $EI_y$  – жорсткість стержня при згині.

Розв'язуючи диференціальне рівняння, при першому інтегруванні одержимо функцію кутів повороту перерізів відносно вертикальної осі (рис. 4.8).

$$\theta = \frac{dw}{dx} = \int_0^l \frac{M_y}{EI_y} dx + \theta_0. \quad (4.46)$$

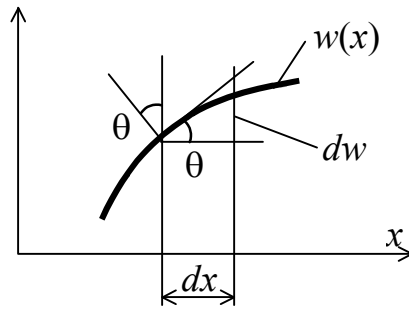


Рис. 4.8. Визначення кута повороту перерізу при плоскому згині

Для визначення прогинів інтегруємо рівняння (4.46) ще раз:

$$w(x) = \int_0^l \int_0^l \frac{M_y(x)}{EI_y} dx dx + \theta_0 x + w_0, \quad (4.47)$$

де  $\theta_0$  – початковий кут повороту,  $w_0$  – початковий прогин (при  $x = 0$ ). Початкові параметри визначаються з граничних умов (умов закріплення стержня) (рис. 4.9).

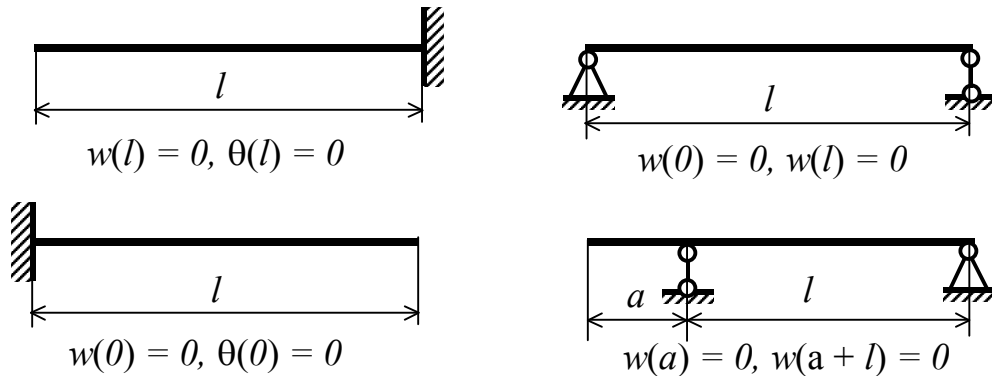


Рис. 4.9. Умови закріплення стержнів

При умові сталого перерізу для всього стержня функції кутів повороту і прогинів можна записати за допомогою узагальнених функцій (див. підрозд. 2.7), що дає можливість провести інтегрування в межах усієї балки.

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EI_y} \left( \sum_{i=1}^n q_{zi} \cdot \frac{(x-a_i)^3}{6} \cdot \Phi(x-a_i) + \sum_{j=1}^m N_{zj} \cdot \frac{(x-b_j)^2}{2} \cdot \Phi(x-b_j) + \sum_{k=1}^p M_{yk} \cdot (x-c_k) \cdot \Phi(x-c_k) \right), \quad (4.48)$$

$$w(x) = w_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{1}{EI_y} \left( \sum_{i=1}^n q_{zi} \cdot \frac{(x-a_i)^4}{24} \cdot \Phi(x-a_i) + \sum_{j=1}^m N_{zj} \cdot \frac{(x-b_j)^3}{6} \cdot \Phi(x-b_j) + \sum_{k=1}^p M_{yk} \cdot \frac{(x-c_k)^2}{2} \cdot \Phi(x-c_k) \right). \quad (4.49)$$

### 4.5. Розрахунок на міцність і жорсткість стержнів при розтягу-стиску

**ПРИКЛАД 4.3.** Для стержня із заданими параметрами підібрати діаметри на кожній ділянці і побудувати епюру переміщень (рис. 4.10).

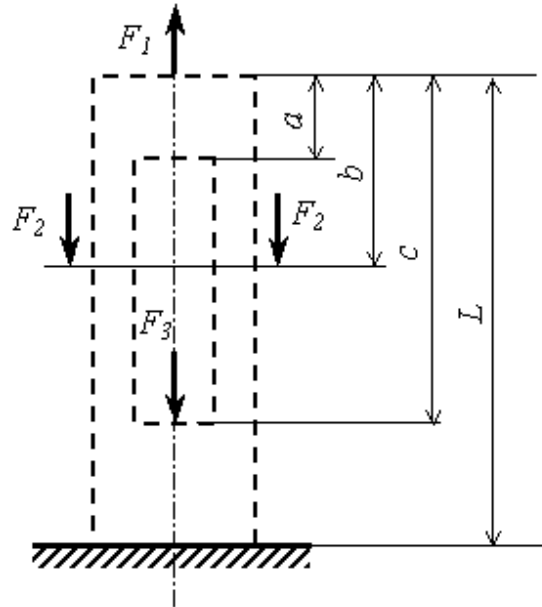


Рис. 4.10. Розрахункова схема стержня

Вхідні дані:

$$\text{Матеріал СЧ.18; } \sigma_u = 18 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}, \quad \sigma_{uc} = 70 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}, \quad E = 1.5 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

$$F_1 = 50 \text{ кН}, \quad F_2 = 50 \text{ кН}, \quad F_3 = 60 \text{ кН},$$

$$a = 0.4 \text{ м}, \quad b = 0.7 \text{ м}, \quad c = 1.5 \text{ м}, \quad L = 2 \text{ м}.$$

Розв'язання:

У заданому стержні виникають тільки поздовжні сили, оскільки задане навантаження діє вздовж осі стержня, отже стержень працює на розтяг-стиск.

Для визначення внутрішніх сил на кожній ділянці складемо рівняння з урахуванням правила знаків для поздовжньої сили (рис. 2.12).

$$N_1(x) = F_1 = 50 \text{ кН};$$

$$N_2(x) = F_1 - 2F_2 = -50 \text{ кН};$$

$$N_3(x) = F_1 - 2F_2 - F_3 = -110 \text{ кН}.$$

Додатне значення поздовжньої сили означає, що у стержні на цій ділянці виникає розтяг, від'ємне – стиск.

Побудуємо епюру внутрішніх сил (рис. 4.11, б).

Визначимо допустимі напруження для заданого матеріалу:

$$\sigma_{adm p} = \frac{\sigma_u}{3} = 6 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}, \quad \sigma_{adm c} = \frac{\sigma_{uc}}{3} = 23.333 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Площі поперечних перерізів на кожній ділянці визначимо з умови міцності при розтягу-стиску

$$\frac{N_x}{A} \leq \sigma_{adm}.$$

$$A_1 = \frac{N_1}{\sigma_{adm p}} = \frac{50}{6} = 8.333 \text{ см}^2,$$

$$A_2 = \left| \frac{N_2}{\sigma_{adm c}} \right| = \left| \frac{-50}{23.333} \right| = 2.143 \text{ см}^2,$$

$$A_3 = \left| \frac{N_3}{\sigma_{adm c}} \right| = \left| \frac{-110}{23.333} \right| = 4.714 \text{ см}^2.$$

При заданому співвідношенні зовнішнього і внутрішнього діаметрів  $\alpha = \frac{d}{D} = 0.6$  визначимо діаметри на кожній ділянці. Значення округлюємо до цілих значень міліметрів, кратних 2 або 5:

Визначимо діаметр на першій ділянці (переріз суцільний)

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} \Rightarrow D_1 = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = 3.257 = 3.4 \text{ см}.$$

На другій ділянці площа перерізу така ж, як і на першій ділянці, але є отвір. Площа кільця:

$$A_1 = \frac{\pi D_2^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi D_2^2}{4} (1 - \alpha^2),$$

$$D_2 = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi(1 - \alpha^2)}} = 4.072 \approx 4.2 \text{ см}, \quad d_2 = \alpha D_2 = 2.52 \approx 2.5 \text{ см},$$

$$A_2 = \frac{\pi D_3^2}{4} - \frac{\pi d_3^2}{4} = \frac{\pi D_3^2}{4} (1 - \alpha^2),$$

$$D_3 = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi(1 - \alpha^2)}} = 2.065 \approx 2.2 \text{ см}, \quad d_3 = \alpha D_3 = 1.32 \approx 1.2 \text{ см},$$

$$A_3 = \frac{\pi D_4^2}{4}, \quad D_4 = \sqrt{\frac{4A_3}{\pi}} = 2.45 \approx 2.5 \text{ см}.$$

Побудуємо ескіз стержня (рис. 4.11, в)

Визначимо площі поперечних перерізів на кожній ділянці, відповідні прийнятим діаметрам:

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = 9.079 \text{ см}^2; \quad A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4} = 8.946 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = \frac{\pi D_3^2}{4} - \frac{\pi d_3^2}{4} = 2.67 \text{ см}^2; \quad A_4 = \frac{\pi D_4^2}{4} = 4.909 \text{ см}^2.$$

Визначимо переміщення на кожній ділянці і побудуємо епюру переміщень.

Переміщення визначаємо, починаючи від закріплення, де початкове переміщення приймемо нульовим.

Довжини ділянок:

$$l_1 = 0.4 \text{ м}, \quad l_2 = 0.3 \text{ м}, \quad l_3 = 0.8 \text{ м}, \quad l_4 = 0.5 \text{ м}.$$

Подовження (або скорочення) ділянки при розтягу-стиску визначається за формулою

$$u_i = \frac{N_i l_i}{EA_i};$$

$$u_0 = 0;$$

$$u_1 = u_0 + \frac{N_3 l_4}{EA_4} = -7.47 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad u_2 = u_1 + \frac{N_2 l_3}{EA_3} = -1.746 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$u_3 = u_2 + \frac{N_1 l_2}{EA_2} = -1.634 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad u_4 = u_3 + \frac{N_1 l_1}{EA_1} = -1.487 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

За одержаними значеннями побудуємо епюру переміщень (рис. 4.11, з).

Результати розрахунку показано на рис. 4.11.

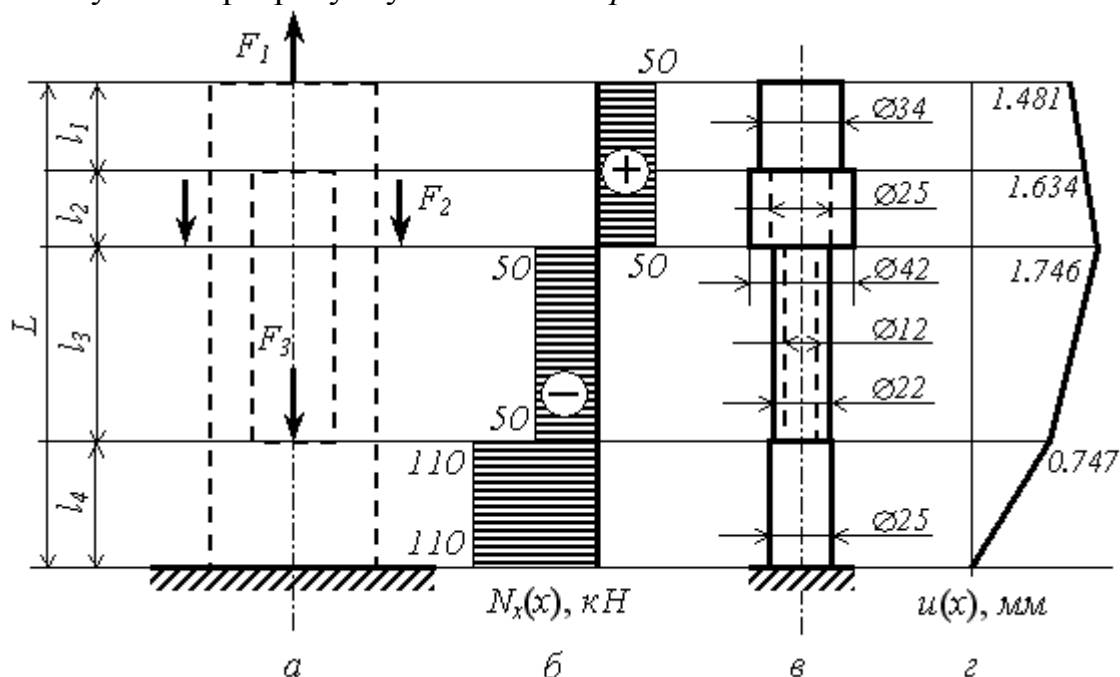


Рис. 4.11. Розрахункова схема стержня (а), епюра поздовжніх сил (б), зовнішній вигляд стержня після розрахунку (в), графік переміщень (з)

Розглянемо розв'язок задачі за допомогою пакета MathCAD.

Вводимо вхідні дані:

$$i := 1..3 \quad \text{Сч. 18-36} \quad \sigma_u := 18 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right) \quad \sigma_{uc} := 70 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

$$F_i :=$$

50
50
60

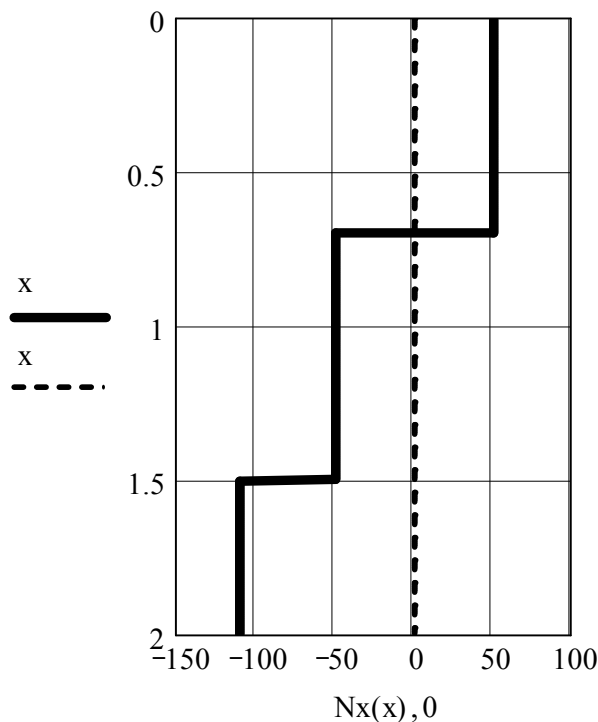
$$a := 0.4 \quad b := 0.7 \quad c := 1.5 \quad L := 2 \quad (\text{м})$$

$$E := 1.5 \cdot 10^4 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

Побудуємо епюру поздовжніх сил.

$$N_x(x) := F_1 \cdot \Phi(x) - 2 \cdot F_2 \cdot \Phi(x - b) - F_3 \cdot \Phi(x - c)$$

$$x := 0, 0.001 .. L$$



$$N_x(0) = 50$$

$$N_x(0.699999) = 50$$

$$N_x(0.7) = -50$$

$$N_x(1.5) = -110$$

Розрахункові значення внутрішніх сил на кожній ділянці та допустимі напруження для заданого матеріалу:

$$j := 1..4 \quad \sigma_{adm1} := \frac{\sigma_u}{3} \quad \sigma_{adm1} = 6 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

$$N_{xj} :=$$

$N_x(0)$
$N_x(a)$
$N_x(b)$
$N_x(c)$

$N_{xj} =$
50
50
-50
-110

$$\sigma_{adm2} := \frac{\sigma_{uc}}{3} \quad \sigma_{adm2} = 23.333 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

$$\sigma_{admj} :=$$

$\sigma_{adm1}$
$\sigma_{adm1}$
$\sigma_{adm2}$
$\sigma_{adm2}$

Площі поперечних перерізів на кожній ділянці визначимо з умови міцності при розтягу-стиску

$$\frac{N_x}{A} \leq \sigma_{adm}.$$

$$A_j := \left| \frac{N_{xj}}{\sigma_{adm_j}} \right| \quad A_j =$$

8.333
8.333
2.143
4.714

$$\text{см}^2$$

При заданому співвідношенні зовнішнього і внутрішнього діаметрів визначимо діаметри на кожній ділянці. Значення округлюємо до цілих значень міліметрів, кратних 2 або 5:

$$\alpha_j :=$$

0
0.6
0.6
0

$$D_j := \sqrt{\frac{4 \cdot A_j}{\pi \cdot [1 - (\alpha_j)^2]}}$$

$$D_j =$$

3.257
4.072
2.065
2.45

$$D_j :=$$

3.4
4.2
2.2
2.5

$$d_j := \alpha_j \cdot D_j$$

$$d_j =$$

0
2.52
1.32
0

$$d_j :=$$

0
2.5
1.2
0

$$\text{(см)}$$

Визначимо напруження на кожній ділянці і побудуємо епюру напружень:

$$A_j := \frac{\pi \cdot (D_j)^2}{4} - \frac{\pi \cdot (d_j)^2}{4} \quad A_j =$$

9.079
8.946
2.67
4.909

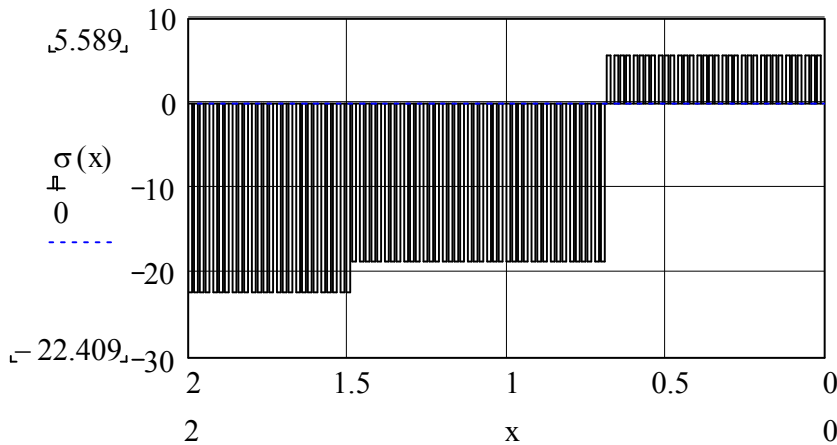


$$\sigma_j := \frac{N_{xj}}{A_j}$$

$$\sigma_j =$$

5.507
5.589
-18.724
-22.409

$$\sigma(x) := \begin{cases} \sigma_1 & \text{if } 0 \leq x \leq a \\ \sigma_2 & \text{if } a \leq x \leq b \\ \sigma_3 & \text{if } b \leq x \leq c \\ \sigma_4 & \text{if } c \leq x \leq L \end{cases}$$



Визначимо переміщення на кожній ділянці і побудуємо епюру переміщень.

Переміщення визначаємо, починаючи від закріплення, тоді початкове переміщення дорівнює 0.

$$l_j :=$$

$$u_j := \frac{N_{xj} \cdot l_j}{E \cdot A_j}$$

0.4
0.3
0.8
0.5

$$u_j =$$

$1.469 \cdot 10^{-4}$
$1.118 \cdot 10^{-4}$
$-9.986 \cdot 10^{-4}$
$-7.47 \cdot 10^{-4}$

$$k := 1..5$$

$$U_k :=$$

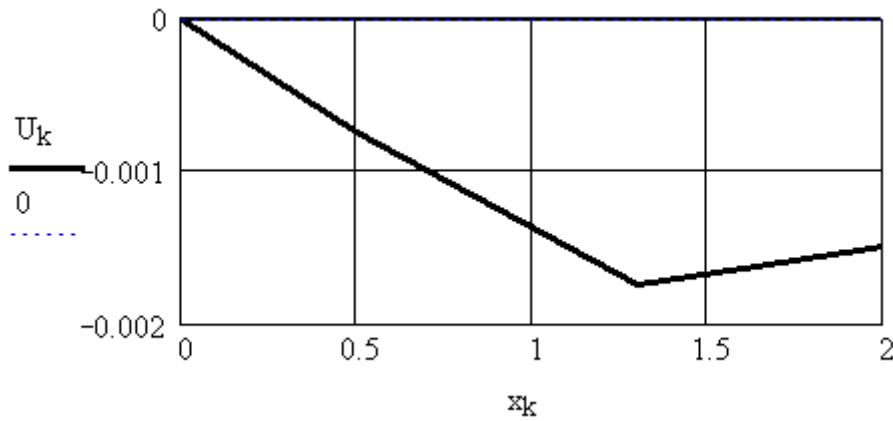
0
$u_4$
$u_4 + u_3$
$u_4 + u_3 + u_2$
$u_4 + u_3 + u_2 + u_1$

$$U_k =$$

0
$-7.47 \cdot 10^{-4}$
$-1.746 \cdot 10^{-3}$
$-1.634 \cdot 10^{-3}$
$-1.487 \cdot 10^{-3}$

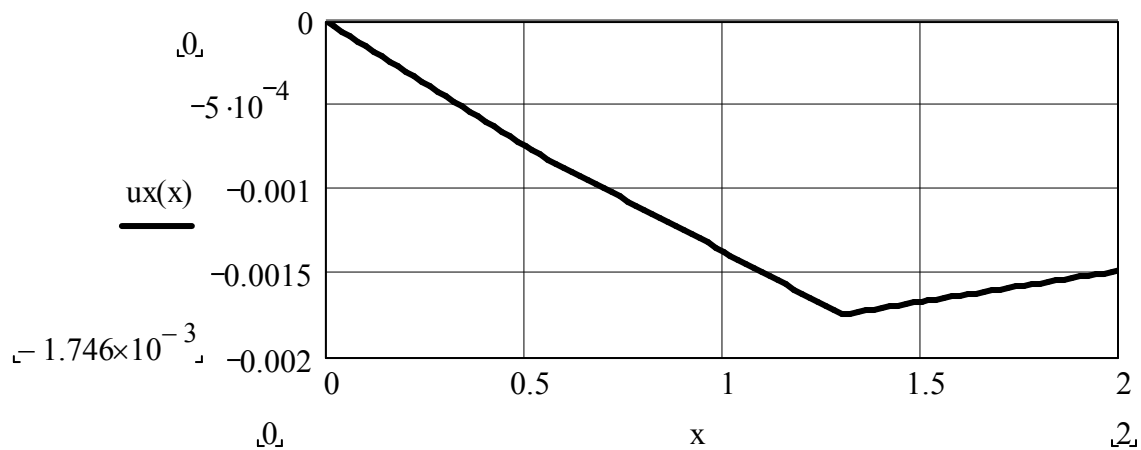
$$x_k :=$$

0
0.5
1.3
1.6
L



Переміщення можна визначити іншим способом, прийнятним для довільних функцій  $u(x)$ :

$$u(x) := \begin{cases} \left( \frac{Nx_4 \cdot x}{E \cdot A_4} \right) & \text{if } 0 \leq x \leq 0.5 \\ \left[ \frac{Nx_4 \cdot l_4}{E \cdot A_4} + \frac{Nx_3 \cdot (x - l_4)}{E \cdot A_3} \right] & \text{if } 0.5 \leq x \leq 1.3 \\ \left[ \frac{Nx_4 \cdot l_4}{E \cdot A_4} + \frac{Nx_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} + \frac{Nx_2 \cdot (x - l_4 - l_3)}{E \cdot A_2} \right] & \text{if } 1.3 \leq x \leq 1.6 \\ \left[ \frac{Nx_4 \cdot l_4}{E \cdot A_4} + \frac{Nx_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} + \frac{Nx_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} + \frac{Nx_1 \cdot (x - l_4 - l_3 - l_2)}{E \cdot A_1} \right] & \text{if } 1.6 \leq x \leq L \end{cases}$$



$$u_4 + u_3 = -1.746 \times 10^{-3}$$

$$u_4 + u_3 + u_2 = -1.634 \times 10^{-3}$$

$$u_4 + u_3 + u_2 + u_1 = -1.487 \times 10^{-3}$$

Результати розрахунку показано на рис. 4.11.

#### 4.6. Розрахунок на міцність і визначення переміщень у статично-визначуваних фермах

Як відомо з курсу теоретичної механіки, основним методом визначення внутрішніх сил у стержнях ферми є метод перерізів, згідно з яким розглядається рівновага частини ферми під дією зовнішніх сил, що діють на цю частину, та реакцій в'язей, які з'єднують її з фундаментом. У більшості випадків достатньо розглянути рівновагу вирізаних у певній послідовності вузлів ферми.

**ПРИКЛАД 4.4.** Визначити внутрішні зусилля у статично-визначуваній фермі за допомогою методу перерізів (рис. 4.12).

Вхідні дані:

$$P1 = 40 \text{ кН}, \quad P2 = 25 \text{ кН}, \quad h = 1.5 \text{ м}, \quad a = 1.0 \text{ м},$$

$$\sigma_{\text{дон}}^+ = 15 \text{ кН/см}^2, \quad \sigma_{\text{дон}}^- = 10 \text{ кН/см}^2, \quad E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2.$$

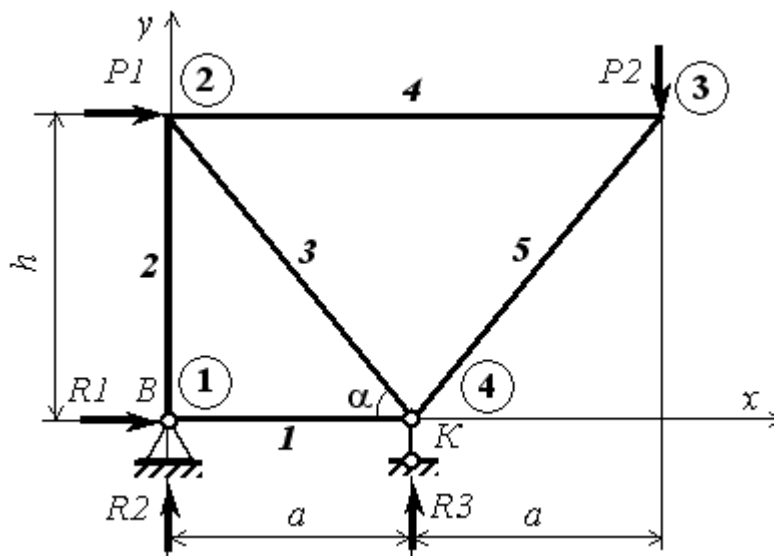


Рис. 4.12. Розрахункова схема ферми

Розв'язання:

Першим етапом визначення внутрішніх зусиль у фермі за допомогою методу перерізів (не завжди обов'язковим) є визначення опорних реакцій. Для плоскої системи сил маємо три рівняння рівноваги: суми проєкцій сил на осі  $x$  і  $y$  глобальної системи координат і суму моментів відносно однієї точки (точки  $B$ , наприклад):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R1 + P1 = 0 \Rightarrow R1 = -P1 = -40 \text{ (кН)},$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R2 + R3 - P2 = 0,$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R3 \cdot a - P1 \cdot h - P2 \cdot 2a = 0 \Rightarrow R3 = 110 \text{ (кН)},$$

$$R2 = -R3 + P2 = -85 \text{ (кН)}.$$

Від'ємні значення опорних реакцій означають, що напрямки реакцій протилежні вибраним спочатку.

Виконаємо перевірку правильності визначення опорних реакцій – складемо суму моментів відносно іншої точки – точки  $K$ :

$$R2 \cdot 2a + R3 \cdot a - R1 \cdot h = 0.$$

Для визначення внутрішніх зусиль у стержнях ферми скористаємося методом вирізання вузлів. Оскільки система знаходиться в рівновазі, то кожний вирізаний вузол також знаходиться в рівновазі під дією прикладених до нього зовнішніх і внутрішніх сил. Таким чином, склавши рівняння рівноваги для кожного вузла, визначимо внутрішні зусилля у кожному стержні.

Оскільки для вузла можна скласти тільки 2 рівняння рівноваги (суми проєкцій сил на вертикальну і горизонтальну осі), то починати розрахунок можна з того вузла, в якому невідомими є не більше 2-х внутрішніх зусиль.

Пронумеруємо вузли і стержні (рис. 4.12).

Визначимо  $\sin \alpha$  і  $\cos \alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \cos \alpha = 0.555, \quad \sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \sin \alpha = 0.832$$

Початок розрахунку може бути у першому або третьому вузлі.

Виріжемо 3-й вузол і складемо суми проєкцій сил на горизонтальну і вертикальну осі (рис. 4.13) (напрямки невідомих внутрішніх зусиль у стержнях вибираємо додатними, направленими від вузла, тобто вважаємо, що стержні працюють на розтяг):

$$-N4 - N5 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$-P2 - N5 \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$N5 = -\frac{P2}{\sin \alpha} = -30.046 \text{ (кН)}, \quad N4 = -N5 \cdot \cos \alpha = 16.667 \text{ (кН)}.$$

Від'ємне значення зусилля означає, що стержень працює на стиск, а не на розтяг, як приймалося спочатку.

Наступним може розглядатись будь-який вузол, тому що в кожному залишилось не більше двох невідомих зусиль.

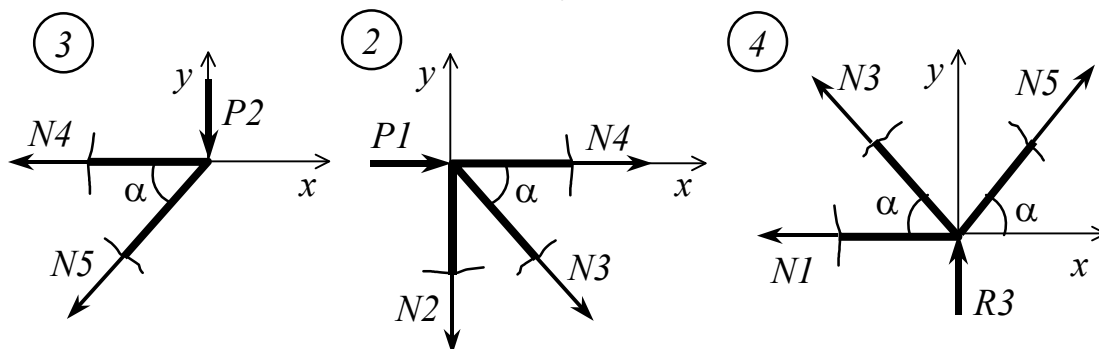


Рис. 4.13. Сили, які діють у вузлах ферми

Зусилля у 2-му вузлі:

$$P1 + N4 + N3 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$- N2 - N3 \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$N3 = \frac{-P1 - N4}{\cos \alpha} = -102.157 \text{ (кН)}, \quad N2 = -N3 \cdot \sin \alpha = 85 \text{ (кН)}.$$

Визначимо зусилля у 1-му стержні з рівняння рівноваги для 4-го вузла:

$$- N1 - N3 \cdot \cos \alpha + N5 \cdot \cos \alpha = 0, \quad N1 = -N3 \cdot \cos \alpha + N5 \cdot \cos \alpha = 40 \text{ (кН)}.$$

Зробимо перевірку правильності визначення зусиль у стержнях – складемо рівняння рівноваги для вузла, де всі сили вже відомі:

$$R_3 + N_3 \cdot \sin \alpha + N_5 \cdot \sin \alpha = 0.$$

За одержаними значеннями побудуємо епюру поздовжніх сил для ферми (рис. 4.14).

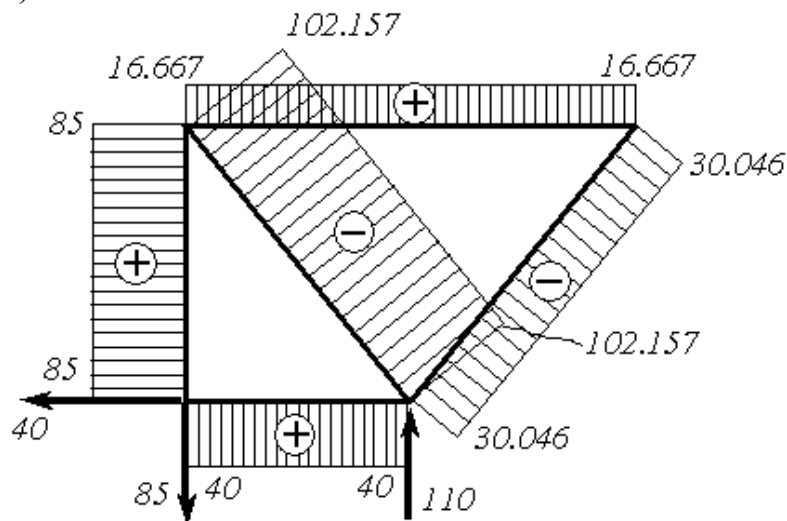


Рис. 4.14. Епюра поздовжніх сил для ферми

Визначимо площі поперечних перерізів стержнів з умови міцності при розтягу-стиску

$$\frac{N_x}{A} \leq \sigma_{\text{дон}};$$

$$A_1 = \frac{N1}{\sigma_{\text{дон}}^+}, \quad A_2 = \frac{N2}{\sigma_{\text{дон}}^+}, \quad A_3 = \left| \frac{N3}{\sigma_{\text{дон}}^-} \right|, \quad A_4 = \frac{N4}{\sigma_{\text{дон}}^+}, \quad A_5 = \left| \frac{N5}{\sigma_{\text{дон}}^-} \right|;$$

$$A_1 = 2.667 \text{ (см}^2\text{)}, \quad A_2 = 5.667 \text{ (см}^2\text{)}, \quad A_3 = 10.216 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$A_4 = 1.111 \text{ (см}^2\text{)}, \quad A_5 = 3.005 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Прийmemo для стержнів рівнобічний кутник №5/6 з площею поперечного перерізу  $A = 5.69 \text{ (см}^2\text{)}$ , а для стержня №3 – подвійний кутник №5/6, сумарна площа поперечного перерізу якого складає  $11.38 \text{ (см}^2\text{)}$ .

Визначимо вертикальне переміщення точки прикладення сили  $P_2$ .

Для визначення переміщення вузла необхідно в цьому вузлі в напрямку, в якому треба шукати переміщення, прикласти одиничну силу

(рис. 4.15) і визначити внутрішні зусилля, які виникають у стержнях від одиничної сили, за допомогою методу вирізання вузлів.

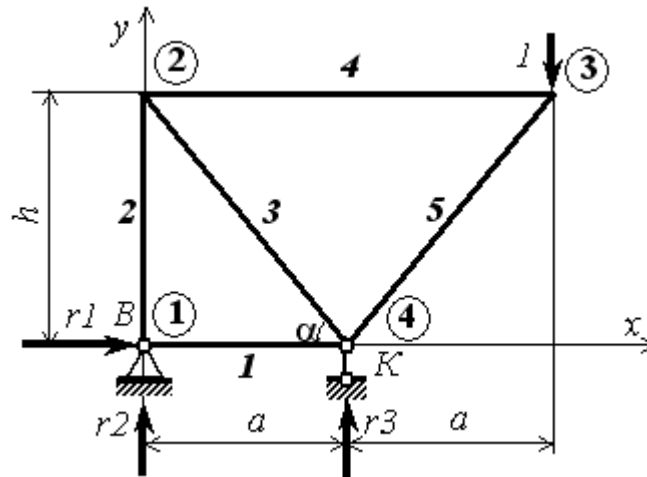


Рис. 4.15. Визначення переміщення в напрямку одиничної сили

Скористаємося уже складеними рівняннями рівноваги для вузлів, тільки замість заданих зовнішніх сил підставимо одиничну силу, прикладену у 3 вузлі:

$$n1 := 0 \quad n2 := 0 \quad n3 := 0 \quad n4 := 0 \quad n5 := 0$$

$$\begin{aligned} \text{Given} \quad & -n4 - n5 \cdot \cos\alpha = 0 \\ & -1 - n5 \cdot \sin\alpha = 0 \\ & n4 + n3 \cdot \cos\alpha = 0 \\ & -n2 - n3 \cdot \sin\alpha = 0 \\ & -n1 - n3 \cdot \cos\alpha + n5 \cdot \cos\alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \\ n4 \\ n5 \end{pmatrix} := \text{Find}(n1, n2, n3, n4, n5) \quad \begin{pmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \\ n4 \\ n5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1.202 \\ 0.667 \\ -1.202 \end{pmatrix}$$

Переміщення визначимо за формулою Максвелла-Мора:

$$i := 1..5 \quad N_i := \quad n_i := \quad l_i := \quad A_i :=$$

N1	n1	a	5.69
N2	n2	h	5.69
N3	n3	$\sqrt{a^2 + h^2}$	$5.69 \cdot 2$
N4	n4	2a	5.69
N5	n5	$\sqrt{a^2 + h^2}$	5.69

$$\Delta := \sum_i \frac{N_i \cdot n_i \cdot l_i}{E \cdot A_i} \quad \Delta = 2.86 \times 10^{-3} \text{ (м)}$$

Додатне значення переміщення показує, що переміщення відбувається у напрямку, визначеному одиничною силою.

Недоліком розглянутої методики, розрахованої на обчислення внутрішніх зусиль “вручну”, є необхідність розв’язання великої кількості рівнянь і деяка невизначеність щодо послідовності розглядання вузлів. Крім того, необхідно обов’язково попередньо визначити реакції в опорах.

Наявність у засобах пакета MathCAD матричних операцій, зокрема, операцій визначення оберненої матриці, дозволяє використати більш універсальну методику пошуку внутрішніх сил у стержнях ферми.

Розглянемо алгоритм визначення внутрішніх сил у фермі за допомогою матричного методу:

1. Проводиться нумерація стержнів, у тому числі і стержнів, які з’єднують ферму з фундаментом (опорних).

2. У кожному вузлі позначаються додатні напрямки осей координат, і проводиться їх нумерація (за домовленістю, непарними нумеруються горизонтальні напрямки осей, парними – вертикальні).

3. Складається матриця геометрії системи (матриця косинусів)  $\mathbf{D}$ , компоненти якої  $D_{i,j}$  є косинусами кутів між напрямком  $i$ -ї осі у вузлі і напрямком внутрішньої сили у  $j$ -му стержні (вважаємо що в стержнях внутрішні сили додатні, тобто направлені від вузлів).

4. Складається матриця зовнішніх сил  $\mathbf{F}$ , компоненти якої є зовнішніми силами, відповідними номеру осі у вузлі, де діє зовнішня сила, а кількість стовпців залежить від кількості варіантів навантаження. Якщо на ферму діє довільне навантаження, його необхідно привести до вузлів.

5. Внутрішні сили визначаються з матричного рівняння

$$\mathbf{N} := -\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{F}.$$

Опорні реакції відповідають значенням внутрішніх сил у відповідних опорних стержнях.

6. Після визначення внутрішніх сил будують епюру.

**ПРИКЛАД 4.5.** Визначити внутрішні сили у перерізах заданої ферми (рис. 4.16).

Вхідні дані:

$$H := 3 \text{ (м)} \quad a := 1.5 \text{ (м)}$$

$$P_1 := 10 \text{ (кН)} \quad P_2 := 12 \text{ (кН)} \quad P_3 := 5 \text{ (кН)} \quad q := 4 \text{ (кН/м)}$$

$$\sigma_r := 15 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right) \quad \sigma_c := 10 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

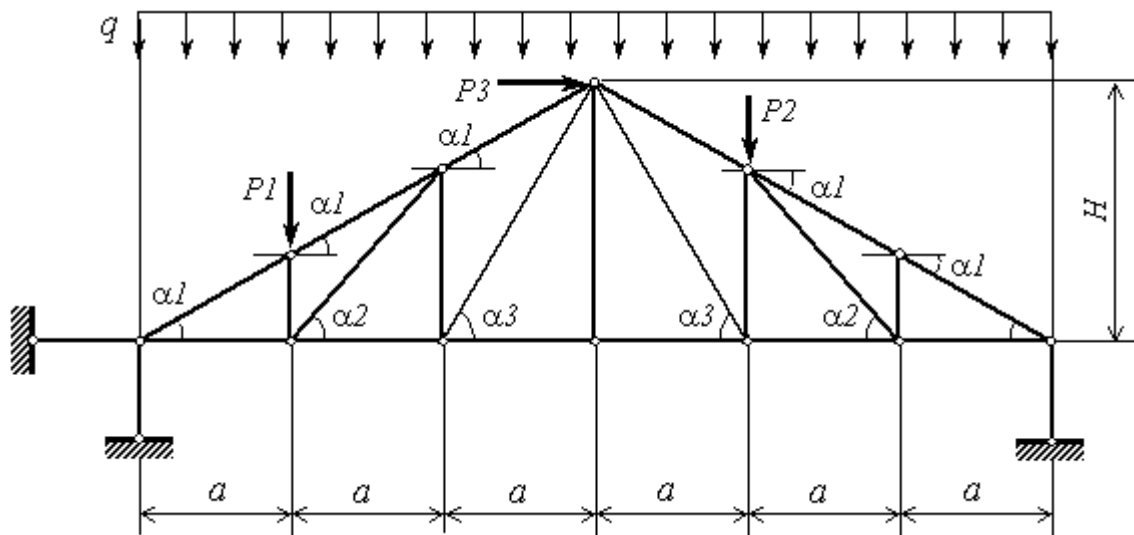


Рис. 4.16. Статично-визначувана ферма

Розв'язання:

Побудуємо розрахункову схему (рис. 4.17).

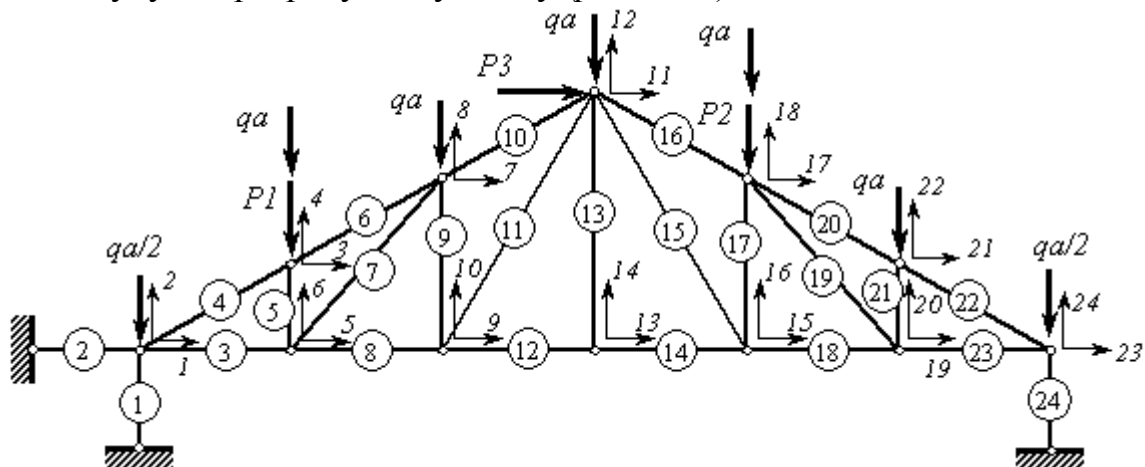


Рис. 4.17. Розрахункова схема ферми

Визначимо синуси і косинуси кутів  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  між стержнями ферми і осями координат у вузлах:

$$c_1 := \frac{3a}{\sqrt{(3 \cdot a)^2 + H^2}} \quad c_1 = 0.832 \quad s_1 := \frac{H}{\sqrt{(3 \cdot a)^2 + H^2}} \quad s_1 = 0.555$$

$$c_2 := \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot H\right)^2}} \quad c_2 = 0.6 \quad s_2 := \frac{\frac{2}{3} \cdot H}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot H\right)^2}} \quad s_2 = 0.8$$

$$c_3 := \frac{a}{\sqrt{a^2 + H^2}} \quad c_3 = 0.447 \quad s_3 := \frac{H}{\sqrt{a^2 + H^2}} \quad s_3 = 0.894$$



Запишемо компоненти матриці косинусів:

$$\begin{aligned}
 D_{1,3} &:= 1 & D_{1,4} &:= c1 & D_{1,2} &:= -1 \\
 D_{2,3} &:= 0 & D_{2,4} &:= s1 & D_{2,2} &:= 0 & D_{2,1} &:= -1 \\
 D_{3,4} &:= -c1 & D_{3,5} &:= 0 & D_{3,6} &:= c1 \\
 D_{4,4} &:= -s1 & D_{4,6} &:= s1 & D_{4,5} &:= -1 \\
 D_{5,3} &:= -1 & D_{5,5} &:= 0 & D_{5,7} &:= c2 & D_{5,8} &:= 1 \\
 D_{6,3} &:= 0 & D_{6,5} &:= 1 & D_{6,7} &:= s2 & D_{6,8} &:= 0 \\
 D_{7,6} &:= -c1 & D_{7,7} &:= -c2 & D_{7,9} &:= 0 & D_{7,10} &:= c1 \\
 D_{8,6} &:= -s1 & D_{8,7} &:= -s2 & D_{8,9} &:= -1 & D_{8,10} &:= s1 \\
 D_{9,8} &:= -1 & D_{9,9} &:= 0 & D_{9,11} &:= c3 & D_{9,12} &:= 1 \\
 D_{10,8} &:= 0 & D_{10,9} &:= 1 & D_{10,11} &:= s3 & D_{10,12} &:= 0 \\
 D_{11,10} &:= -c1 & D_{11,11} &:= -c3 & D_{11,13} &:= 0 \\
 D_{11,15} &:= c3 & D_{11,16} &:= c1 \\
 D_{12,10} &:= -s1 & D_{12,11} &:= -s3 & D_{12,13} &:= -1 \\
 D_{12,15} &:= -s3 & D_{12,16} &:= -s1 \\
 D_{13,12} &:= -1 & D_{13,13} &:= 0 & D_{13,14} &:= 1 \\
 D_{14,12} &:= 0 & D_{14,13} &:= 1 & D_{14,14} &:= 0 \\
 D_{15,14} &:= -1 & D_{15,15} &:= -c3 & D_{15,17} &:= 0 & D_{15,18} &:= 1 \\
 D_{16,14} &:= 0 & D_{16,15} &:= s3 & D_{16,17} &:= 1 & D_{16,18} &:= 0 \\
 D_{17,16} &:= -c1 & D_{17,17} &:= 0 & D_{17,19} &:= c2 & D_{17,20} &:= c1 \\
 D_{18,16} &:= s1 & D_{18,17} &:= -1 & D_{18,19} &:= -s2 & D_{18,20} &:= -s1 \\
 D_{19,18} &:= -1 & D_{19,19} &:= -c2 & D_{19,21} &:= 0 & D_{19,23} &:= 1 \\
 D_{20,18} &:= 0 & D_{20,19} &:= s2 & D_{20,21} &:= 1 & D_{20,23} &:= 0 \\
 D_{21,20} &:= -c1 & D_{21,21} &:= 0 & D_{21,22} &:= c1 \\
 D_{22,20} &:= s1 & D_{22,21} &:= -1 & D_{22,22} &:= -s1 \\
 D_{23,22} &:= -c1 & D_{23,23} &:= -1 & D_{23,24} &:= 0 \\
 D_{24,22} &:= s1 & D_{24,23} &:= 0 & D_{24,24} &:= -1
 \end{aligned}$$

Запишемо компоненти вектора зовнішніх навантажень у відповідності з номером осі у кожному вузлі (розмір вектора визначається порядковим номером останньої компоненти):

$$\begin{aligned}
 F_2 &:= \frac{-q \cdot a}{2} & F_4 &:= -q \cdot a - P1 & F_8 &:= -q \cdot a & F_{11} &:= P3 & F_{12} &:= -q \cdot a \\
 F_{18} &:= -q \cdot a - P2 & F_{22} &:= -q \cdot a & F_{24} &:= \frac{-q \cdot a}{2}
 \end{aligned}$$

$$F^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	-3	0	-16	0	0	0	-6	0	0	5	-6

$$F^T =$$

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	0	0	0	0	-18	0	0	0	-6	0	-3

Внутрішні сили у перерізах:

$$N := -D^{-1} \cdot F$$

	1
1	-28.67
2	5
3	43.5
4	-46.27
5	-16
6	-46.27
7	20
8	31.5
9	-14
10	-31.85
11	15.65
12	24.5

$$N =$$

	1
13	0
14	24.5
15	23.479
16	-42.065
17	-21
18	35
19	7.5
20	-47.473
21	-6
22	-47.473
23	39.5
24	-29.333

Від'ємні значення внутрішніх зусиль означають, що стержень працює на стиск, додатні – на розтяг.

Опорні реакції визначаються як зусилля у відповідному стержні, додатні значення – реакція направлена від вузла, від'ємні – до вузла.

Побудуємо епюру внутрішніх сил (рис. 4.18).

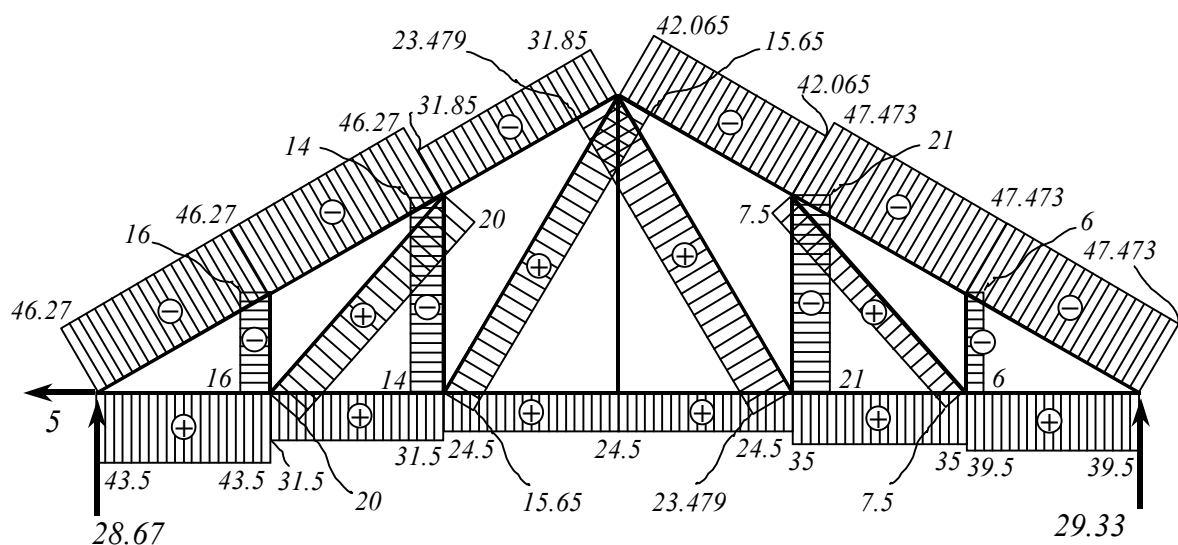


Рис. 4.18. Епюра внутрішніх зусиль для ферми

Після побудови епюри необхідно зробити перевірку рівноваги одного з вузлів (рис. 4.19). Виріжемо умовно вузол при вершині і запишемо умови рівноваги – суми проекцій усіх сил на осі координат:

$$N_{16} \cdot c_1 + N_{15} \cdot c_3 - N_{11} \cdot c_3 - N_{10} \cdot c_1 + P_3 = 7.105 \times 10^{-15}$$

$$-(N_{16} \cdot s_1 + N_{15} \cdot s_3 + N_{11} \cdot s_3 + N_{10} \cdot s_1 + N_{13} + q \cdot a) = 1.776 \times 10^{-15}$$

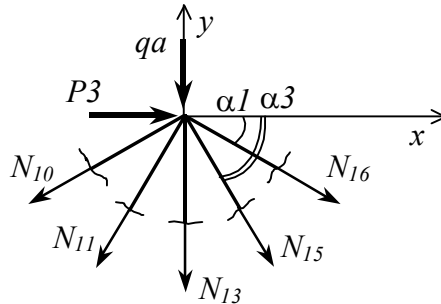


Рис. 4.19. Перевірка рівноваги вузла ферми

На схемі вирізаного вузла ми зобразили зусилля у стержнях № 10 і 16 як додатні (направлені від вузла). Результати розрахунку показали, що зусилля в цих стержнях від'ємні, тобто стержні працюють на стиск, отже насправді зусилля направлені до вузла.

За результатами перевірки рівноваги можна зробити висновок, що зусилля визначені правильно.

**ПРИКЛАД 4.6.** Розрахунок на міцність і жорсткість шарнірно-стержневої системи (рис. 4.20).

Вхідні дані:

$$F_1 := 80(\text{кН}) \quad F_2 := 50(\text{кН}) \quad F_3 := 25(\text{кН}) \quad a := 2(\text{м}) \quad h := 3(\text{м})$$

$$E := 2 \cdot 10^4 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right) \quad \sigma_1 := 15 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right) \quad \sigma_2 := 10 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

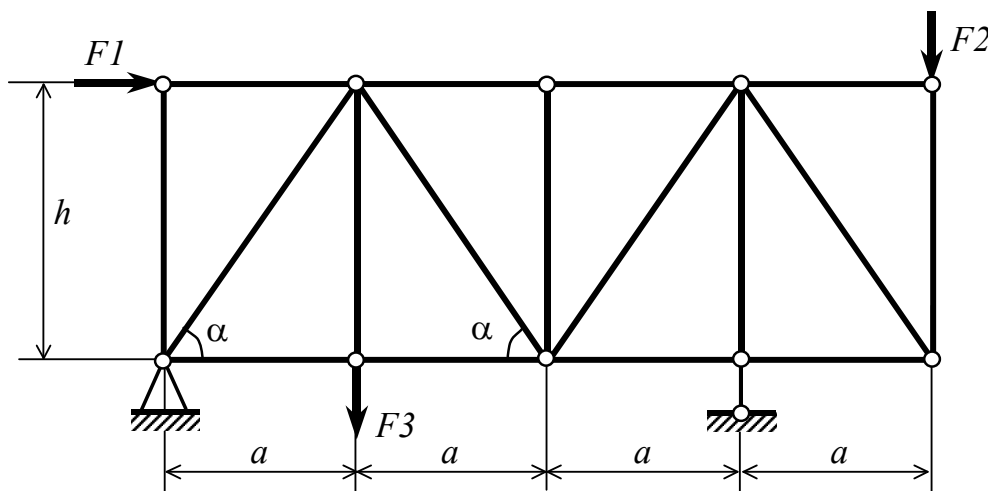


Рис. 4.20. Шарнірно-стержнева система

Розв'язання:

Побудуємо розрахункову схему ферми – пронумеруємо стержні (включаючи й опорні) і напрямки осей у вузлах (рис. 4.21).

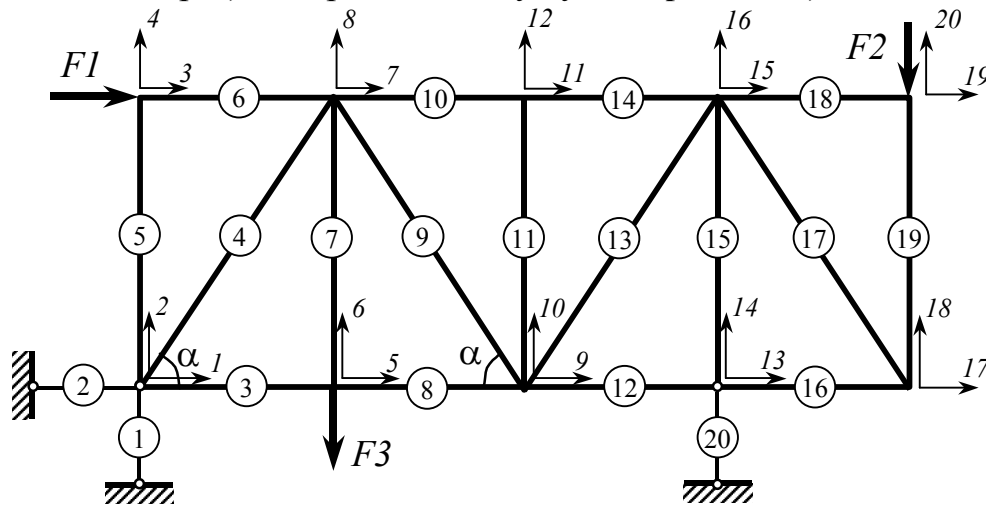


Рис. 4.21. Розрахункова схема ферми

Визначимо  $\sin \alpha$  і  $\cos \alpha$ :

$$\cos := \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad \cos = 0.555 \quad \sin := \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad \sin = 0.832$$

Складемо матрицю косинусів, кожна компонента якої  $D_{i,j}$  являє собою косинус кута між  $i$ -ю віссю у вузлі і додатнім напрямком зусилля у  $j$ -му стержні:

$$\begin{aligned} D_{1,2} &:= -1 & D_{1,3} &:= 1 & D_{1,4} &:= \cos & D_{2,4} &:= \sin & D_{2,5} &:= 1 & D_{2,1} &:= -1 \\ D_{3,6} &:= 1 & D_{4,5} &:= -1 & D_{5,8} &:= 1 & D_{5,3} &:= -1 & D_{6,7} &:= 1 & & \\ D_{7,6} &:= -1 & D_{7,4} &:= -\cos & D_{7,9} &:= \cos & D_{7,10} &:= 1 & & & & \\ D_{8,7} &:= -1 & D_{8,4} &:= -\sin & D_{8,9} &:= -\sin & & & & & & \\ D_{9,8} &:= -1 & D_{9,9} &:= -\cos & D_{9,13} &:= \cos & D_{9,12} &:= 1 & & & & \\ D_{10,11} &:= 1 & D_{10,9} &:= \sin & D_{10,13} &:= \sin & & & & & & \\ D_{11,10} &:= -1 & D_{11,14} &:= 1 & D_{12,11} &:= -1 & & & & & & \\ D_{13,12} &:= -1 & D_{13,16} &:= 1 & D_{14,15} &:= 1 & D_{14,20} &:= -1 & & & & \\ D_{15,14} &:= -1 & D_{15,13} &:= -\cos & D_{15,17} &:= \cos & D_{15,18} &:= 1 & & & & \\ D_{16,15} &:= -1 & D_{16,13} &:= -\sin & D_{16,17} &:= -\sin & & & & & & \\ D_{17,16} &:= -1 & D_{17,17} &:= -\cos & D_{18,19} &:= 1 & D_{18,17} &:= \sin & & & & \\ D_{19,18} &:= -1 & D_{20,19} &:= -1 & D_{20,20} &:= 0 & & & & & & \end{aligned}$$

Запишемо компоненти вектора зовнішніх сил:

$$Q_3 := F1 \quad Q_6 := -F3 \quad Q_{20} := -F2$$

Визначимо внутрішні сили у стержнях із матричного рівняння рівноваги для вузлів ферми:

$$N := -D^{-1} \cdot Q$$

N =

	1
1	40
2	80
3	53.333
4	48.074
5	0
6	-80
7	25
8	53.333
9	-78.12
10	-10

N =

	1
11	0
12	-33.333
13	78.12
14	-10
15	-115
16	-33.333
17	60.093
18	0
19	-50
20	-115

Від’ємні значення внутрішніх сил означають, що в цьому стержні стиск, а не розтяг, як приймалося спочатку.

Побудуємо епюру внутрішніх сил (рис. 4.22).

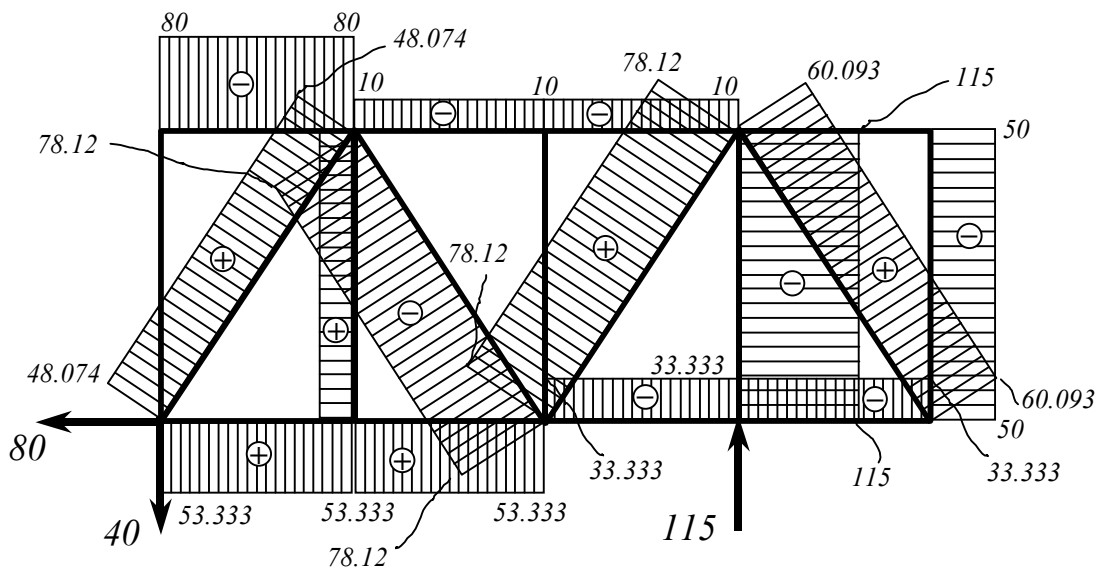


Рис. 4.22. Епюра поздовжніх сил для ферми

Після побудови епюри необхідно зробити перевірку рівноваги одного з вузлів (рис. 4.23). Виріжемо умовно вузол № 5 і перевіримо умови рівноваги – суми проекцій усіх сил на осі координат:

$$-N_8 - N_9 \cdot \cos + N_{13} \cdot \cos + N_{12} = 0$$

$$N_9 \cdot \sin + N_{11} + N_{13} \cdot \sin = 0$$

На схемі вирізаного вузла ми зобразили зусилля у стержнях № 9 і 12 як додатні (направлені від вузла). Результати розрахунку показали, що зусилля в цих стержнях від’ємні, тобто стержні працюють на стиск, отже насправді зусилля направлені до вузла.

Результати перевірки рівноваги вузла показали, що зусилля визначені правильно. Умови рівноваги виконуються.

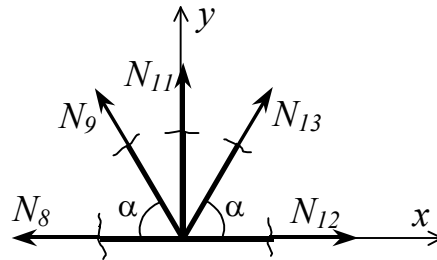


Рис. 4.23. Перевірка рівноваги вузла ферми

Визначимо площі поперечних перерізів стержнів ферми з умови міцності при розтягу-стиску:

$$\frac{N}{A} \leq \sigma_{adm};$$

$$A_1 := 100 \quad A_2 := 100 \quad A_3 := \frac{N_3}{\sigma_1} \quad A_4 := \frac{N_4}{\sigma_1} \quad A_5 := \frac{N_5}{\sigma_1}$$

$$A_6 := \left| \frac{N_6}{\sigma_2} \right| \quad A_7 := \frac{N_7}{\sigma_1} \quad A_8 := \frac{N_8}{\sigma_1} \quad A_9 := \left| \frac{N_9}{\sigma_2} \right| \quad A_{10} := \left| \frac{N_{10}}{\sigma_2} \right|$$

$$A_{11} := \left| \frac{N_{11}}{\sigma_2} \right| \quad A_{12} := \left| \frac{N_{12}}{\sigma_2} \right| \quad A_{13} := \frac{N_{13}}{\sigma_1} \quad A_{14} := \left| \frac{N_{14}}{\sigma_2} \right| \quad A_{15} := \left| \frac{N_{15}}{\sigma_2} \right|$$

$$A_{16} := \left| \frac{N_{16}}{\sigma_2} \right| \quad A_{17} := \frac{N_{17}}{\sigma_1} \quad A_{18} := \frac{N_{18}}{\sigma_1} \quad A_{19} := \left| \frac{N_{19}}{\sigma_2} \right| \quad A_{20} := 100$$

$$A =$$

	1
1	100
2	100
3	3.556
4	3.205
5	0
6	8
7	1.667
8	3.556
9	7.812
10	1

$$A =$$

	1
11	0
12	3.333
13	5.208
14	1
15	11.5
16	3.333
17	4.006
18	0
19	5
20	100

Прийmemo площі поперечних перерізів:

– для стержнів верхнього поясу (№№ 6, 10, 14, 18) – кутник рівнобокий № 7/6 з площею поперечного перерізу 8.15 (см<sup>2</sup>);

– для стержнів нижнього поясу (№№ 3, 8, 12, 16) – кутник рівнобокий № 4/5 з площею поперечного перерізу 3.79 (см<sup>2</sup>);

- для стійок (№№ 5, 19) – кутник рівнобокий № 6/5 з площею поперечного перерізу 5.89 (см<sup>2</sup>);
- для стійок (№№ 7, 11, 15) – подвійний кутник рівнобокий № 6/5 з площею поперечного перерізу  $2 \cdot 5.89 = 11.78$  (см<sup>2</sup>);
- для розкосів (№№ 4, 9, 13, 17) – подвійний кутник рівнобокий № 4/5 з площею поперечного перерізу  $2 \cdot 3.79 = 7.58$  (см<sup>2</sup>), перевантаження для стержня № 9 не перевищує 5 %;
- для опорних стержнів приймемо площу 100 (см<sup>2</sup>):

$$\begin{aligned}
 A_6 &:= 8.15 & A_{10} &:= 8.15 & A_{14} &:= 8.15 & A_{18} &:= 8.15 \\
 A_3 &:= 3.79 & A_8 &:= 3.79 & A_{12} &:= 3.79 & A_{16} &:= 3.79 \\
 A_5 &:= 5.89 & A_7 &:= 2 \cdot 5.89 & A_{11} &:= 2 \cdot 5.89 & A_{15} &:= 2 \cdot 5.89 & A_{19} &:= 5.89 \\
 A_4 &:= 2 \cdot 3.79 & A_9 &:= 2 \cdot 3.79 & A_{13} &:= 2 \cdot 3.79 & A_{17} &:= 2 \cdot 3.79
 \end{aligned}$$

Визначимо переміщення вузла ферми в напрямку осі №18.

Прикладемо одиничну силу в тому вузлі і в тому напрямку, де необхідно визначити переміщення (рис. 4.24).

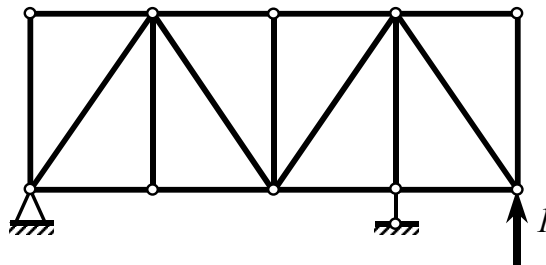


Рис. 4.23. Визначення переміщення вузла

Визначимо внутрішні зусилля у стержнях ферми від одиничної сили. Складемо вектор одиничного навантаження:

$$Q_{18} := 1 \quad Q_{20} := 0$$

$$Q_1^T = (000000000000000000100)$$

Остання компонента визначає розмір вектора.

Визначимо внутрішні сили у стержнях ферми від одиничного навантаження за допомогою матриці косинусів:

$$N1 := -D^{-1} \cdot Q_1$$

N1 =

	1
1	-0.333
2	0
3	0.222
4	-0.401
5	0
6	0
7	0
8	0.222
9	0.401
10	-0.444

N1 =

	1
11	0
12	0.667
13	-0.401
14	-0.444
15	1.333
16	0.667
17	-1.202
18	0
19	0
20	1.333

Задаємо вектор довжин стержнів:

$$\begin{aligned} l_1 &:= 0 & l_2 &:= 0 & l_3 &:= a & l_4 &:= \frac{a}{\cos} & l_5 &:= h & l_6 &:= a \\ l_7 &:= h & l_8 &:= a & l_9 &:= \frac{a}{\cos} & l_{10} &:= a & l_{11} &:= h \\ l_{12} &:= a & l_{13} &:= \frac{a}{\cos} & l_{14} &:= a & l_{15} &:= h & l_{16} &:= a \\ l_{17} &:= \frac{a}{\cos} & l_{18} &:= a & l_{19} &:= h & l_{20} &:= 0 \end{aligned}$$

Визначимо переміщення за формулою Максвела-Мора:

$$\Delta := \sum_{i=1}^{20} \frac{N_i \cdot N_{1i} \cdot l_i}{E \cdot A_i} \quad \Delta = -6.055 \times 10^{-3} \quad (\text{м})$$

При необхідності визначення переміщень вузлів у всіх напрямках, тобто для побудови схеми деформування ферми одиничні сили треба прикласти по черзі в кожному напрямку, тому одиничне навантаження задаємо у вигляді діагональної матриці:

$$f_{i,j} := 1$$

Внутрішні зусилля у стержнях ферми від одиничних сил визначаємо за допомогою матриці косинусів:

$$n := -D^{-1} \cdot f$$

В одержаній матриці  $n$  кожний стовпець показує значення внутрішніх зусиль у стержнях від відповідної одиничної сили.

Визначимо переміщення вузлів ферми за формулою Максвела-Мора:

$$j := 1..20 \quad \Delta_j := \sum_{i=1}^{20} \frac{N_i \cdot n_{i,j} \cdot l_i}{E \cdot A_i}$$

де  $j$  – номер осі, у напрямку якої діє одинична сила.

Переміщення в напрямках опорних реакцій (№ 1, 2, 14) повинно дорівнювати нулю.

Для побудови схеми деформування ферми (рис. 4.25) за допомогою MathCAD необхідно задати координати вузлів ферми у порядку, який дозволяє “обійти” усі стержні ферми як мінімум по одному разу, та задати переміщення вузлів у тому ж порядку.



k := 1.. 26

$$\Delta =$$

	1
1	0
2	0
3	$6.592 \cdot 10^{-3}$
4	0
5	$1.407 \cdot 10^{-3}$
6	$-2.684 \cdot 10^{-3}$
7	$5.61 \cdot 10^{-3}$
8	$-2.366 \cdot 10^{-3}$
9	$2.814 \cdot 10^{-3}$
10	$-1.997 \cdot 10^{-3}$
11	$5.488 \cdot 10^{-3}$
12	$-1.997 \cdot 10^{-3}$
13	$1.935 \cdot 10^{-3}$
14	0
15	$5.365 \cdot 10^{-3}$
16	$-1.464 \cdot 10^{-3}$
17	$1.055 \cdot 10^{-3}$
18	$-6.055 \cdot 10^{-3}$
19	$5.365 \cdot 10^{-3}$
20	$-7.328 \cdot 10^{-3}$

$$\begin{aligned}
 x &:= \begin{pmatrix} -\frac{a}{5} \\ 0 \\ 0 \\ a \\ 2a \\ 3a \\ 4a \\ 4a \\ 3a \\ 3a \\ 3a \\ 3a \\ 3a \\ 3a \\ 3a \\ 3a \\ 2a \\ 2a \\ 2a \\ a \\ a \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \\ 2a \\ 3a \\ 4a \end{pmatrix} &
 y &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \\ h \\ h \\ h \\ h \\ 0 \\ h \\ 0 \\ -\frac{a}{5} \\ 0 \\ h \\ 0 \\ h \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{a}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &
 X &:= \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta_1 \\ \Delta_3 \\ \Delta_7 \\ \Delta_{11} \\ \Delta_{15} \\ \Delta_{19} \\ \Delta_{17} \\ \Delta_{15} \\ \Delta_{13} \\ 0 \\ \Delta_{13} \\ \Delta_{15} \\ \Delta_9 \\ \Delta_{11} \\ \Delta_9 \\ \Delta_7 \\ \Delta_5 \\ \Delta_7 \\ \Delta_1 \\ 0 \\ \Delta_1 \\ \Delta_5 \\ \Delta_9 \\ \Delta_{13} \\ \Delta_{17} \end{pmatrix} &
 Y &:= \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta_2 \\ \Delta_4 \\ \Delta_8 \\ \Delta_{12} \\ \Delta_{16} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{18} \\ \Delta_{16} \\ \Delta_{14} \\ 0 \\ \Delta_{14} \\ \Delta_{16} \\ \Delta_{10} \\ \Delta_{12} \\ \Delta_{10} \\ \Delta_8 \\ \Delta_6 \\ \Delta_8 \\ \Delta_2 \\ 0 \\ \Delta_2 \\ \Delta_6 \\ \Delta_{10} \\ \Delta_{14} \\ \Delta_{18} \end{pmatrix} \\
 W_x &:= x + X \cdot 50 \\
 W_y &:= y + Y \cdot 50
 \end{aligned}$$

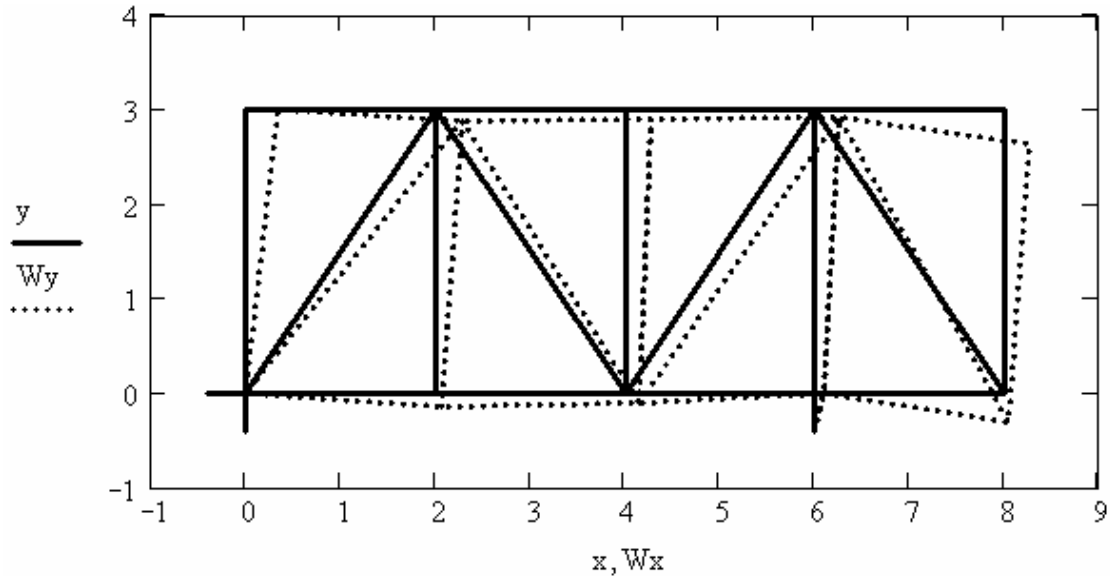


Рис. 4.25. Схема деформування ферми

#### 4.7. Розрахунок на міцність і жорсткість стержня при крученні

**ПРИКЛАД 4.7.** Для заданого вала визначити діаметри окремих його ділянок, кути закручування на окремих ділянках, порівнявши їх значення з допустимим значенням кута закручування (рис. 4.26).

Вхідні дані: допустимий кут закручування  $[\theta] := 2 \text{ град/м}$ ,  $a = 0.4 \text{ м}$ , запас міцності  $k = 2$ , потужності на кожному шківі  $N_1 = 2 \text{ кВт}$ ,  $N_2 = 3 \text{ кВт}$ ,  $N_3 = 2 \text{ кВт}$ ,  $N_4 = 1 \text{ кВт}$ ,  $\omega = 200 \text{ рад/сек}$ , матеріал Ст.4,  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ , модуль зсуву  $G = 7.8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

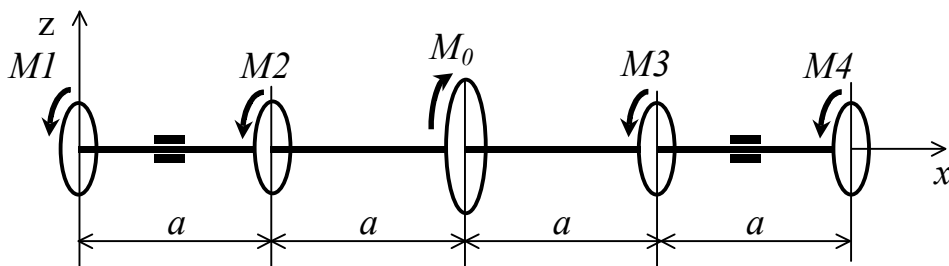


Рис. 4.26. Розрахункова схема вала

Розв'язання:

Введемо вхідні дані:

$$\omega := 200 \quad \sigma := 160 \quad a := 0.4 \quad i := 1..4 \quad N_i :=$$

2
3
2
1

На вал діють моменти кручення, які визначаємо за формулою

$$M_i := \frac{N_i}{\omega} \cdot 1000 \quad M_i =$$

10
15
10
5

$$H \cdot M$$

Для визначення невідомого моменту  $M_0$  складемо рівняння рівноваги:

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 - M_0 = 0,$$

з якого визначимо невідомий момент  $M_0 = 40 \text{ H} \cdot \text{м}$ .

В MathCADi розв'язок рівняння має такий вигляд:

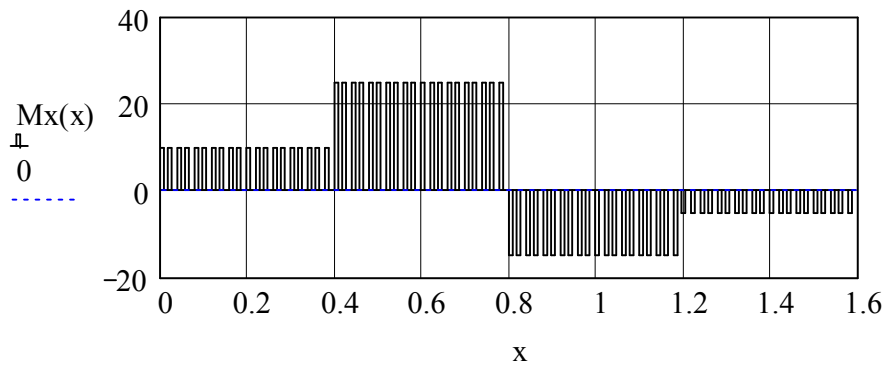
$$M_0 := 0 \quad \text{Given} \quad \sum_{i=1}^4 M_i - M_0 = 0$$

$$M_0 := \text{Find}(M_0) \quad M_0 = 40$$

Побудуємо епюру моментів кручення, записавши моменти на кожній ділянці:

$$M_x(x) := \begin{cases} M_1 & \text{if } 0 \leq x \leq a \\ (M_1 + M_2) & \text{if } a \leq x \leq 2a \\ (M_1 + M_2 - M_0) & \text{if } 2a \leq x \leq 3a \\ (M_1 + M_2 - M_0 + M_3) & \text{if } 3a \leq x \leq 4a \end{cases}$$

$$x := 0, 0.02.. 4a$$



$$M_x(0) = 10 \quad M_x(a) = 25 \quad M_x(2a) = -15 \quad M_x(3a) = -5$$

Функцію моментів кручення можна записати за допомогою функції Хевісайда для всієї балки:

$$M_x(x) := M_1 \cdot \Phi(x) + M_2 \cdot \Phi(x - a) - M_0 \cdot \Phi(x - 2a) + M_3 \cdot \Phi(x - 3a) \dots \\ + M_4 \cdot \Phi(x - 4a)$$

Таким чином, розрахункові значення моментів на кожній ділянці (у  $H \cdot m$ ):

$M_{x_i} :=$	$M_{x_i} =$
$M_x(0)$	10
$M_x(a)$	25
$M_x(2a)$	-15
$M_x(3a)$	-5

Визначимо діаметри ділянок вала за умовою міцності при крученні:

$$\frac{M_{xi}}{W_{\rho i}} \leq \tau_{adm},$$

де  $M_{xi}$  – розрахункові значення моментів на кожній ділянці (з епюри);

$$W_{\rho i} = \frac{\pi \cdot d_i^3}{16} \text{ – полярний момент опору при крученні;}$$

$$\tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{k} \text{ – допустиме дотичне напруження.}$$

За умовою міцності діаметри на кожній ділянці дорівнюють

$$d_i := \sqrt[3]{\left| \frac{32 \cdot M_{x_i}}{\pi \cdot \sigma} \right|} \cdot 1000 \quad d_i =$$

8.603	(мм)
11.675	
9.847	
6.828	

Одержані значення діаметрів округлюємо до цілих значень міліметрів, кратних 2 або 5:

$$d_1 = 10 \text{ мм}, \quad d_2 = 12 \text{ мм}, \quad d_3 = 10 \text{ мм}, \quad d_4 = 8 \text{ мм}.$$

Визначимо діаметри ділянок за умовою жорсткості при крученні:

$$\frac{M_{xi}}{G \cdot I_{\rho i}} \leq \theta_{adm},$$

де  $G$  – модуль зсуву для сталі Ст.3;

$$I_{\rho i} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \text{ – полярний момент інерції перерізу;}$$

допустимий відносний кут закручування –

$$\theta := \frac{2 \cdot \pi}{180 \cdot 1000} \quad \theta = 3.491 \times 10^{-5} \left( \frac{\text{рад}}{\text{мм}} \right)$$

Діаметри за умовою жорсткості:

$$D_i := \sqrt[4]{\left| \frac{32 \cdot M_{x_i}}{\theta \cdot G \cdot \pi} \right|} \cdot 1000 \quad D_i =$$

13.908
17.488
15.391
11.695

(мм)

Одержані значення діаметрів округлюємо до цілих значень міліметрів, кратних 2 або 5:

$$D_1 = 14 \text{ мм}, \quad D_2 = 18 \text{ мм}, \quad D_3 = 16 \text{ мм}, \quad D_4 = 12 \text{ мм}.$$

Як видно з розрахунку, діаметри, визначені за умовою жорсткості, мають більші значення, ніж визначені за умовою міцності, отже остаточно приймаємо саме ці значення і будуємо ескіз вала (рис. 4.27).

Визначимо кути закручування на кожній ділянці.

Полярні моменти інерції для прийнятих перерізів

$$I_i := \frac{\pi \cdot (D_i)^4}{32} \quad I_i =$$

$3.771 \cdot 10^3$
$1.031 \cdot 10^4$
$6.434 \cdot 10^3$
$2.036 \cdot 10^3$

(мм<sup>4</sup>)

Для побудови епюри кутів закручування прийmemo, що початковий кут закручування дорівнює 0:

$$\varphi(0) = 0.$$

Визначимо кути закручування на кожній ділянці:

$$\phi_i := \frac{M_{x_i} \cdot a}{G \cdot I_i} \cdot 10^6 \quad \phi^T = (0.014 \quad 0.012 \quad -0.012 \quad -0.013) \text{ рад}$$

$$j := 1..5$$

$$f_{ij} :=$$

0
$\phi_1$
$\phi_1 + \phi_2$
$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3$
$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$

$$x_j :=$$

0
a
2a
3a
4a

$$f_{ij} =$$

0
0.014
0.026
0.014
$1.486 \cdot 10^{-3}$

Перевіримо відносні кути закручування на кожній ділянці:

$$\theta_i := \frac{\phi_i}{a \cdot 1000} \quad \theta_i = \begin{array}{|c|} \hline 3.399 \cdot 10^{-5} \\ \hline 3.11 \cdot 10^{-5} \\ \hline -2.989 \cdot 10^{-5} \\ \hline -3.149 \cdot 10^{-5} \\ \hline \end{array} \quad \left( \frac{\text{рад}}{\text{мм}} \right)$$

Усі значення не перевищують допустимого значення кута закручування.

Результати розрахунку вала показано на рис. 4.27.

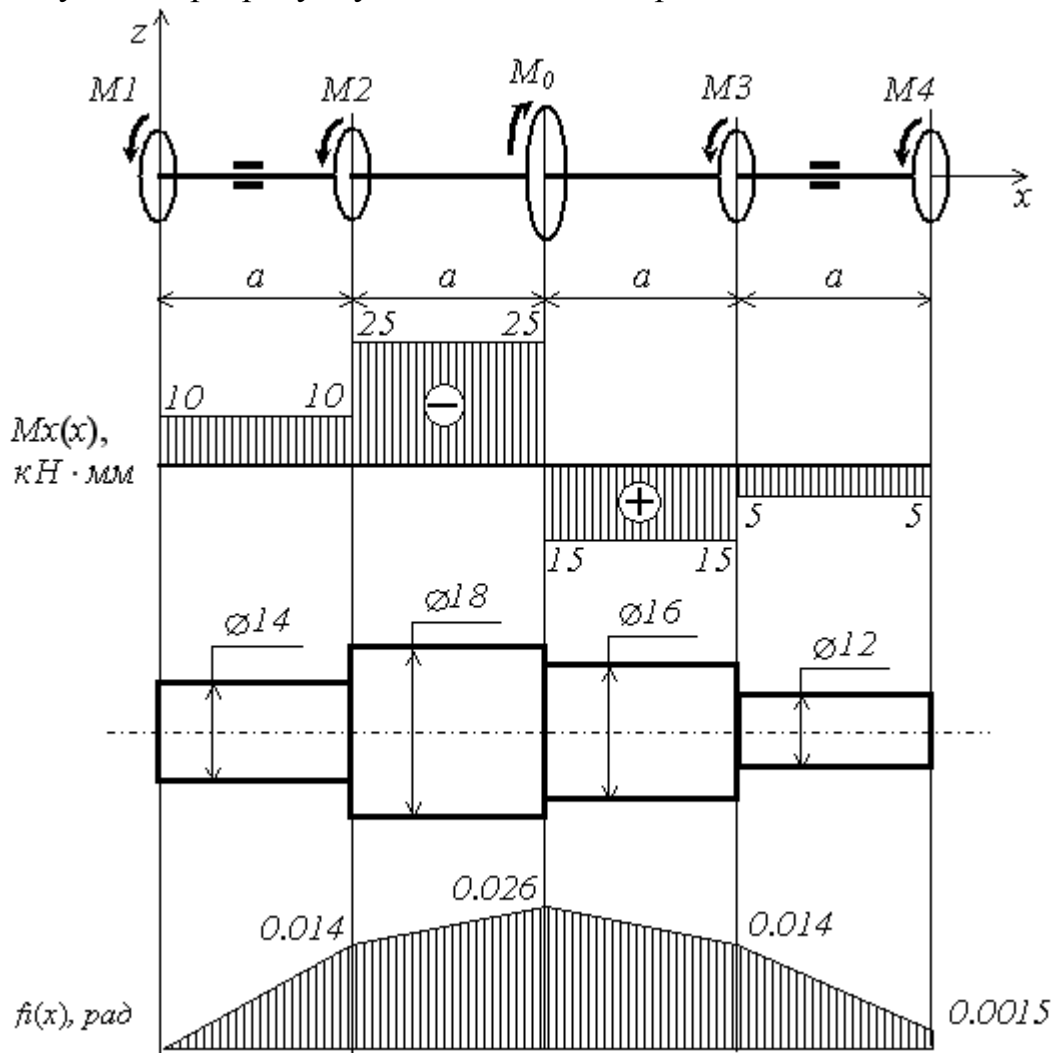


Рис. 4.27. Результати розрахунку вала

### 4.8. Розрахунок на міцність балок при плоскому згині

**ПРИКЛАД 4.8.** Для заданої сталеві балки (рис. 4.28) підібрати двотавровий, круговий, квадратний та прямокутний перерізи і порівняти ваги одного метра довжини кожного профілю. Побудувати графіки функцій прогинів і кутів повороту поперечних перерізів. Перевірити міцність двотаврової балки.

Вхідні дані:

$$F = 20 \text{ кН}, M = 50 \text{ кНм}, q_1 = 40 \text{ кН/м}, q_2 = 10 \text{ кН/м},$$

$$E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2, \sigma_{adm} = 16 \text{ кН/см}^2.$$

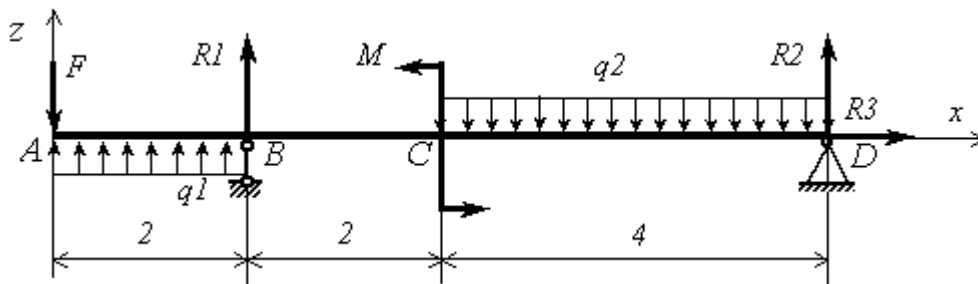


Рис. 4.28. Розрахункова схема балки на двох опорах

Розв'язання:

Запишемо функції поперечних сил та згинаючих моментів за допомогою функції Хевісайда:

$$\begin{aligned} N_z(x, R_1, R_2) := & q_1 \cdot x \cdot \Phi(x) - q_1 \cdot (x-2) \cdot \Phi(x-2) - F \cdot \Phi(x) + R_1 \cdot \Phi(x-2) \dots \\ & - q_2 \cdot (x-4) \cdot \Phi(x-4) + q_2 \cdot (x-8) \cdot \Phi(x-8) \dots \\ & + R_2 \cdot \Phi(x-8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y(x, R_1, R_2) := & q_1 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \Phi(x) - q_1 \cdot \frac{(x-2)^2}{2} \cdot \Phi(x-2) + R_1 \cdot (x-2) \cdot \Phi(x-2) \dots \\ & - F \cdot x \cdot \Phi(x) - q_2 \cdot \frac{(x-4)^2}{2} \cdot \Phi(x-4) - M \cdot \Phi(x-4) \end{aligned}$$

Використаємо метод початкових параметрів для визначення кутів повороту перерізів і прогинів. Оскільки розміри перерізу поки що невідомі, запишемо функції переміщень, помножені на жорсткість перерізу при плоскому згині  $EI_y$ :

$$\begin{aligned} EI\theta(x, R_1, R_2, EI\theta_0) := & EI\theta_0 + q_1 \cdot \frac{x^3}{6} \cdot \Phi(x) - q_1 \cdot \frac{(x-2)^3}{6} \cdot \Phi(x-2) \dots \\ & + R_1 \cdot \frac{(x-2)^2}{2} \cdot \Phi(x-2) - F \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \Phi(x) \dots \\ & - q_2 \cdot \frac{(x-4)^3}{6} \cdot \Phi(x-4) - M \cdot (x-4) \cdot \Phi(x-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EIw(x, R1, R2, EI\theta, EIw0) := & EIw0 + EI\theta \cdot x + q1 \cdot \frac{x^4}{24} \cdot \Phi(x) \dots \\
& + -q1 \cdot \frac{(x-2)^4}{24} \cdot \Phi(x-2) \dots \\
& + R1 \cdot \frac{(x-2)^3}{6} \cdot \Phi(x-2) - F \cdot \frac{x^3}{6} \cdot \Phi(x) \dots \\
& + -q2 \cdot \frac{(x-4)^4}{24} \cdot \Phi(x-4) - M \cdot \frac{(x-4)^2}{2} \cdot \Phi(x-4)
\end{aligned}$$

Визначимо невідомі опорні реакції з умов рівноваги, а невідомі початкові параметри (початковий кут повороту і початковий прогин) – з умов закріплення (прогин в опорах дорівнює нулю):

$$x := 0, 0.05 \dots 8$$

$$R1 := 0 \quad R2 := 0 \quad EI\theta := 0 \quad EIw0 := 0$$

$$\text{Given} \quad Nz(8, R1, R2) = 0$$

$$My(8, R1, R2) = 0$$

$$EIw(2, R1, R2, EI\theta, EIw0) = 0$$

$$EIw(8, R1, R2, EI\theta, EIw0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ EI\theta \\ EIw0 \end{pmatrix} := \text{Find}(R1, R2, EI\theta, EIw0) \quad \begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ EI\theta \\ EIw0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 \\ 25 \\ -138.889 \\ 277.778 \end{pmatrix}$$

$$Nz(x) := Nz(x, R1, R2) \quad My(x) := My(x, R1, R2)$$

$$EI\theta(x) := EI\theta(x, R1, R2, EI\theta) \quad EIw(x) := EIw(x, R1, R2, EI\theta, EIw0)$$

Визначимо значення поперечних сил і згинаючих моментів у характерних точках (на границях ділянок):

$$Nz(0) = -20 \quad Nz(1.99999) = 60 \quad Nz(2) = 15$$

$$Nz(4) = 15 \quad Nz(7.99999) = -25 \quad Nz(8) = 0$$

$$My(0) = 0 \quad My(2) = 40 \quad My(3.99999) = 70$$

$$My(4) = 20 \quad My(8) = 0$$

Знайдемо значення згинаючих моментів та прогинів у точках екстремумів:

$$x := 1 \quad \text{Given} \quad Nz(x) = 0 \quad x := \text{Find}(x) \quad x = 0.5 \quad My(x) = -5$$

$$x := 5 \quad \text{Given} \quad Nz(x) = 0 \quad x := \text{Find}(x) \quad x = 5.5 \quad My(x) = 31.25$$

$$x := 5 \quad \text{Given} \quad EI\theta(x) = 0$$

$$x := \text{Find}(x) \quad x = 4.644 \quad EIw(x) = -156.385$$

Побудуємо епюри внутрішніх сил, згинаючих моментів, кутів повороту і прогинів (рис. 4.29).



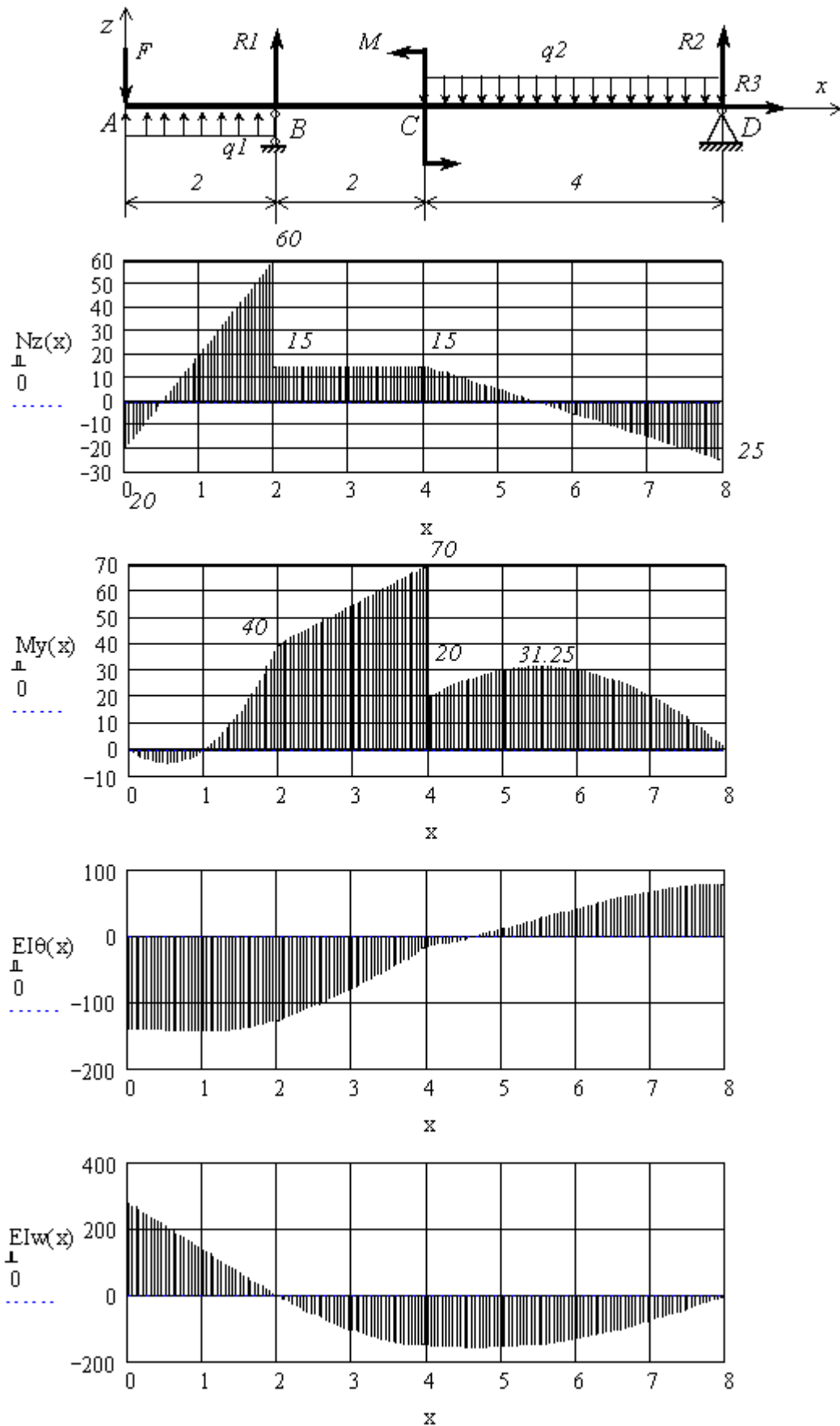


Рис. 4.29. Епюри внутрішніх сил і переміщень для балки

Для того, щоб підібрати переріз довільної форми, необхідно визначити осьовий момент опору за умовою міцності при плоскому згині

$$\frac{M_{y \max}}{W_y} \leq \sigma_{adm},$$

де  $M_{y \max}$  – максимальне значення згинаючого момента, яке визначається з епюри;

$W_y$  – осьовий момент опору.

$$M_{\max} := M_y(3.999999) \quad M_{\max} = 70 \quad (\text{кНм})$$

$$W_y := \frac{M_{\max} \cdot 100}{\sigma_{adm}} \quad W_y = 437.5 \quad (\text{см}^3)$$

За відомим моментом опору підберемо різні форми перерізів (рис. 4.30).

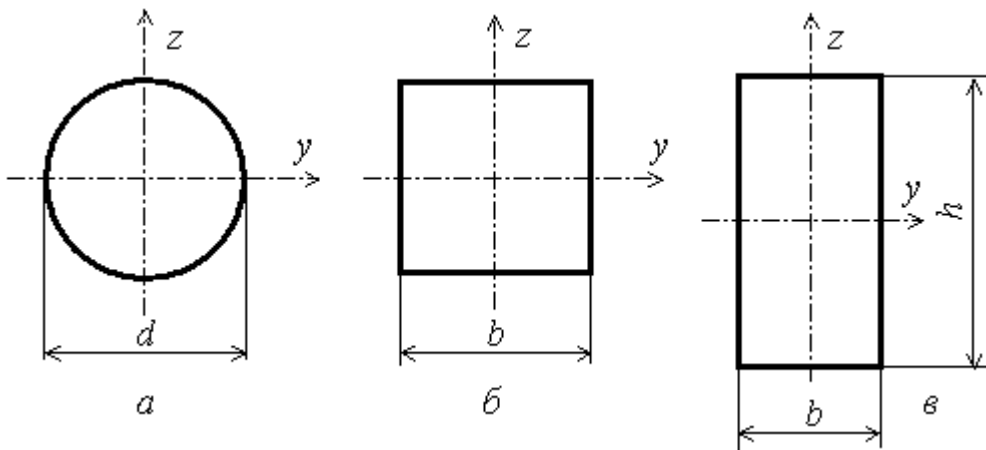


Рис. 4.30. Перерізи різної форми для балки при плоскому згині

Момент опору для кругового перерізу (рис. 4.30, а)

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32},$$

звідки визначаємо діаметр і площу поперечного перерізу:

$$d := \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \cdot W_y} \quad d = 16.456 \quad (\text{см}) \quad A_1 := \pi \cdot \frac{d^2}{4} \quad A_1 = 212.687 \quad (\text{см}^2)$$

Момент опору для квадратного перерізу (рис. 4.30, б)

$$W_y = \frac{b^3}{6}.$$

Визначаємо сторону квадрата і площу перерізу:

$$b := \sqrt[3]{6W_y} \quad b = 13.795 \quad (\text{см}) \quad A_2 := b^2 \quad A_2 = 190.292 \quad (\text{см}^2)$$

Момент опору для прямокутного перерізу (рис. 4.30, в)

$$W_y = \frac{bh^2}{6}.$$

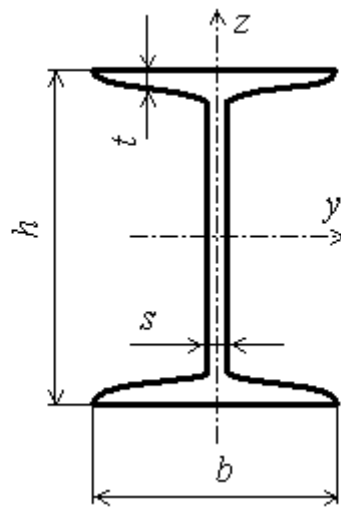
При умові  $\frac{h}{b} = 2 \Rightarrow W_y = \frac{2}{3}b^3$ , звідки визначаємо розміри сторін прямокутного перерізу і площу:

$$b := \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot W_y} \quad b = 8.69 \text{ (см)} \quad h := 2 \cdot b \quad h = 17.38 \text{ (см)}$$

$$A_3 := h \cdot b \quad A_3 = 151.034 \text{ (см}^2\text{)}$$

Із сортаменту підберемо розміри двотаврового перерізу (рис. 4.31).

Двотавр № 30



$$W_y := 472 \text{ (см}^3\text{)}$$

$$A := 46.5 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$I := 7080 \text{ (см}^4\text{)}$$

$$b := 13.5 \text{ (см)}$$

$$h := 30 \text{ (см)}$$

$$t := 1.02 \text{ (см)}$$

$$s := 0.65 \text{ (см)}$$

Рис. 4.31. Двотавровий переріз

Порівняємо вагу одного погонного метра стержнів із поперечними перерізами різної форми, для цього при однаковому матеріалі достатньо знайти відношення площ поперечних перерізів

$$\frac{A_1}{A} = 4.574 \quad \frac{A_2}{A} = 4.092 \quad \frac{A_3}{A} = 3.248$$

З порівняння видно, що найбільш ефективним (тобто, найлегшим) перерізом є двотавровий. Він у 4.574 рази легший за круговий, у 4.092 рази за квадратний і у 3.248 – за прямокутний.

Перевіримо міцність двотаврового перерізу.

Проаналізуємо розподілення нормальних і дотичних напружень по перерізу (рис. 4.32).

Перевірка міцності двотаврового перерізу проводиться для трьох точок (рис. 4.32).

1. У першій точці має місце одновісний напружений стан – у крайніх волокнах виникають максимальні нормальні напруження, дотичні напруження дорівнюють 0.

Умова міцності:

$$\frac{M_{y \max}}{W_y} \leq \sigma_{adm},$$

де  $W_y = 472 \text{ (см}^3\text{)}$  – момент опору прийнятого перерізу.

$$\frac{M_{\max} \cdot 100}{W_y} = 14.831 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right) \quad \sigma_{\max} \leq \sigma_{adm} \quad \left| \frac{14.831 - 16}{16} \cdot 100 \right| = 7.306$$

Умова міцності виконується із запасом 7.306 %.

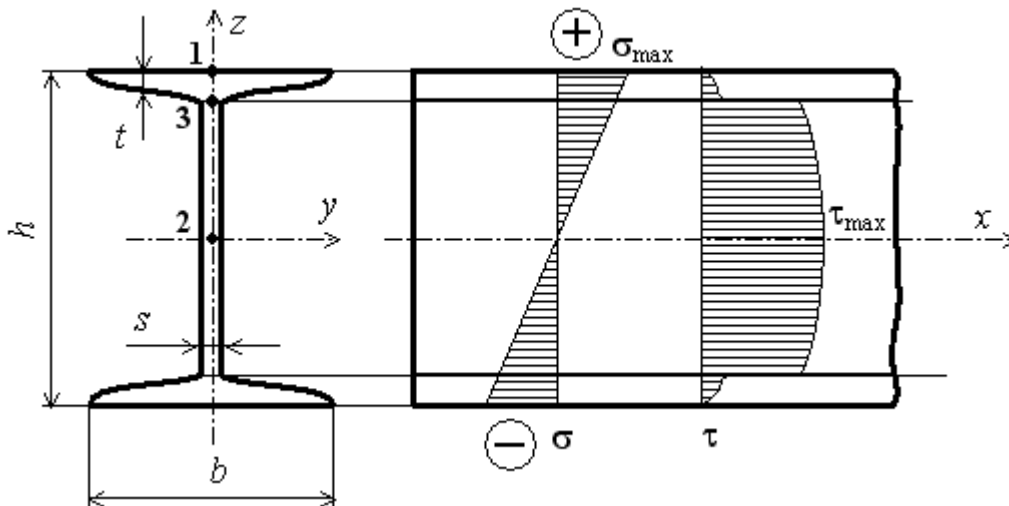


Рис. 4.32. Розподілення напружень по перерізу у двотавровій балці

2. У другій точці (центрі ваги перерізу) виникає чистий зсув – дотичні напруження набувають максимальних значень, а нормальні напруження дорівнюють нулю. Умова міцності для точки 2:

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm}, \quad \tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{2}.$$

Визначимо максимальне дотичне напруження за формулою Журавського:

$$\tau_{\max} = \frac{N_{z \max} \cdot S_{\max}}{I_y \cdot s},$$

де  $N_{z \max}$  – максимальне значення поперечної сили, яке визначається з епюри поперечних сил;

$S_{\max}$  – максимальний статичний момент площі поперечного перерізу двотавра відносно осі  $y$ ;

$I_y$  – осьовий момент інерції двотавра;

$s$  – ширина стінки двотаврового перерізу.

$$S_{\max} := b \cdot t \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) + \frac{s}{2} \cdot \left( \frac{h}{2} - t \right)^2 \quad S_{\max} = 263.045 \text{ (см}^3\text{)}$$

$$N_{z\max} := Nz(1.99999) \quad N_{z\max} = 60$$

$$\tau_{\max} := \frac{N_{z\max} \cdot S_{\max}}{I \cdot s} \quad \tau_{\max} = 3.43 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

$$\tau_{\text{adm}} := \frac{\sigma_{\text{adm}}}{2} \quad \tau_{\text{adm}} = 8 \quad \tau_{\max} \leq \tau_{\text{adm}}$$

Умова міцності виконується.

3. Проаналізуємо напруження у точці 3, де різко змінюється форма перерізу.

З епюр розподілення напружень по перерізу видно, що у точці 3 одночасно діють і нормальні, і дотичні напруження, тобто має місце складний плоский напружений стан, для якого умова міцності

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{\text{adm}}.$$

Визначимо нормальне і дотичне напруження у точці 3 для перерізу балки, де одночасно великі і нормальні, і дотичні напруження:

$$M_{y1} := M_y(3.99999) \quad M_{y1} = 70 \quad (\text{кНм})$$

$$N_{z1} := Nz(4) \quad N_{z1} = 15$$

$$\sigma_k := \frac{M_{y1} \cdot 10^2}{I} \cdot \left( \frac{h}{2} - t \right) \quad \sigma_k = 13.822 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

$$S_n := b \cdot t \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \quad S_n = 199.527 \quad (\text{см}^3)$$

$$\tau_k := N_{z1} \cdot \frac{S_n}{I \cdot d} \quad \tau_k = 0.026 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

$$\sqrt{\sigma_k^2 + 4 \cdot \tau_k^2} = 13.822 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right) \quad 13.822 \leq \sigma_{\text{adm}}$$

Перевіримо іншу точку, де одночасно великі момент і поперечна сила:

$$M_{y2} := M_y(2) \quad M_{y2} = 40 \quad (\text{кНм})$$

$$N_{z2} := Nz(1.999999) \quad N_{z2} = 60 \quad (\text{кН})$$

$$\sigma_k := \frac{M_{y2} \cdot 10^2}{I} \cdot \left( \frac{h}{2} - t \right) \quad \sigma_k = 7.898 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

$$S_n := b \cdot t \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \quad S_n = 199.527 \quad (\text{см}^3)$$

$$\tau_k := N_{z2} \cdot \frac{S_n}{I \cdot d} \quad \tau_k = 0.103 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

$$\sqrt{\sigma_k^2 + 4 \cdot \tau_k^2} = 7.901 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right) \quad 7.901 \leq \sigma_{\text{adm}}$$

Умови міцності виконуються.

Перевіримо умову жорсткості:

$$w_{\max} \leq w_{adm},$$

де  $w_{adm}$  – допустимий прогин, який визначається із умов експлуатації і складає, як правило, 0.01-0.1% від довжини стержня, тобто  $\frac{L}{1000} \div \frac{L}{100}$ .

$$\text{Прийmemo } w_{adm} = \frac{L}{200} = 0.04 \text{ (м)}.$$

З епюри видно, що максимальний прогин виникає у початковому перерізі при  $x = 0$

$$EIw_{\max} := EIw(0) \quad w_{\max} := \frac{EIw(0) \cdot 10^6}{E \cdot I}$$

$$w_{\max} = 1.962 \text{ (см)} \quad w_{\max} \leq w_{adm}$$

Умова жорсткості виконується, отже остаточно приймаємо двотавр № 30.

#### 4.9. Приклади розрахунку стержневих систем на міцність і жорсткість при складних навантаженнях

**ПРИКЛАД 4.9.** Розрахунок на міцність при неплоскому згині.

Для заданої балки (рис. 4.33) підібрати розміри перерізу прямокутної форми при  $\frac{h}{b} = k$ , раціонально розмістивши переріз головними осями у вертикальній площині. Визначити положення нейтральної лінії у небезпечному перерізі і побудувати просторову епюру напружень у цьому перерізі. Визначити повне переміщення точки  $K$ .

Матеріал стержня – сталь Ст.3, довжина  $a = 1 \text{ м}$ .

Вхідні дані:

$$q := 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad M1 := 15 \text{ кНм} \quad F := 40 \text{ кН} \quad M2 := 10 \text{ кНм}$$

$$\sigma_{adm} := 16 \cdot 10^4 \text{ КПа} \quad E := 2 \cdot 10^8 \text{ КПа} \quad a := 1 \text{ м} \quad \alpha := \frac{\pi}{6} \quad k := 2$$

Розв'язання:

1. Визначення внутрішніх зусиль у поперечних перерізах стержня.

Вводимо систему координат, пов'язану зі стержнем так, щоб вісь  $x$  співпадала з віссю стержня (початок координат на лівому торці), а осі  $y$  і  $z$  лежали у головних площинах поперечного перерізу (у даному випадку у горизонтальній і вертикальній площинах). Це дозволить при визначенні напружень і переміщень скористатись принципом незалежності дії сил, тобто розглядати згин у двох головних площинах окремо.

Визначаємо проєкції навантажень окремо на кожен з головних площин і будуємо епюри поперечних сил і згинаючих моментів.

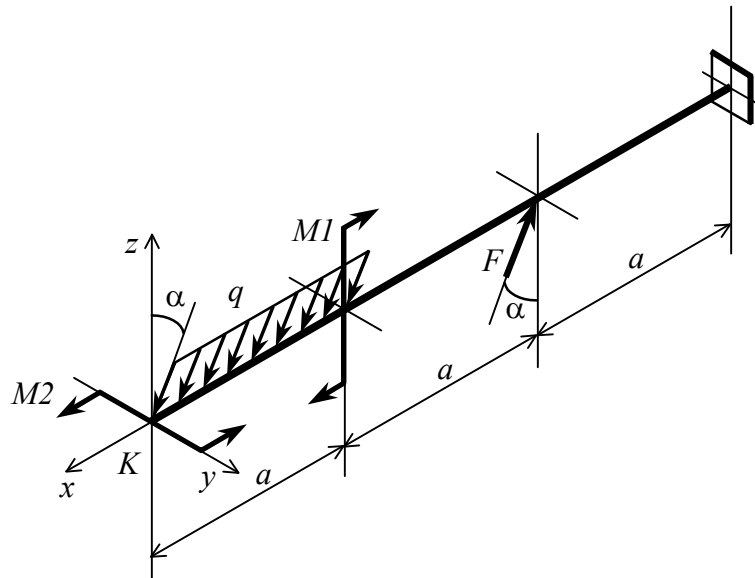


Рис. 4.33. Розрахункова схема балки

**Площина  $zOx$  (вертикальна):**

Проекції зовнішнього навантаження у вертикальній площині

$$q_1 := q \cdot \cos(\alpha) \quad F_1 := F \cdot \cos(\alpha)$$

$$q_1 = 17.321 \quad F_1 = 34.641$$

Функції поперечних сил і згинаючих моментів

$$N_z(x, R_z) := -q_1 \cdot x \cdot \Phi(x) + q_1 \cdot (x - a) \cdot \Phi(x - a) + F_1 \cdot \Phi(x - 2 \cdot a) + R_z \cdot \Phi(x - 3 \cdot a)$$

$$M_y(x, R_z, MR_y) := -q_1 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \Phi(x) + q_1 \cdot \frac{(x - a)^2}{2} \cdot \Phi(x - a) \dots$$

$$+ F_1 \cdot (x - 2 \cdot a) \cdot \Phi(x - 2 \cdot a) + R_z \cdot (x - 3 \cdot a) \cdot \Phi(x - 3 \cdot a) \dots$$

$$+ M_1 \cdot \Phi(x - a) + MR_y \cdot \Phi(x - 3 \cdot a)$$

Визначимо невідомі опорні реакції

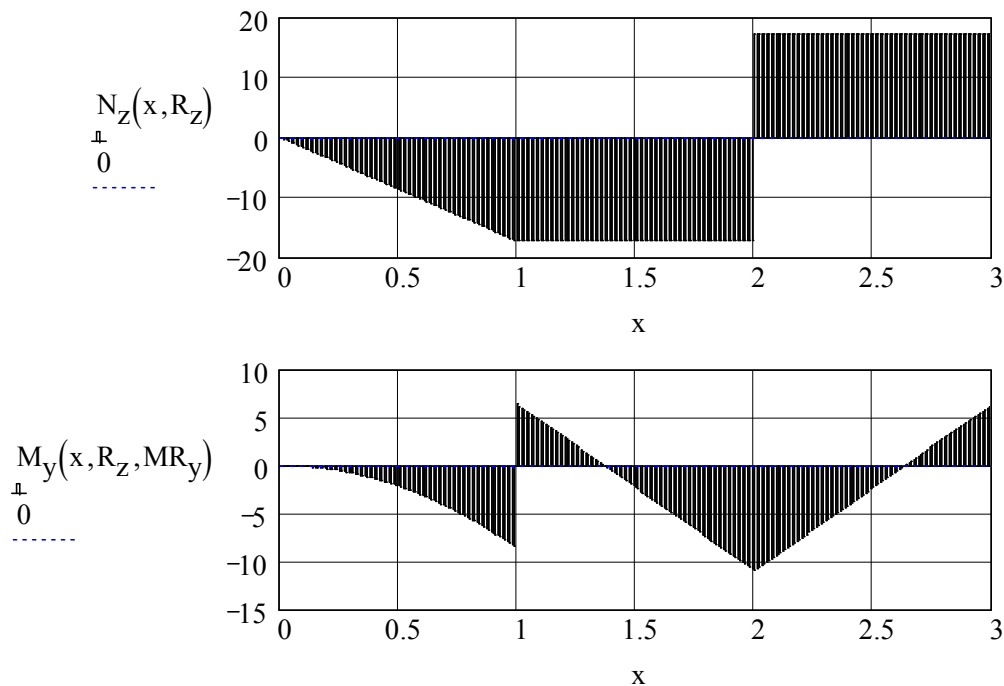
$$R_z := 0 \quad MR_y := 0$$

$$\text{Given} \quad M_y(3 \cdot a, R_z, MR_y) = 0 \quad N_z(3 \cdot a, R_z) = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_z \\ MR_y \end{pmatrix} := \text{Find}(R_z, MR_y) \quad \begin{pmatrix} R_z \\ MR_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17.321 \\ -6.34 \end{pmatrix}$$

Побудуємо епюри поперечних сил і згинаючих моментів у вертикальній площині.

$$x := 0, 0.01 \dots 3 \cdot a$$



$$N_Z(a, R_Z) = -17.321 \quad N_Z(2a, R_Z) = 17.321$$

$$M_Y(a - 10^{-5}, R_Z, MR_Y) = -8.66 \quad M_Y(a, R_Z, MR_Y) = 6.34$$

$$M_Y(2a, R_Z, MR_Y) = -10.981 \quad M_Y(3a - 10^{-5}, R_Z, MR_Y) = 6.34$$

### Площина $yOx$ (горизонтальна):

Проекції зовнішнього навантаження у горизонтальній площині

$$q_2 := q \cdot \sin(\alpha) \quad F_2 := F \cdot \sin(\alpha)$$

$$q_2 = 10 \quad F_2 = 20$$

Функції поперечних сил і згинаючих моментів

$$N_Y(x, R_Y) := -q_2 \cdot x \cdot \Phi(x) + q_2 \cdot (x - a) \cdot \Phi(x - a) + F_2 \cdot \Phi(x - 2 \cdot a) + R_Y \cdot \Phi(x - 3 \cdot a)$$

$$M_Z(x, R_Y, MR_Z) := -q_2 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \Phi(x) + q_2 \cdot \frac{(x - a)^2}{2} \cdot \Phi(x - a) \dots$$

$$+ F_2 \cdot (x - 2 \cdot a) \cdot \Phi(x - 2 \cdot a) + R_Y \cdot (x - 3 \cdot a) \cdot \Phi(x - 3 \cdot a) \dots$$

$$+ M_2 \cdot \Phi(x) + MR_Z \cdot \Phi(x - 3 \cdot a)$$

Визначимо невідомі опорні реакції

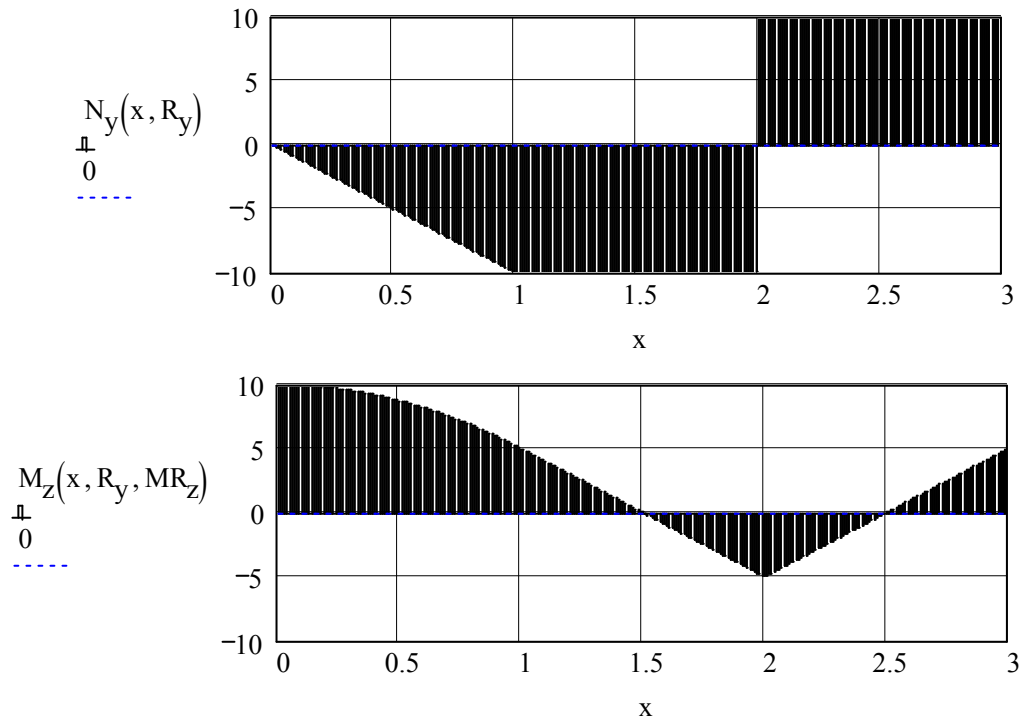
$$R_Y := 0 \quad MR_Z := 0$$

$$\text{Given} \quad M_Z(3 \cdot a, R_Y, MR_Z) = 0 \quad N_Y(3 \cdot a, R_Y) = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_Y \\ MR_Z \end{pmatrix} := \text{Find}(R_Y, MR_Z) \quad \begin{pmatrix} R_Y \\ MR_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Побудуємо епюри поперечних сил і згинаючих моментів





$$\begin{aligned}
 N_y(a, R_y) &= -10 & N_y(2a - 10^{-5}, R_y) &= -10 & N_y(2a, R_y) &= 10 \\
 M_z(0, R_y, MR_z) &= 10 & M_z(a, R_y, MR_z) &= 5 & M_z(2a, R_y, MR_z) &= -5 \\
 M_z(3a - 10^{-5}, R_y, MR_z) &= 5
 \end{aligned}$$

Найбільші моменти діють у перерізі  $x = 2a$ , причому момент у вертикальній площині більший. У зв'язку з цим переріз доцільно розмістити так, щоб більша сторона розташовувалась у площині більшого згинаючого момента, тобто вертикально (рис. 4.34).

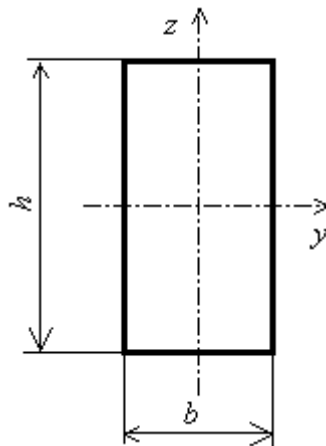


Рис. 4.34. Раціональне розташування поперечного перерізу у вибраній системі координат

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
 M_{ym} &:= M_y(2 \cdot a, R_z, MR_y) & M_{zm} &:= M_z(2 \cdot a, R_y, MR_z) \\
 M_{ym} &= -10.981 & M_{zm} &= -5 \quad (\text{кН}\cdot\text{м})
 \end{aligned}$$

Напруження у точках перерізу у цьому разі обчислюють за формулою<sup>\*)</sup>

$$\sigma = \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y$$

де  $I_y = \frac{bh^3}{12}$ ,  $I_z = \frac{hb^3}{12}$  – осьові моменти інерції перерізу (поки що невідомі);

$z, y$  – координати точки перерізу у головних центральних осях.

Умова міцності записується для найбільш небезпечної точки перерізу – однієї з кутових точок, де напруження мають однаковий знак.

Умова міцності при неплоскому згині має вигляд:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}; \quad \sigma_{\max} = \left| \frac{M_y}{W_y} \right| + \left| \frac{M_z}{W_z} \right|,$$

де  $W_y = \frac{bh^2}{6}$ ,  $W_z = \frac{hb^2}{6}$  – осьові моменти опору.

Розміри перерізу визначимо за допомогою блоку Given...Find

$h := 1$     $b := 1$    Given

$$\frac{|M_{ym}|}{b \cdot h^2} \cdot 6 + \frac{|M_{zm}|}{h \cdot b^2} \cdot 6 = \sigma_{adm} \quad h = k \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} := \text{Find}(h, b) \quad \begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.116 \\ 0.058 \end{pmatrix}$$

Моменти інерції площі у перерізі ( $m^4$ )

$$J_y := \frac{b \cdot h^3}{12} \quad J_z := \frac{h \cdot b^3}{12} \quad J_y = 7.626 \times 10^{-6} \quad J_z = 1.907 \times 10^{-6}$$

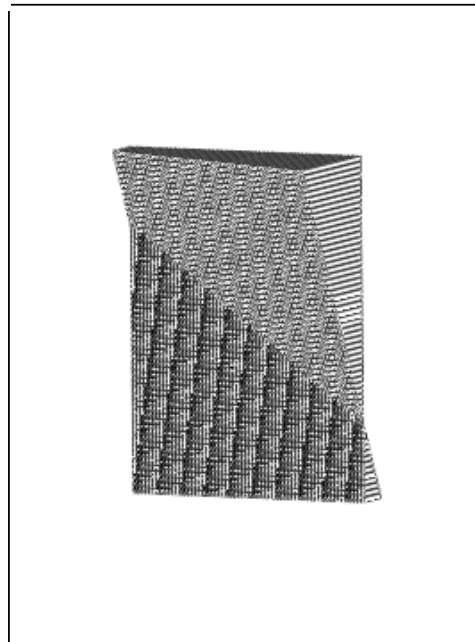
Побудуємо поверхню напружень у перерізі засобами MathCAD.

$n := 60$     $m := 60$

$$\sigma(z, y) := \left| \frac{M_{ym}}{J_y} \right| \cdot z + \left| \frac{M_{zm}}{J_z} \right| \cdot y \quad \sigma_0(z, y) := 0$$

$f := \text{CreateMesh}(\sigma, -n, n, -m, m, n)$     $f_2 := \text{CreateMesh}(\sigma_0, -n, n, -m, m, n)$

<sup>\*)</sup> Знаки перед доданками вибирають, аналізуючи напрямки дії моментів і напрямки осей координат.



f, f2

Напруження у кутових точках перерізу:

$$\sigma\left(\frac{h}{2}, \frac{b}{2}\right) = 1.6 \times 10^5 \quad \sigma\left(\frac{-h}{2}, \frac{b}{2}\right) = -7.479 \times 10^3$$

$$\sigma\left(\frac{-h}{2}, \frac{-b}{2}\right) = -1.6 \times 10^5 \quad \sigma\left(\frac{h}{2}, \frac{-b}{2}\right) = 7.479 \times 10^3$$

Визначимо переміщення у вертикальній і горизонтальній площинах:

Кути повороту перерізів:

$$\theta_z(x, \theta_{0z}) := \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \int_0^x M_y(x, R_z, MR_y) dx + \theta_{0z}$$

$$\theta_{0z} := 0 \quad \text{Given} \quad \theta_z(3 \cdot a, \theta_{0z}) = 0$$

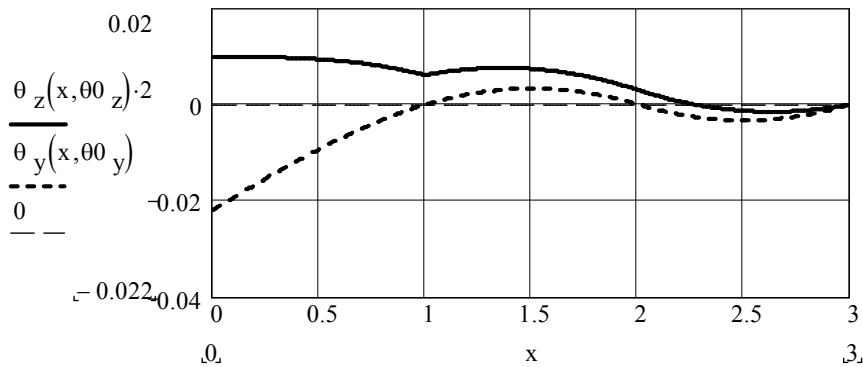
$$\theta_{0z} := \text{Find}(\theta_{0z}) \quad \theta_{0z} = 4.936 \times 10^{-3}$$

$$\theta_y(x, \theta_{0y}) := \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \int_0^x M_z(x, R_y, MR_z) dx + \theta_{0y}$$

$$\theta_{0y} := 0 \quad \text{Given} \quad \theta_y(3 \cdot a, \theta_{0y}) = 0$$

$$\theta_{0y} := \text{Find}(\theta_{0y}) \quad \theta_{0y} = -0.022$$

Побудуємо графіки кутів повороту перерізів у двох площинах



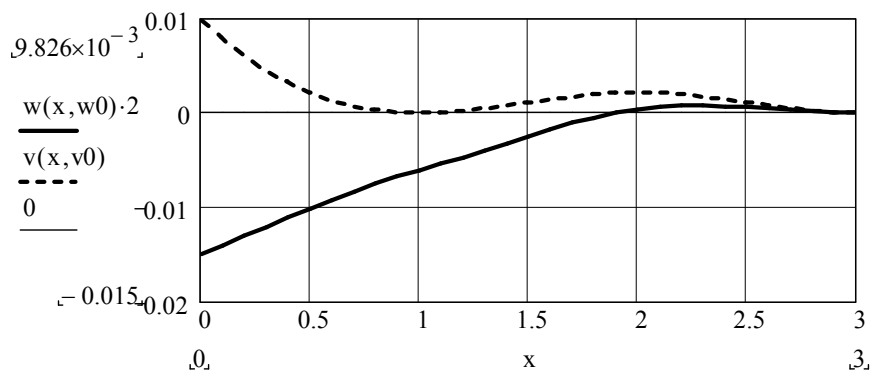
Прогини у головних площинах

$$w(x, w_0) := \int_0^x \theta_z(x, \theta_{0_z}) dx + w_0 \quad w_0 := 0$$

$$\text{Given} \quad w(3 \cdot a, w_0) = 0 \\ w_0 := \text{Find}(w_0) \quad w_0 = -7.507 \times 10^{-3}$$

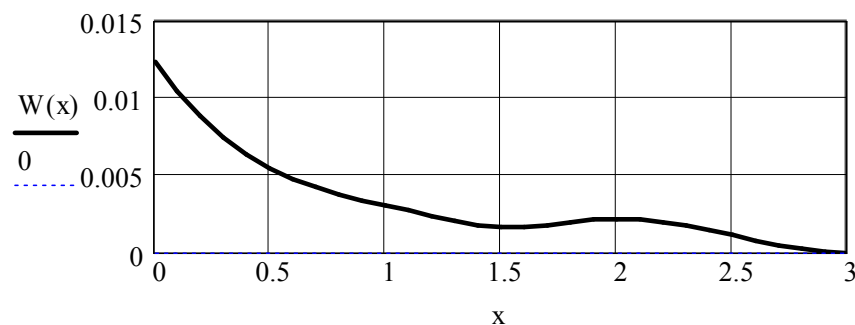
$$v(x, v_0) := \int_0^x \theta_y(x, \theta_{0_y}) dx + v_0 \quad v_0 := 0$$

$$\text{Given} \quad v(3 \cdot a, v_0) = 0 \\ v_0 := \text{Find}(v_0) \quad v_0 = 9.826 \times 10^{-3}$$



Сумарний прогин

$$W(x) := \sqrt{w(x, w_0)^2 + v(x, v_0)^2}$$



Максимальний прогин – на лівому торці балки

$$w_{\max} := W(0) \quad w_{\max} = 0.012 \text{ м}$$

**ПРИКЛАД 4.10.** Позацентричний стиск стержня великої жорсткості.

Для колони заданого перерізу (рис. 4.35) визначити допустиме навантаження  $P_{adm}$ , якщо відомі координати  $y_P, z_P$  точки прикладення рівнодійної всіх навантажень і допустиме напруження  $\sigma_{adm}^- = 20 \text{ кН/см}^2$ ,  $\sigma_{adm}^+ = 2 \text{ кН/см}^2$ . Побудувати просторову епюру розподілу напружень у перерізі.

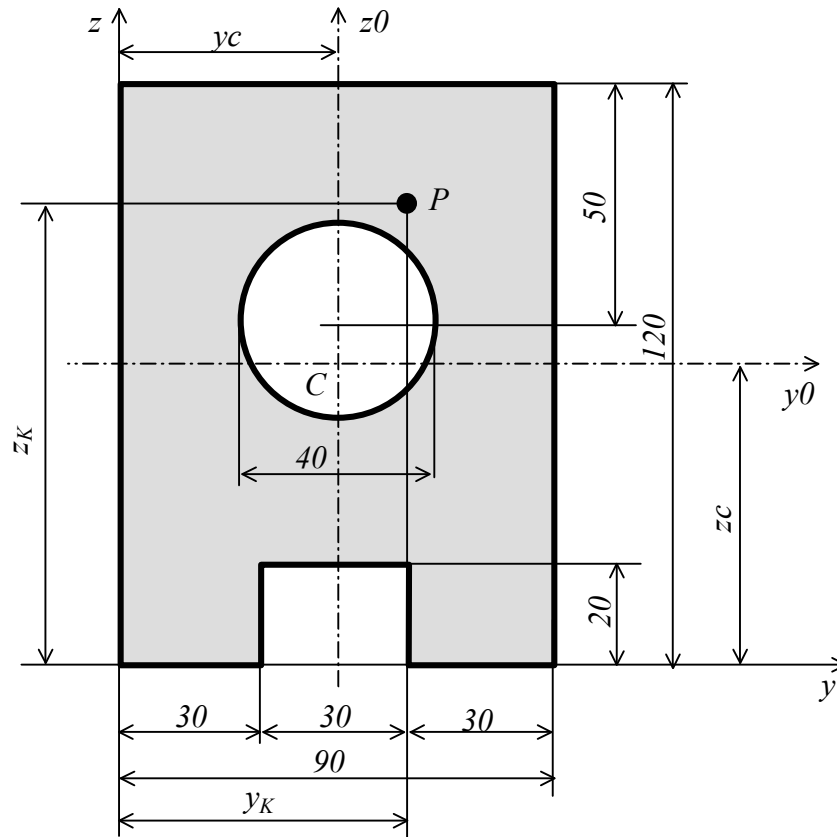


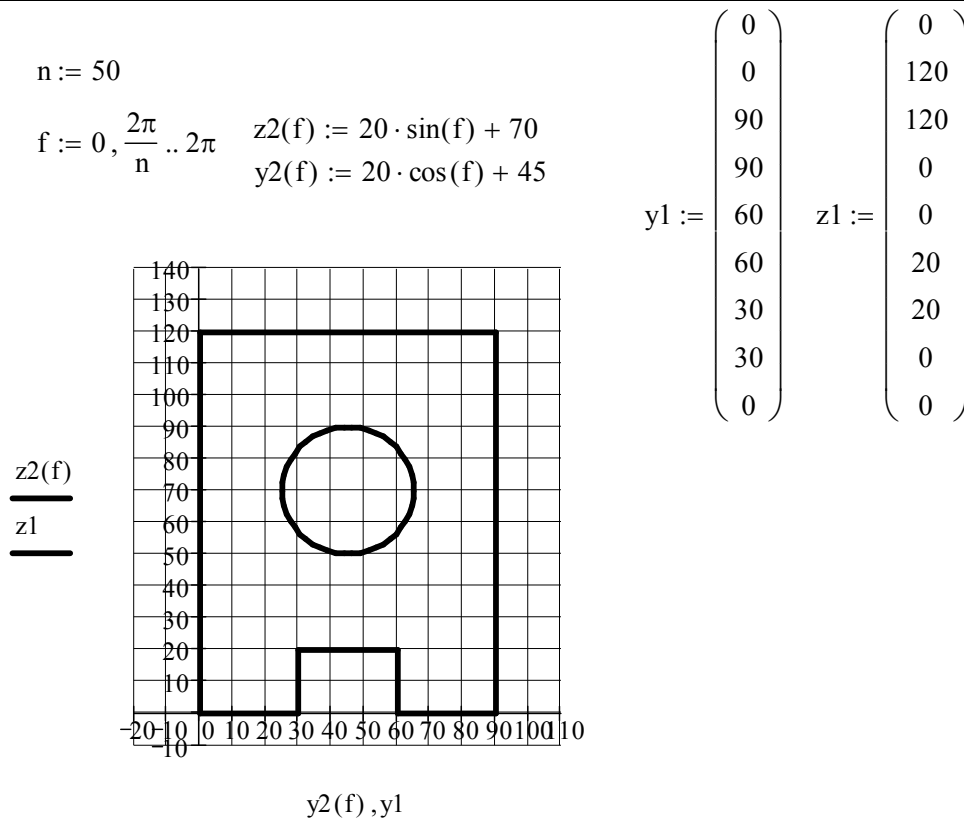
Рис. 4.35. Поперечний переріз стержня великої жорсткості

Вхідні дані:

Розміри поперечного перерізу стержня показано на рис. 4.35,

- $z_P := 100$     $y_P := 60$    - координати точки прикладення рівнодійної (см),  
 $\sigma_1 := 2$     $\sigma_2 := 20$    - допустимі напруження при розтягу і стиску (кН/см\*\*2)

Побудуємо переріз засобами пакета MathCAD:



Площа поперечного перерізу (см<sup>2</sup>):

$$A := 120 \cdot 90 - \pi \cdot \frac{40^2}{4} - 20 \cdot 30 \quad A = 8.943 \times 10^3$$

Статичний момент площі відносно осі у (см<sup>3</sup>):

$$S_y := 120 \cdot 90 \cdot 60 - \pi \cdot \frac{40^2}{4} \cdot 70 - 20 \cdot 30 \cdot 10 \quad S_y = 5.54 \times 10^5$$

Координати центра ваги (см):

$$\frac{S_y}{A} = 61.949 \quad z_c := \frac{S_y}{A} \quad z_c = 61.949$$

$$y_c := 45$$

Координати точки прикладення рівнодійної у головних осях (см)

$$z_{p0} := z_p - z_c \quad z_{p0} = 38.051 \quad y_{p0} := y_p - y_c \quad y_{p0} = 15$$

Моменти інерції перерізу у головних осях (см<sup>4</sup>)

$$I_{y0} := \frac{90 \cdot 120^3}{12} + 90 \cdot 120 \cdot (z_c - 60)^2 - \frac{\pi \cdot 40^4}{64} - \pi \cdot \frac{40^2}{4} \cdot (70 - z_c)^2 \dots$$

$$+ \frac{30 \cdot 20^3}{12} - 30 \cdot 20 \cdot (z_c - 10)^2 \quad I_{y0} = 1.115 \times 10^7$$

$$I_{z0} := \frac{90^3 \cdot 120}{12} - \frac{\pi \cdot 40^4}{64} - \frac{30^3 \cdot 20}{12} \quad I_{z0} = 7.119 \times 10^6$$

Визначимо положення нейтральної лінії у перерізі. Рівняння нейтральної лінії має вигляд:

$$1 + \frac{A}{I_{z0}} y_{p0} y_0 + \frac{A}{I_{y0}} z_{p0} z_0 = 0.$$

Визначимо точки перетину нейтральної лінії з головними осями:

$$z_0 := -\frac{I_{y0}}{A \cdot z_{p0}} \quad z_0 = -32.779 \quad y_0 := -\frac{I_{z0}}{A \cdot y_{p0}} \quad y_0 = -53.07$$

Для побудови нейтральної лінії у MathCAD (рис. 4.36) визначимо координати точок перетину нейтральної лінії з початковими осями координат:

$$y_n := -y_c \quad z_n := \frac{-\frac{A}{I_{z0}} \cdot y_{p0} \cdot y_n - 1}{\left(\frac{A \cdot z_{p0}}{I_{y0}}\right)} \quad z_{n2} := -z_c \quad y_{n2} := \frac{-\frac{A}{I_{y0}} \cdot z_{p0} \cdot z_{n2} - 1}{\left(\frac{A \cdot y_{p0}}{I_{z0}}\right)}$$

$$z_n = -4.984 \quad y_{n2} = 47.228$$

$$z(y) := (z_c + z_n) - \frac{z_n + z_c}{y_n + y_c} \cdot y \quad z(0) = 56.965 \quad z(y_n + y_c) = 0$$

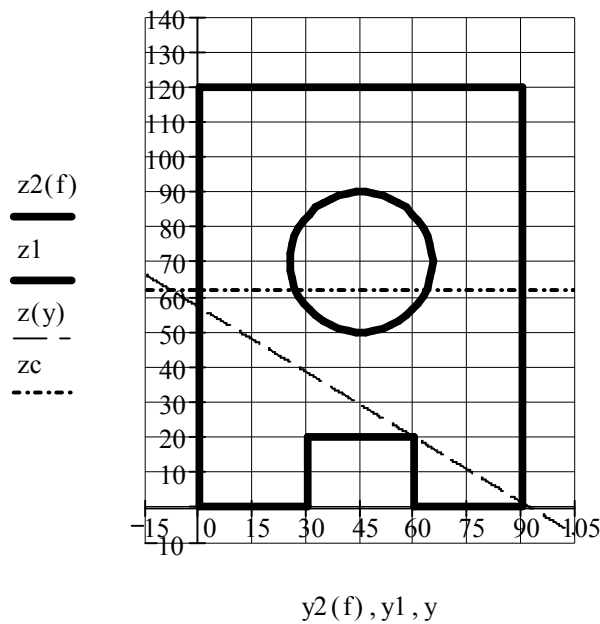


Рис. 4.36. Положення нейтральної лінії у перерізі

Небезпечними точками перерізу є точки, найбільш віддалені від нейтральної лінії, – це кутові точки з координатами

$$y_1 := -45 \quad z_1 := -z_c \quad z_1 = -61.949$$

$$y_2 := 45 \quad z_2 := 120 - z_c \quad z_2 = 58.051$$

Визначимо допустиму силу за умовами міцності для цих точок

$$\sigma_{\max 1} \leq \sigma_1, \quad \sigma_{\min 2} \leq \sigma_2$$

$$F_1 := \frac{\sigma_1}{\left(\frac{-1}{A} - \frac{z_{p0} \cdot z_1}{I_{y0}} - \frac{y_{p0} \cdot y_1}{I_{z0}}\right)} \quad F_1 = 1.029 \times 10^4$$





**ПРИКЛАД 4.11.** Розрахунок на міцність вала при крученні зі згином.

Сталевий вал трансмісії робить  $n$  об/хв і передає через два шківів потужності  $N_1 = 10$  кВт і  $N_3 = 20$  кВт. Діаметри шківів  $D_1 = 60$  см,  $D_2 = 40$  см,  $D_3 = 30$  см;  $a = 100$  см. Натяг ведучої гілки паси вдвічі більший за натяг веденої. Ведучим прийняти шків з невідомою потужністю (рис. 4.38).

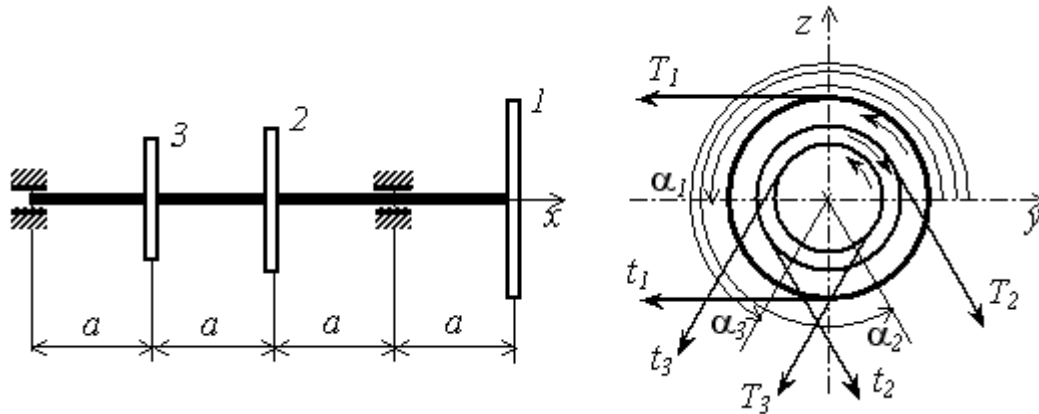


Рис. 4.38. Розрахункова схема вала

Вхідні дані:

$\alpha_1 = 180^\circ$ ,  $\alpha_2 = 300^\circ$ ,  $\alpha_3 = 240^\circ$ ,  $N_1 = 10$  кВт,  $N_3 = 20$  кВт,  
 $n = 100$  об/хв,  $T = 2t$ , Ст.3. Ведучим є шків 2.

Кути відраховуються від осі  $y$  проти годинникової стрілки.

Розв'язання:

Напрямок обертання вала співпадає з напрямком натягу ведучої гілки паси ведучого шківів –  $T_2$ . Напрямок моменту кручення на ведучому шківів співпадає з напрямком  $T_2$ , моменти кручення на ведених шківів мають протилежний напрямок – в сторону ведучих зусиль  $T_1$  і  $T_3$ .

Визначимо потужність на ведучому шківів з умови рівноваги:

$$N_2 = N_1 + N_3 = 30 \text{ кВт}.$$

Введемо вхідні дані:

$n := 100$	$i := 1..3$	$N_i :=$	$D_i :=$
$a := 1$		10	0.60
		30	0.40
		20	0.30

Визначимо моменти кручення на кожному шківів:

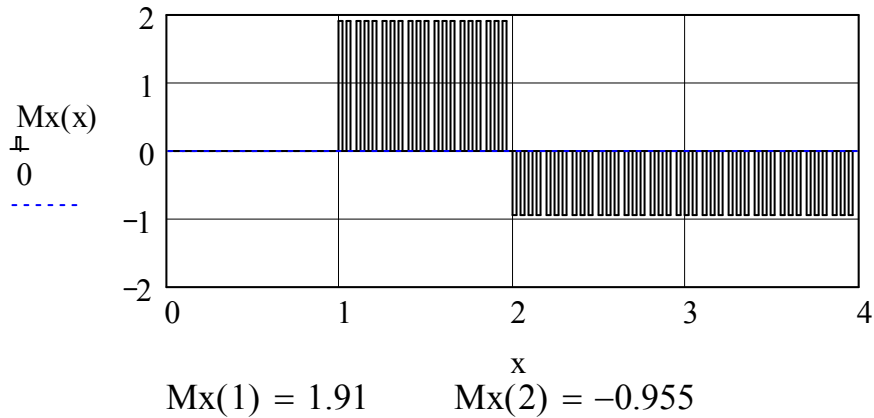
$$M_i := \frac{30 \cdot N_i}{\pi \cdot n} \quad M_i =$$

0.955	(кНм)
2.865	
1.91	

Побудуємо епюру моментів кручення.

$$M_x(x) := M_3 \cdot \Phi(x - a) - M_2 \cdot \Phi(x - 2a) + M_1 \cdot \Phi(x - 4a)$$

$$x := 0, 0.05 \dots 4$$



Знаючи момент кручення на шківі, можна визначити зусилля, які діють на вісь вала (рис. 4.39):

$$M_x = T \cdot \frac{D}{2} - t \cdot \frac{D}{2} = t \cdot \frac{D}{2} \Rightarrow t = \frac{2M_x}{D}, \quad T = 2t = \frac{4M_x}{D}.$$

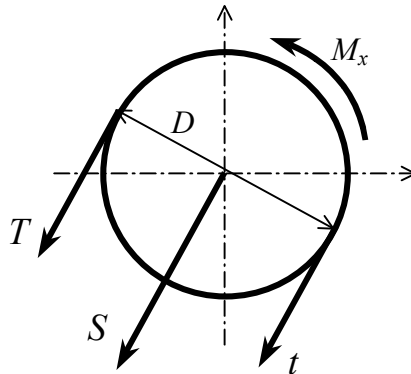


Рис. 4.39. Зусилля, які діють на шків

Визначимо рівнодійну сил натягу, прикладену до осі вала:

$$S = T + t = \frac{6M_x}{D}.$$

$$S_i := \frac{6 \cdot M_i}{D_i} \quad S_i = \begin{array}{|c|} \hline 9.549 \\ \hline 42.972 \\ \hline 38.197 \\ \hline \end{array} \quad (\text{кН})$$

Розкладемо зусилля на горизонтальні і вертикальні складові (рис. 4.40).

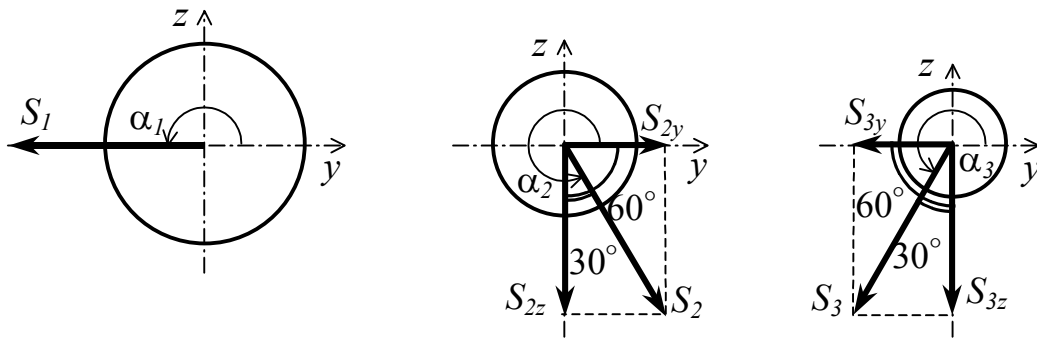


Рис. 4.40. Розкладення рівнодійних сил натягу на складові

$$\begin{aligned}
 S_{1y} &:= S_1 & S_{1z} &:= 0 & S_{2y} &:= S_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & S_{2z} &:= S_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
 S_{3y} &:= S_3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & S_{3z} &:= S_3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} S_{1y} \\ S_{1z} \\ S_{2y} \\ S_{2z} \\ S_{3y} \\ S_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.549 \\ 0 \\ 21.486 \\ 37.215 \\ 19.099 \\ 33.08 \end{pmatrix} \quad (\text{кН})$$

Визначимо опорні реакції від зусиль у кожній площині (рис. 4.41).

$$R_{1y} := 0 \quad R_{2y} := 0 \quad R_{1z} := 0 \quad R_{2z} := 0$$

Given

$$\begin{aligned}
 R_{1y} - S_{3y} + S_{2y} + R_{2y} - S_{1y} &= 0 \\
 -S_{3y} \cdot a + S_{2y} \cdot 2 \cdot a + R_{2y} \cdot 3 \cdot a - S_{1y} \cdot 4 \cdot a &= 0 \\
 R_{1z} - S_{3z} - S_{2z} + R_{2z} &= 0 \\
 -S_{3z} \cdot a - S_{2z} \cdot 2 \cdot a + R_{2z} \cdot 3 \cdot a &= 0
 \end{aligned}$$

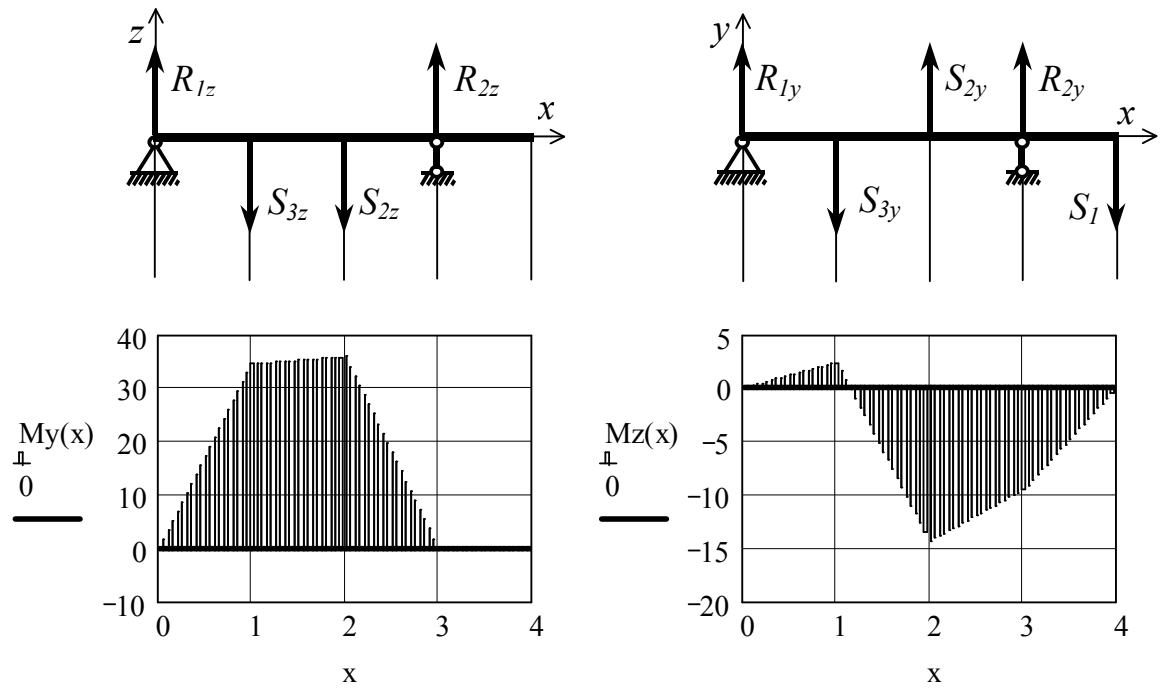
$$\begin{pmatrix} R_{1y} \\ R_{2y} \\ R_{1z} \\ R_{2z} \end{pmatrix} := \text{Find}(R_{1y}, R_{2y}, R_{1z}, R_{2z}) \quad \begin{pmatrix} R_{1y} \\ R_{2y} \\ R_{1z} \\ R_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.387 \\ -4.775 \\ 34.458 \\ 35.836 \end{pmatrix}$$

Побудуємо епюри згинаючих моментів у кожній площині (рис. 4.41):

$$\begin{aligned}
 M_z(x) &:= R_{1y} \cdot x \cdot \Phi(x) - S_{3y} \cdot (x - a) \cdot \Phi(x - a) + S_{2y} \cdot (x - 2) \cdot \Phi(x - 2) \dots \\
 &\quad + R_{2y} \cdot (x - 3) \cdot \Phi(x - 3) - S_{1y} \cdot (x - 4) \cdot \Phi(x - 4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y(x) &:= R_{1z} \cdot x \cdot \Phi(x) - S_{3z} \cdot (x - a) \cdot \Phi(x - a) - S_{2z} \cdot (x - 2) \cdot \Phi(x - 2) \dots \\
 &\quad + R_{2z} \cdot (x - 3) \cdot \Phi(x - 3)
 \end{aligned}$$

$$x := 0, 0.05 \dots 4$$



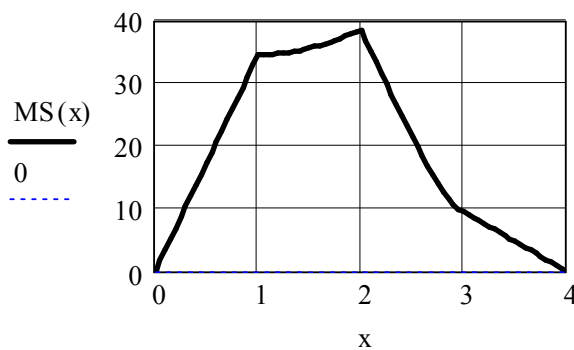
$$\begin{aligned}
 M_y(1) &= 34.458 & M_y(2) &= 35.836 & M_z(1) &= 2.387 & M_z(2) &= -14.324 \\
 M_y(3) &= 0 & & & M_z(3) &= -9.549 & & 
 \end{aligned}$$

Рис. 4.41. Епюри згинаючих моментів у головних площинах

Покажемо розрахункову схему вала та епюри згинаючих моментів в аксонометрії (рис. 4.42).

Повний згинаючий момент:

$$MS(x) := \sqrt{M_y(x)^2 + M_z(x)^2}$$



Визначимо повний розрахунковий момент при крученні зі згином за третьою теорією міцності:

$$M_{x_i} :=$$

$$M_{r_i} := \sqrt{MS(a \cdot i)^2 + (M_{x_i})^2}$$

$$M_{r_i} =$$

$M_x(a)$
$M_x(2a - 10^{-6})$
$M_x(3a)$

34.593
38.64
9.597

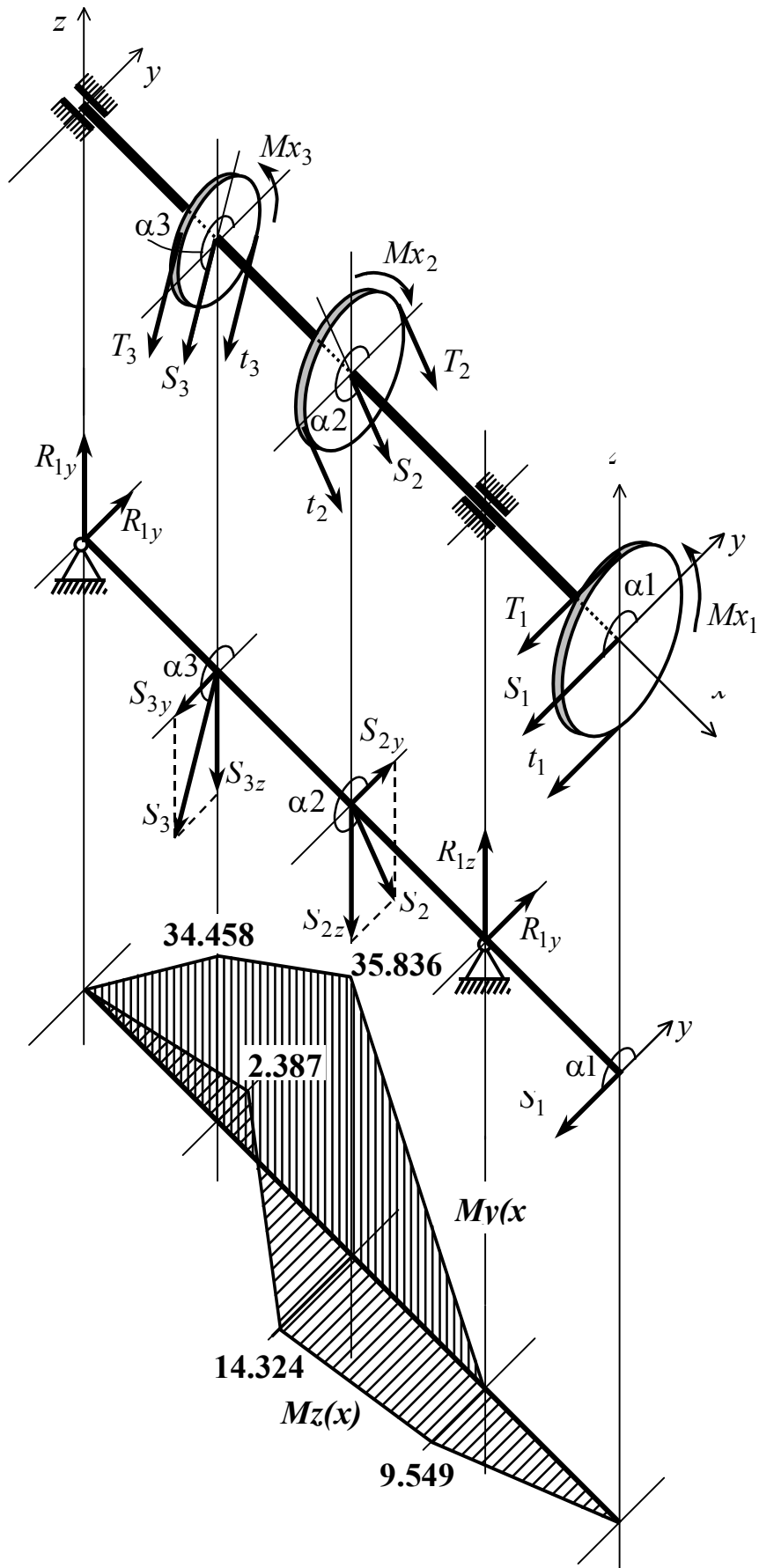


Рис. 4.42. Розрахункова схема вала та епюри згинаючих моментів

Найбільш небезпечний переріз – на другому шківі. Визначимо діаметр вала з умови міцності:

$$\frac{M_{r\max}}{W_0} \leq \sigma_{adm} \quad W_0 := \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

$$\sigma_{adm} := 16$$

$$d := \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{r2} \cdot 100}{\pi \cdot \sigma_{adm}}} \quad d = 13.499 \text{ (см)}$$

Приймаємо діаметр  $d = 140 \text{ мм}$ .

**ПРИКЛАД 4.12.** Сталевий вал обертається зі швидкістю 500 об/хв і передає від ведучої на дві ведені шестерні потужності  $N_3 = 50 \text{ кВт}$ ,  $N_2 = 60 \text{ кВт}$ . Діаметри ободів шестерень  $D_1 = 40 \text{ см}$ ,  $D_2 = 30 \text{ см}$ ,  $D_3 = 16 \text{ см}$ . Ведуча шестерня обертається за годинниковою стрілкою, якщо дивитись із торця  $B$  (рис. 4.43).

Вхідні дані:

$$\alpha_1 := 240 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \alpha_2 := \frac{\pi}{6} \quad \alpha_3 := 300 \cdot \frac{\pi}{180} \quad i := 1..3 \quad D_i :=$$

$$N_3 := 50 \quad N_2 := 60 \quad a := 1 \quad n := 500$$

$$\text{Матеріал Сталь 40ХН} \quad \sigma_t := 80 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

0.4
0.3
0.16

 (м)

Розв'язання:

Ведучою шестернею будемо вважати ту, де не задано потужність; в даному випадку № 1.

Визначимо потужність на ведучій шестерні:

$$N_1 := N_3 + N_2 \quad N_i :=$$

N1	110
N2	60
N3	50

 (кВт)

Визначимо моменти кручення, які виникають на кожній шестерні:

$$M_{x_i} := \frac{N_i \cdot 30}{\pi \cdot n}$$

M <sub>x<sub>i</sub></sub> =	2.101
	1.146
	0.955

 (кНм)

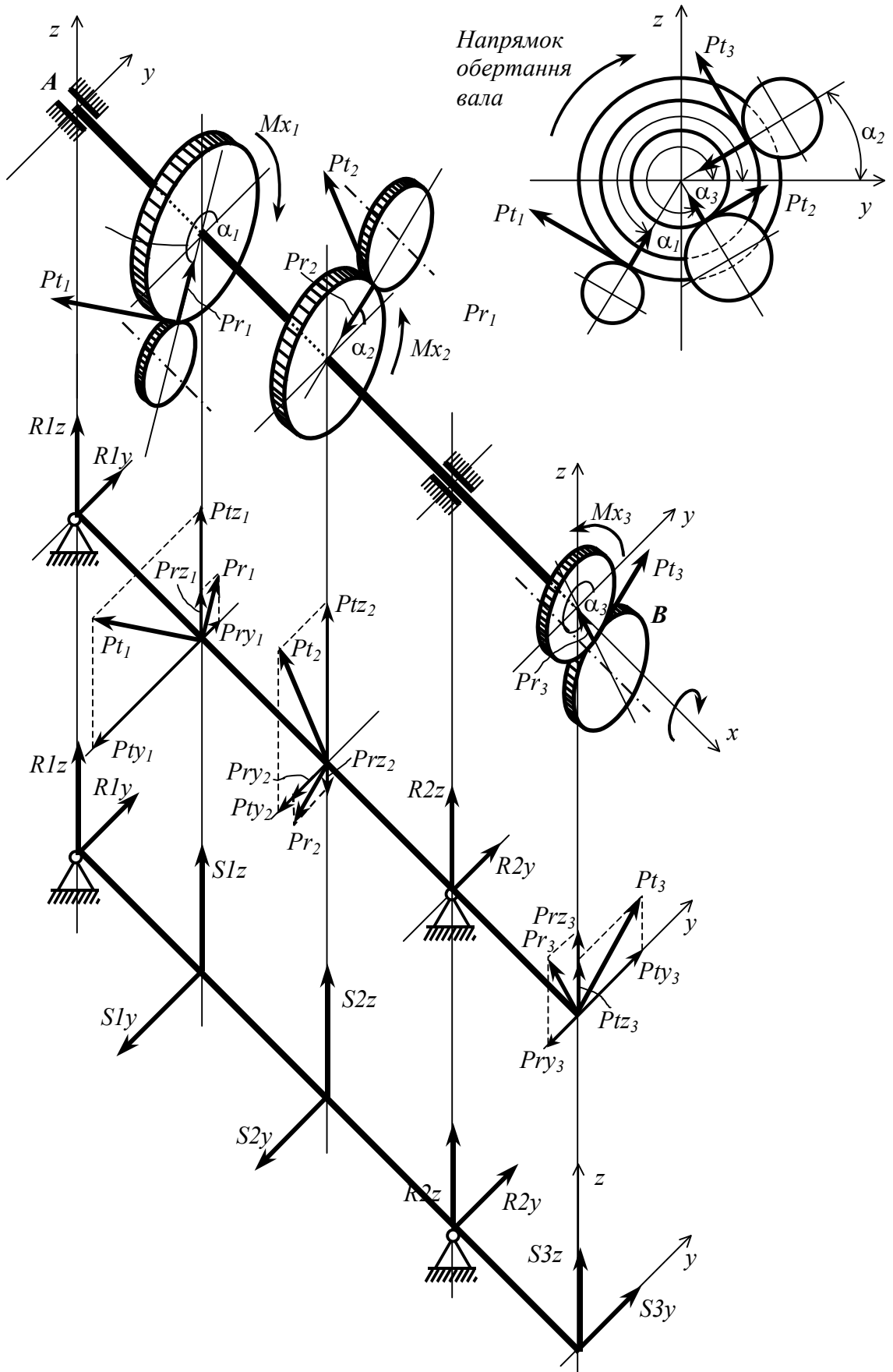
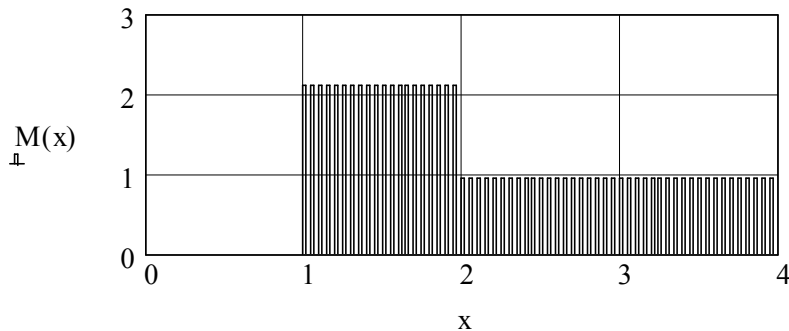


Рис. 4.43. Розрахункова схема вала

Побудуємо епюру моментів кручення:

$$x := 0, 0.05 \dots 4$$

$$M(x) := Mx_1 \cdot \Phi(x-1) - Mx_2 \cdot \Phi(x-2) - Mx_3 \cdot \Phi(x-4)$$



Визначимо тиск, який передається шестернями на вал. При взаємодії двох шестерень в точці зачеплення виникають тангенціальна і радіальна сили (рис. 4.44), залежність між якими, як відомо з теорії зубчастих зачеплень, складає

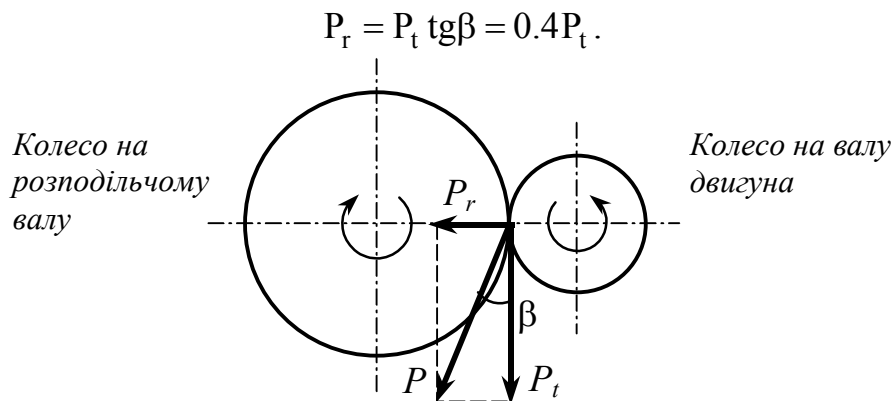


Рис. 4.44. Сили, які виникають при взаємодії зубчастих коліс

Напрямок тангенціальної сили  $P_t$  вибираємо, враховуючи напрямок обертання вала, причому на ведучому колесі сила  $P_t$  направлена у бік обертання вала, а на ведених двох – у протилежному напрямку (рис. 4.43). Тангенціальну силу визначаємо за відомим моментом кручення:

$$R_i := \begin{array}{|c|} \hline D_1 \\ \hline 2 \\ \hline D_2 \\ \hline 2 \\ \hline D_3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad R_i = \begin{array}{|c|} \hline 0.2 \\ \hline 0.15 \\ \hline 0.08 \\ \hline \end{array} \quad (\text{м}) \quad P_{t_i} := \frac{Mx_i}{R_i} \quad P_t = \begin{pmatrix} 10.504 \\ 7.639 \\ 11.937 \end{pmatrix} \quad (\text{кН})$$

$$P_{r_i} := P_{t_i} \cdot 0.4 \quad P_r = \begin{pmatrix} 4.202 \\ 3.056 \\ 4.775 \end{pmatrix} \quad (\text{кН})$$

Визначимо горизонтальні і вертикальні проекції тангенціальних і радіальних сил на кожному колесі (рис. 4.45)



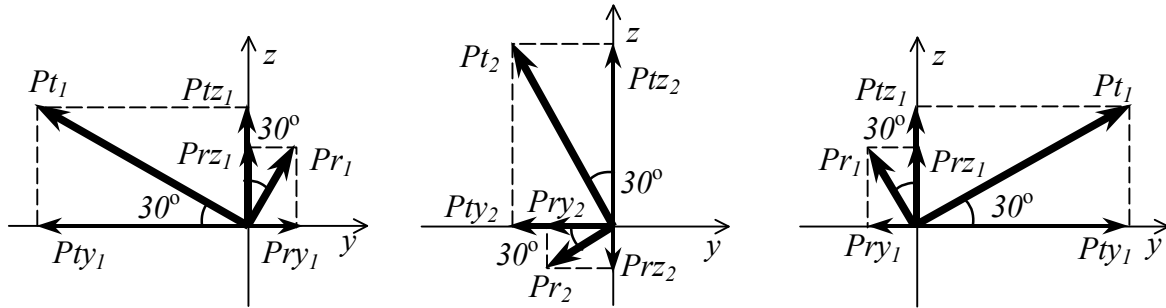


Рис. 4.45. Розкладення радіальних і тангенціальних сил на складові

$$\begin{aligned} Pt_{z1} &:= Pt_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & Pty_1 &:= Pt_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ Pr_{z1} &:= Pr_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & Pry_1 &:= Pr_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} Pt_{z1} \\ Pr_{z1} \\ Pty_1 \\ Pry_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.252 \\ 3.639 \\ 9.097 \\ 2.101 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Pt_{z2} &:= Pt_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & Pty_2 &:= Pt_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ Pr_{z2} &:= Pr_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & Pry_2 &:= Pr_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} Pt_{z2} \\ Pr_{z2} \\ Pty_2 \\ Pry_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.616 \\ 1.528 \\ 3.82 \\ 2.646 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Pt_{z3} &:= Pt_3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & Pty_3 &:= Pt_3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ Pr_{z3} &:= Pr_3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & Pry_3 &:= Pr_3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} Pt_{z3} \\ Pr_{z3} \\ Pty_3 \\ Pry_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.968 \\ 4.135 \\ 10.337 \\ 2.387 \end{pmatrix}$$

Визначимо сумарні проекції сил, що діють на кожному колесі, враховуючи напрямок проекцій тангенціальних і радіальних сил (рис. 4.45):

$$S1z := Ptz1 + Prz1 \quad S1y := Pty1 - Pry1$$

$$S2z := Ptz2 - Prz2 \quad S2y := Pty2 + Pry2$$

$$S3z := Ptz3 + Prz3 \quad S3y := Pty3 - Pry3$$

$$\begin{pmatrix} S1z \\ S1y \\ S2z \\ S2y \\ S3z \\ S3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.891 \\ 6.996 \\ 5.088 \\ 6.466 \\ 10.103 \\ 7.95 \end{pmatrix} \quad (\text{кН})$$

Визначимо опорні реакції у кожній площині і побудуємо епюри поперечних сил і згинаючих моментів:

$$R1y := 1 \quad R2y := 1 \quad R1z := 1 \quad R2z := 1$$

Given

$$R1z + S1z + S2z + R2z + S3z = 0$$

$$S1z \cdot a + S2z \cdot 2 \cdot a + R2z \cdot 3 \cdot a + S3z \cdot 4 \cdot a = 0$$

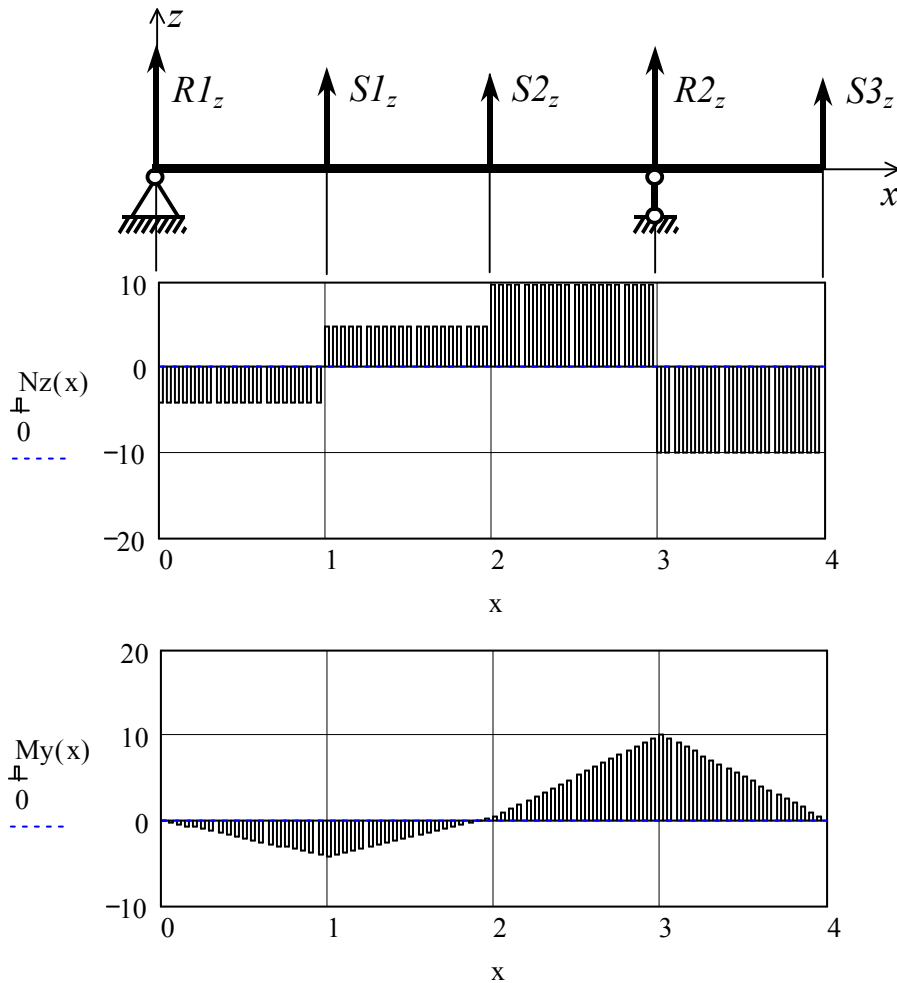
$$R1y - S1y - S2y + R2y + S3y = 0$$

$$S1y \cdot a + S2y \cdot 2a - R2y \cdot 3a - S3y \cdot 4a = 0$$

$$\begin{pmatrix} R1z \\ R2z \\ R1y \\ R2y \end{pmatrix} := \text{Find}(R1z, R2z, R1y, R2y) \quad \begin{pmatrix} R1z \\ R2z \\ R1y \\ R2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.256 \\ -19.827 \\ 9.469 \\ -3.957 \end{pmatrix}$$

$$Nz(x) := \begin{cases} R1z & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ R1z + S1z & \text{if } 1 \leq x \leq 2 \\ R1z + S1z + S2z & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \\ R1z + S1z + S2z + R2z & \text{if } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

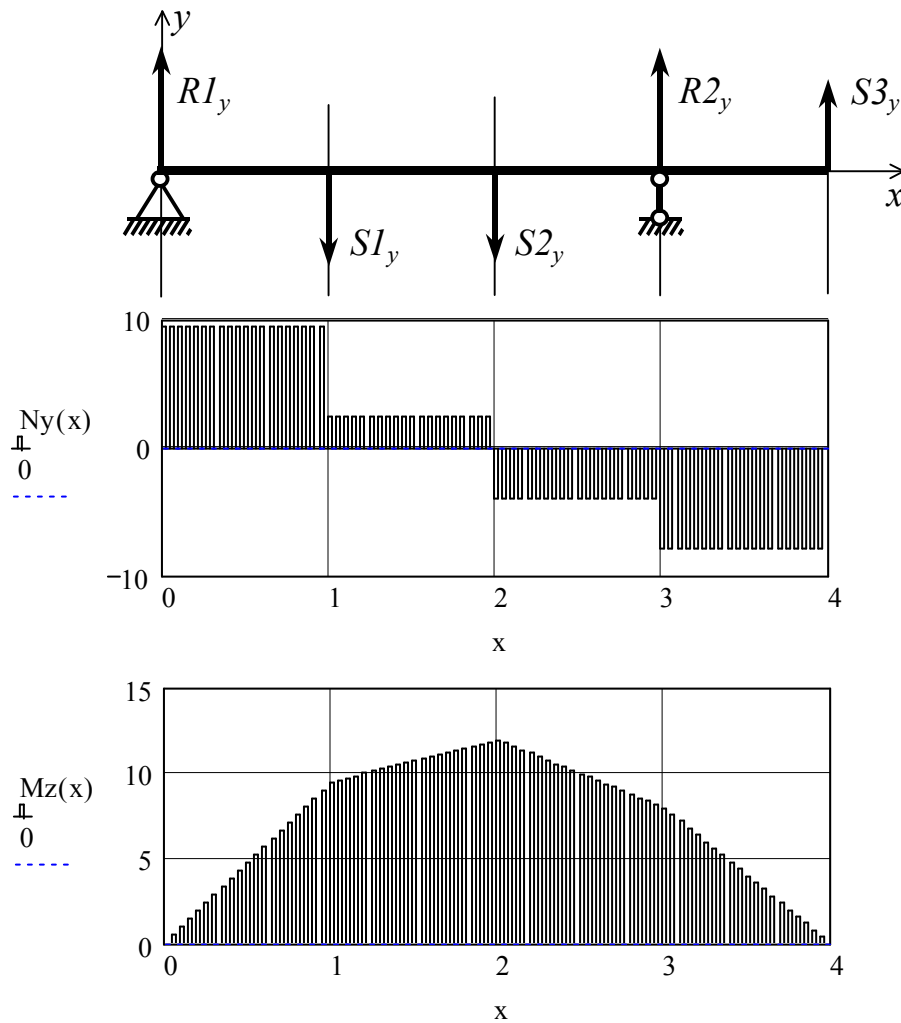
$$My(x) := \begin{cases} R1z \cdot x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ R1z \cdot x + S1z \cdot (x - 1) & \text{if } 1 \leq x \leq 2 \\ R1z \cdot x + S1z \cdot (x - 1) + S2z \cdot (x - 2) & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \\ R1z \cdot x + S1z \cdot (x - 1) + S2z \cdot (x - 2) + R2z \cdot (x - 3) & \text{if } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



$$My(1) = -4.256 \quad My(2) = 0.38 \quad My(3) = 10.103 \quad \text{кН} \cdot \text{м}$$

$$Ny(x) := \begin{cases} R1y & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ R1y - S1y & \text{if } 1 \leq x \leq 2 \\ R1y - S1y - S2y & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \\ R1y - S1y - S2y + R2y & \text{if } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

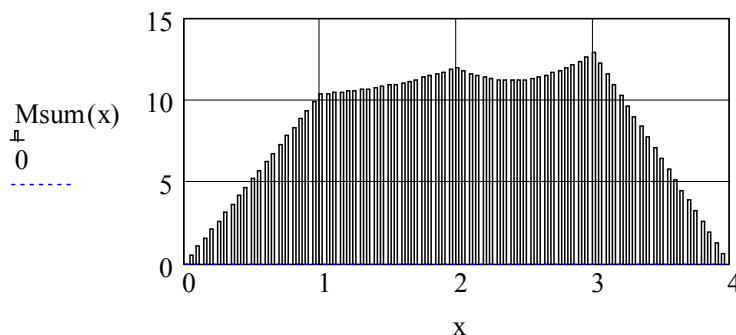
$$Mz(x) := \begin{cases} R1y \cdot x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ R1y \cdot x - S1y \cdot (x - 1) & \text{if } 1 \leq x \leq 2 \\ R1y \cdot x - S1y \cdot (x - 1) - S2y \cdot (x - 2) & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \\ R1y \cdot x - S1y \cdot (x - 1) - S2y \cdot (x - 2) + R2y \cdot (x - 3) & \text{if } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



$$Mz(1) = 9.469 \quad Mz(2) = 11.943 \quad Mz(3) = 7.95 \quad \text{кН} \cdot \text{м}$$

Визначимо сумарний згинаючий момент (побудуємо графік за допомогою MathCAD):

$$Msum(x) := \sqrt{My(x)^2 + Mz(x)^2}$$



$$Msum(1) = 10.382 \quad Msum(2) = 11.949 \quad Msum(3) = 12.856$$

Як видно з розрахунку, найбільш небезпечний переріз є на другій опорі, де виникає максимальний згинаючий момент. Розрахунковий момент при крученні зі згином за третьою теорією міцності:

$$MR(x) := \sqrt{M(x)^2 + M_{sum}(x)^2} \quad MR(3) = 12.892$$

Умова міцності при крученні зі згином має вигляд:

$$\frac{MR_{max}}{W_0} \leq \sigma_{adm},$$

де  $MR_{max}$  – максимальний розрахунковий момент,  $MR_{max} = MR(3)$ ;

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{32} \text{ – осьовий момент опору;}$$

$\sigma_{adm}$  – допустиме напруження для даного матеріалу.

$$\sigma_t := 80 \quad \sigma_{adm} := \frac{\sigma_t}{1.5} \quad \sigma_{adm} = 53.333 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

$$W_0 := \frac{MR(3) \cdot 100}{\sigma_{adm}} \quad W_0 = 24.172 \text{ (см}^3\text{)}$$

$$d := \sqrt[3]{\frac{W_0 \cdot 32}{\pi}} \quad d = 6.268 \text{ (см)}$$

Остаточно приймаємо діаметр вала  $d = 64$  мм.

#### ПРИКЛАД 4.13. Розрахунок на міцність просторової рами

Для заданої просторової рами (рис. 4.46) підібрати перерізи: на першій ділянці – круговий, на другій – квадратний, на третій – прямокутний ( $h/b = 2$ ). Прямокутний переріз розмістити найраціональніше.

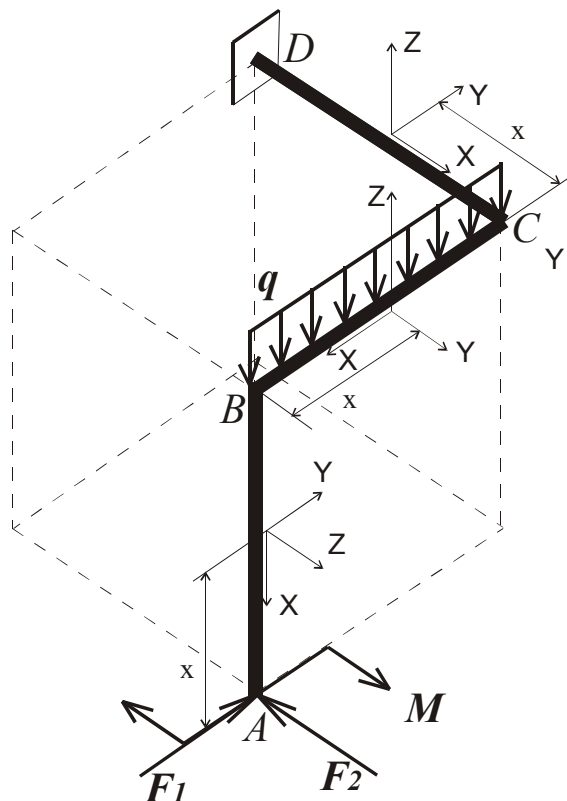


Рис. 4.46. Розрахункова схема просторової рами

Вхідні дані:

$q = 10 \text{ кН/м}$ ,  $F_1 = 10 \text{ кН/м}$ ,  $F_2 = 20 \text{ кН/м}$ ,  $M = 20 \text{ кН/м}$ ,  
 $a = 3 \text{ м}$ ,  $b = 3 \text{ м}$ ,  $c = 3 \text{ м}$ , Матеріал Ст.3.

Розв'язання:

На кожній ділянці виберемо локальні системи координат так, що вісь  $X$  завжди проходить вздовж осі ділянки в напрямку від перерізу до початку ділянки, осі  $Y$  та  $Z$  розташовуються у головних площинах стержня (оскільки осі симетрії завжди є головними, то осі  $Y$  і  $Z$  співпадають з осями симетрії поперечного перерізу).

Будемо вважати, що головні площини стержнів співпадають з площинами, в яких прикладені сили.

Для побудови епюр на кожній ділянці окремо складаємо суми проєкцій сил і суми моментів відносно осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Запишемо внутрішні сили на кожній ділянці у вигляді вектора і знайдемо значення на початку і в кінці кожної ділянки за допомогою математичного пакета MathCAD<sup>\*)</sup>.

$$S1(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ F1 \\ -F2 \\ M \\ F2 \cdot x \\ F1 \cdot x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Nx1 \\ Ny1 \\ Nz1 \\ Mx1 \\ My1 \\ Mz1 \end{pmatrix} := S1(0) \quad \begin{pmatrix} Nx2 \\ Ny2 \\ Nz2 \\ Mx2 \\ My2 \\ Mz2 \end{pmatrix} := S1(a)$$

$$\begin{pmatrix} Nx1 \\ Ny1 \\ Nz1 \\ Mx1 \\ My1 \\ Mz1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -20 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Nx2 \\ Ny2 \\ Nz2 \\ Mx2 \\ My2 \\ Mz2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -20 \\ 20 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$$

<sup>\*)</sup> Звичайно, ці рівняння можна записати вручну і визначити внутрішні зусилля на кожній ділянці, підставляючи в рівняння значення  $x = 0$  на початку і  $x = a$  в кінці ділянки

$$\begin{aligned}
 S2(x) &:= \begin{pmatrix} -F1 \\ -F2 \\ -q \cdot x \\ -F2 \cdot a \\ F1 \cdot a + \frac{q \cdot x^2}{2} \\ F2 \cdot x + M \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Nx3 \\ Ny3 \\ Nz3 \\ Mx3 \\ My3 \\ Mz3 \end{pmatrix} := S2(0) \quad \begin{pmatrix} Nx4 \\ Ny4 \\ Nz4 \\ Mx4 \\ My4 \\ Mz4 \end{pmatrix} := S2(a) \\
 \begin{pmatrix} Nx3 \\ Ny3 \\ Nz3 \\ Mx3 \\ My3 \\ Mz3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 0 \\ -60 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Nx4 \\ Ny4 \\ Nz4 \\ Mx4 \\ My4 \\ Mz4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ -30 \\ -60 \\ 75 \\ 80 \end{pmatrix} \\
 S3(x) &:= \begin{pmatrix} -F2 \\ F1 \\ -q \cdot a \\ F1 \cdot a + \frac{q \cdot a^2}{2} \\ F2 \cdot a + q \cdot a \cdot x \\ -F2 \cdot a - M + F1 \cdot x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Nx5 \\ Ny5 \\ Nz5 \\ Mx5 \\ My5 \\ Mz5 \end{pmatrix} := S3(0) \quad \begin{pmatrix} Nx6 \\ Ny6 \\ Nz6 \\ Mx6 \\ My6 \\ Mz6 \end{pmatrix} := S3(a) \\
 \begin{pmatrix} Nx5 \\ Ny5 \\ Nz5 \\ Mx5 \\ My5 \\ Mz5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ -30 \\ 75 \\ 60 \\ -80 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Nx6 \\ Ny6 \\ Nz6 \\ Mx6 \\ My6 \\ Mz6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ -30 \\ 75 \\ 150 \\ -50 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

За одержаними значеннями будемо епюри внутрішніх сил (рис. 4.47). При побудові епюр необхідно пам'ятати, що площа епюр  $N_y$ ,  $N_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  повинна співпадати з площиною відповідного навантаження.

Епюри поздовжніх сил і моментів кручення орієнтуються довільно, на епюрі поздовжніх сил необхідно вказати знак, який характеризує поздовж-

ню деформацію (розтяг +, стиск –), на епюрі моментів кручення вказується знак моменту у вибраній системі координат або напрямок кручення.

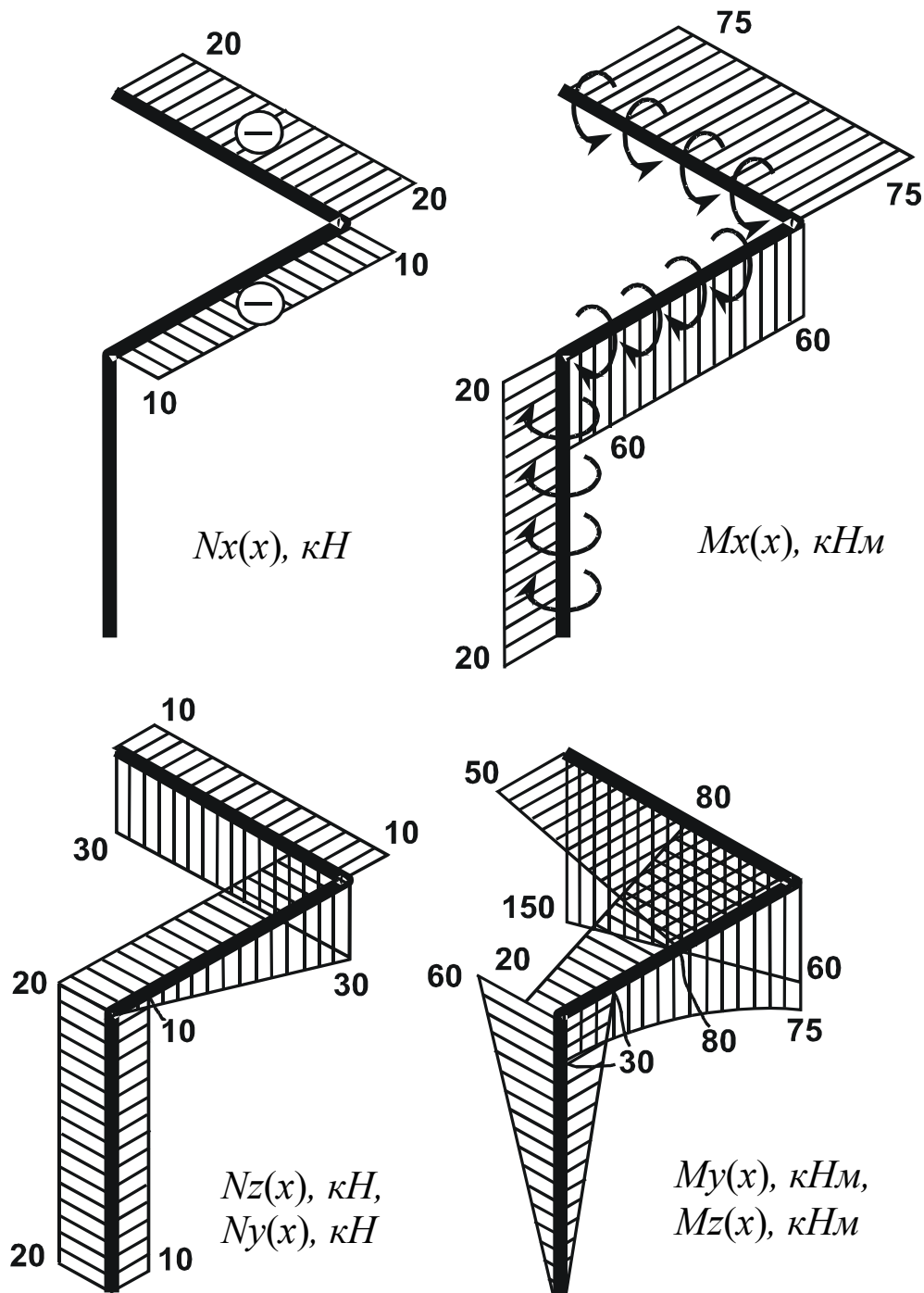


Рис. 4.47. Епюри внутрішніх сил для просторової рами

Розрахунок на міцність передбачає визначення найбільш небезпечного перерізу на кожній ділянці і аналіз напруження у перерізах з метою визначення небезпечних точок.



Умови міцності залежать від виду напруженого стану у найбільш небезпечних точках перерізу.

Розглянемо кожну ділянку окремо.

**Ділянка AB – круговий переріз.** Найбільш небезпечним на ділянці є переріз B. Внутрішні зусилля у цьому перерізі (рис. 4.48):

$$\begin{pmatrix} N_{x2} \\ N_{y2} \\ N_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -20 \\ 20 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$$

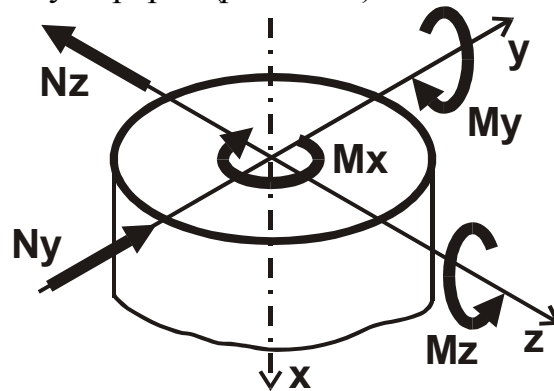


Рис. 4.48. Силкові фактори у круговому перерізі B

При розрахунку на міцність для кругового перерізу найбільш важливими є згинаючі моменти і момент кручення. Іноді враховується і поздовжня сила (якщо має велике значення).

Покажемо розподілення нормальних і дотичних напружень у перерізі (рис. 4.49).

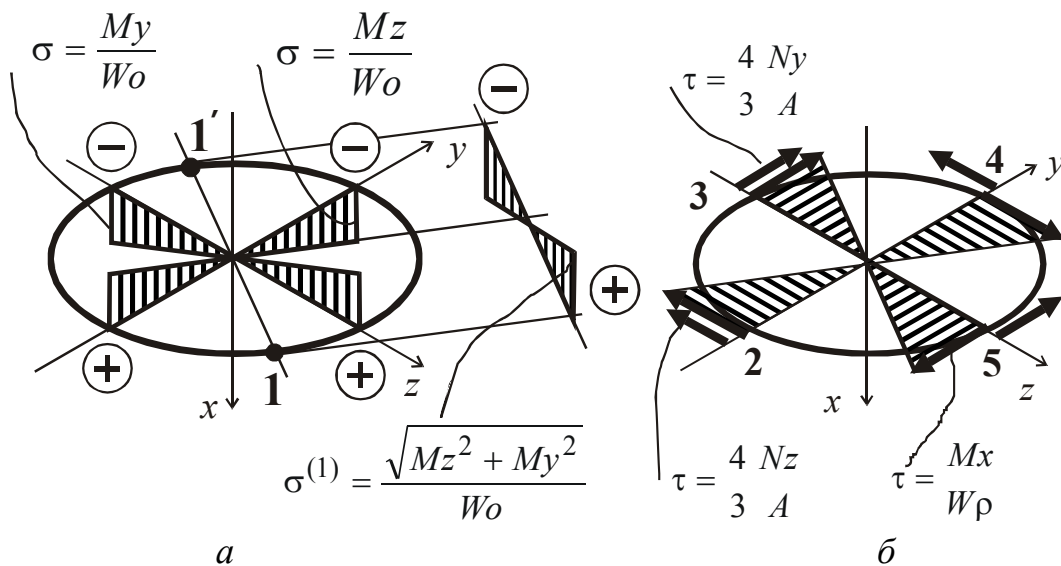


Рис. 4.49. Розподілення нормальних (а) і дотичних (б) напружень у перерізі

Найбільш небезпечна точка 1 лежить у площині дії сумарного згинаючого момента на контурі перерізу. У перерізі діють згинаючий момент і момент кручення, отже виникають нормальні і дотичні напруження, тобто має місце складний плоский напружений стан. Умова міцності для точки 1:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}, \text{ або у повному вигляді:}$$

$$\sqrt{\left(\frac{N_x}{A} + \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W_0}\right)^2} + 4 \cdot \left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2 \leq \sigma_{adm},$$

де  $W_0 = \frac{\pi d^3}{32}$  – осьовий момент опору,

$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$  – полярний момент опору,

$\sigma_{adm} = 16 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$  – допустиме напруження для сталі Ст.3,

$A = \frac{\pi d^2}{4}$  – площа поперечного перерізу.

Оскільки  $N_x = 0$ , то умова міцності набуває вигляду:

$$\frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_x^2}}{W_0} \leq \sigma_{adm}, \text{ звідки } d = 0.165\text{м} = 165\text{мм}.$$

Якщо в перерізі діють поперечні сили, то необхідно зробити перевірку міцності за дотичними напруженнями (для точок 2 і 3).

В точках 2 і 3 дотичні напруження від моменту кручення  $M_x$  і від поперечних сил  $N_y$  і  $N_z$  мають один напрямок, тому умови міцності за дотичними напруженнями мають вигляд:

$$\frac{M_x}{W_\rho} + \frac{4}{3} \cdot \frac{N_y}{A} \leq \tau_{adm}, \quad \frac{M_x}{W_\rho} + \frac{4}{3} \cdot \frac{N_z}{A} \leq \tau_{adm},$$

де  $\tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{2} = 8 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$ .

Оскільки в даному прикладі  $N_z = N_y$ , достатньо перевірити одну умову, підставляючи у формулу одержане вище значення  $d = 0.165\text{м}$ :

$$\frac{M_x}{\left(\frac{\pi \cdot d^3}{16}\right)} + \frac{4}{3} \cdot \frac{N_y}{\left(\frac{\pi \cdot d^2}{4}\right)} = 2.348 \times 10^4 \quad \tau_{max} \leq \tau_{adm}$$

Умова міцності виконується, отже приймаємо остаточне значення  $d = 165\text{мм}$ .

**Ділянка BC – квадратний переріз.** Найбільш небезпечним на ділянці є переріз C. Силкові фактори в цьому перерізі (рис. 4.50):

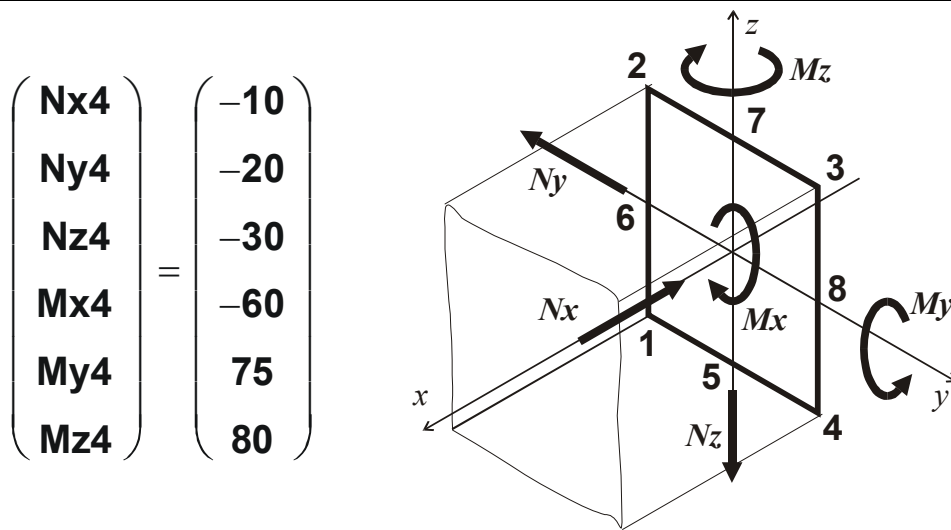


Рис. 4.50. Силві фактори у квадратному перерізі

Покажемо розподілення нормальних і дотичних напружень у перерізі (див. рис. 4.6). Найбільш небезпечною в квадратному перерізі є кутова точка, де всі нормальні напруження, які виникають від згинаючих моментів  $M_y$  та  $M_z$ , також від поздовжньої сили  $N_x$ , мають однаковий знак (рис. 4.51).

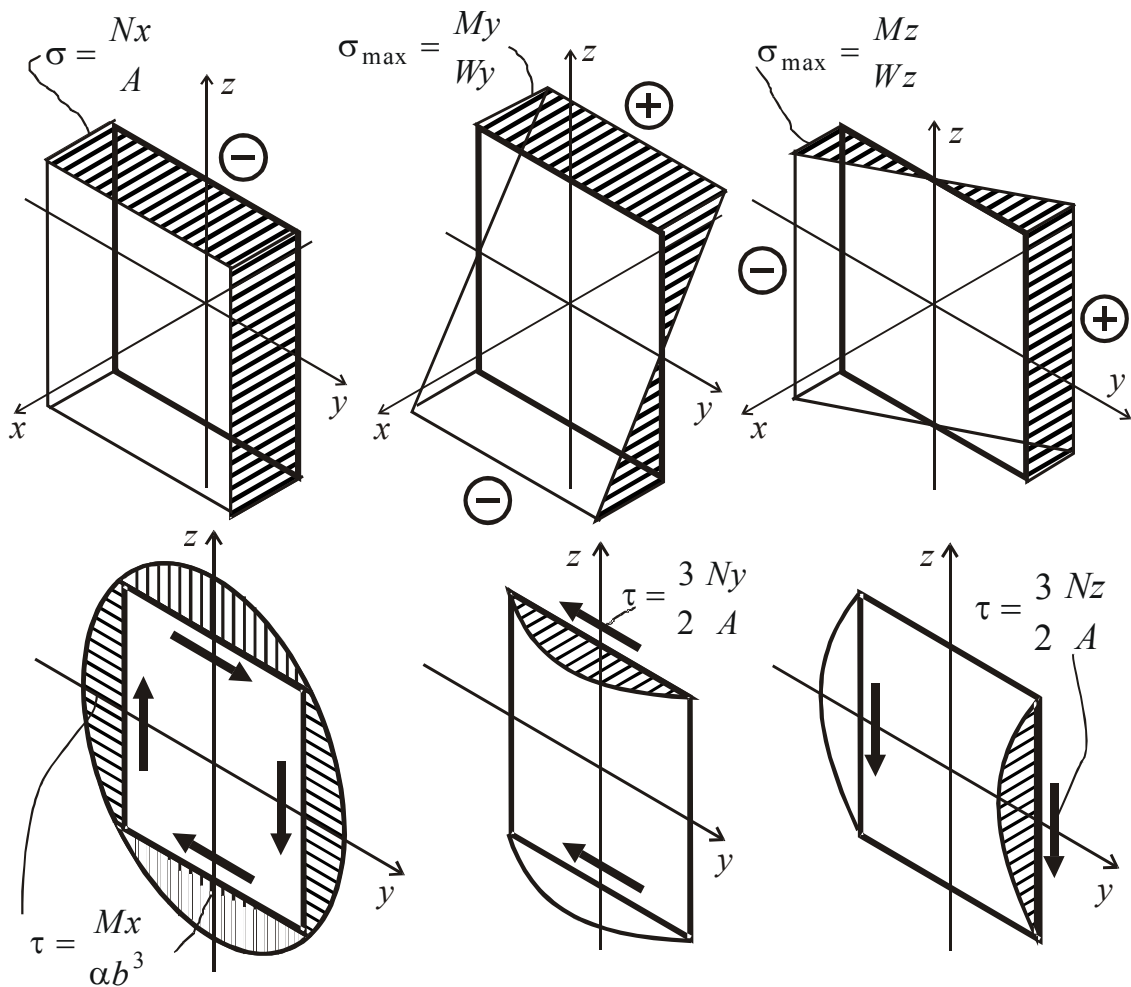


Рис. 4.51. Розподілення напружень у квадратному перерізі

У перерізі, що розглядається, такою точкою є точка  $I$ . Дотичні напруження в кутових точках квадратного перерізу дорівнюють 0, таким чином, напружений стан у точці  $I$  – простий одновісний.

Умова міцності для такого стану має вигляд:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm} \quad \left| \frac{-N_x}{A} - \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} \right| \leq \sigma_{adm}$$

$W_y = W_z = \frac{b^3}{6}$  – осьовий момент опору для квадратного перерізу,

$A = b^2$  – площа поперечного перерізу.

З умови міцності визначимо розміри перерізу.

$b := 1$  Given

$$\frac{|N_x b^4|}{b^2} + \frac{M_y b^4}{\frac{b^3}{6}} + \frac{M_z b^4}{\frac{b^3}{6}} = \sigma_{adm} \quad b := \text{Find}(b) \quad b = 0.18$$

$b = 0.18 \text{ м} = 180 \text{ мм}$ .

У квадратному перерізі небезпечними є також серединні бокові точки, де виникають найбільші дотичні напруження від момента кручення і поперечних сил, отже необхідно перевірити міцність у точках 2, 3, 4, 5 з урахуванням дотичних напружень. У цих точках діють і нормальні, і дотичні напруження, таким чином, маємо складний плоский напружений стан, для якого умова міцності має вигляд  $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}$ . Отже, для кожної точки необхідно записати нормальні та дотичні напруження і підставити в умову міцності. Коефіцієнт  $\alpha$  залежить від співвідношення сторін перерізу [1].

$$\sqrt{(\sigma_i)^2 + 4(\tau_i)^2} \leq \sigma_{adm} \quad \alpha := 0.208$$

$$A_2 := b^2 \quad W_{y2} := \frac{b^3}{6} \quad W_{z2} := \frac{b^3}{6} \quad W_{\rho 2} := \alpha \cdot b^3$$

$$\sigma_5 := \frac{N_x b^4}{A_2} - \frac{M_y b^4}{W_{y2}} \quad \tau_5 := \frac{|M_x b^4|}{W_{\rho 2}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{|N_y b^4|}{A_2}$$

$$\sqrt{(\sigma_5)^2 + 4(\tau_5)^2} = 1.273 \times 10^5 \quad 1.273 \times 10^5 \leq \sigma_{adm}$$

$$\sigma_6 := \frac{N_x b^4}{A_2} - \frac{M_z b^4}{W_{z2}} \quad \tau_6 := \frac{|M_x b^4|}{W_{\rho 2}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{|N_z b^4|}{A_2}$$

$$\sqrt{(\sigma_6)^2 + 4(\tau_6)^2} = 1.269 \times 10^5 \quad 1.269 \times 10^5 \leq \sigma_{adm}$$

$$\sigma_7 := \frac{N_{x4}}{A_2} + \frac{M_{y4}}{W_{y2}} \quad \tau_7 := \frac{|M_{x4}|}{W_{\rho 2}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{|N_{y4}|}{A_2}$$

$$\sqrt{(\sigma_7)^2 + 4(\tau_7)^2} = 1.24 \times 10^5 \quad 1.24 \times 10^5 \leq \sigma_{adm}$$

$$\sigma_8 := \frac{N_{x4}}{A_2} + \frac{M_{z4}}{W_{z2}} \quad \tau_8 := \frac{|M_{x4}|}{W_{\rho 2}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{|N_{z4}|}{A_2}$$

$$\sqrt{(\sigma_8)^2 + 4(\tau_8)^2} = 1.308 \times 10^5 \quad 1.308 \times 10^5 \leq \sigma_{adm}$$

Умови міцності виконуються в усіх точках, отже приймаємо остаточний розмір перерізу  $b = 180 \text{ мм}$ .

**Ділянка CD – прямокутний переріз** із співвідношенням сторін  $h/b = 2$ . Небезпечним на цій ділянці є переріз D. Внутрішні силові фактори, які діють у перерізі, показано на *рис. 4.52.*

Перевірка міцності для прямокутного перерізу виконується аналогічно попередньому розрахунку для квадратного перерізу, хоча є деякі особливості.

Перше, що треба зробити – це розташувати переріз найраціональніше. Це означає, що довша сторона прямокутника повинна бути в тій площині, де діє більший згинаючий момент. В даному випадку  $M_y = 150 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , тому сторона  $h$  прямокутного перерізу паралельна осі  $Z$ .

Моменти опору для прямокутного перерізу неоднакові і залежать від розташування перерізу відносно осей  $Z$  і  $Y$ . У нашому прикладі:

$$W_y = \frac{bh^2}{6}, \quad W_z = \frac{hb^2}{6}.$$

Покажемо розподілення нормальних і дотичних напружень у перерізі.

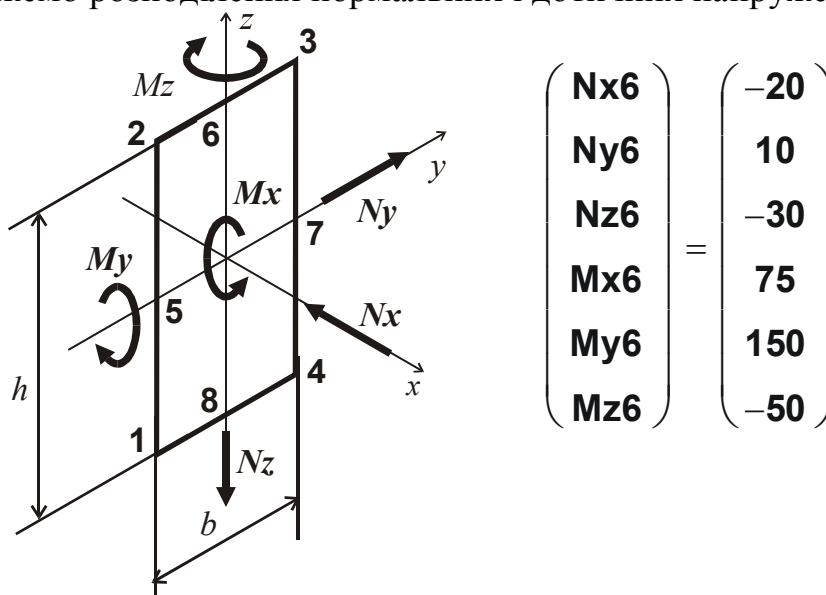


Рис. 4.52. Слові фактори у прямокутному перерізі

Як і у квадратному, у прямокутному перерізі найбільш небезпечною вважається одна з кутових точок, а саме та, де всі нормальні напруження мають один знак.

Покажемо розподілення нормальних напружень у перерізі (рис. 4.53).

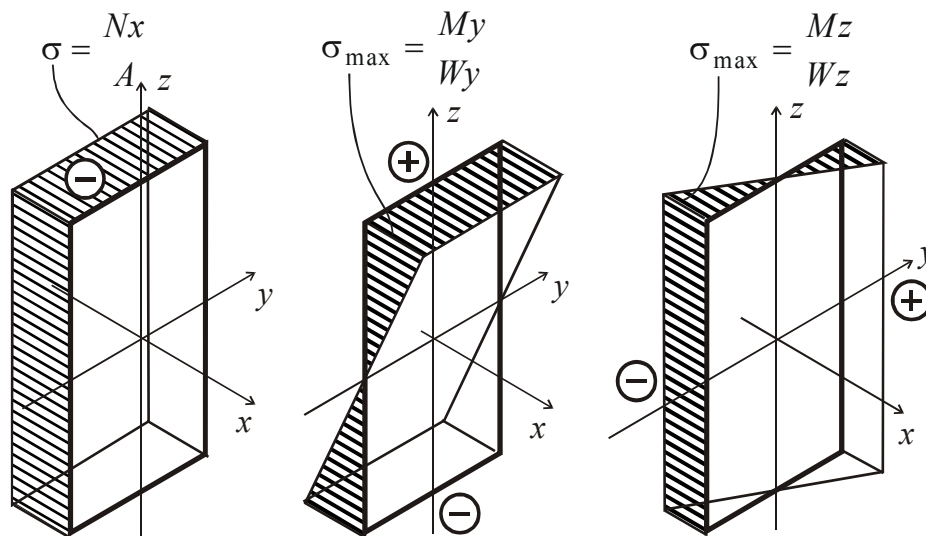


Рис. 4.53. Розподілення нормальних напружень у прямокутному перерізі

Для точки  $I$  запишемо умову міцності:

$$|\sigma_{розр}| \leq \sigma_{adm}, \quad \sigma_{розр} = -\frac{My}{Wy} - \frac{Mz}{Wz} - \frac{Nx}{A}, \quad \text{де } A = hb \text{ – площа поперечного}$$

перерізу.

Визначимо розміри сторін прямокутного перерізу з умови міцності:

$$b := 1 \quad h := 1 \quad \text{Given}$$

$$\frac{|Nx \cdot 6|}{h \cdot b} + \frac{|My \cdot 6|}{\frac{b \cdot h^2}{6}} + \frac{|Mz \cdot 6|}{\frac{h \cdot b^2}{6}} = \sigma_{adm} \quad \frac{h}{b} = 2$$

$$\begin{pmatrix} b \\ h \end{pmatrix} := \text{Find}(b, h) \quad \begin{pmatrix} b \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.133 \\ 0.266 \end{pmatrix}$$

Виконаємо перевірку міцності у бокових точках 5, 6, 7, 8 з урахуванням дотичних напружень. Покажемо розподілення дотичних напружень у перерізі (рис. 4.54).

Значення коефіцієнтів  $\alpha$  і  $\gamma$  залежать від співвідношення сторін прямокутного перерізу, знайти їх можна у довіднику [3] або у підручнику Г.С. Писаренка [1].

Умова міцності для кожної з бокових точок:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}.$$

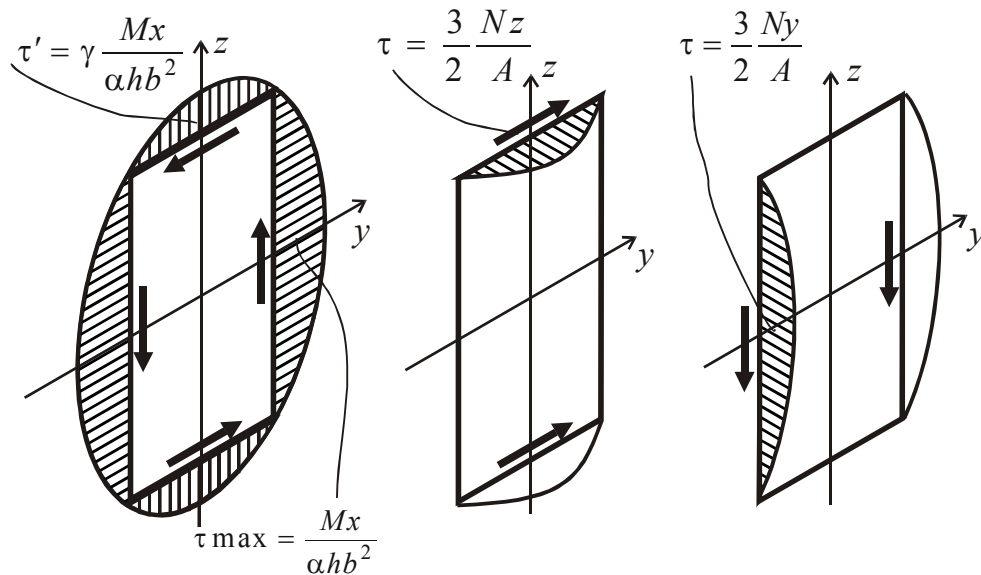


Рис. 4.54. Розподілення дотичних напружень у прямокутному перерізі

Запишемо значення нормальних і дотичних напружень у кожній із точок і перевіримо умову міцності:

$$\alpha := 0.246 \quad \gamma := 0.795 \quad \sqrt{(\sigma_i)^2 + 4(\tau_i)^2} \leq \sigma_{adm}$$

$$A_3 := h \cdot b \quad W_{y3} := \frac{b \cdot h^2}{6} \quad W_{z3} := \frac{h \cdot b^2}{6} \quad W_{\rho 3} := \alpha \cdot h \cdot b^2$$

$$\sigma_5 := -\frac{|N_{x6}|}{A_3} - \frac{|M_{z6}|}{W_{z3}} \quad \tau_5 := \frac{|M_{x6}|}{W_{\rho 3}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{|N_{z6}|}{A_3}$$

$$\sqrt{(\sigma_5)^2 + 4(\tau_5)^2} = 1.47 \times 10^5 \quad 1.47 \times 10^5 \leq \sigma_{adm}$$

$$\sigma_6 := -\frac{|N_{x6}|}{A_3} + \frac{|M_{y6}|}{W_{y3}} \quad \tau_6 := \gamma \frac{|M_{x6}|}{W_{\rho 3}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{|N_{y6}|}{A_3}$$

$$\sqrt{(\sigma_6)^2 + 4(\tau_6)^2} = 1.396 \times 10^5 \quad 1.396 \times 10^5 \leq \sigma_{adm}$$

$$\sigma_7 := -\frac{|N_{x6}|}{A_3} + \frac{|M_{z6}|}{W_{z3}} \quad \tau_7 := \frac{|M_{x6}|}{W_{\rho 3}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{|N_{z6}|}{A_3}$$

$$\sqrt{(\sigma_7)^2 + 4(\tau_7)^2} = 1.419 \times 10^5 \quad 1.419 \times 10^5 \leq \sigma_{adm}$$

$$\sigma_8 := -\frac{|N_{x6}|}{A_3} - \frac{|M_{y6}|}{W_{y3}} \quad \tau_8 := \gamma \frac{|M_{x6}|}{W_{\rho 3}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{|N_{y6}|}{A_3}$$

$$\sqrt{(\sigma_8)^2 + 4(\tau_8)^2} = 1.416 \times 10^5 \quad 1.416 \times 10^5 \leq \sigma_{adm}$$

Як показали результати розрахунків, умови міцності виконуються, отже остаточно приймаємо розміри перерізу  $b = 133 \text{ мм}$ ,  $h = 266 \text{ мм}$ .

Якщо умова міцності для якоїсь із бокових точок не виконується, то розміри перерізу визначаємо із умови міцності для цієї точки.

Покажемо конструкцію рами (рис. 4.55).

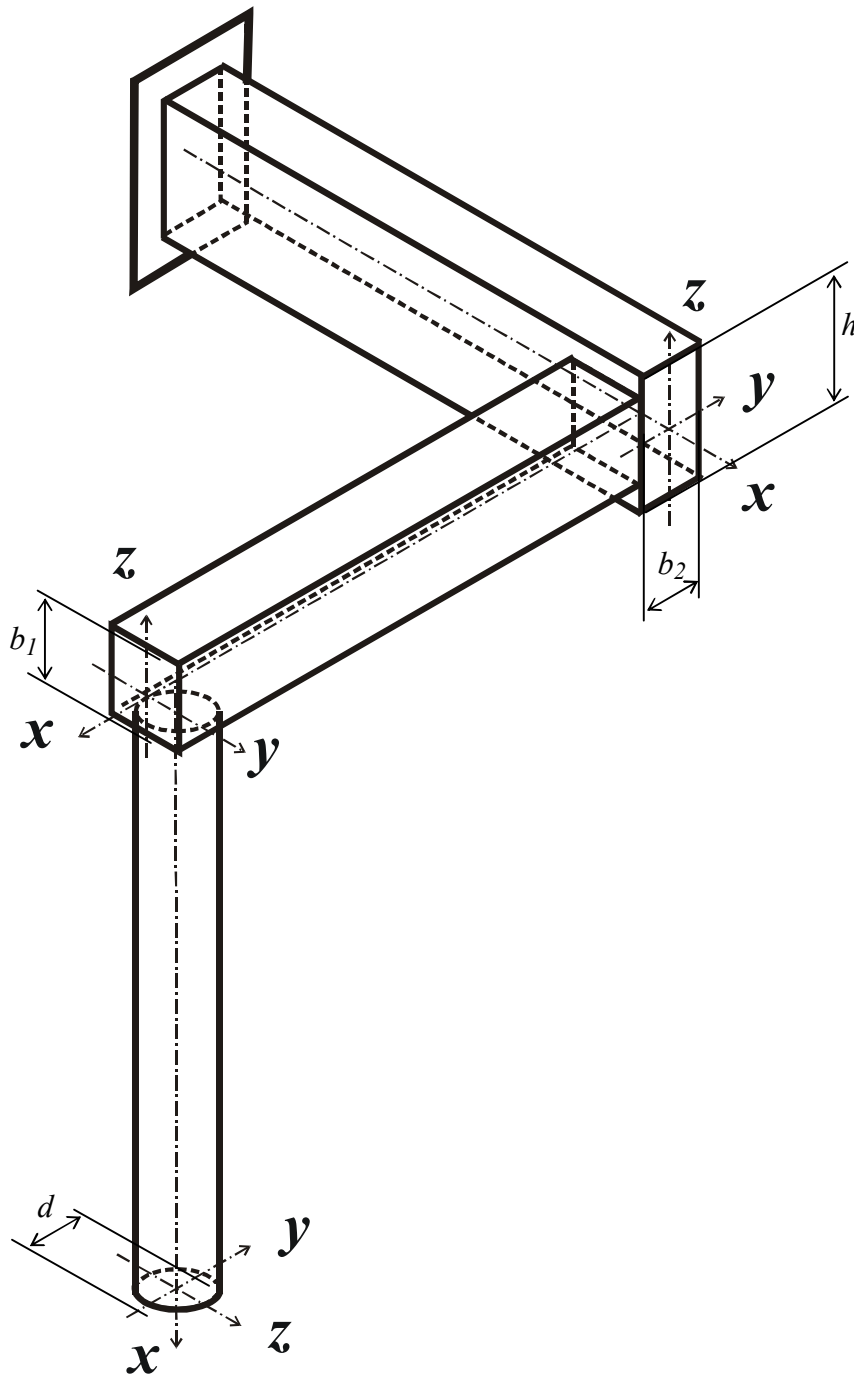


Рис. 4.55. Конструкція просторової рами



## РОЗДІЛ 5

### ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ У СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМАХ

#### 5.1. Потенціальна енергія деформації

Одним із основних розрахунків в опорі матеріалів є **розрахунок на жорсткість**, а саме визначення переміщень частин конструкції одна відносно іншої при дії на конструкцію зовнішнього навантаження.

Висновок про жорсткість конструкції можна зробити на основі порівняння максимальних переміщень із допустимими:

$$\Delta_{\max} \leq \Delta_{adm} \text{ – умова жорсткості.}$$

Допустиме переміщення  $\Delta_{adm}$  визначається з умов експлуатації.

Для визначення переміщень у стержнях сталого поперечного перерізу використовується метод початкових параметрів, оснований на розв'язку диференціальних рівнянь. Для реальних систем у більшості випадків при використанні методу початкових параметрів рівняння дуже ускладнюються.

У довільних системах для одержання залежностей для визначення переміщень найбільш ефективними є **енергетичні методи**, які базуються на понятті потенціальної енергії деформації.

**Потенціальна енергія деформації** накопичується в конструкції при її деформуванні від дії зовнішніх сил, наприклад, у пружині при її стисканні (рис. 5.1).

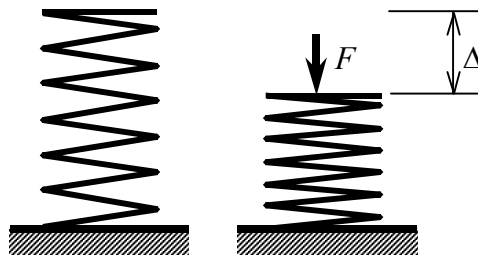


Рис. 5.1. Деформування пружини під дією зовнішніх сил

При навантаженні конструкції зовнішні сили виконують роботу на відповідних їм переміщеннях. Цю роботу можна визначити, виходячи з таких міркувань.

Розглянемо стержень довжиною  $l$ , навантажений силою  $F$ , яка діє вздовж осі стержня (рис. 5.2, а). При цьому стержень подовжується на ве-

личину  $\Delta$ . Побудуємо діаграму залежності сили від подовження (рис. 5.2, б).

Робота сили  $F$  на нескінченно малому переміщенні  $d\Delta$

$$d\mathbf{A} = Fd\Delta, \quad (F = \text{const}).$$

Повна робота – площа фігури, окресленої функцією  $F(\Delta)$ ,

$$\mathbf{A} = \int_0^{l_k} Fd\Delta. \quad (5.1)$$

Додаткова робота – площа фігури, окресленої функцією  $\Delta(F)$ ,

$$\mathbf{A}_\partial = \int_0^{F_k} \Delta dF. \quad (5.2)$$

На початковій ділянці діаграми деформування залежність сили від подовження для більшості матеріалів можна прийняти лінійною (рис. 5.2, в), отже робота зовнішніх сил визначається за формулою Клапейрона

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} F\Delta. \quad (5.3)$$

Для ідеально-пружного тіла, яке підкоряється закону Гука, додаткова робота  $\mathbf{A}_\partial = \mathbf{A}$  (рис. 5.2, в), для неідеально-пружного –  $\mathbf{A}_\partial \neq \mathbf{A}$  (рис. 5.2, б).

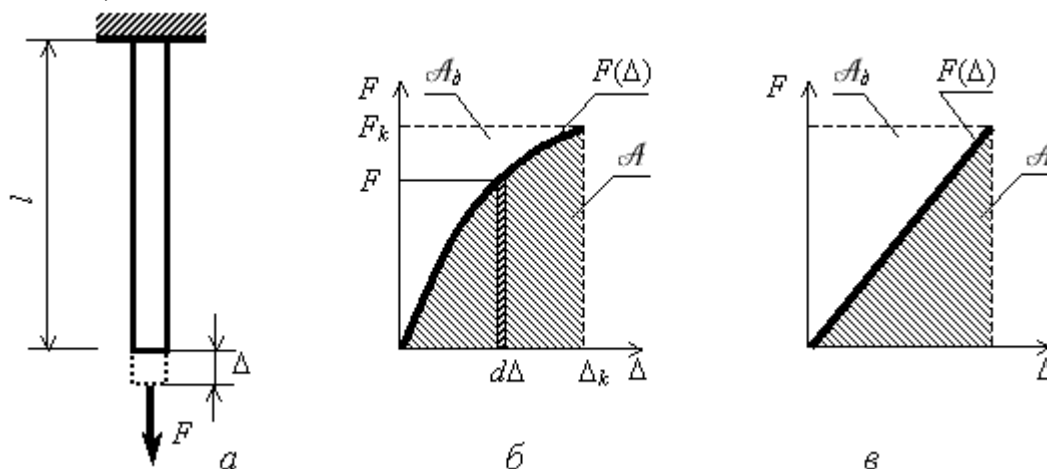


Рис. 5.2. Стержень, навантажений силою (а);  
робота зовнішніх сил для неідеально-пружного тіла (б);  
робота зовнішніх сил для ідеально-пружного тіла (в)

Щоб визначити роботу, яку виконують зовнішні сили, треба знайти половину суми добутків прикладених сил на переміщення точок їх прикладання, що є складною задачею.

У зв'язку з цим роботу зовнішніх сил визначають як потенціальну енергію деформації.

Для ідеально-пружних тіл справедливим є закон збереження енергії у формі

$$\mathbf{A} = U,$$

де  $\mathbf{A}$  – робота зовнішніх сил;  $U$  – потенціальна енергія деформації.

Під дією зовнішніх сил у тілі виникають внутрішні сили – напруження, і взаємні переміщення точок – деформації. Очевидно, внутрішні сили також виконують роботу на відповідних їм деформаціях. Робота внутрішніх сил і є потенціальною енергією деформації.

Визначимо роботу, яку виконують сили, прикладені до одиничного об'єму, виділеного в довільній точці тіла, що деформується під дією зовнішніх сил (рис. 5.3).

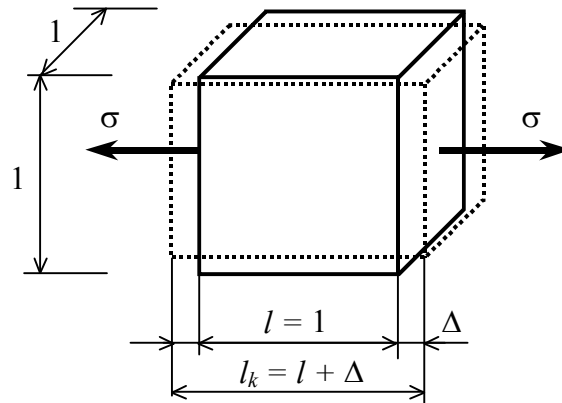


Рис. 5.3. Одиничний елемент, виділений в довільній точці тіла

За формулою Клапейрона робота зовнішніх сил для ідеально-пружного тіла

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} F \Delta.$$

Відносна деформація

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{l} \Rightarrow \Delta = \varepsilon.$$

Сила визначається як рівнодійна напружень, що діють на гранях елемента

$$F = \sigma \cdot 1 \cdot 1 = \sigma.$$

Отже питома робота зовнішніх сил дорівнює питомій потенціальній енергії деформації

$$u = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon.$$

Для конструкції в цілому

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon dV. \quad (5.4)$$

При складному напруженому стані

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx})^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx})^T,$$

де  $\boldsymbol{\sigma}$  – вектор напружень;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – вектор деформацій.

Отже потенціальна енергія деформації для довільних тіл

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV . \quad (5.5)$$

Закон Гука при складному напруженому стані

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} ,$$

де  $\mathbf{C}$  – матриця пружних модулів.

Тоді

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{C}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV .$$

Для стержневих систем повна потенціальна енергія деформації визначається за формулою

$$U = \int_0^l \frac{N_x^2}{2EA} dx + k_1 \int_0^l \frac{N_y^2}{2GA} dx + k_2 \int_0^l \frac{N_z^2}{2GA} dx + \int_0^l \frac{M_x^2}{2GI_\rho} dx + \int_0^l \frac{M_y^2}{2EI_y} dx + \int_0^l \frac{M_z^2}{2EI_z} dx , \quad (5.6)$$

де  $N_x, N_y, N_z, M_x, M_y, M_z$  – функції внутрішніх сил;

$E$  – модуль Юнга;  $G$  – модуль зсуву;

$A$  – площа поперечного перерізу;

$I_\rho, I_y, I_z$  – полярний і осьові моменти інерції;

$EA$  – жорсткість стержнів при розтягу-стиску;

$GA$  – жорсткість стержнів при зсуві;

$GI_\rho$  – жорсткість стержнів при крученні;

$EI_y, EI_z$  – жорсткість стержнів при згині,

$k_1, k_2$  – коефіцієнти, які враховують нерівномірність розподілення дотичних напружень по перерізу і залежать від форми перерізу.

## 5.2. Теорема Кастільяно та інтеграл Мора

Згідно з варіаційним принципом Кастільяно [1] частинна похідна потенціальної енергії деформації за узагальненою силою  $F_i$  дорівнює переміщенню точки прикладення сили у напрямі дії сили

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} , \quad (5.7)$$

В загальному випадку дії сил формула (5.7) має вигляд

$$\Delta_i = \frac{\partial}{\partial F_i} \left( \int_0^l \frac{N_x^2}{2EA} dx + k_1 \int_0^l \frac{N_y^2}{2GA} dx + k_2 \int_0^l \frac{N_z^2}{2GA} dx + \int_0^l \frac{M_x^2}{2GI_\rho} dx + \int_0^l \frac{M_y^2}{2EI_y} dx + \int_0^l \frac{M_z^2}{2EI_z} dx \right) , \quad (5.8)$$

або

$$\Delta_i = \int_0^l \frac{N_x}{EA} \frac{\partial N_x}{\partial F_i} dx + k_1 \int_0^l \frac{N_y}{GA} \frac{\partial N_y}{\partial F_i} dx + k_2 \int_0^l \frac{N_z}{GA} \frac{\partial N_z}{\partial F_i} dx +$$

$$+ \int_0^l \frac{M_x}{GI_\rho} \frac{\partial M_x}{\partial F_i} dx + \int_0^l \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial F_i} dx + \int_0^l \frac{M_z}{EI_z} \frac{\partial M_z}{\partial F_i} dx. \quad (5.9)$$

За фізичним смислом похідні внутрішніх зусиль за узагальненою силою є внутрішніми зусиллями від одиничного навантаження, прикладеного в тій точці і в тому напрямку, де треба визначити переміщення. Таким чином, формулу (5.9) можна записати у формі, яка відома як інтеграл Мора

$$\Delta_i = \int_0^l \frac{N_x \bar{N}_x}{EA} dx + k_1 \int_0^l \frac{N_y \bar{N}_y}{GA} dx + k_2 \int_0^l \frac{N_z \bar{N}_z}{GA} dx +$$

$$+ \int_0^l \frac{M_x \bar{M}_x}{GI_\rho} dx + \int_0^l \frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} dx + \int_0^l \frac{M_z \bar{M}_z}{EI_z} dx. \quad (5.10)$$

Отже, для того, щоб знайти переміщення у стержневій системі за допомогою формул Кастільяно-Мора, необхідно записати функції внутрішніх зусиль та одиничного навантаження і обчислити суми відповідних інтегралів на кожній ділянці. Для визначення лінійного переміщення необхідно прикласти одиничну силу (або знайти похідну за силою), для визначення кутового переміщення – одиничний момент (похідну за моментом).

**ПРИКЛАД 5.1.** Визначити лінійне і кутове переміщення у перерізах  $A, B$  консольного стержня (рис. 5.4).

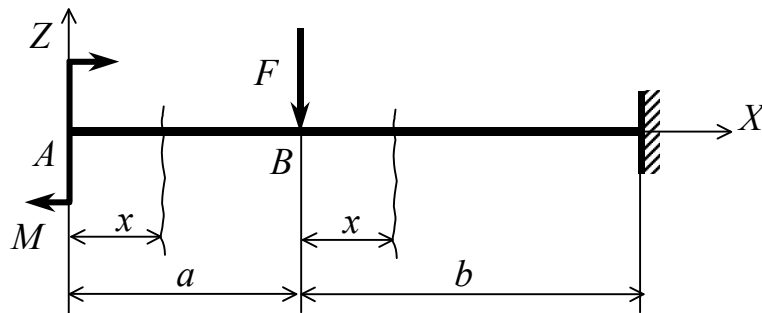


Рис. 5.4. Розрахункова схема стержня

Вхідні дані:

$$F := 30 \text{ кН}, \quad M := 50 \text{ кНм}, \quad a := 2 \text{ м}, \quad b := 3 \text{ м},$$

$$E := 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2, \quad I := 19062 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Розв'язання:

Балка працює на плоский згин, отже у поперечних перерізах виникають поперечні сили і згинаючі моменти. Переміщення від зсуву, пов'язане з поперечними силами, складає не більше 2 % від переміщення, обумовле-

ного згином, тому при інженерних розрахунках враховується тільки переміщення від згинаючих моментів.

Розглянемо точку  $A$ .

Визначимо переміщення за допомогою інтеграла Мора:

$$\Delta_i = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{M_{yi}(x) \bar{M}_{yi}(x)}{EI_y} dx ,$$

де  $M_{yi}(x)$  – функції згинаючих моментів на кожній ділянці від заданого зовнішнього навантаження;

$\bar{M}_{yi}(x)$  – функції згинаючих моментів на тих же ділянках від одиничного навантаження, прикладеного у тій точці  $i$  в тому напрямку, де шукається переміщення;

$n$  – кількість ділянок.

Складемо функції згинаючих моментів на кожній ділянці від зовнішнього навантаження:

$$0 \leq x \leq a \quad M1(x) := M$$

$$0 \leq x \leq b \quad M2(x) := M - F \cdot x$$

Для визначення лінійного переміщення точки  $A$  до балки, вільної від зовнішнього навантаження, прикладемо одиничну силу  $F = 1$  в цій точці (рис. 5.5).

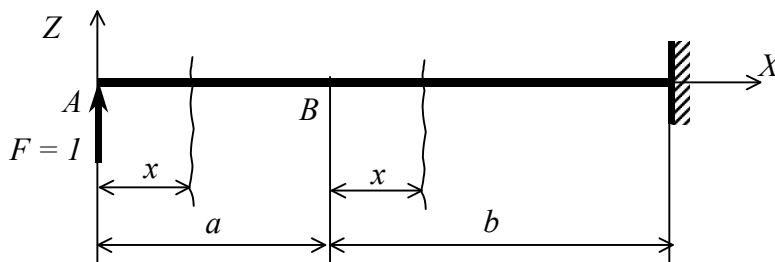


Рис. 5.5. Прикладення одиничної сили в точці, де треба визначити переміщення

Складемо функції моментів від одиничної сили на тих же ділянках, враховуючи правило знаків, як і для згинаючих моментів від зовнішнього навантаження:

$$m11(x) := x \quad m12(x) := x + a$$

Обчислимо інтеграл Мора

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \int_0^a \frac{M1(x)m11(x)}{EI} dx + \int_0^b \frac{M2(x)m12(x)}{EI} dx = \\ &= \frac{1}{EI} \left( \int_0^a Mx dx + \int_0^b (M - Fx)(x + a) dx \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{EI} \left( \frac{Mx^2}{2} \Big|_0^a + \frac{Mx^2}{2} \Big|_0^b - \frac{Fx^3}{3} \Big|_0^b + Max \Big|_0^b - \frac{Fax^2}{2} \Big|_0^b \right) = \frac{85}{EI} = 2.23 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Як видно, навіть для простої балки обчислення інтегралів є трудомісткою задачею. При використанні формул Кастільяно або інтегралів Мора для визначення переміщень доцільно скористатися засобами математичного пакета MathCAD, записавши вхідні дані і необхідні функції:

$$\Delta 1 := \int_0^a \frac{M1(x) \cdot m11(x)}{E \cdot I} dx + \int_0^b \frac{M2(x) \cdot m12(x)}{E \cdot I} dx$$

$$\Delta 1 = 2.23 \times 10^{-3} \quad (\text{м})$$

Для визначення кутового переміщення необхідно прикласти одиничний момент у точці розшукуваного переміщення (рис. 5.6) і скласти функції згинаючих моментів на кожній ділянці.

$$m31(x) := 1 \quad m32(x) := 1$$

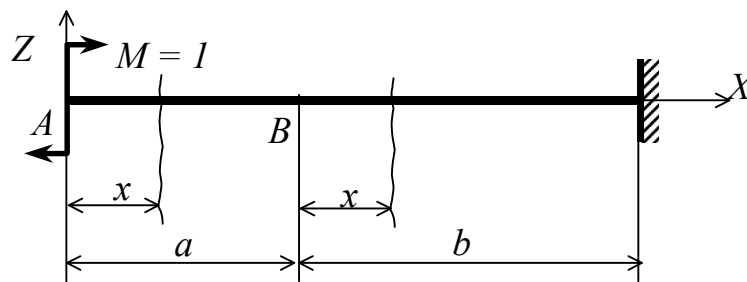


Рис. 5.6. Прикладення одиничного моменту в точці, де треба визначити переміщення

Обчислимо інтеграл Мора

$$\theta 1 := \int_0^a \frac{M1(x) \cdot m31(x)}{E \cdot I} dx + \int_0^b \frac{M2(x) \cdot m32(x)}{E \cdot I} dx$$

$$\theta 1 = 3.016 \times 10^{-3} \quad (\text{рад})$$

Розглянемо точку B.

Для визначення лінійного переміщення прикладемо в точці B одиничну силу, для визначення кута повороту – одиничний момент і запишемо функції від одиничного навантаження на кожній ділянці:

$$m21(x) := 0 \quad m22(x) := x$$

$$\Delta 2 := \int_0^a \frac{M1(x) \cdot m21(x)}{E \cdot I} dx + \int_0^b \frac{M2(x) \cdot m22(x)}{E \cdot I} dx$$

$$\Delta 2 = -1.18 \times 10^{-3} \quad (\text{м})$$

$$m41(x) := 0 \quad m42(x) := 1$$

$$\theta_2 := \int_0^a \frac{M1(x) \cdot m41(x)}{E \cdot I} dx + \int_0^b \frac{M2(x) \cdot m42(x)}{E \cdot I} dx$$

$$\theta_2 = 3.935 \times 10^{-4} \quad (\text{рад})$$

**ПРИКЛАД 5.2.** Визначити переміщення у перерізах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  консольної балки (рис. 5.7).

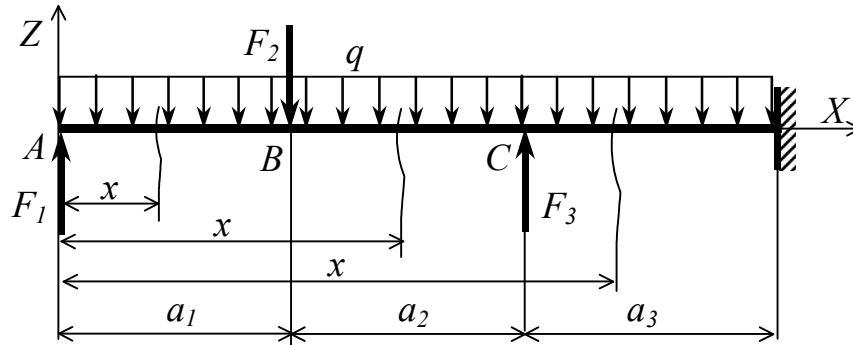


Рис. 5.7. Розрахункова схема стержня

Для визначення переміщень скористаємося можливостями пакета MathCAD.

Вводимо вхідні дані:

$$a_1 := 4 \quad a_2 := 4 \quad a_3 := 4 \quad (\text{м}) \quad L := a_1 + a_2 + a_3$$

$$F_1 := 20 \quad F_2 := 10 \quad F_3 := 15 \quad (\text{кН}) \quad q := 10 \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}} \right)$$

$$E := 2 \cdot 10^8 \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \right) \quad I := 10^{-2} \quad (\text{м}^4)$$

Запишемо функції згинаючих моментів на кожній ділянці від зовнішнього навантаження:

$$M1(x, F1) := F1 \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$M2(x, F1, F2) := F1 \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - F2 \cdot (x - a_1)$$

$$M3(x, F1, F2, F3) := F1 \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - F2 \cdot (x - a_1) + F3 \cdot (x - a_1 - a_2)$$

Переміщення у точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  за формулами Кастільяно



$$\Delta_A(F_1, F_2, F_3) := \frac{d}{dF_1} \left( \int_0^{a_1} \frac{M_1(x, F_1)^2}{2 \cdot E \cdot I} dx + \int_{a_1}^{a_1+a_2} \frac{M_2(x, F_1, F_2)^2}{2 \cdot E \cdot I} dx \dots \right. \\ \left. + \int_{a_1+a_2}^L \frac{M_3(x, F_1, F_2, F_3)^2}{2 \cdot E \cdot I} dx \right)$$

$$\Delta_A(F_1, F_2, F_3) = -8.053 \times 10^{-3} \text{ (м)}$$

$$\Delta_B(F_1, F_2, F_3) := \frac{d}{dF_2} \left( \int_0^{a_1} \frac{M_1(x, F_1)^2}{2 \cdot E \cdot I} dx + \int_{a_1}^{a_1+a_2} \frac{M_2(x, F_1, F_2)^2}{2 \cdot E \cdot I} dx \dots \right. \\ \left. + \int_{a_1+a_2}^L \frac{M_3(x, F_1, F_2, F_3)^2}{2 \cdot E \cdot I} dx \right)$$

$$\Delta_B(F_1, F_2, F_3) = 4.72 \times 10^{-3} \text{ (м)}$$

$$\Delta_C(F_1, F_2, F_3) := \frac{d}{dF_3} \left( \int_0^{a_1} \frac{M_1(x, F_1)^2}{2 \cdot E \cdot I} dx + \int_{a_1}^{a_1+a_2} \frac{M_2(x, F_1, F_2)^2}{2 \cdot E \cdot I} dx \dots \right. \\ \left. + \int_{a_1+a_2}^L \frac{M_3(x, F_1, F_2, F_3)^2}{2 \cdot E \cdot I} dx \right)$$

$$\Delta_C(F_1, F_2, F_3) = -1.547 \times 10^{-3} \text{ (м)}$$

Функції моментів від одиничних сил для визначення переміщень у точці *A*:

$$m_{11}(x) := x \quad m_{12}(x) := x \quad m_{13}(x) := x$$

у точці *B*:

$$m_{21}(x) := 0 \quad m_{22}(x) := x - a_1 \quad m_{23}(x) := x - a_1$$

у точці *C*:

$$m_{31}(x) := 0 \quad m_{32}(x) := 0 \quad m_{33}(x) := x - a_1 - a_2$$

Переміщення у точках за формулами Мора:

$$\Delta_1 := \int_0^{a_1} \frac{M_1(x) \cdot m_{11}(x)}{E \cdot I} dx + \int_{a_1}^{a_1+a_2} \frac{M_2(x) \cdot m_{12}(x)}{E \cdot I} dx + \int_{a_1+a_2}^L \frac{M_3(x) \cdot m_{13}(x)}{E \cdot I} dx$$

$$\Delta_1 = -8.053 \times 10^{-3}$$

$$\Delta_2 := \int_0^{a_1} \frac{M_1(x) \cdot m_{21}(x)}{E \cdot I} dx + \int_{a_1}^{a_1+a_2} \frac{M_2(x) \cdot m_{22}(x)}{E \cdot I} dx + \int_{a_1+a_2}^L \frac{M_3(x) \cdot m_{23}(x)}{E \cdot I} dx$$

$$\Delta_2 = -4.72 \times 10^{-3}$$

$$\Delta_3 := \int_0^{a_1} \frac{M_1(x) \cdot m_{31}(x)}{E \cdot I} dx + \int_{a_1}^{a_1+a_2} \frac{M_2(x) \cdot m_{32}(x)}{E \cdot I} dx + \int_{a_1+a_2}^L \frac{M_3(x) \cdot m_{33}(x)}{E \cdot I} dx$$

$$\Delta_3 = -1.547 \times 10^{-3}$$

### 5.3. Обчислення інтегралів Мора за правилом Верещагіна

Правило Верещагіна – це чисельний спосіб обчислення інтегралів Мора, оснований на побудові епюр. Якщо одна з двох функцій в інтегралі Мора є лінійною, обчислення інтеграла спрощується. Для стержневих систем, які складаються з прямолінійних стержнів, функція моментів від одиничного навантаження, а відповідно і епюра моментів, завжди лінійна.

Переміщення за правилом Верещагіна обчислюється за формулою

$$\Delta = \frac{\Omega m_c}{EI},$$

де  $\Omega$  – площа епюри від зовнішнього навантаження,

$m_c$  – ордината на одиничній епюрі (значення функції) в перерізі, де знаходиться центр ваги площі  $\Omega$ .

Отже, переміщення визначається шляхом перемноження епюр від зовнішнього та одиничного навантажень.

Якщо площа  $\Omega$  є складною, то її розбивають на прості фігури, для яких відомими є площі і положення центрів ваги.

Послідовність визначення переміщень за допомогою правила Верещагіна:

1) Побудувати епюри внутрішніх сил для системи від зовнішнього навантаження (при плоскому згині – епюру згинаючих моментів);

2) Прикласти одиничну силу (або момент) у тій точці і тому напрямку, де треба визначити переміщення, і побудувати епюри від одиничного навантаження;

3) Розбити площу епюри від зовнішнього навантаження на прості фігури, для яких визначити площі  $\Omega_i$  і положення центрів ваги;

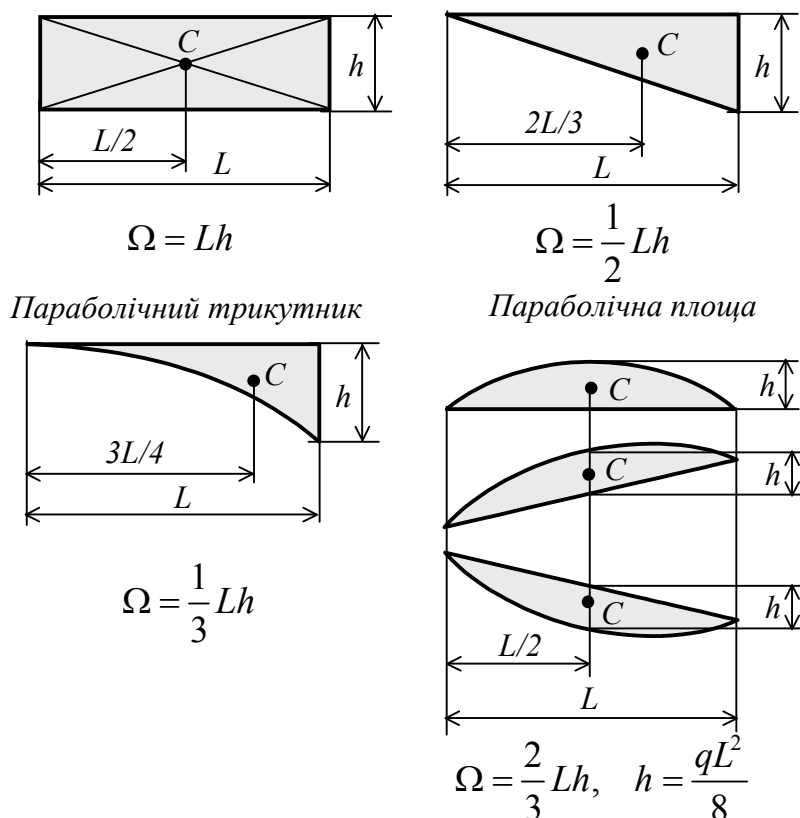
4) На одиничній епюрі визначити ординати в тих перерізах, де знаходяться центри ваги площ  $\Omega_i$ ;

5) Визначити переміщення – знайти суму добутків

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_i m_{ci}}{EI},$$

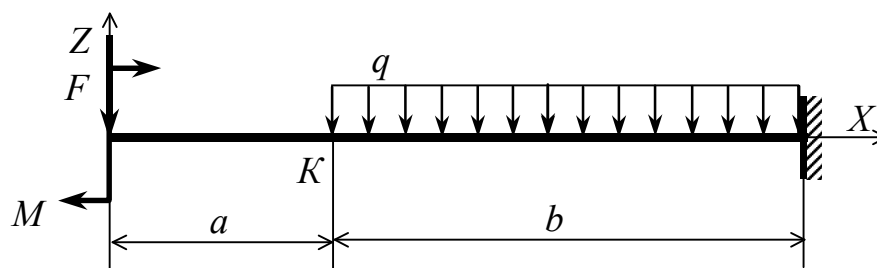
де  $n$  – кількість площ.

Примітка: якщо площа  $\Omega_i$  і відповідна ордината  $m_{ci}$  лежать по один бік від нульової лінії, то добуток записується зі знаком +, якщо по різні – зі знаком -. Площі та положення центрів ваги основних фігур, на які розбиваються епюри, показано на *рис. 5.8*.



*Рис. 5.8. Площі і положення центрів ваги основних фігур*

**ПРИКЛАД 5.2.** Визначити способом Верещагіна переміщення точки  $K$  для балки, зображеної на *рис. 5.9*.



*Рис. 5.9. Розрахункова схема балки*

Вхідні дані:

$$F := 10 \text{ кН}, \quad M := 30 \text{ кНм}, \quad q := 25 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, \quad a := 1 \text{ м}, \quad b := 2 \text{ м},$$

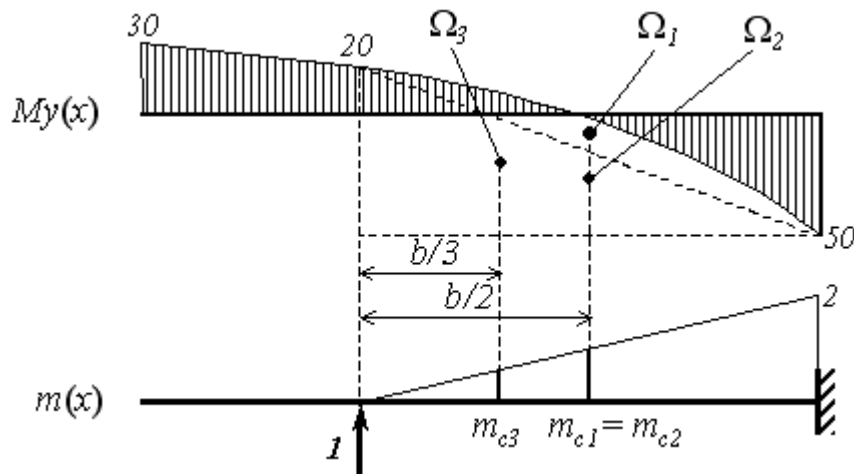
$$E := 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2, \quad I := 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Розв'язання:

Побудуємо епюри згинаючих моментів від зовнішнього навантаження та від одиничної сили, прикладеної в точці  $K$ , як показано на *рис. 5.10*.

Розіб'ємо площу епюри  $M_y(x)$  на прості фігури (*рис. 5.10*), причому епюру на першій ділянці не враховуємо, оскільки одиничне навантаження на цій ділянці дорівнює нулю. Визначимо площі і відповідні ординати.

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \frac{q \cdot b^3}{12} \rightarrow \frac{50}{3} & m_{c1} &:= 1 \\ \Omega_2 &:= 50 \cdot b \rightarrow 100 & m_{c2} &:= 1 \\ \Omega_3 &:= \left( \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot b \right) \rightarrow 70 & m_{c3} &:= \frac{1}{3} \cdot b \rightarrow \frac{2}{3}\end{aligned}$$



*Рис. 5.10. Епюри згинаючих моментів від зовнішнього навантаження і одиничної сили*

Визначимо переміщення, перемноживши площі і ординати з урахуванням розташування епюр,

$$\Delta := \frac{1}{E \cdot I} \cdot (\Omega_1 \cdot m_{c1} - \Omega_2 \cdot m_{c2} + \Omega_3 \cdot m_{c3}) \rightarrow \frac{-110}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$\Delta = -9.964 \times 10^{-3} \quad (\text{м})$$

Від'ємне значення означає, що переміщення точки  $K$  відбувається у напрямку, протилежному прикладеній одиничній силі.

**ПРИКЛАД 5.2.** Визначити лінійне переміщення перерізу  $K$  консольної рами трубчастого перерізу (*рис. 5.11*).

Вхідні дані:

$$F_1 := 20 \quad \text{кН} \quad F_2 := 60 \quad \text{кН} \quad M := 50 \quad \text{кНм}$$

$$a := 3 \quad \text{м} \quad b := 2 \quad \text{м} \quad \alpha := 0.8$$

$$\sigma_{\text{adm}} := 16 \quad \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

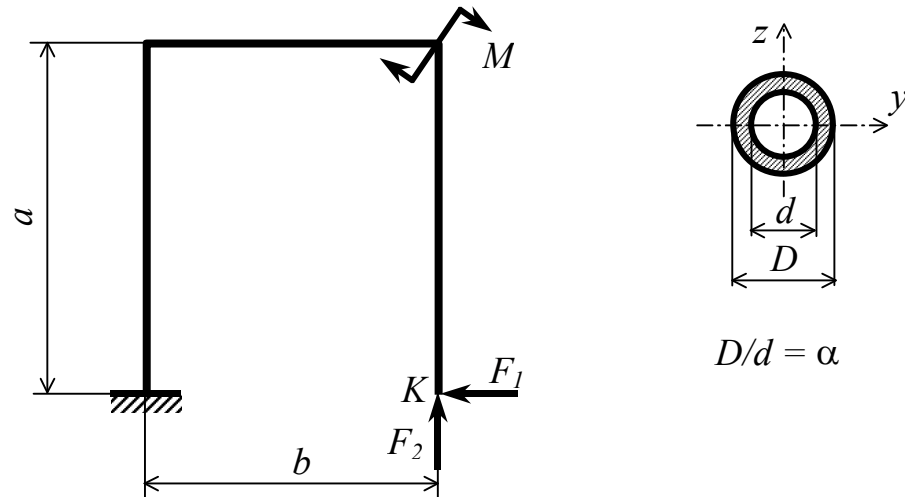


Рис. 5.11. Розрахункова схема консольної рами

Розв'язання:

Побудуємо епюру згинаючих моментів (рис. 5.12, а) і визначимо розміри перерізу з умови міцності при плоскому згині.

Максимальне значення моменту складає  $M_{y \max} = 110 \text{ кНм}$ .

Визначимо осьовий момент опору з умови міцності

$$W_y := \frac{M_{y \max} \cdot 100}{\sigma_{adm}} \quad W_y = 687.5 \text{ см}^3$$

Знаючи формулу для осьового моменту опору трубчастого перерізу [3], визначимо розміри перерізу:

$$D := 0 \quad d := 0$$

Given

$$\frac{d}{D} = \alpha \quad W_y = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - \alpha^4)$$

$$\begin{pmatrix} D \\ d \end{pmatrix} := \text{Find}(D, d) \quad \begin{pmatrix} D \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22.806 \\ 18.245 \end{pmatrix}$$

$$D := 22.8 \text{ см} \quad d := 18.2 \text{ см}$$

Визначимо осьовий момент інерції перерізу

$$J_y := \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4) \quad J_y = 1.566 \times 10^4 \text{ см}^4$$

Переміщення визначимо способом Верещагіна.

Для визначення переміщення перерізу  $K$  прикладемо одиничні сили в точці  $K$  і побудуємо епюри моментів від одиничних сил (рис. 5.12, б). Епюру моментів від зовнішнього навантаження перемножимо з одиничними епюрами, для цього, згідно з правилом Верещагіна, розіб'ємо епюру

моментів від зовнішнього навантаження на прості площі (рис. 5.12, а), визначимо положення центрів ваги площ і визначимо ординати на одиничних епюрах у перерізах, де знаходяться центри ваги виділених площ (рис. 5.12, б)

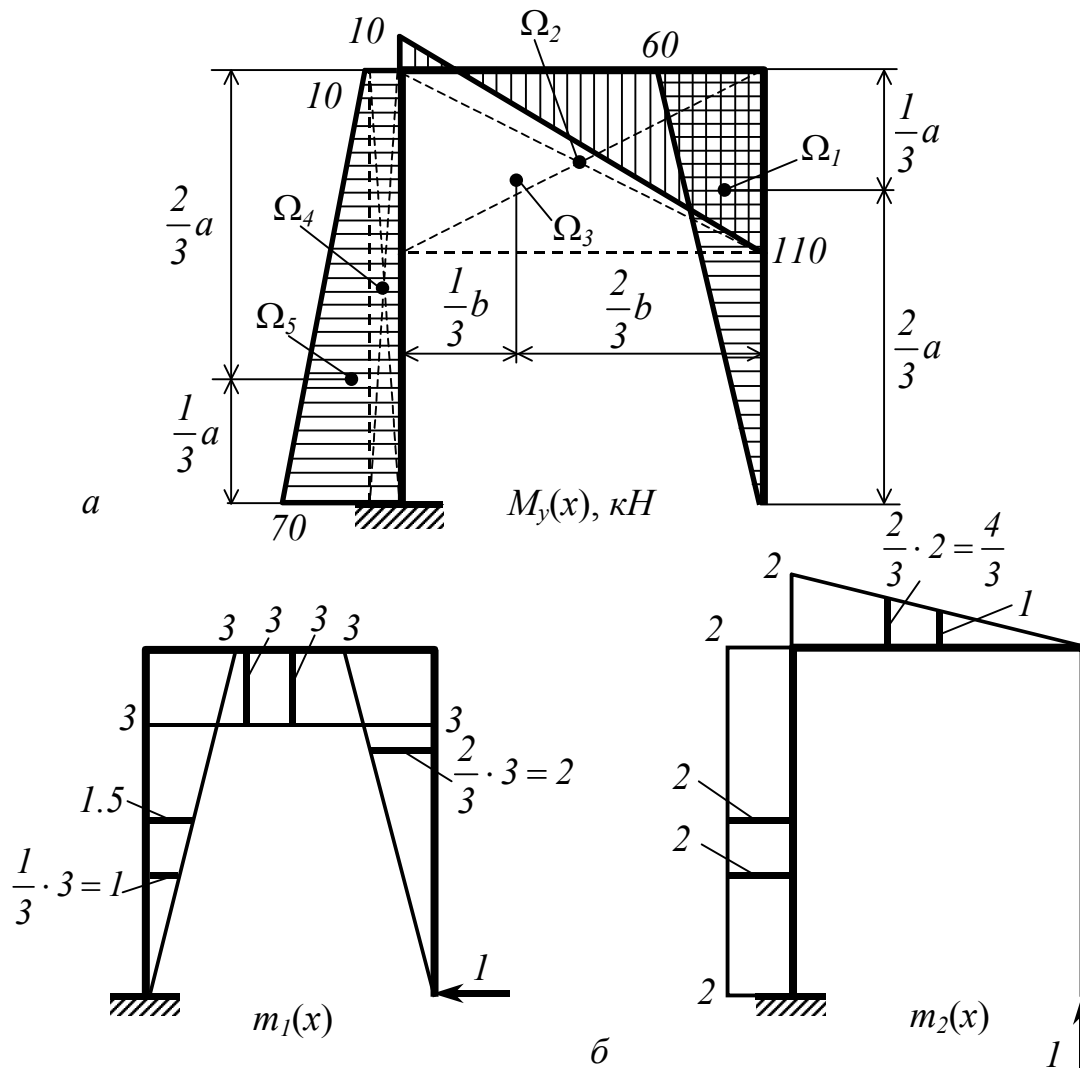


Рис. 5.12. Епюра згинаючих моментів для рами (а); епюри моментів від одиничних сил (б)

Визначимо площі:

$$\Omega_1 := \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot a \quad \Omega_1 = 90$$

$$\Omega_2 := 110 \cdot b \quad \Omega_2 = 220$$

$$\Omega_3 := \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot b \quad \Omega_3 = 120$$

$$\Omega_4 := 10 \cdot a \quad \Omega_4 = 30$$

$$\Omega_5 := \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot a \quad \Omega_5 = 90$$

Запишемо модуль Юнга і осьовий момент інерції

$$E := 2 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \quad J_y := J_y \cdot 10^{-8} \quad J_y = 1.566 \times 10^{-4} \text{ м}^4$$

Запишемо переміщення за правилом Верещагіна

$$\Delta_1 := \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot (\Omega_1 \cdot 2 + \Omega_2 \cdot 3 - \Omega_3 \cdot 3 - \Omega_4 \cdot 1.5 - \Omega_5 \cdot 1)$$

$$\Delta_1 = 0.011 \text{ м}$$

$$\Delta_2 := \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \left( -\Omega_2 \cdot 1 + \Omega_3 \cdot \frac{4}{3} + \Omega_4 \cdot 2 + \Omega_5 \cdot 2 \right)$$

$$\Delta_2 = 5.746 \times 10^{-3} \text{ м}$$

Повне переміщення перерізу  $K$

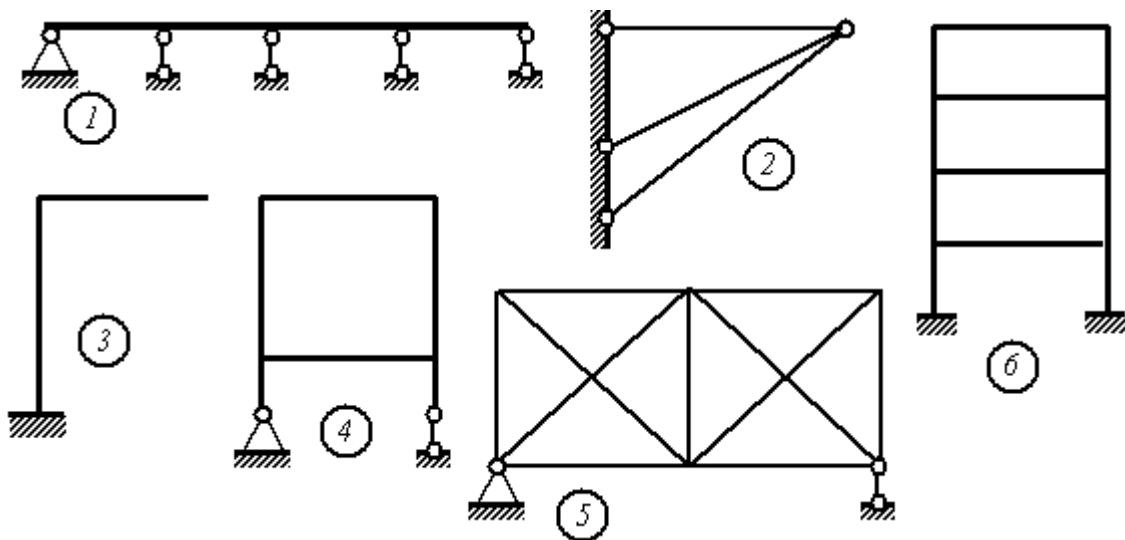
$$\Delta := \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} \quad \Delta = 0.012 \text{ м}$$

## РОЗДІЛ 6

### РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО-НЕВИЗНАЧУВАНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

#### 6.1. Поняття про статично-невизначувані системи

Статично-невизначуваними називають системи, в яких неможливо визначити реакції і внутрішні зусилля у перерізах, користуючись тільки рівняннями рівноваги (рівняннями статки). Приклади статично-невизначуваних систем показано на *рис. 6.1*.



*Рис. 6.1. Статично-невизначувані системи*

Стержневі системи №№ 1, 2, 3 є зовнішньо статично-невизначуваними, в яких кількість опорних реакцій перевищує кількість рівнянь рівноваги, системи №№ 4, 5 є внутрішньо статично-невизначуваними, в яких внутрішні зусилля в перерізах не можна визначити тільки з рівнянь рівноваги, система № 6 є змішаною. Ступінь статичної невизначуваності дорівнює кількості “зайвих” з точки зору геометричної незмінюваності реакцій або внутрішніх зусиль у “зайвих” стержнях.

Якщо в статично-визначуваних конструкціях реакції і внутрішні зусилля визначаються у припущенні про абсолютну жорсткість конструкції, то для визначення “зайвих” реакцій або сил у “зайвих” стержнях статично-невизначуваної системи необхідно розглянути умови деформування конструкції. Як правило, це умови рівності нулю переміщень у опорах – умови закріплення, або умови відсутності взаємних переміщень у відповідних перерізах. Оскільки при цьому в одержаних рівняннях невідомими є сили –



реакції в опорах або зусилля в стержнях, – то такий метод розрахунку статично-невизначуваних конструкцій називається методом сил, якщо невідомими приймаються переміщення в деяких перерізах – методом переміщень.

## 6.2. Метод сил

Згідно з методом сил для визначення додаткових реакцій записують умови, які характеризують переміщення в деяких перерізах, зокрема, умови рівності нулю переміщень у напрямках опорних реакцій. Ці умови називають умовами сумісності переміщень. Додатковими або “зайвими” можна приймати такі в’язі, після відкидання яких система стає статично-визначуваною і не перетворюється на механізм. Для кожної статично-невизначуваної системи можна записати необхідну кількість додаткових умов, з яких визначаються додаткові реакції.

Розглянемо статично-невизначувану балку (рис. 6.2, а). Для визначення п’яти реакцій опор маємо три рівняння рівноваги для плоскої системи сил, отже система є двічі статично-невизначуваною. Додаткові рівняння одержимо, записуючи умови сумісності переміщень у перерізах із “зайвими” опорами.

Для заданої системи зручніше вибрати додатковими шарнірно-рухомі опори, після відкидання яких одержуємо **основну систему** у вигляді консольної балки (рис. 6.2, б). Всі подальші розрахунки будемо проводити саме з основною системою.

Якщо до основної системи прикласти задане зовнішнє навантаження і невідомі реакції  $X_1$  і  $X_2$  такі, що переміщення перерізів 1 і 2 буде дорівнювати нулю, одержимо **еквівалентну систему**, тобто статично-визначувану систему, яка деформується так само, як задана статично-невизначувана (рис. 6.2, в). Умови сумісності переміщень у перерізах 1 і 2 запишемо у вигляді

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0. \quad (6.1)$$

Скористаємось принципом незалежності дії сил, згідно з яким переміщення від суми сил дорівнює сумі переміщень від кожної окремої сили, отже рівняння (6.1) можна записати як суми переміщень від зовнішнього навантаження і від кожної “зайвої” реакції окремо

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \Delta_{1F} &= 0, \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \Delta_{2F} &= 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

де  $\Delta_{iF}$  – переміщення у відповідному перерізі від заданого зовнішнього навантаження (рис. 6.2, г);

$\delta_{ij}$  – переміщення  $i$ -го перерізу від одиничної сили, прикладеної аналогічно  $j$ -й реакції (рис. 6.2, д, е).

Рівняння (6.2) і є умовами еквівалентності заданої статично-невизначуваної конструкції і еквівалентної системи.

Рівняння сумісності переміщень (6.2) називають канонічними рівняннями методу сил. Коефіцієнти системи канонічних рівнянь є переміщеннями, які можна визначити будь-яким відомим способом.

Знайдені з канонічної системи рівнянь невідомі реакції на наступному етапі додаються до заданого зовнішнього навантаження як відомі зосереджені сили, після чого балка розраховується як статично-визначувана система з додатковими силами.

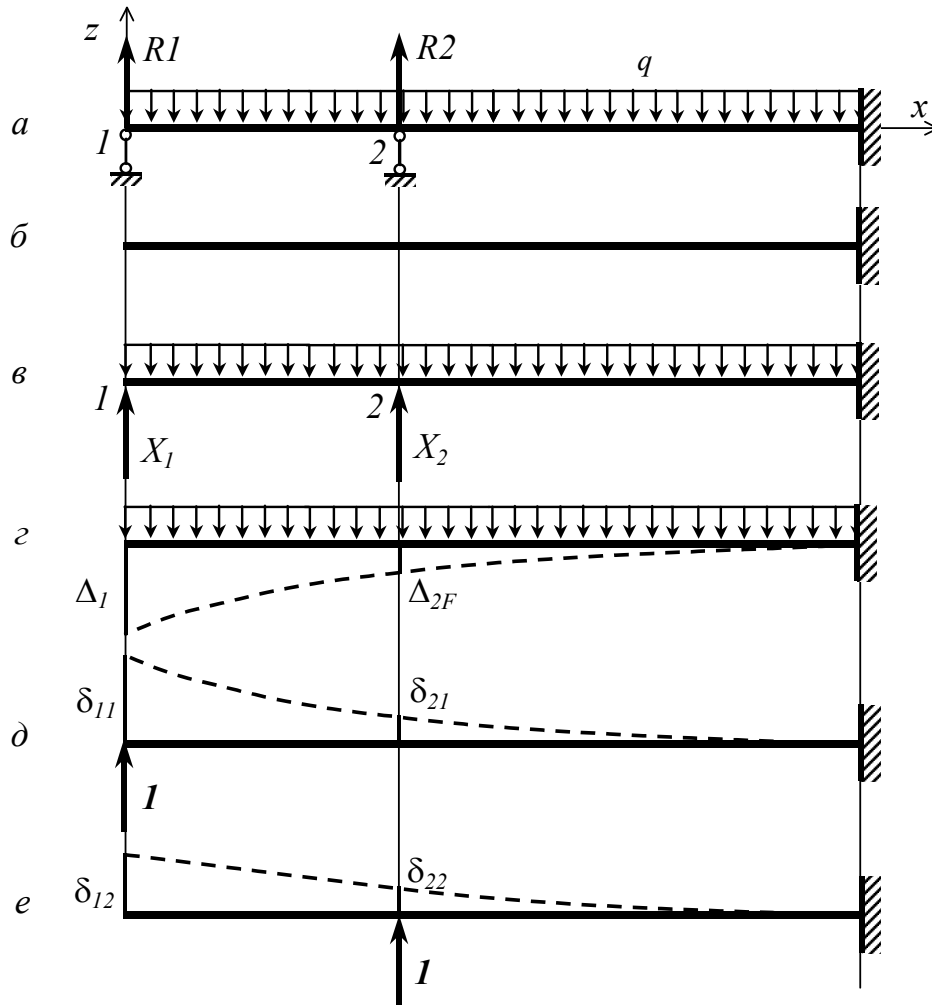


Рис. 6.2. Розрахунок статично-невизначуваної балки

### ПРИКЛАД 6.1. Розрахунок статично-невизначуваної балки.

Для заданої балки (рис. 6.3) побудувати епюри внутрішніх сил, підібрати перерізи заданої форми і визначити переміщення у заданих перерізах.

Вхідні дані:

$$F := 20 \text{ кН}, \quad M1 := 40 \text{ кНм}, \quad q := 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, \quad a := 4 \text{ м},$$

$$E := 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2, \quad \sigma_{adm} := 16 \text{ кН/м}^2.$$

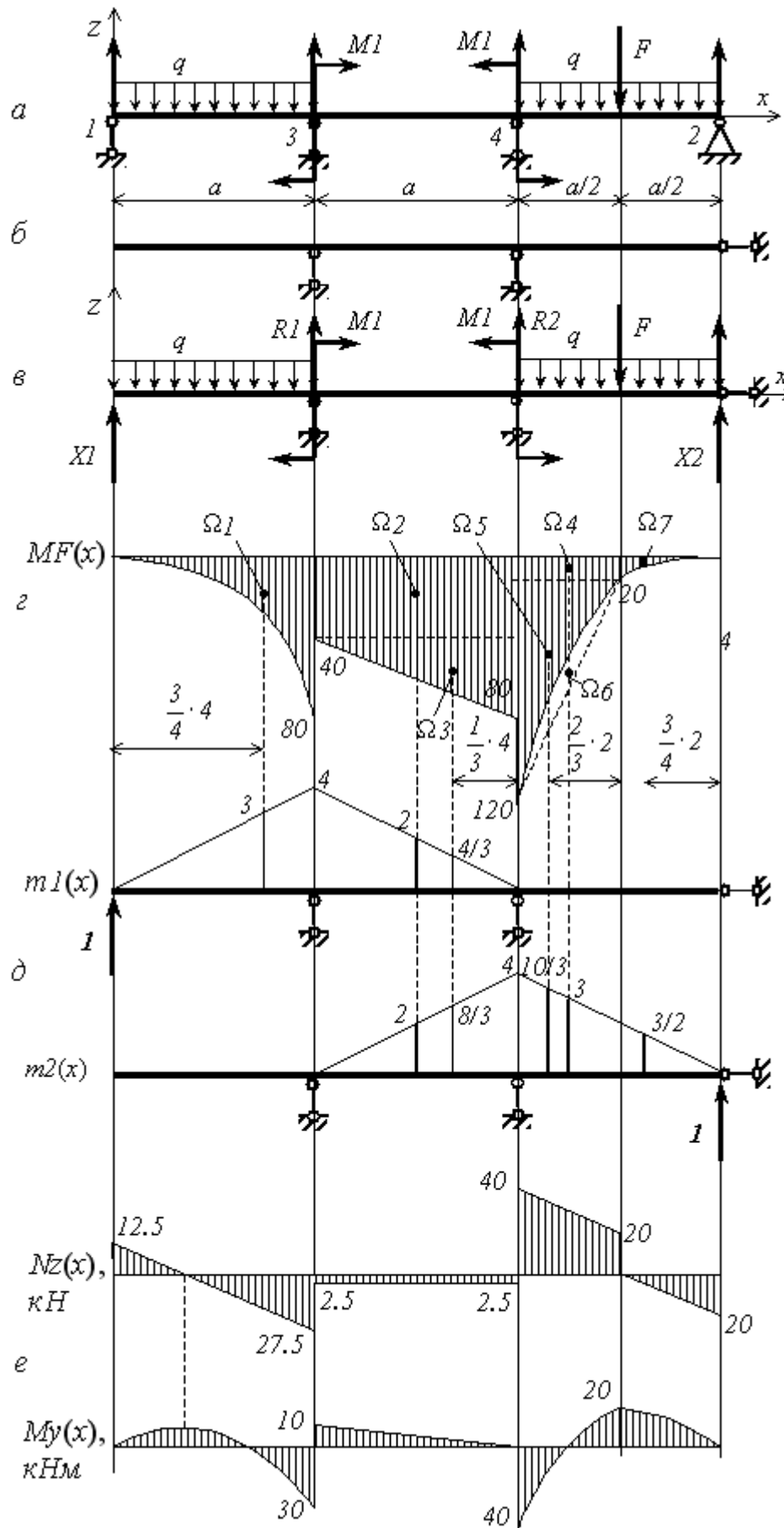


Рис. 6.3. Розрахунок статично-невизначуваної балки методом сил

Балка є двічі статично-невизначуваною. При ручному розрахунку методом сил вибір додаткових реакцій впливає на трудомісткість розв'язку. Для даної задачі доцільно відкинути крайні шарнірно-рухомі опори в перерізах 1 і 2. При відкиданні додаткових опор необхідно слідкувати, щоб система не перетворювалася на механізм.

Після відкидання додаткових опор одержуємо основну систему (рис. 6.3, б).

Прикладемо до основної системи задане зовнішнє навантаження і невідомі реакції  $X_1$  і  $X_2$  і запишемо умови еквівалентності заданої статично-невизначуваної балки і основної системи, навантаженої зовнішнім навантаженням і невідомими реакціями. Такими умовами є умови рівності нулю переміщень у напрямках невідомих реакцій

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0.$$

У канонічній формі умови сумісності переміщень записують у вигляді:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \Delta_{1F} = 0$$

$$X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \Delta_{2F} = 0$$

де  $\Delta_{1F}, \delta_{11}, \delta_{12}$  – переміщення першого перерізу від заданого зовнішнього навантаження та від одиничних сил, прикладених у напрямках невідомих реакцій  $X_1$  і  $X_2$ ;

$\Delta_{2F}, \delta_{21}, \delta_{22}$  – те ж саме для другого перерізу.

Визначимо коефіцієнти канонічної системи рівнянь за допомогою правила Верещагіна. Для цього побудуємо епюру згинаючих моментів  $MF(x)$  для основної системи, навантаженої тільки зовнішнім навантаженням (рис. 6.3, г) та одиничні епюри  $m_1(x)$  і  $m_2(x)$  для основної системи, навантаженої одиничними силами у напрямках невідомих реакцій у точках 1 і 2 (рис. 6.3, д). Розіб'ємо епюру  $MF(x)$  на прості площі:

$$\Omega_1 := \frac{1}{3} \cdot 80 \cdot 4 \quad \Omega_1 = \frac{320}{3}$$

$$\Omega_2 := 40 \cdot 4 \quad \Omega_2 = 160$$

$$\Omega_3 := \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 \quad \Omega_3 = 80$$

$$\Omega_4 := 20 \cdot 2 \quad \Omega_4 = 40$$

$$\Omega_5 := \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 2 \quad \Omega_5 = 100$$

$$\Omega_6 := \frac{q \cdot 2^3}{12} \quad \Omega_6 = \frac{20}{3}$$

$$\Omega_7 := \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 2 \quad \Omega_7 = \frac{40}{3}$$

Знаючи положення центрів ваги площ, на одиничних епюрах визначимо ординати у відповідних перерізах (рис. 6.3, д).

За правилом Верещагіна для визначення переміщення від зовнішнього навантаження необхідно перемножити епюру моментів від зовнішнього навантаження з одиничними епюрами, для визначення переміщень від одиничних сил перемножуються одиничні епюри:

$$\Delta 1F = MF(x) \times m1(x), \quad \Delta 2F = MF(x) \times m2(x),$$

$$\delta 11 = m1(x) \times m1(x), \quad \delta 12 = m1(x) \times m2(x),$$

$$\delta 22 = m2(x) \times m2(x), \quad \delta 21 = \delta 12.$$

$$\Delta 1F := -\Omega 1 \cdot 3 - \Omega 2 \cdot 2 - \Omega 3 \cdot \frac{4}{3}$$

$$\Delta 2F := -\Omega 2 \cdot 2 - \Omega 3 \cdot \frac{8}{3} - \Omega 4 \cdot 3 - \Omega 5 \cdot \frac{10}{3} + \Omega 6 \cdot 3 - \Omega 7 \cdot \frac{3}{2}$$

$$\Delta 1F = -\frac{2240}{3} \quad \Delta 2F = -\frac{2960}{3}$$

$$\delta 11 := \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 \quad \delta 11 = \frac{128}{3}$$

$$\delta 22 := \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 \quad \delta 22 = \frac{128}{3}$$

$$\delta 12 := \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \quad \delta 12 = \frac{32}{3} \quad \delta 21 := \delta 12$$

Визначимо невідомі реакції з канонічної системи рівнянь

$$X1 \cdot \delta 11 + X2 \cdot \delta 12 + \Delta 1F = 0$$

$$X1 \cdot \delta 21 + X2 \cdot \delta 22 + \Delta 2F = 0$$

$$X1 = 12.5 \quad X2 = 20$$

Для побудови епюр поперечних сил для заданої балки прикладемо визначені реакції  $X1$  і  $X2$  як відомі зовнішні сили і визначимо реакції  $R1$  і  $R2$  з рівнянь рівноваги: суми проєкцій сил на вісь  $z$  і суми моментів відносно перерізу 2 (рис. 6.3, в):

$$-q \cdot 4 + X1 + R1 + R2 - q \cdot 4 - F + X2 = 0$$

$$X1 \cdot 12 - q \cdot 4 \cdot 10 + M1 + R1 \cdot 8 - M1 - q \cdot 4 \cdot 2 + R2 \cdot 4 - F \cdot 2 = 0$$

$$R1 = 25 \quad R2 = 42.5$$

Запишемо рівняння поперечних сил і згинаючих моментів на кожній ділянці (рис. 6.3, в) і визначимо значення внутрішніх сил на початку і в кінці кожної ділянки:

$$Nz1(x) := X1 - q \cdot x \quad Nz1(0) = 12.5 \quad Nz1(4) = -27.5$$

$$Nz2(x) := X1 - q \cdot 4 + R1 \quad Nz2(4) = -2.5$$

$$Nz3(x) := X1 - q \cdot 4 + R1 + R2 - q \cdot (x - 8)$$

$$Nz3(8) = 40 \quad Nz3(10) = 20$$

$$Nz4(x) := X1 - q \cdot 4 + R1 + R2 - q \cdot (x - 8) - F$$

$$Nz4(10) = 0 \quad Nz4(12) = -20$$

$$My1(x) := X1 \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \quad My1(0) = 0 \quad My1(4) = -30$$

$$My2(x) := X1 \cdot x - q \cdot 4 \cdot (x - 2) + R1 \cdot (x - 4) + M1$$

$$My2(4) = 10 \quad My2(8) = 0$$

$$My3(x) := X1 \cdot x - q \cdot 4 \cdot (x - 2) + R1 \cdot (x - 4) + R2 \cdot (x - 8) \dots$$

$$+ M1 - q \cdot \frac{(x - 8)^2}{2} - M1$$

$$My3(8) = -40 \quad My3(10) = 20$$

$$My4(x) := X1 \cdot x - q \cdot 4 \cdot (x - 2) + R1 \cdot (x - 4) + R2 \cdot (x - 8) - q \cdot \frac{(x - 8)^2}{2} \dots$$

$$+ -F \cdot (x - 10) + M1 - M1$$

$$My4(10) = 20 \quad My4(12) = 0$$

За одержаними значеннями побудуємо епюри поперечних сил і згинаючих моментів (рис. 6.3, e).

Як видно із порівняння епюр  $MF(x)$  і  $My(x)$ , додаткові опори дають можливість зменшити максимальні внутрішні зусилля в даному випадку в 3 рази, що підтверджує, що вони зовсім не зайві.

Підберемо перерізи різної форми.

Перерізи складаються з двох однакових профілів (швелерів або двотаврів), розташованих по-різному відносно головних осей перерізу (рис. 6.4).

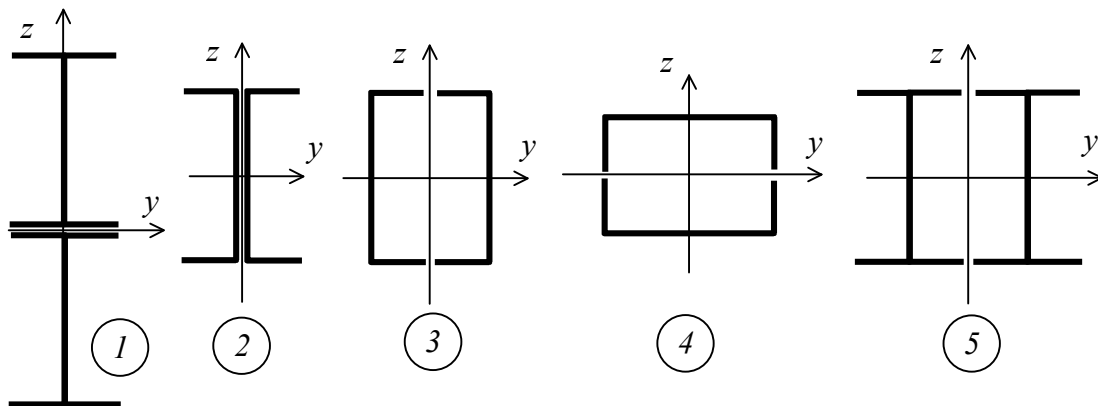


Рис. 6.4. Поперечні перерізи для балки

Визначимо осьовий момент опору перерізу з умови міцності при плоскому згині

$$\frac{M_{y \max}}{W_y} \leq \sigma_{adm},$$

де  $\sigma_{adm}$  – допустиме напруження для даного матеріалу,

$M_{y \max}$  – момент у найбільш небезпечному перерізі, який визначається з епюри.

$$\sigma_{adm} := 16 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

$$M_{\max} := |M_{y3(8)}| \quad M_{\max} = 40 \quad (\text{кНм})$$

$$W_y := \frac{M_{\max} \cdot 100}{\sigma_{adm}} \quad W_y = 250 \quad (\text{см}^3)$$

Для перерізів № 2, 3 (рис. 6.4) головна вісь перерізу  $y$ , відносно якої відбувається згин, співпадає з головною віссю  $x$  для окремого швелера (див. сортамент прокатної сталі у Додатку В). Отже, осьовий момент опору для одного швелера

$$W_x := \frac{W_y}{2} \quad W_x = 125 \quad (\text{см}^3)$$

Приймаємо швелер №18, осьовий момент опору якого

$$W_{x1} := 121 \quad (\text{см}^3)$$

Перевіримо напруження:

$$\sigma := \frac{M_{\max} \cdot 100}{W_{x1} \cdot 2} \quad \sigma = 16.529 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

$$\frac{16.529 - 16}{16} \cdot 100 = 3.306$$

Перевантаження не перевищує 5 %.

Підберемо двотавр для перерізу № 5 (рис. 6.4) аналогічно попередньому.

$$W_x := \frac{W_y}{2} \quad W_x = 125 \quad (\text{см}^3)$$

Прийmemo двотавр №18, для якого

$$W_{x2} := 143 \quad (\text{см}^3)$$

$$\sigma := \frac{M_{\max} \cdot 100}{143 \cdot 2} \quad \sigma = 13.986$$

$$\left| \frac{13.986 - 16}{16} \right| \cdot 100 = 12.587$$

Недовантаження складає 12.587%.

Підберемо номер двотавра для перерізу № 1.

Головна вісь перерізу не проходить через центри ваги обох профілів і є паралельною головній осі  $x$  кожного двотавра, отже для визначення моменту інерції перерізу скористаємось формулами визначення моментів інерції відносно паралельних осей<sup>\*)</sup> [1]:

$$I_{y1} = \left( I_x + A \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right) \cdot 2, \quad W_{y1} = \frac{I_{y1}}{z_{\max}} = \frac{I_{y1}}{h}.$$

Переріз шукаємо підбором.

Перевіримо двотавр № 18, як у попередньому прикладі.

$$h := 18 \text{ (см)} \quad b := 9 \text{ (см)} \quad A2 := 23.4 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$I_x := 1290 \text{ (см}^4\text{)} \quad I_y := 82.6 \text{ (см}^4\text{)}$$

$$W_{y2} := \frac{\left[ I_x + A2 \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] \cdot 2}{h} \quad W_{y2} = 353.933 \text{ (см}^3\text{)}$$

Момент опору перерізу набагато більший за необхідний, перевіримо переріз №16:

$$h := 16 \text{ (см)} \quad b := 8.1 \text{ (см)} \quad A2 := 20.2 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$I_x := 873 \text{ (см}^4\text{)} \quad I_y := 51.6 \text{ (см}^4\text{)}$$

$$W_{y2} := \frac{\left[ I_x + A2 \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] \cdot 2}{h} \quad W_{y2} = 270.725 \text{ (см}^3\text{)}$$

$$\sigma := \frac{M_{\max} \cdot 100}{W_{y2}} \quad \sigma = 14.775 \quad \left| \frac{\sigma - 16}{16} \right| \cdot 100 = 7.655$$

Недовантаження складає 7.655%, отже для перерізу № 1 приймаємо двотавр № 16.

Підберемо швелер для перерізу № 4. Головна вісь перерізу є паралельною осі  $y$  кожного швелера. Скористаємось формулою для визначення моменту інерції відносно паралельних осей [1].

$$I_{y2} = \left( I_y + A \cdot (b - z_0)^2 \right) \cdot 2, \quad W_{y2} = \frac{I_{y2}}{z_{\max}} = \frac{I_{y2}}{b}.$$

Перевіримо швелер № 18:

$$h := 18 \text{ (см)} \quad b := 7 \text{ (см)} \quad z_0 := 1.94 \text{ (см)} \quad A1 := 20.7 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$I_x := 1090 \text{ (см}^4\text{)} \quad I_y := 86 \text{ (см}^4\text{)}$$

$$W_{x1} := \frac{\left[ I_y + A1 \cdot (b - z_0)^2 \right] \cdot 2}{b} \quad W_{x1} = 175.998$$

<sup>\*)</sup> Формула для моменту інерції площ при паралельному переносі аналогічні формулі Штайнера для моментів інерції мас.



Момент опору недостатній. Перевіримо № 22:

$$h := 22 \quad b := 8.2 \quad z_0 := 2.55 \quad A_1 := 26.7$$

$$I_x := 2110 \quad I_y := 151$$

$$W_{y1} := \frac{[I_y + A_1 \cdot (b - z_0)^2] \cdot 2}{b} \quad W_{y1} = 244.715$$

$$\sigma := \frac{M_{\max} \cdot 100}{W_{y1}} \quad \sigma = 16.346 \quad \frac{16.346 - 16}{16} \cdot 100 = 2.163$$

Перевантаження не перевищує 5 %, отже для перерізу № 4 остаточно приймаємо швелер № 22.

Для розрахунку багатопрольотних статично-невизначуваних балок сталого поперечного перерізу можна використати метод сил у формі методу початкових параметрів, при цьому доцільно скористатися можливостями пакета MathCAD.

Запишемо функції поперечних сил, згинаючих моментів, кутів повороту і прогинів за допомогою функції Хевісайда, задаючи невідомі реакції і початкові параметри (початковий кут повороту і прогин) як невідомі аргументи функцій:

$$\begin{aligned} N(x, R_1, R_2, R_3, R_4) := & R_1 \cdot \Phi(x) - q \cdot x \cdot \Phi(x) + q \cdot (x - 4) \cdot \Phi(x - 4) \dots \\ & + R_2 \cdot \Phi(x - 4) + R_3 \cdot \Phi(x - 8) \dots \\ & + -q \cdot (x - 8) \cdot \Phi(x - 8) - F \cdot \Phi(x - 10) \dots \\ & + R_4 \cdot \Phi(x - 12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x, R_1, R_2, R_3, R_4) := & R_1 \cdot x \cdot \Phi(x) - q \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \Phi(x) + q \cdot \frac{(x - 4)^2}{2} \cdot \Phi(x - 4) \dots \\ & + R_2 \cdot (x - 4) \cdot \Phi(x - 4) + R_3 \cdot (x - 8) \cdot \Phi(x - 8) \dots \\ & + -q \cdot \frac{(x - 8)^2}{2} \cdot \Phi(x - 8) + q \cdot (x - 12) \cdot \Phi(x - 12) \dots \\ & + -F \cdot (x - 10) \cdot \Phi(x - 10) + R_4 \cdot (x - 12) \cdot \Phi(x - 12) \dots \\ & + M_1 \cdot \Phi(x - 4) - M_1 \cdot \Phi(x - 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(x, \Theta_0, R_1, R_2, R_3, R_4) := & \Theta_0 + R_1 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \Phi(x) - q \cdot \frac{x^3}{6} \cdot \Phi(x) \dots \\ & + q \cdot \frac{(x - 4)^3}{6} \cdot \Phi(x - 4) + R_2 \cdot \frac{(x - 4)^2}{2} \cdot \Phi(x - 4) \dots \\ & + R_3 \cdot \frac{(x - 8)^2}{2} \cdot \Phi(x - 8) - q \cdot \frac{(x - 8)^3}{6} \cdot \Phi(x - 8) \dots \\ & + -F \cdot \frac{(x - 10)^3}{6} \cdot \Phi(x - 10) + R_4 \cdot \frac{(x - 12)^3}{6} \cdot \Phi(x - 12) \dots \\ & + M_1 \cdot (x - 4) \cdot \Phi(x - 4) - M_1 \cdot (x - 8) \cdot \Phi(x - 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(x, w_0, \Theta_0, R_1, R_2, R_3, R_4) := & w_0 + \Theta_0 \cdot x + R_1 \cdot \frac{x^3}{6} \cdot \Phi(x) - q \cdot \frac{x^4}{24} \cdot \Phi(x) \dots \\
& + q \cdot \frac{(x-4)^4}{24} \cdot \Phi(x-4) + R_2 \cdot \frac{(x-4)^3}{6} \cdot \Phi(x-4) \dots \\
& + R_3 \cdot \frac{(x-8)^3}{6} \cdot \Phi(x-8) - q \cdot \frac{(x-8)^4}{24} \cdot \Phi(x-8) \dots \\
& + q \cdot \frac{(x-12)^4}{24} \cdot \Phi(x-12) \dots \\
& + -F \cdot \frac{(x-10)^3}{6} \cdot \Phi(x-10) \dots \\
& + R_4 \cdot \frac{(x-12)^3}{6} \cdot \Phi(x-12) \dots \\
& + M_1 \cdot \frac{(x-4)^2}{2} \cdot \Phi(x-4) - M_1 \cdot \frac{(x-8)^2}{2} \cdot \Phi(x-8)
\end{aligned}$$

Шість невідомих визначимо за допомогою блоку Given...Find, записуючи умови рівноваги і умови закріплення (умови рівності нулю прогинів в опорах):

$$R_1 := 0 \quad R_2 := 0 \quad R_3 := 0 \quad R_4 := 0 \quad w_0 := 0 \quad \Theta_0 := 0$$

Given

$$N(12, R_1, R_2, R_3, R_4) = 0$$

$$M(12, R_1, R_2, R_3, R_4) = 0$$

$$w(0, w_0, \Theta_0, R_1, R_2, R_3, R_4) = 0$$

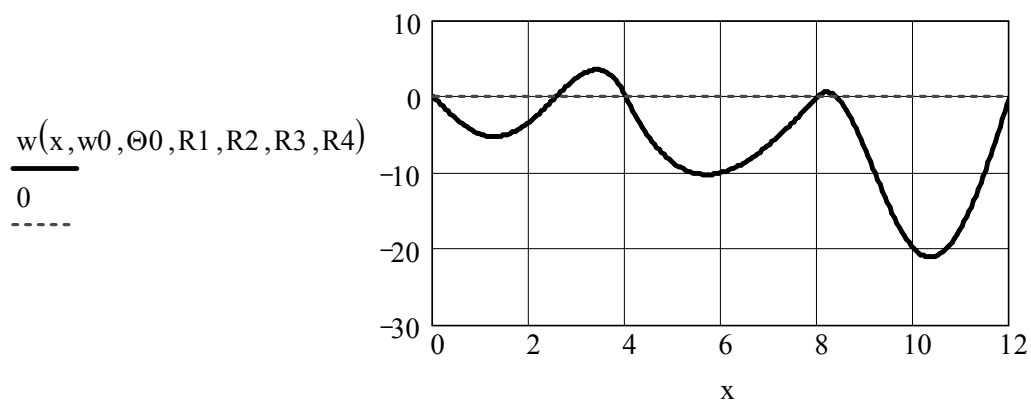
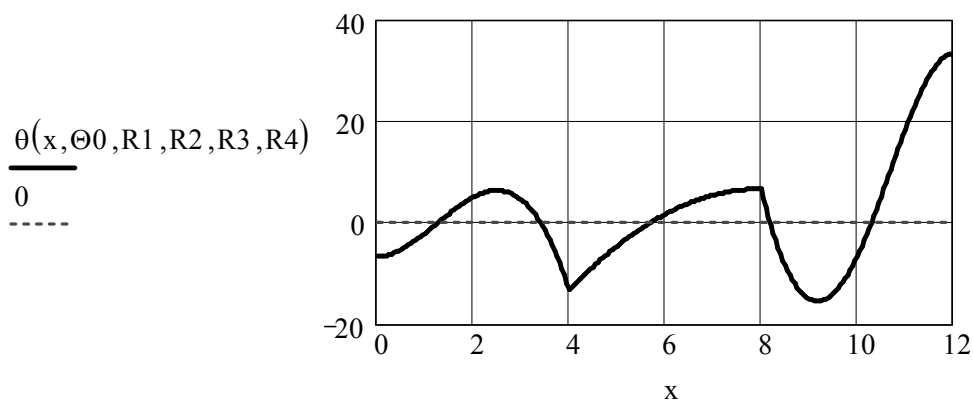
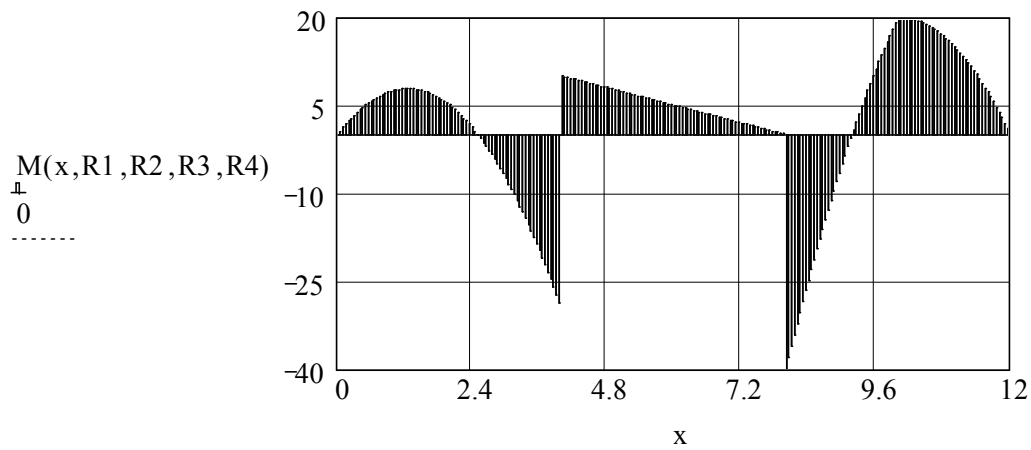
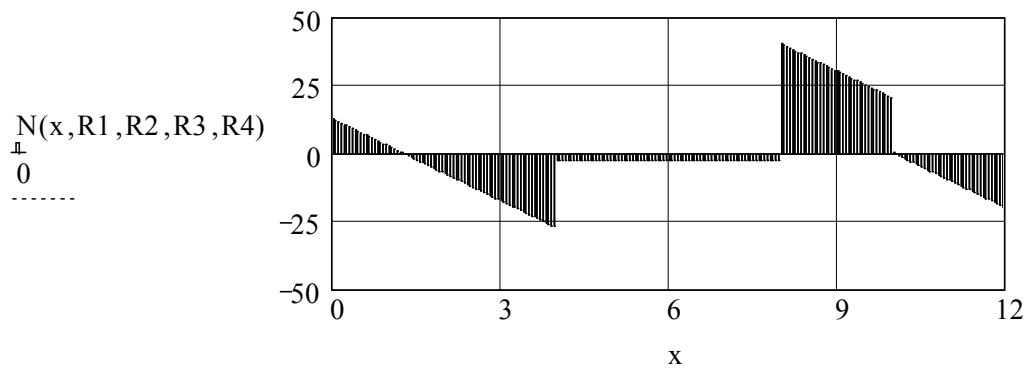
$$w(4, w_0, \Theta_0, R_1, R_2, R_3, R_4) = 0$$

$$w(8, w_0, \Theta_0, R_1, R_2, R_3, R_4) = 0$$

$$w(12, w_0, \Theta_0, R_1, R_2, R_3, R_4) = 0$$

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ \Theta_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} := \text{Find}(w_0, \Theta_0, R_1, R_2, R_3, R_4) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -6.667 \\ 12.5 \\ 25 \\ 42.5 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Побудуємо епюри внутрішніх сил, кутів повороту і прогинів.

$x := 0, 0.05 \dots 12$ 


З епор знайдемо максимальні значення кута повороту і прогину.

$$E := 2 \cdot 10^8 \quad I := 1090 \cdot 10^{-8}$$

$$\theta(12, \Theta 0, R1, R2, R3, R4) = 33.333$$

$$\theta_{\max} := \frac{\theta(12, \Theta 0, R1, R2, R3, R4)}{E \cdot 2 \cdot I} \quad \theta_{\max} = 7.645 \times 10^{-3} \text{ (рад)}$$

$$x := 10 \text{ given } \theta(x, \Theta 0, R1, R2, R3, R4) = 0$$

$$x := \text{find}(x) \quad x = 10.296$$

$$w(x, w0, \Theta 0, R1, R2, R3, R4) = -21.1$$

$$w_{\max} := \frac{w(x, w0, \Theta 0, R1, R2, R3, R4)}{E \cdot 2 \cdot I} \quad w_{\max} = -4.84 \times 10^{-3} \text{ (м)}$$

Прогин і кут повороту у довільному перерізі можна також визначити будь-яким з енергетичних методів – за допомогою теореми Кастільяно, інтеграла Мора або способу Верещагіна.

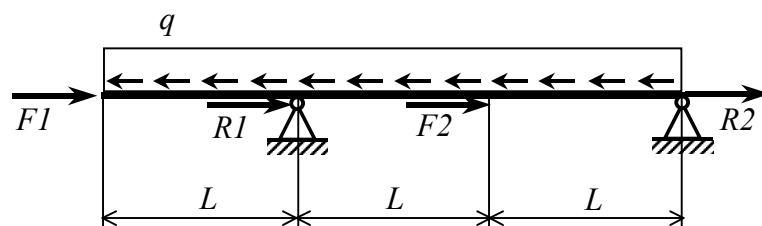
**ПРИКЛАД 6.2.** Розрахунок на міцність статично-невизначуваного стержня при розтягу-стиску.

Стержень сталого поперечного перерізу навантажений поздовжнім навантаженням, як показано на *рис. 6.5*. Визначити внутрішні осьові сили та переміщення перерізів, побудувати відповідні епюри. Визначити напруження і перевірити міцність.

Вхідні дані:

$$F1 := 10 \text{ кН} \quad F2 := 40 \text{ кН} \quad q := 30 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad L := 1 \text{ м}$$

$$A := 20 \text{ см}^2 \quad E := 2 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$



*Рис. 6.5. Стержень, навантажений поздовжнім навантаженням*

Розв'язання:

Для заданого стержня можна скласти одне рівняння рівноваги, якого недостатньо для визначення двох невідомих реакцій  $R1$  і  $R2$ , отже система є один раз статично-невизначуваною. Додаткове рівняння одержимо, записуючи умову відсутності переміщень у напрямках реакцій  $R1$  або  $R2$ .

Для розв'язку задачі скористаємося методом сил у формі методу початкових параметрів.

Запишемо внутрішні сили і переміщення як функції невідомих реакцій  $R1$  і  $R2$  і початкового переміщення  $u0$ :

$$N(x, R1, R2) := -F1 \cdot \Phi(x) + q \cdot x \cdot \Phi(x) - R1 \cdot \Phi(x - L) - F2 \cdot \Phi(x - 2L) \dots \\ + -R2 \cdot \Phi(x - 3L)$$

$$u(x, R1, R2, u0) := u0 + -F1 \cdot x \cdot \Phi(x) + q \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \Phi(x) \dots \\ + -R1 \cdot (x - L) \cdot \Phi(x - L) \dots \\ + -F2 \cdot (x - 2L) \cdot \Phi(x - 2L) \dots \\ + -R2 \cdot (x - 3L) \cdot \Phi(x - 3L)$$

Визначимо невідомі реакції і початкове переміщення, розв'язуючи систему рівнянь:

$$R1 := 0 \quad R2 := 0 \quad u0 := 0$$

Given

$$N(3L, R1, R2) = 0$$

$$u(L, R1, R2, u0) = 0$$

$$u(3L, R1, R2, u0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ u0 \end{pmatrix} := \text{Find}(R1, R2, u0) \quad \begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ u0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Побудуємо епюри поздовжніх сил і переміщень:

$$N(x) := N(x, R1, R2)$$

$$u(x) := \frac{1}{E \cdot A} \cdot u(x, R1, R2, u0)$$

$$N(0) = -10$$

$$N(1) = -10$$

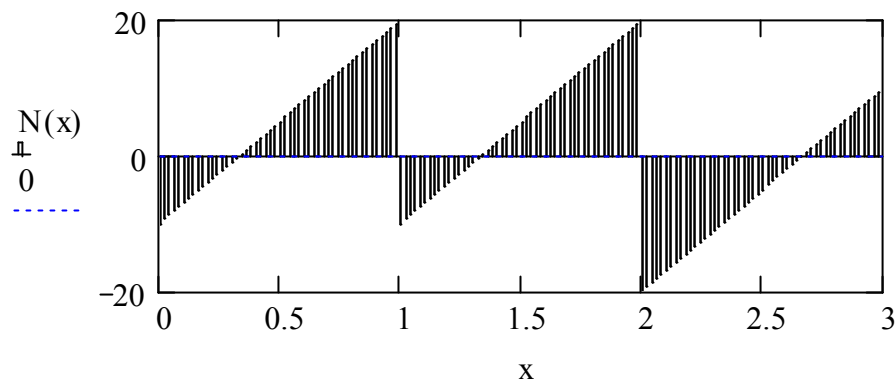
$$N(2) = -20$$

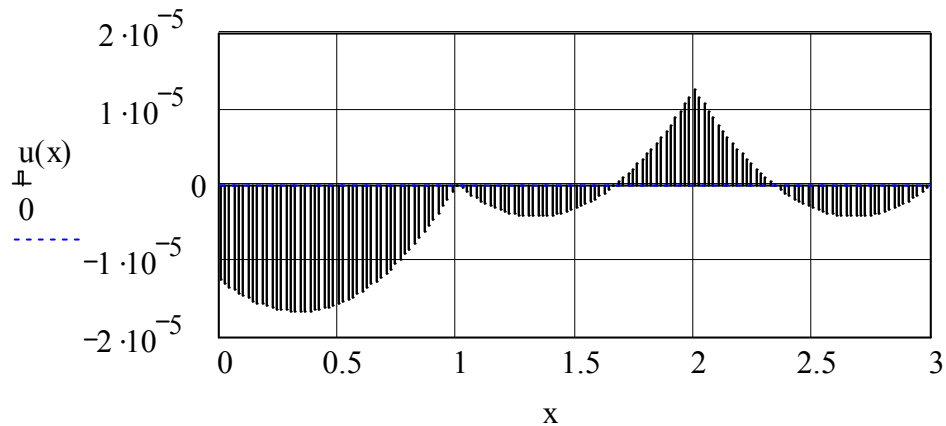
$$N(0.999999) = 20$$

$$N(1.999999) = 20$$

$$N(2.999999) = 10$$

$$x := 0, 0.02 \dots 3L$$





$$u(0) = -1.25 \times 10^{-5} \quad u(2) = 1.25 \times 10^{-5}$$

Визначимо максимальне переміщення у точці екстремуму:

$$x := 0.2$$

$$\text{Given } N(x) = 0$$

$$x := \text{find}(x) \quad x = 0.333 \quad u(x) = -1.667 \times 10^{-5} \text{ м}$$

Перевіримо міцність. Визначимо напруження у найбільш небезпечній точці:

$$N_{\max} := 20 \text{ кН} \quad \sigma_{\max} := \frac{N_{\max}}{A} \quad \sigma_{\max} = 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

$$\sigma_{\text{adm}} := 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \quad \sigma_{\max} < \sigma_{\text{adm}}$$

Як видно, умова міцності виконується.

**ПРИКЛАД 6.3.** Розрахунок статично-невизначуваного стержня з урахуванням впливу температури.

Ступінчастий стержень, частину якого виготовлено з міді, а другу – зі сталі, навантажений зосередженими силами (рис. 6.6). Після прикладення сил температура стержня змінюється на  $\Delta T^\circ\text{C}$ . Визначити напруження у перерізах до і після зміни температури. Перевірити міцність стержня, якщо  $\sigma_c = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ ,  $\sigma_m = 8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ .

Побудувати епюри внутрішніх зусиль, напружень і переміщень до і після зміни температури.

Вхідні дані:

$$\Delta T = 20^\circ\text{C}, \quad E_c = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2, \quad E_m = 1.1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2, \quad L = 1 \text{ м},$$

$$\alpha_c = 120 \cdot 10^{-7} \text{ 1/град}, \quad \alpha_m = 167 \cdot 10^{-7} \text{ 1/град}, \quad d_1 = 2d_2 = 3d_3 = 12 \text{ см}.$$

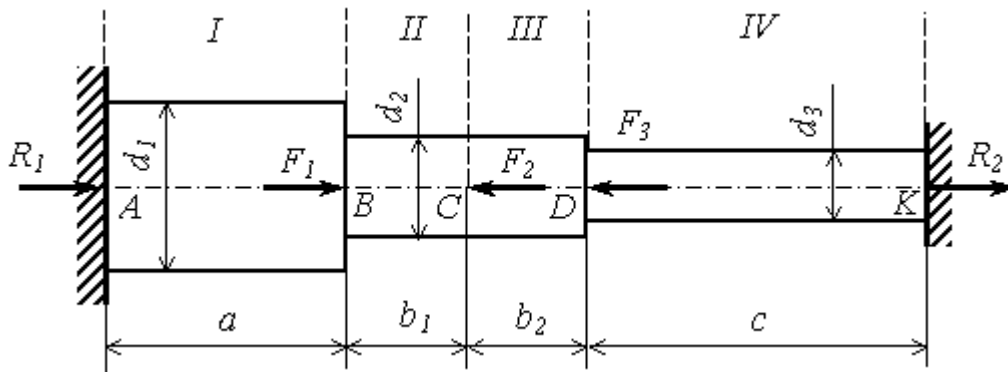


Рис. 6.6. Статично-невизначуваний ступінчастий стержень

Вводимо вхідні дані:

$$F_1 := 2 \text{ кН} \quad F_2 := 3 \text{ кН} \quad F_3 := 1 \text{ кН}$$

$$E_1 := 1.1 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \quad E_2 := 2 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$$

$$\alpha_1 := 167 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{град}} \quad \alpha_2 := 120 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{град}} \quad \Delta T := 10$$

$$\sigma_c := 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \quad \sigma_m := 8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

$$a := 0.3 \text{ м} \quad b_1 := 0.2 \text{ м} \quad b_2 := 0.1 \text{ м} \quad c := 0.4 \text{ м}$$

$$L := a + b_1 + b_2 + c \quad L = 1 \text{ м}$$

$$d_1 := 0.12 \text{ м} \quad d_2 := 0.06 \text{ м} \quad d_3 := 0.06 \text{ м} \quad d_4 := 0.04 \text{ м}$$

### Розв'язання:

Стержень є один раз статично-невизначуваним, оскільки одного рівняння рівноваги, яке можна скласти для даної системи, недостатньо для визначення двох реакцій.

1. Визначення зусиль, переміщень і напружень без урахування підвищення температури.

Додаткову умову для визначення “зайвої” реакції одержимо, записуючи умову відсутності переміщень в опорі.

Розкріпимо стержень у точці *A* (рис. 6.7, б) і запишемо переміщення точки *A* як суму переміщень від зовнішнього навантаження і невідомої реакції (рис. 6.7, б, в)

$$u_A = u_F + u_{R1}.$$

Умова сумісності переміщень у точці *A* має вигляд

$$u_A = 0 \Rightarrow u_F + u_{R1} = 0.$$

Для визначення переміщення точки *A* від зовнішніх сил визначимо внутрішні сили на кожній ділянці стержня. Функції внутрішніх сил, матеріал та діаметр стержня на протязі однієї ділянки повинні бути непер-

рвними функціями, отже заданий стержень розбиваємо на чотири ділянки (рис. 6.7, а). Ділянку стержня довжиною  $a$  виготовлено з міді, іншу частину стержня – зі сталі.

Визначимо площі поперечних перерізів стержня на кожній ділянці:

$$i := 1..4$$

$$A_i := \frac{\pi \cdot (d_i)^2}{4}$$

$$A_i =$$

0.011
$2.827 \cdot 10^{-3}$
$2.827 \cdot 10^{-3}$
$1.257 \cdot 10^{-3}$

$$\text{м}^2$$

Визначимо податливості ділянок стержня:

$$j := 1..4$$

$$\delta_j :=$$

$\frac{a}{E_1 \cdot A_1}$
$\frac{b1}{E_2 \cdot A_2}$
$\frac{b2}{E_2 \cdot A_3}$
$\frac{c}{E_2 \cdot A_4}$

$$\delta_j =$$

$2.411 \cdot 10^{-7}$
$3.537 \cdot 10^{-7}$
$1.768 \cdot 10^{-7}$
$1.592 \cdot 10^{-6}$

$$\frac{\text{м}}{\text{кН}}$$

Визначимо внутрішні поздовжні сили на кожній ділянці статично-визначуваного стержня за допомогою методу приведення сил з урахуванням правила знаків:

$$N_j :=$$

0
$-F_1$
$-F_1 + F_2$
$-F_1 + F_2 + F_3$

$$N_j =$$

0
-2
1
2

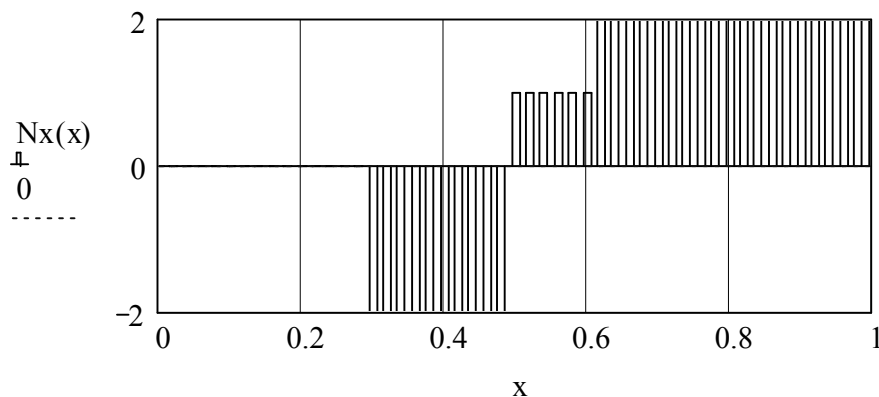
$$\text{кН}$$

Побудуємо епюру поздовжніх сил для статично-визначуваного стержня, на який діють тільки задані зовнішні сили:



$$N_x(x) := -F_1 \cdot \Phi(x - a) + F_2 \cdot \Phi(x - a - b1) + F_3 \cdot \Phi(x - a - b1 - b2)$$

$$x := 0, 0.02 \dots L$$



Визначимо переміщення точки  $A$  як суму подовжень кожної ділянки:

$$u_F := \sum_j N_j \cdot \delta_j \quad u_F = 2.653 \times 10^{-6} \text{ м}$$

Переміщення цієї ж точки від невідомої реакції

$$u_{R1} = R1(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4).$$

Визначаємо реакцію  $R1$  із умови сумісності переміщень, а реакцію  $R2$  – з умови рівноваги:

$$R1 := \frac{u_F}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4} \quad R1 = 1.122 \text{ кН}$$

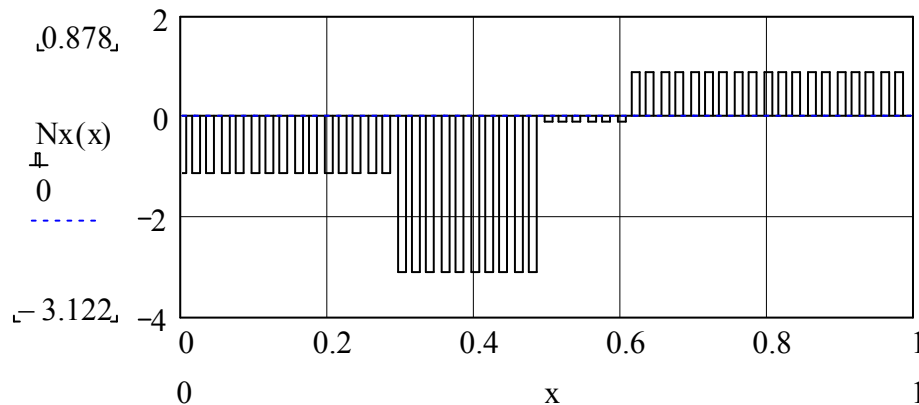
$$R2 := 0$$

$$\text{Given} \quad R1 + R2 + F_1 - F_2 - F_3 = 0$$

$$R2 := \text{Find}(R2) \quad R2 = 0.878 \text{ кН}$$

Побудуємо сумарну епюру поздовжніх сил для заданого статично-невизначуваного стержня:

$$N_x(x) := -R1 \cdot \Phi(x) - F_1 \cdot \Phi(x - a) + F_2 \cdot \Phi(x - a - b1) \dots \\ + F_3 \cdot \Phi(x - a - b1 - b2) - R2 \cdot \Phi(x - L)$$



Розрахункові значення внутрішніх сил на кожній ділянці:

$N_{x_j} :=$	$N_{x_j} =$	
-R1	-1.122	кН
-R1 - F <sub>1</sub>	-3.122	
-R1 - F <sub>1</sub> + F <sub>2</sub>	-0.122	
-R1 - F <sub>1</sub> + F <sub>2</sub> + F <sub>3</sub>	0.878	

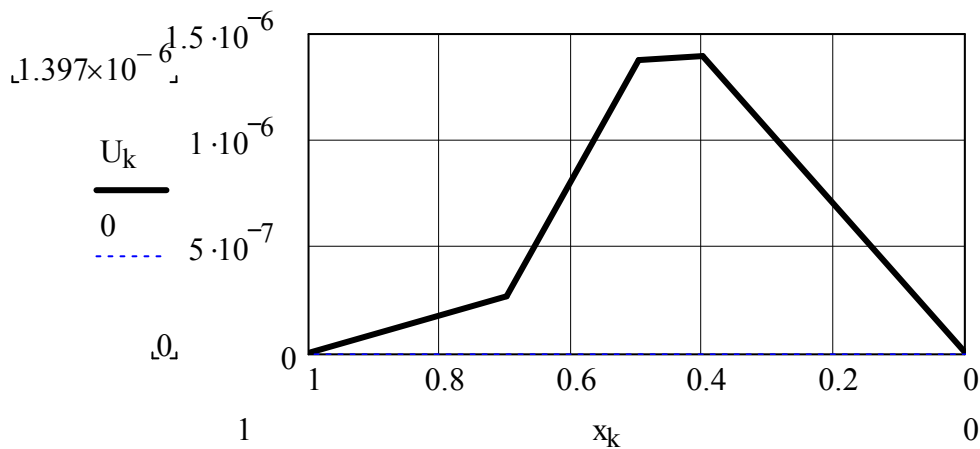
Визначимо реальні подовження кожної окремої ділянки:

$u_j :=$	$u_j =$	
$N_{x_1} \cdot \delta_1$	$-2.707 \cdot 10^{-7}$	м
$N_{x_2} \cdot \delta_2$	$-1.104 \cdot 10^{-6}$	
$N_{x_3} \cdot \delta_3$	$-2.165 \cdot 10^{-8}$	
$N_{x_4} \cdot \delta_4$	$1.397 \cdot 10^{-6}$	

Визначимо переміщення границь ділянок, починаючи з точки K (переміщення точки K дорівнює нулю), і побудуємо графік переміщень:

$k := 1..5$

$U_k :=$	$U_k =$	$x_k :=$	$x_k =$
0	0	0	0
$u_4$	$1.397 \cdot 10^{-6}$	c	0.4
$u_4 + u_3$	$1.375 \cdot 10^{-6}$	$c + b_2$	0.5
$u_4 + u_3 + u_2$	$2.707 \cdot 10^{-7}$	$c + b_2 + b_1$	0.7
$u_4 + u_3 + u_2 + u_1$	0	L	1



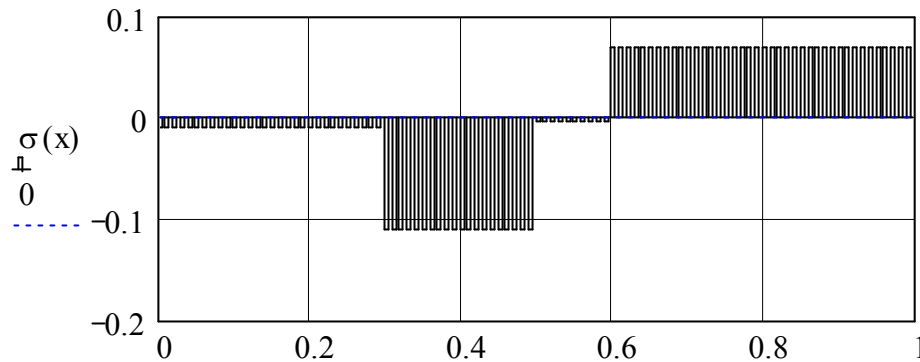
Додатні значення переміщень означають переміщення перерізів у ліву сторону. Переміщення кінцевого перерізу (точки  $A$ ) повинно дорівнювати нулю.

Визначимо напруження на ділянках і перевіримо умови міцності для міді і сталі:

$$\sigma_1 := \frac{Nx_1}{A_1} \quad \sigma_2 := \frac{Nx_2}{A_2} \quad \sigma_3 := \frac{Nx_3}{A_3} \quad \sigma_4 := \frac{Nx_4}{A_4}$$

$$\sigma(x) := \begin{cases} \sigma_1 \cdot 10^{-4} & \text{if } 0 \leq x \leq a \\ \sigma_2 \cdot 10^{-4} & \text{if } a \leq x \leq a + b_1 \\ \sigma_3 \cdot 10^{-4} & \text{if } a + b_1 \leq x \leq a + b_1 + b_2 \\ \sigma_4 \cdot 10^{-4} & \text{if } a + b_1 + b_2 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$x := 0, 0.01 \dots L$$



$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{pmatrix} -9.925 \times 10^{-3} \\ -0.11 \\ -4.331 \times 10^{-3} \\ 0.07 \end{pmatrix} \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

$$|\sigma_2| < \sigma_c \quad |\sigma_1| < \sigma_m$$

Умови міцності виконуються.

Результати розрахунку показано на *рис. 6.7*.

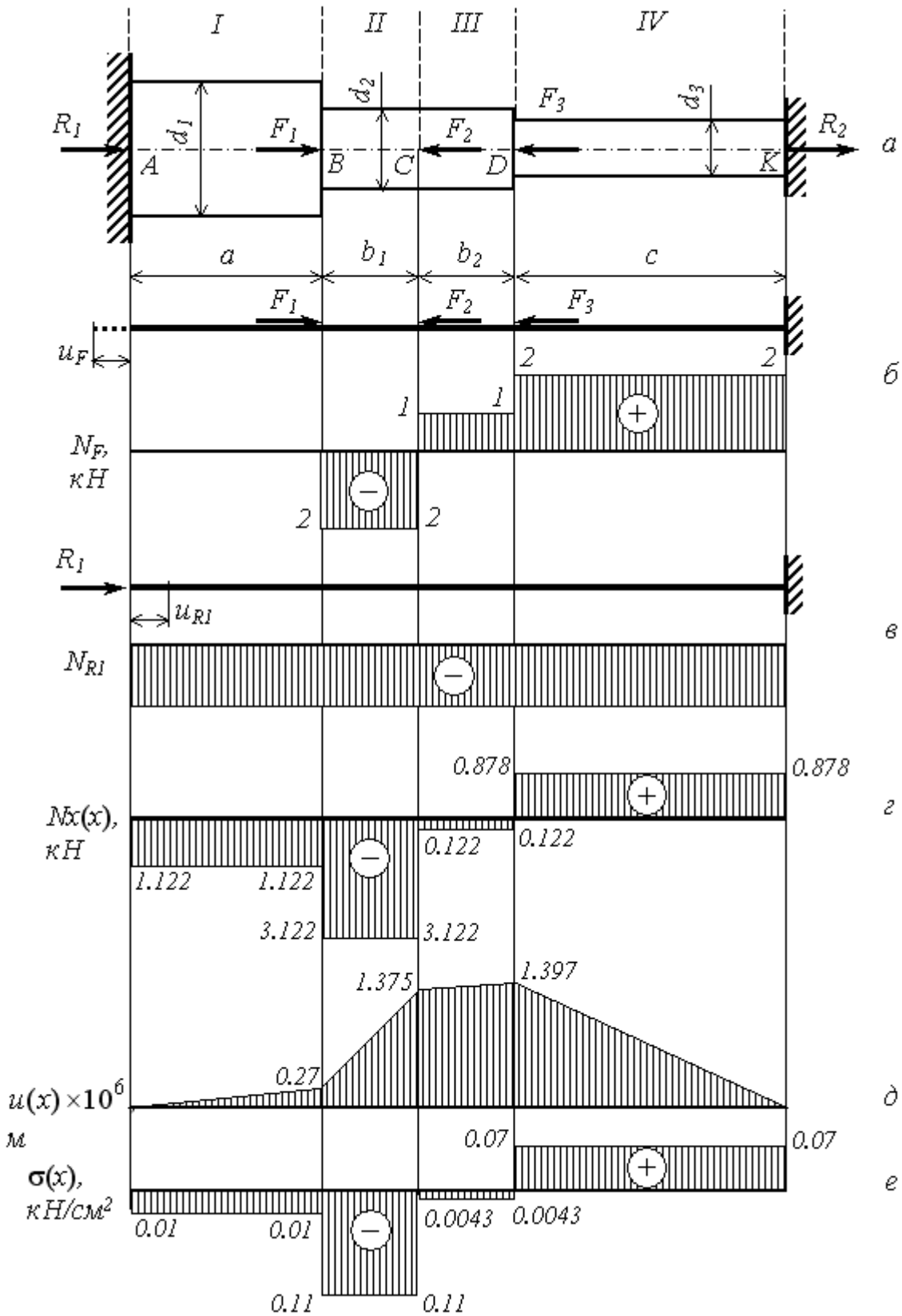


Рис. 6.7. Розрахунок статично-невизначуваного стержня без урахування температури: розрахункова схема стержня (а); побудова епюри поздовжніх сил від зовнішнього навантаження (б); умовна епюра внутрішніх сил від опорної реакції (в); сумарна епюра поздовжніх сил (г); епюра переміщень перерізів (д); епюра напружень (е)

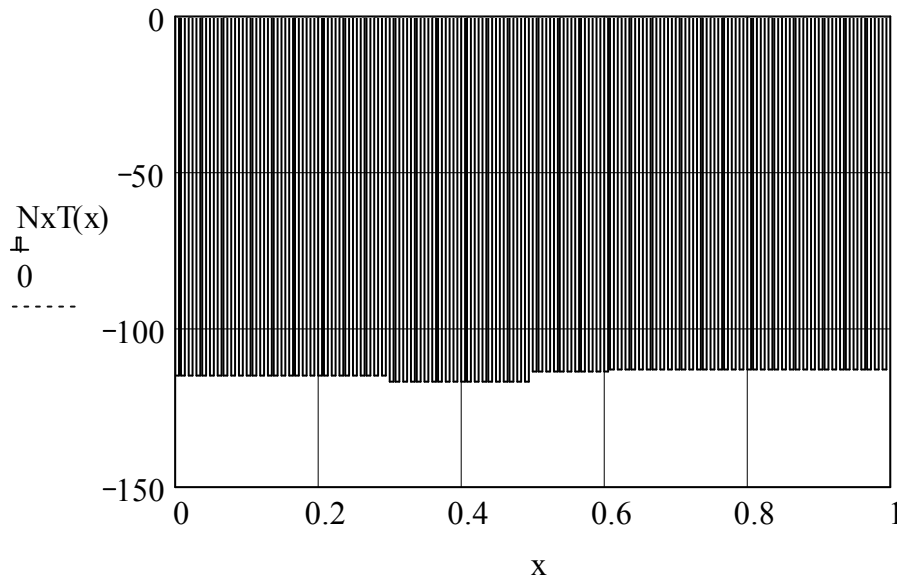
Визначимо реакції з умов сумісності переміщень і рівноваги:

$$r1 := \frac{uF + uT}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4} \quad r1 = 114.612 \text{ кН}$$

$$r2 := r1 + F_1 - F_2 - F_3 \quad r2 = 112.612 \text{ кН}$$

Побудуємо епюру поздовжніх сил:

$$N_{xT}(x) := -r1 \cdot \Phi(x) - F_1 \cdot \Phi(x - a) + F_2 \cdot \Phi(x - a - b1) \dots \\ + F_3 \cdot \Phi(x - a - b1 - b2) + r2 \cdot \Phi(x - L)$$



Як видно, значення заданих зовнішніх сил, порівняно з величиною реакцій, при такому підвищенні температури, на два порядки менші.

Розрахункові значення поздовжніх сил на кожній ділянці:

$N_{xT_j} :=$	$N_{xT_j} =$	
-r1	-114.612	кН
-r1 - F <sub>1</sub>	-116.612	
-r1 - F <sub>1</sub> + F <sub>2</sub>	-113.612	
-r1 - F <sub>1</sub> + F <sub>2</sub> + F <sub>3</sub>	-112.612	

Подовження кожної ділянки з урахуванням підвищення температури:

$u_j :=$	$u_j =$	
$N_{xT_1} \cdot \delta_1 + \alpha_1 \cdot \Delta T \cdot a$	$56 \cdot 10^{-5}$	м
$N_{xT_2} \cdot \delta_2 + \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot b1$	$57 \cdot 10^{-6}$	
$N_{xT_3} \cdot \delta_3 + \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot b2$	$09 \cdot 10^{-6}$	
$N_{xT_4} \cdot \delta_4 + \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot c$	$23 \cdot 10^{-5}$	

Визначимо переміщення границь ділянок стержня, починаючи від закріплення (точки  $K$ ), і побудуємо графік переміщень:

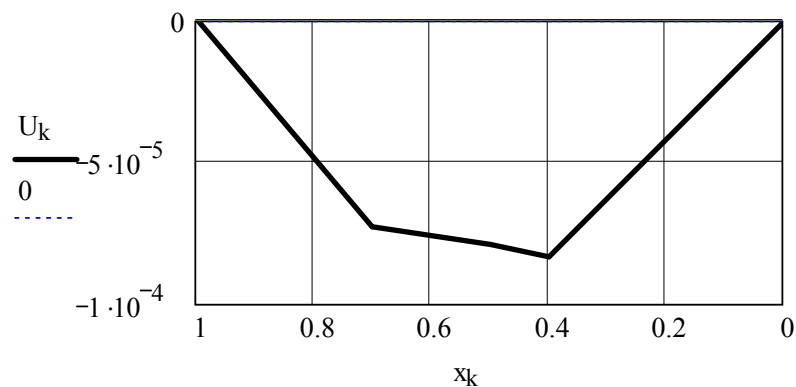
$k := 1..5$

$U_k :=$
0
$u_4$
$u_4 + u_3$
$u_4 + u_3 + u_2$
$u_4 + u_3 + u_2 + u_1$

$U_k =$
0
$-8.323 \cdot 10^{-5}$
$-7.932 \cdot 10^{-5}$
$-7.256 \cdot 10^{-5}$
0

$x_k :=$
0
$c$
$c + b_2$
$c + b_2 + b_1$
$L$

$x_k =$
0
0.4
0.5
0.7
1



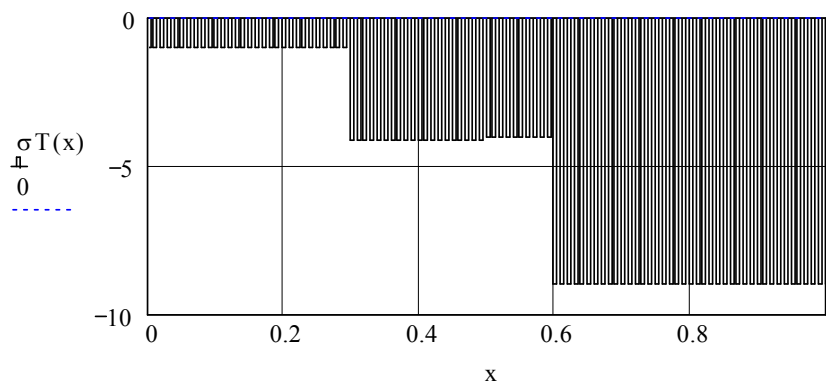
Від'ємні значення означають переміщення перерізів вправо. Переміщення в кінці розрахунку (точки  $A$ ) повинно дорівнювати нулю.

Визначимо напруження на кожній ділянці:

$$\sigma T_1 := \frac{N x T_1}{A_1} \quad \sigma T_2 := \frac{N x T_2}{A_2} \quad \sigma T_3 := \frac{N x T_3}{A_3} \quad \sigma T_4 := \frac{N x T_4}{A_4}$$

$$\sigma T(x) := \begin{cases} \sigma T_1 \cdot 10^{-4} & \text{if } 0 \leq x \leq a \\ \sigma T_2 \cdot 10^{-4} & \text{if } a \leq x \leq a + b_1 \\ \sigma T_3 \cdot 10^{-4} & \text{if } a + b_1 \leq x \leq a + b_1 + b_2 \\ \sigma T_4 \cdot 10^{-4} & \text{if } a + b_1 + b_2 \leq x \leq L \end{cases}$$

$x := 0, 0.01 .. L$



$$\begin{pmatrix} \sigma_{T1} \\ \sigma_{T2} \\ \sigma_{T3} \\ \sigma_{T4} \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{pmatrix} -1.013 \\ -4.124 \\ -4.018 \\ -8.961 \end{pmatrix} \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

$$\sigma_{T4} < \sigma_c \quad \sigma_{T1} < \sigma_m$$

Перевірка умов міцності показує, що максимальне напруження не перевищує допустимих значень.

Результати розрахунку стержня з урахуванням температури показано на рис. 6.8.

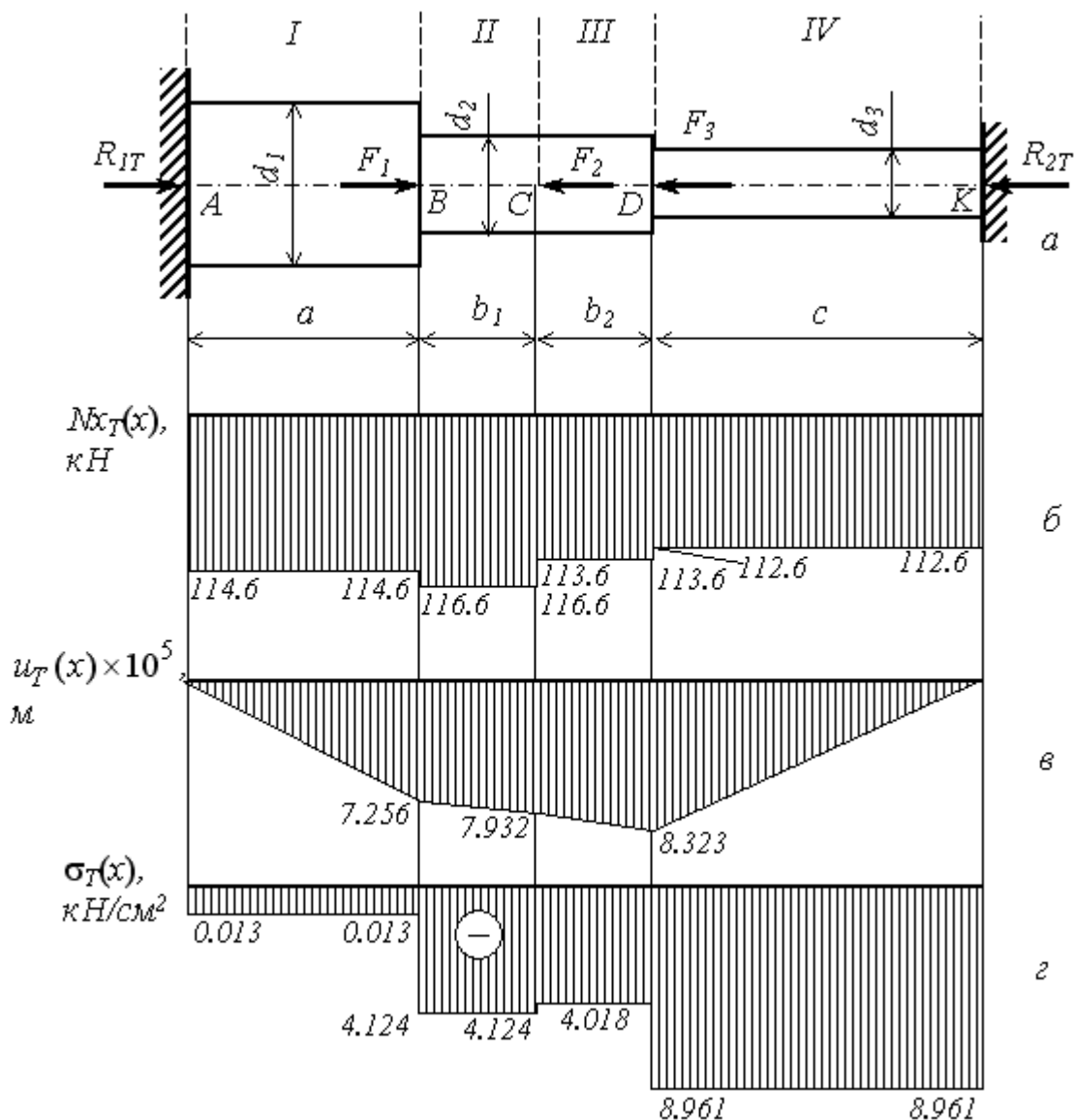


Рис. 6.8. Розрахунок статично-невизначуваного стержня з урахуванням температури: розрахункова схема стержня (а); сумарна еюра поздовжніх сил (б); еюра переміщень перерізів (в); еюра напружень (г)

**ПРИКЛАД 6.4.** Розрахунок статично-невизначуваної рами.

Для заданої статично-невизначуваної рами (рис. 6.7, а) побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати двотавровий переріз і визначити лінійне і кутове переміщення точки  $K$ .

Вхідні дані:

$$a := 2 \text{ м} \quad F := 30 \text{ кН} \quad M := 100 \text{ кНм} \quad q := 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

$$\sigma_{\text{adm}} := 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

Розв'язання:

Для плоскої системи сил можна скласти три рівняння рівноваги, а невідомих реакцій в даній системі – п'ять, отже рама є двічі статично-невизначуваною. Для розв'язку задачі скористаємося методом сил у канонічній формі.

Виберемо основну систему (рис. 6.7, б).

Навантажимо основну систему заданим навантаженням і невідомими реакціями, причому величина реакцій повинна бути такою, щоб виконувалися умови сумісності переміщень: переміщення в напрямках невідомих реакцій повинні дорівнювати нулю (рис. 6.7, в).

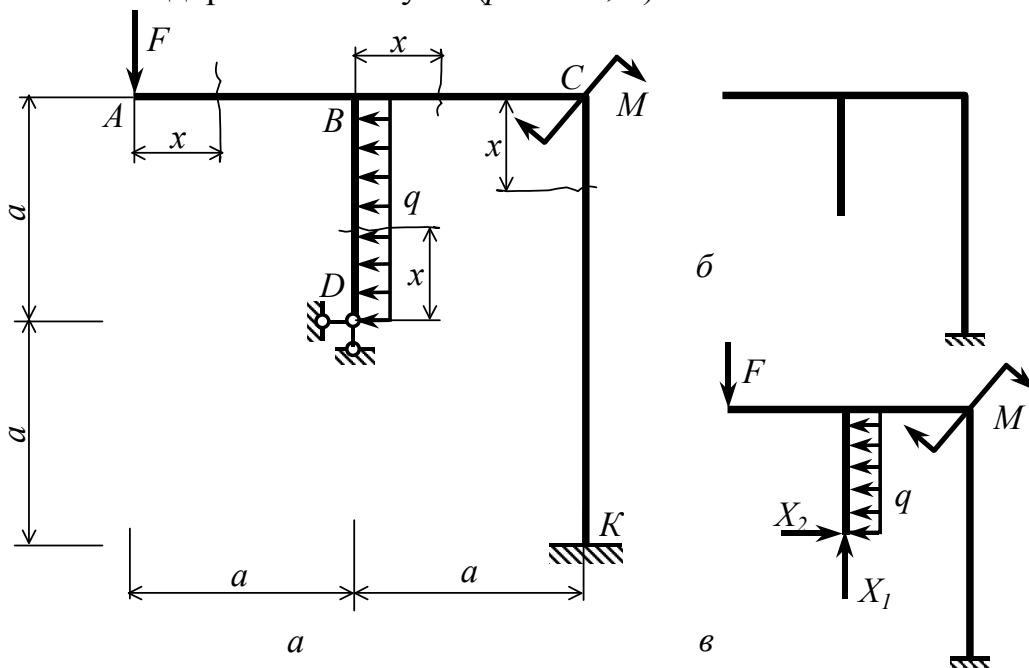


Рис. 6.7. Статично-невизначувана рама (а), основна система (б), еквівалентна система (в)

Умови еквівалентності заданої статично невідомої системи і основної системи, завантаженої заданим навантаженням і невідомими реакціями (рис. 6.7, а, в), мають вигляд:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \Delta_{1F} = 0,$$

$$X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \Delta_{2F} = 0.$$



Визначимо коефіцієнти рівнянь сумісності переміщень за допомогою способу Верещагіна.

Побудуємо епюру згинаючих моментів від зовнішнього навантаження  $M_F$  (рис. 6.8), записуючи рівняння моментів на кожній ділянці:

ділянка  $AB$ :

$$0 \leq x \leq a, \quad M1(x) = -Fx;$$

ділянка  $DB$ :

$$0 \leq x \leq a, \quad M2(x) = \frac{qx^2}{2};$$

ділянка  $BC$ :

$$0 \leq x \leq a, \quad M3(x) = -Fx + \frac{qa^2}{2};$$

ділянка  $CK$ :

$$0 \leq x \leq 2a, \quad M4(x) = -F \cdot 2a + qa(a - x) + M.$$

Прикладемо одиничні сили замість невідомих реакцій і побудуємо епюри моментів від одиничних сил (рис. 6.8).

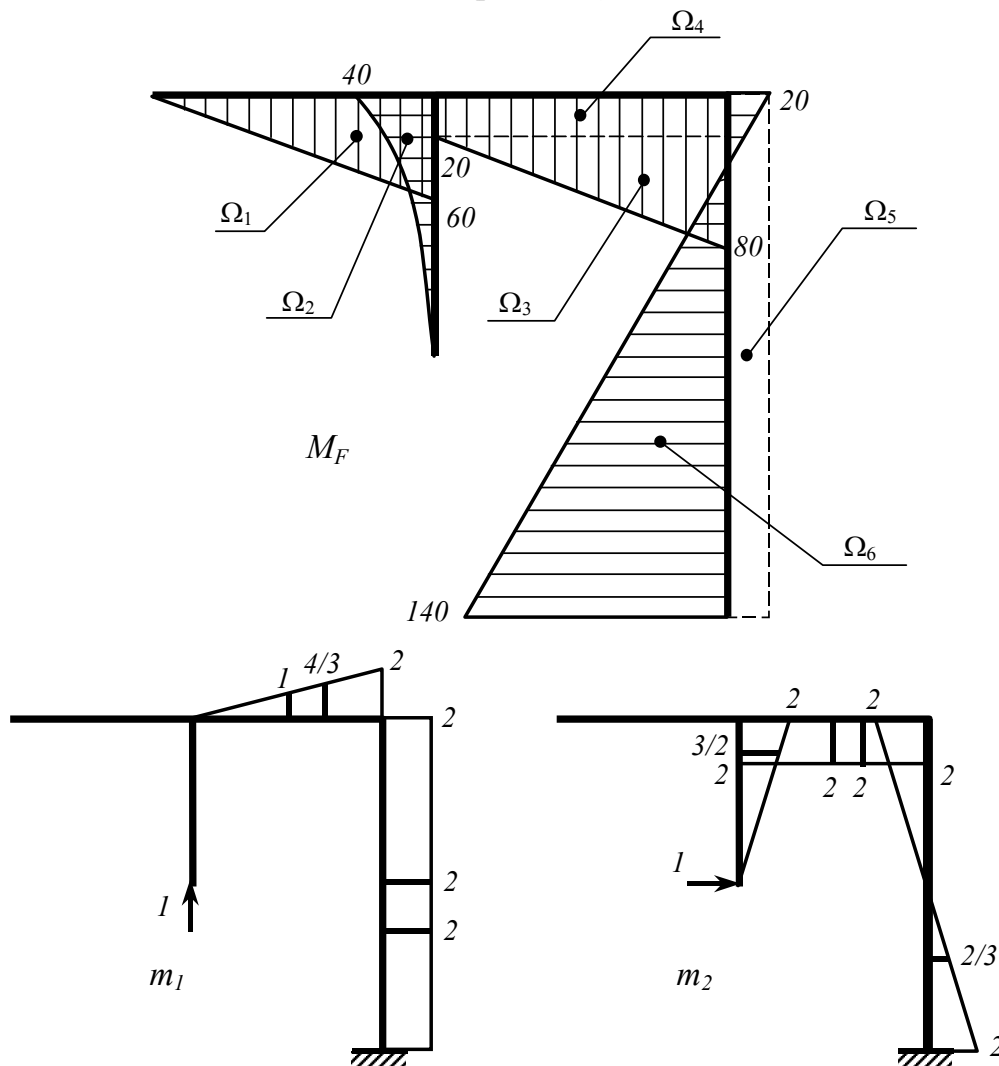


Рис. 6.8. Епюри моментів від зовнішнього навантаження і одиничних сил

Для визначення переміщення за правилом Верещагіна перемножимо епюри, для цього розіб'ємо епюру від зовнішнього навантаження на прості фігури, для яких визначимо площі і положення центрів ваги; на одиничних епюрах визначимо ординати у перерізах, відповідних центрам ваги площ  $\Omega$ .

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 2 = 60; \quad \Omega_2 = \frac{1}{3} \cdot 40 \cdot 2 = \frac{80}{3};$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 2 = 60; \quad \Omega_4 = 20 \cdot 2 = 40;$$

$$\Omega_5 = 20 \cdot 4 = 80; \quad \Omega_6 = \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 4 = 320.$$

Переміщення у напрямках реакцій  $R_1$  і  $R_2$  від зовнішнього навантаження:

$$\Delta_{1F} = M_F \times m_1 = -\Omega_3 \cdot \frac{4}{3} - \Omega_4 \cdot 1 + \Omega_5 \cdot 2 - \Omega_6 \cdot 2 = -600;$$

$$\Delta_{2F} = M_F \times m_2 = -\Omega_2 \cdot \frac{3}{2} + \Omega_3 \cdot 2 + \Omega_4 \cdot 2 - \Omega_6 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{160}{3}.$$

Визначимо переміщення від одиничних сил, для цього перемножимо відповідні одиничні епюри:

$$\delta_{11} = m_1 \times m_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot 4 \cdot 2 = \frac{56}{3};$$

$$\delta_{22} = m_2 \times m_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16;$$

$$\delta_{12} = m_1 \times m_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -4;$$

$$\delta_{21} = \delta_{12}.$$

Підставимо значення коефіцієнтів у рівняння сумісності переміщень і визначаємо реакції:

$$X_1 \cdot \frac{56}{3} - X_2 \cdot 4 - 600 = 0,$$

$$-X_1 \cdot 4 + X_2 \cdot 16 - \frac{160}{3} = 0;$$

$$X_1 = 34.717 \text{ кН}, \quad X_2 = 12.013 \text{ кН}.$$

Побудуємо сумарні епюри поздовжніх сил, поперечних сил і згинаючих моментів для заданої статично-невизначуваної рами (рис. 6.9).

Розміри поперечного перерізу підберемо з умови міцності при плоскому згині:

$$\frac{M_{y \max}}{W_y} \leq \sigma_{adm},$$

де  $M_{y \max}$  – максимальний згинаючий момент, який визначається з епюри. У даному випадку  $M_{y \max} = 65.4 \text{ кНм}$ ;

$$\sigma_{adm} = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \text{ – допустиме напруження для сталі Ст.3.}$$

Визначаємо осьовий момент опору:

$$M_{\max} := 65.4 \quad \sigma_{adm} := 16$$

$$W_y := \frac{M_{\max} \cdot 100}{\sigma_{adm}} \quad W_y = 408.75 \text{ см}^3$$

Із сортаменту підбираємо двотавровий переріз № 27а, для якого  $W_x = 407 \text{ см}^3$ . Перевантаження складає у відсотках

$$\frac{408.75 - 407}{407} \cdot 100 = 0.43 \quad 0.43 < 5$$

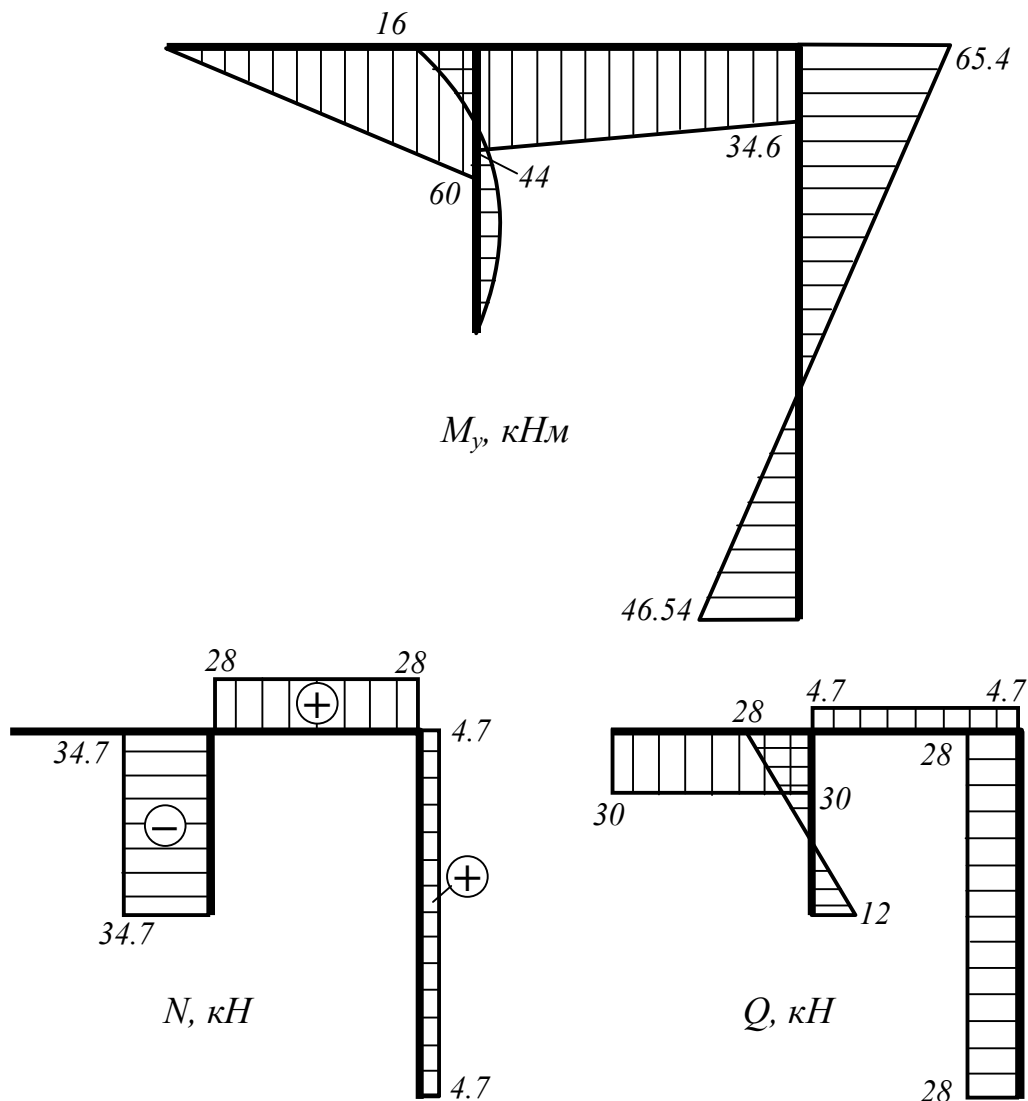


Рис. 6.9. Епюри внутрішніх сил для статично-невизначуваної рами

Розглянемо розв'язок задачі за допомогою неканонічної форми методу сил. Скористаємося можливостями пакета MathCAD.

Запишемо рівняння моментів на кожній ділянці, враховуючи невідомі реакції:

$$M1(x, R1, R2) := -F \cdot x$$

$$M2(x, R1, R2) := q \cdot \frac{x^2}{2} - R2 \cdot x$$

$$M3(x, R1, R2) := q \cdot \frac{a^2}{2} - F \cdot (x + a) - R2 \cdot a + R1 \cdot x$$

$$M4(x, R1, R2) := -F \cdot 2 \cdot a - q \cdot a \cdot \left( x - \frac{a}{2} \right) + M + R2 \cdot (x - a) + R1 \cdot a$$

Переміщення у напрямках невідомих реакцій визначимо за допомогою теореми Кастільяно (переміщення у напрямку дії сили дорівнює похідній потенціальної енергії деформації за цією силою).

Потенціальну енергію деформації запишемо як функцію невідомих реакцій:

$$E := 2 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \quad I := 5500 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$$

$$U(R1, R2) := \int_0^a \frac{M1(x, R1, R2)^2}{2 \cdot E \cdot I} dx + \int_0^a \frac{M2(x, R1, R2)^2}{2 \cdot E \cdot I} dx \dots$$

$$+ \int_0^a \frac{M3(x, R1, R2)^2}{2 \cdot E \cdot I} dx + \int_0^{2a} \frac{M4(x, R1, R2)^2}{2 \cdot E \cdot I} dx$$

Переміщення у напрямках реакцій:

$$\Delta1(R1, R2) := \frac{d}{dR1} U(R1, R2)$$

$$\Delta2(R1, R2) := \frac{d}{dR2} U(R1, R2)$$

За допомогою блоку Given...Find визначимо реакції, використавши умови рівності нулю переміщень у напрямках реакцій:

$$R1 := 0 \quad R2 := 0$$

Given

$$\Delta1(R1, R2) = 0$$

$$\Delta2(R1, R2) = 0$$

$$\begin{pmatrix} R1 \\ R2 \end{pmatrix} := \text{Find}(R1, R2) \quad \begin{pmatrix} R1 \\ R2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34.717 \\ 12.013 \end{pmatrix}$$

Значення реакцій співпадають із визначеними раніше.

Визначимо переміщення точки  $A$  за допомогою інтегралів Мора.

Рівняння моментів від зовнішніх сил і реакцій  $R_1$  і  $R_2$  записано вище.

Для визначення лінійного переміщення прикладемо одиничні сили у напрямках можливих переміщень (рис. 6.10, а, б) і запишемо рівняння моментів від одиничних сил на кожній ділянці, користуючись тим самим правилом знаків, що і для моментів від зовнішніх сил.

Для першої одиничної сили:

$$m_{11}(x) := -x \quad m_{12}(x) := 0 \quad m_{13}(x) := -(x + a) \quad m_{14}(x) := -2 \cdot a$$

Для другої одиничної сили:

$$m_{21}(x) := 0 \quad m_{22}(x) := 0 \quad m_{23}(x) := 0 \quad m_{24}(x) := x$$

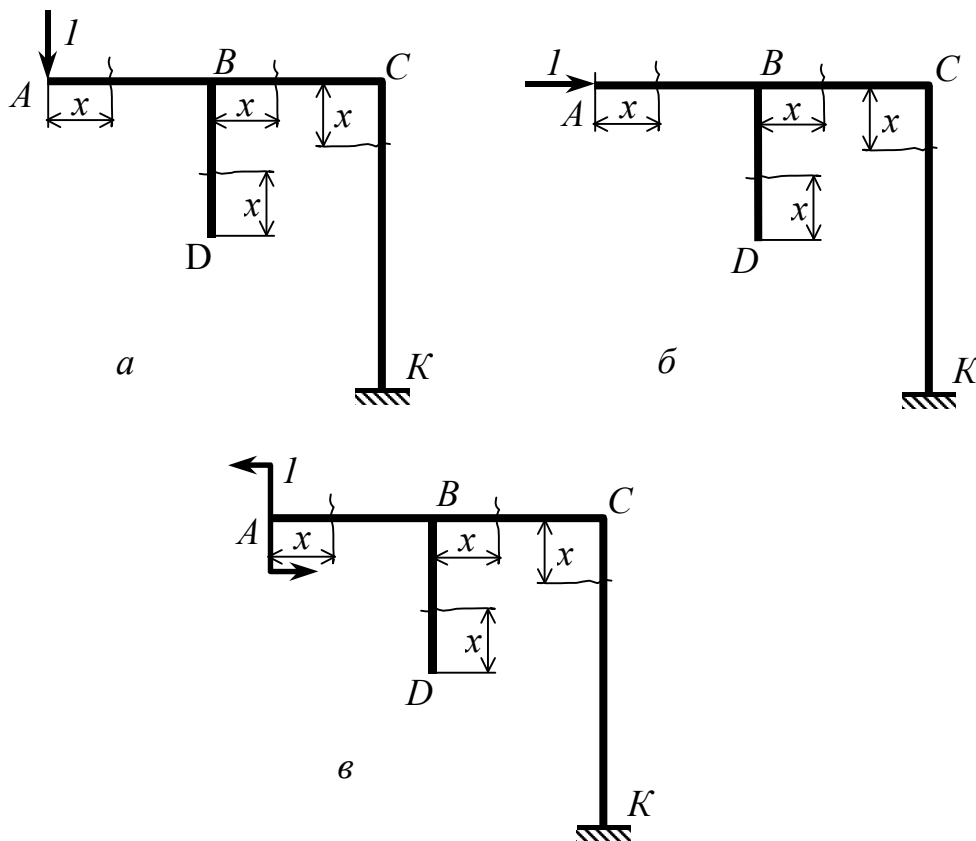


Рис. 6.10. Визначення переміщення точки  $A$

Переміщення у напрямку першої і другої одиничної сили:

$$w_1 := \int_0^a \frac{M_1(x, R_1, R_2) \cdot m_{11}(x)}{E \cdot I} dx + \int_0^a \frac{M_2(x, R_1, R_2) \cdot m_{12}(x)}{E \cdot I} dx \dots$$

$$+ \int_0^a \frac{M_3(x, R_1, R_2) \cdot m_{13}(x)}{E \cdot I} dx + \int_0^{2a} \frac{M_4(x, R_1, R_2) \cdot m_{14}(x)}{E \cdot I} dx$$

$$w_1 = 0.015 \text{ м}$$

$$w_2 := \int_0^a \frac{M_1(x, R_1, R_2) \cdot m_{21}(x)}{E \cdot I} dx + \int_0^a \frac{M_2(x, R_1, R_2) \cdot m_{22}(x)}{E \cdot I} dx \dots$$

$$+ \int_0^a \frac{M_3(x, R_1, R_2) \cdot m_{23}(x)}{E \cdot I} dx + \int_0^{2a} \frac{M_4(x, R_1, R_2) \cdot m_{24}(x)}{E \cdot I} dx$$

$$w_2 = -6.709 \times 10^{-3} \text{ м}$$

Сумарне лінійне переміщення:

$$w := \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \quad w = 0.016 \text{ м}$$

Визначимо кутове переміщення перерізу  $A$ . Прикладемо одиничний момент (рис. 6.10, в) і запишемо рівняння моментів на кожній ділянці:

$$m_{31}(x) := -1 \quad m_{32}(x) := 0 \quad m_{33}(x) := -1 \quad m_{34}(x) := -1$$

Визначимо переміщення:

$$\theta := \int_0^a \frac{M_1(x, R_1, R_2) \cdot m_{31}(x)}{E \cdot I} dx + \int_0^a \frac{M_2(x, R_1, R_2) \cdot m_{32}(x)}{E \cdot I} dx \dots$$

$$+ \int_0^a \frac{M_3(x, R_1, R_2) \cdot m_{33}(x)}{E \cdot I} dx + \int_0^{2a} \frac{M_4(x, R_1, R_2) \cdot m_{34}(x)}{E \cdot I} dx$$

$$\theta = 9.171 \times 10^{-3} \text{ рад}$$

## РОЗДІЛ 7

### РОЗРАХУНОК ТОНКОСТІННИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ОБОЛОНОК

#### 7.1. Безмоментна теорія розрахунку оболонок

**Оболонкою** називається тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими (товщина  $\delta$ ) набагато менша за габаритні розміри.

Оболонки обертання або осесиметричні оболонки – оболонки, поверхня яких одержується шляхом обертання деякої кривої навколо осі  $z$ . Крива в такому випадку називається твірною оболонки або кривою меридіана. В залежності від виду кривої і розміщення її відносно осі можна одержати циліндричну, конічну, сферичну, торову та інші види оболонок. Поверхня оболонки характеризується двома радіусами кривизни у двох взаємно перпендикулярних площинах.

Оболонки є **тонкостінними**, якщо відношення товщини оболонки до радіусу кривизни  $\frac{\delta}{R} \leq \frac{1}{20}$ .

Особливістю розрахунку тонкостінних оболонок є те, що напруження в поперечних перерізах, пов'язані зі згинаючими моментами, не враховуються, оскільки вони малі порівняно з напруженнями від розтягу або стиску, таким чином вважається, що напруження рівномірно розподіляються по товщині оболонки – розрахунок проводиться за **безмоментною теорією**.

Гіпотеза про безмоментний стан не підтверджується для перерізів, де різко змінюється форма оболонки, а також в точках закріплення, в точках зосереджених навантажень тощо, тобто у перерізах, де виникають значні згинаючі моменти. Але у зв'язку з тонкостінністю оболонок це явище впливає на розподілення напружень на невеликій відстані від таких перерізів, отже в загальному випадку оболонка розраховується за безмоментною теорією, а при необхідності проводиться окремий розрахунок у небезпечних перерізах з урахуванням крайових ефектів, тобто згину.

Таким чином, вважаємо, що в оболонці виникають тільки деформації розтягу або стиску і, відповідно, нормальні напруження у меридіональному і кільцевому напрямку – меридіональне  $\sigma_m$  і тангенціальне  $\sigma_t$  напруження. Розрахунок оболонки полягає у визначенні розрахункових напружень і порівнянні їх із допустимими, при проектному розрахунку визнача-

ється товщина оболонки. Основна формула для розрахунку оболонки – формула Лапласа

$$\frac{\sigma_t}{R_t} + \frac{\sigma_m}{R_m} = \frac{p}{\delta}, \quad (7.1)$$

де  $R_t, R_m$  – тангенціальний і меридіональний радіуси кривизни;  
 $\sigma_t, \sigma_m$  – тангенціальне і меридіональне напруження;  
 $p$  – тиск газу або рідини на стінки оболонки;  
 $\delta$  – товщина оболонки.

Розрахунок осесиметричної оболонки обертання за безмоментною теорією проводиться за таким алгоритмом:

1) Якщо оболонка має декілька ділянок різної форми, то розрахунок проводиться окремо на кожній ділянці.

Для кожної ділянки в довільному перерізі на відстані  $z$  від початку ділянки записують необхідні параметри:

$R_m$  – радіус кривизни у меридіональному напрямку;

$R_t$  – тангенціальний радіус кривизни у кільцевому напрямку ( $R_t$  завжди перпендикулярний твірній оболонки у перерізі  $z$ );

$\sin \varphi$  – синус кута між додатнім напрямком осі  $z$  і тангенціальним радіусом кривизни у перерізі  $z$ ;

$p(z)$  – тиск у перерізі  $z$ ;

$r(z)$  – радіус оболонки в перерізі  $z$  (рівняння кривої меридіана);

$\frac{dr(z)}{dz}$  – похідна функції радіусу оболонки за  $z$ ;

$Q_0$  – початкова рівнодійна сил тиску. Якщо оболонка має полюс, як, наприклад, сферична або конічна, то  $Q_0 = 0$ , якщо оболонка має днище, то початкова рівнодійна розраховується як рівнодійна сил тиску, які діють на площу днища. Якщо оболонка складається з декількох ділянок, то рівнодійна сил тиску на початку ділянки дорівнює кінцевому значенню рівнодійної на попередній ділянці.

2) На кожній ділянці обчислюють значення рівнодійної сил тиску за формулою

$$Q(z) = Q_0 + \int_0^z 2\pi \cdot p(z) \cdot r(z) \cdot \frac{dr(z)}{dz} dz. \quad (7.2)$$

Якщо розрахунок проводиться вручну, то необхідно знайти значення рівнодійної у декількох перерізах (не менше трьох, оскільки функція є нелінійною).

3) На кожній ділянці обчислюють значення меридіональних і тангенціальних напружень за формулами:



$\sigma_m(z) = \frac{Q(z)}{2\pi r(z)\delta \sin \varphi}$  – меридіональне напруження в залежності від рівнодійної меридіональних напружень,

$$\sigma_t(z) = \frac{p(z)}{\delta} R_t + \frac{\sigma_m}{R_m} R_t \text{ – тангенціальне напруження за формулою Ла-}$$

пласа.

Для побудови епюр необхідно визначити декілька значень.

При проектному розрахунку товщина оболонки є невідомою, тому шукають напруження, помножені на товщину (погонні напруження):

$$\delta\sigma_m(z) = \frac{Q(z)}{2\pi r(z)\sin \varphi} \text{ – меридіональне погонне напруження;} \quad (7.3)$$

$$\delta\sigma_t(z) = p(z)R_t + \frac{\delta\sigma_m}{R_m} R_t \text{ – тангенціальне погонне напруження.} \quad (7.4)$$

4) Після побудови епюр шукають найбільш небезпечний переріз, де розрахункове значення напруження буде максимальним.

Розрахункове значення шукають за IV теорією міцності:

$$\sigma_{\text{розр}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_t - \sigma_m)^2 + \sigma_t^2 + \sigma_m^2)}. \quad (7.5)$$

При перевірочному розрахунку максимальне розрахункове напруження порівнюють з допустимим для даного матеріалу

$$\sigma_{\text{розр}}^{\text{IV}} \leq \sigma_{\text{adm}}.$$

При проектному розрахунку розрахункове напруження також вводять помноженим на товщину

$$\delta\sigma_{\text{розр}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}((\delta\sigma_t - \delta\sigma_m)^2 + \delta\sigma_t^2 + \delta\sigma_m^2)}. \quad (7.6)$$

Товщину визначимо з умови міцності:

$$\delta\sigma_{\text{розр}}^{\text{IV}} \leq \sigma_{\text{adm}} \cdot \delta, \quad \delta = \frac{\delta\sigma_{\text{розр}}^{\text{IV}}}{\sigma_{\text{adm}}}. \quad (7.7)$$

**ПРИКЛАД 7.1.** Визначити напруження і підібрати товщину осесиметричної оболонки (рис. 7.1). Допустиме напруження для сталі

$$\sigma_{\text{adm}} = 16 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}.$$

Вхідні дані:

$$R = 2 \text{ м, } h_1 = 3 \text{ м, } h_2 = 1 \text{ м, } h_3 = 1 \text{ м, } h_4 = 1 \text{ м,}$$

$$H = h_1 + h_2 + h_3 + h_4,$$

$$p_0 = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{М}^2} \text{ – початковий тиск,}$$

$\gamma = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$  – питома вага речовини, що міститься в оболонці.

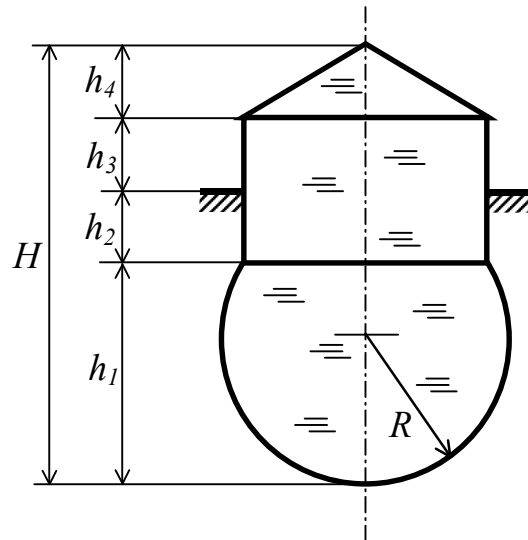
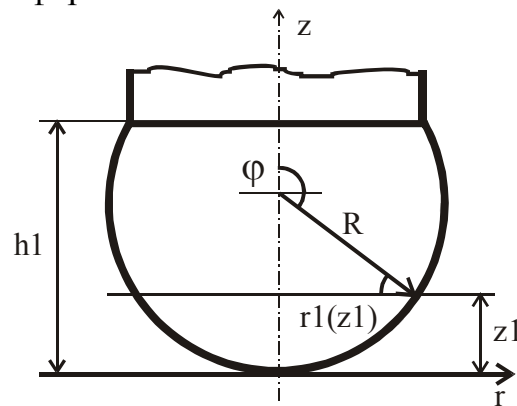


Рис. 7.1. Осесиметрична оболонка

Розв'язання:

Оболонка складається з чотирьох ділянок різної форми. Розрахунок починається з вільного кінця оболонки і проводиться до закріплення. Таким чином, для даної оболонки порядок розрахунку буде таким: спочатку розраховується сферична ділянка і нижня циліндрична ділянка до закріплення, потім конічна і верхня циліндрична ділянки.

1. Перша ділянка – сферична.



Початок розрахунку в нижній точці, розрахунок ведемо знизу вгору. Зробимо переріз оболонки на відстані  $z_1$  від початку розрахунку. Запишемо проектні параметри в перерізі  $z_1$ :

$R_m = R_t = R$  – меридіональний і тангенціальний радіуси дорівнюють радіусу сферичної оболонки;

$r_1(z_1) = \sqrt{R^2 - (R - z_1)^2}$  – радіус оболонки у перерізі  $z_1$  (рівняння меридіана);

$$\frac{dr_1(z_1)}{dz_1} = \frac{R - z_1}{\sqrt{R^2 - (R - z_1)^2}} - \text{похідна рівняння меридіана};$$

$$\sin \varphi(z_1) = \frac{r_1(z_1)}{R};$$

$$p_1(z_1) = p_0 + \gamma \cdot (H - z_1) - \text{тиск у перерізі } z_1;$$

$$Q_0 = 0 - \text{початкова рівнодійна сил тиску на полюсі оболонки.}$$

Визначаємо рівнодійну меридіональних напружень у декількох перерізах:

$$Q_1(z_1) := \int_0^{z_1} 2 \cdot \pi \cdot r_1(z_1) \cdot p_1(z_1) \cdot \frac{d}{dz_1} r_1(z_1) dz_1$$

$$Q_1(0.0001) = 87.962$$

$$Q_1(1) = 6.178 \times 10^5 \quad Q_1(2) = 7.959 \times 10^5 \quad Q_1(h_1) = 6.597 \times 10^5$$

При  $z_1 = 0$  на полюсі оболонки при визначенні меридіональних напружень одержуємо невизначеність  $\frac{0}{0}$ , тому початкове значення для  $z_1$  приймаємо  $z_1 = 0.0001$ .

Визначаємо меридіональне і тангенціальне напруження:

$$\delta\sigma_{1m}(z) := \frac{Q_1(z)}{2 \cdot \pi \cdot r_1(z) \cdot \sin\varphi(z)} \quad \delta\sigma_{1t}(z) := p_1(z) \cdot R - \delta\sigma_{1m}(z)$$

$$\delta\sigma_{1m}(0.0001) = 7 \times 10^4$$

$$\delta\sigma_{1t}(0.0001) = 7 \times 10^4$$

$$\delta\sigma_{1m}(1) = 6.556 \times 10^4$$

$$\delta\sigma_{1t}(1) = 5.444 \times 10^4$$

$$\delta\sigma_{1m}(2) = 6.333 \times 10^4$$

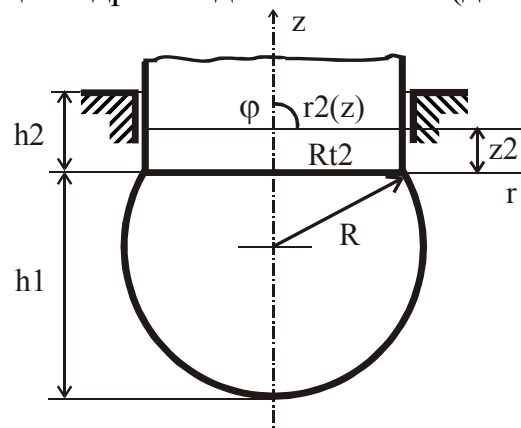
$$\delta\sigma_{1t}(2) = 3.667 \times 10^4$$

$$\delta\sigma_{1m}(h_1) = 7 \times 10^4$$

$$\delta\sigma_{1t}(h_1) = 1 \times 10^4$$

За цими значеннями побудуємо епюру (рис. 7.2).

2. Друга ділянка – циліндрична довжиною  $h_2$  (до опори).



Зробимо переріз на відстані  $z$  від початку ділянки.

Запишемо проектні параметри в перерізі  $z_2$ :

$R_m = \infty$  – меридіональний радіус кривизни (меридіан є прямою);

Тангенціальний радіус кривизни і радіус оболонки в перерізі  $z_2$  дорівнює радіусу циліндричної оболонки, який визначимо за теоремою Піфагора

$$R_{t2} := \sqrt{R^2 - (h_1 - R)^2} \quad r_2(z_2) := R_{t2}$$

Тиск у перерізі  $z_2$

$$p_2(z_2) := p_0 + \gamma \cdot (H - h_1 - z_2)$$

Інші параметри:

$$Q_{20} = Q_1(h_1), \quad \sin \varphi = 1, \quad \frac{dr_2(z_2)}{dz_2} = 0.$$

Оскільки похідна функції меридіана на цій ділянці оболонки дорівнює нулю, то інтеграл у формулі для визначення рівнодійної меридіональних напружень дорівнює нулю, таким чином, рівнодійна є сталою по довжині ділянки

$$Q_2(z_2) := Q_1(h_1) \quad Q_2(0) = 6.597 \times 10^5$$

Визначимо напруження.

Меридіональне напруження також є сталим по довжині ділянки:

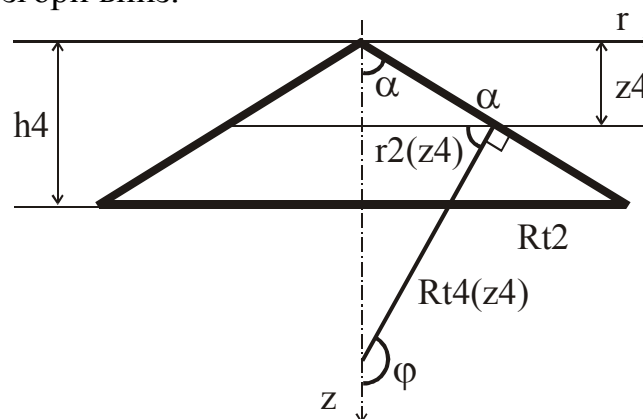
$$\delta \sigma_{2m}(z_2) := \frac{Q_2(z_2)}{2 \cdot \pi \cdot R_{t2}} \quad \delta \sigma_{2m}(1) = 6.062 \times 10^4$$

Тангенціальне напруження, згідно з рівнянням Лапласа (7.1) не залежить від меридіонального, оскільки  $R_m = \infty$ , і лінійно залежить від  $z$ , тому для побудови епюри визначимо значення на початку і в кінці ділянки:

$$\delta \sigma_{2t}(z_2) := p_2(z_2) \cdot R_{t2}$$

$$\delta \sigma_{2t}(0) = 6.928 \times 10^4 \quad \delta \sigma_{2t}(1) = 5.196 \times 10^4$$

3. Третя ділянка – конічна, початок розрахунку – полюс оболонки, розрахунок ведемо згори вниз.



Зробимо переріз на відстані  $z_4$  від початку ділянки і запишемо проектні параметри:

$$\alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{R_{t2}}{h_4}\right) \quad \sin\phi(z_4) := \cos(\alpha)$$

$R_m = \infty$  – меридіональний радіус кривизни

Початкова рівнодійна сил тиску  $Q_{40} = 0$ .

Тиск у перерізі  $z_4$ :

$$p_4(z_4) := p_0 + \gamma \cdot z_4$$

Радіус оболонки в перерізі  $z_4$ :

$$r_4(z_4) := z_4 \cdot \tan(\alpha)$$

$$\frac{dr_4(z_4)}{dz_4} = \tan(\alpha)$$

Тангенціальний радіус кривизни в кінчній оболонці змінюється в залежності від  $z_4$ :

$$R_{4t}(z_4) := \frac{r_4(z_4)}{\cos(\alpha)}$$

Рівнодійна меридіональних напружень:

$$Q_4(z_4) := \int_0^{z_4} 2 \cdot \pi \cdot p_4(z_4) \cdot r_4(z_4) \cdot \frac{d}{dz_4} r_4(z_4) dz_4$$

$$Q_4(0.0001) = 9.425 \times 10^{-4}$$

$$Q_4(0.5) = 3.142 \times 10^4$$

$$Q_4(1) = 1.571 \times 10^5$$

Меридіональні і тангенціальні напруження у декількох перерізах:

$$\delta\sigma_{4m}(z_4) := \frac{Q_4(z_4)}{2 \cdot \pi \cdot r_4(z_4) \cdot \sin\phi(z_4)} \quad \delta\sigma_{4t}(z_4) := p_4(z_4) \cdot R_{4t}(z_4)$$

$$\delta\sigma_{4m}(0.0001) = 1.732$$

$$\delta\sigma_{4t}(0.0001) = 3.464$$

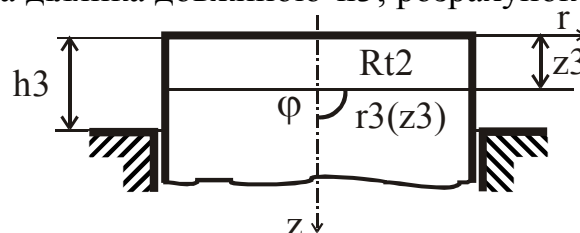
$$\delta\sigma_{4m}(0.5) = 1.155 \times 10^4$$

$$\delta\sigma_{4t}(0.5) = 2.598 \times 10^4$$

$$\delta\sigma_{4m}(h_4) = 2.887 \times 10^4$$

$$\delta\sigma_{4t}(h_4) = 6.928 \times 10^4$$

4. Циліндрична ділянка довжиною  $h_3$ , розрахунок ведемо згори вниз.



Запишемо проектні параметри аналогічно параметрам попередньої циліндричної ділянки і визначимо напруження.

$$p_3(z_3) := p_0 + \gamma \cdot (h_4 + z_3)$$

$$r_3(z_3) := R_{t2}$$

$$Q_3(z_3) := Q_4(h_4) \quad Q_3(0) = 1.571 \times 10^5$$

$$\delta\sigma_{3m}(z_3) := \frac{Q_3(z_3)}{2 \cdot \pi \cdot R_{t2}} \quad \delta\sigma_{3t}(z_3) := p_3(z_3) \cdot R_{t2}$$

$$\delta\sigma_{3m}(0) = 1.443 \times 10^4 \quad \delta\sigma_{3t}(0) = 3.464 \times 10^4$$

$$\delta\sigma_{3t}(1) = 5.196 \times 10^4$$

Після визначення напружень на кожній ділянці за одержаними значеннями побудуємо епюри меридіональних і тангенціальних напружень (рис. 7.2).

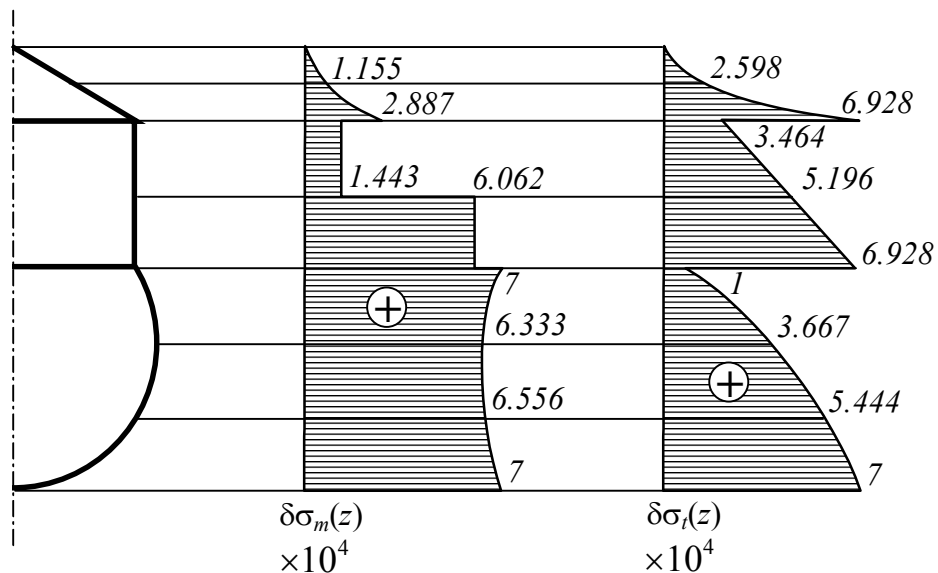


Рис. 7.2. Епюри меридіональних і тангенціальних напружень

Як видно з епюр, найбільш небезпечним перерізом є нижня точка в оболонці, де напруження набувають максимальних значень. Визначимо розрахункове напруження за IV теорією міцності.

$$\delta\sigma_{1m}(0.0001) = 7 \times 10^4 \quad \delta\sigma_{1t}(0.0001) = 7 \times 10^4$$

$$\sigma_d := 16 \cdot 10^7$$

$$\delta := \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\delta\sigma_{1m}(0.0001) - \delta\sigma_{1t}(0.0001))^2 + \delta\sigma_{1m}(0.0001)^2 + \delta\sigma_{1t}(0.0001)^2]}$$

$$\delta = 4.375 \times 10^{-4} \quad (\text{м})$$

Розглянемо алгоритм побудови епюр за допомогою пакета MathCAD.

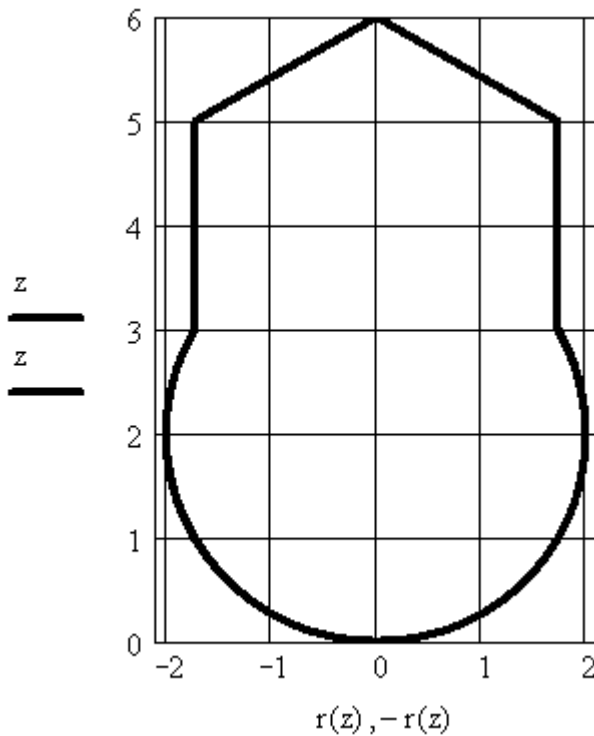
Запишемо функції основних параметрів по всій висоті оболонки, використавши формули, записані вище на кожній ділянці, і побудуємо графіки:

Функція радіусу оболонки в перерізі  $z$

$$r(z) := \begin{cases} r_1(z) & \text{if } 0.0001 \leq z \leq h_1 \\ r_2(z - h_1) & \text{if } h_1 \leq z \leq h_1 + h_2 \\ r_3(H - h_4 - z) & \text{if } h_1 + h_2 \leq z \leq h_1 + h_2 + h_3 \\ r_4(H - z) & \text{if } H - h_4 \leq z \leq H \end{cases}$$

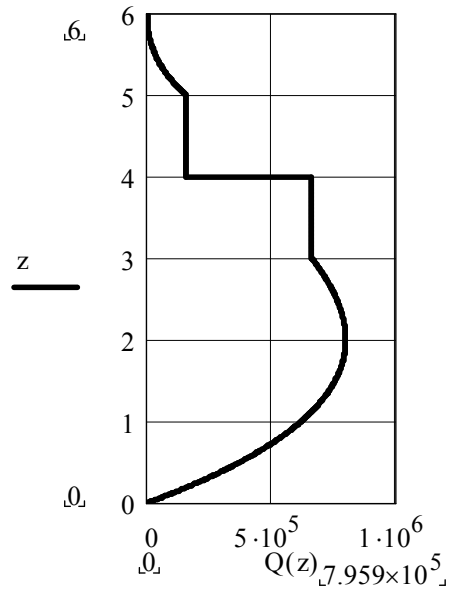
Побудуємо графік кривої меридіана – обрис оболонки.

$$z := 0, 0.0001 .. H$$



Рівнодійна меридіональних напружень:

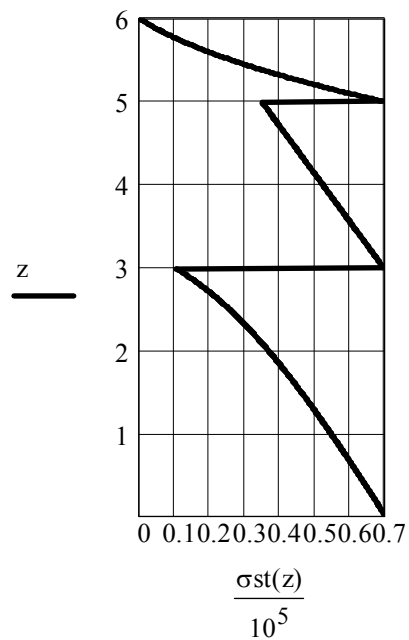
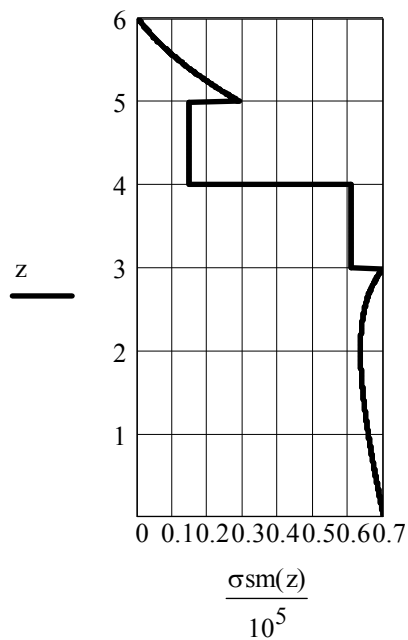
$$Q(z) := \begin{cases} Q_1(z) & \text{if } 0 \leq z \leq h_1 \\ Q_2(z - h_1) & \text{if } h_1 \leq z \leq h_1 + h_2 \\ Q_3(H - h_4 - z) & \text{if } h_1 + h_2 \leq z \leq H - h_4 \\ Q_4(H - z) & \text{if } H - h_4 \leq z \leq H \end{cases}$$



Меридіональне і тангенціальне напруження:

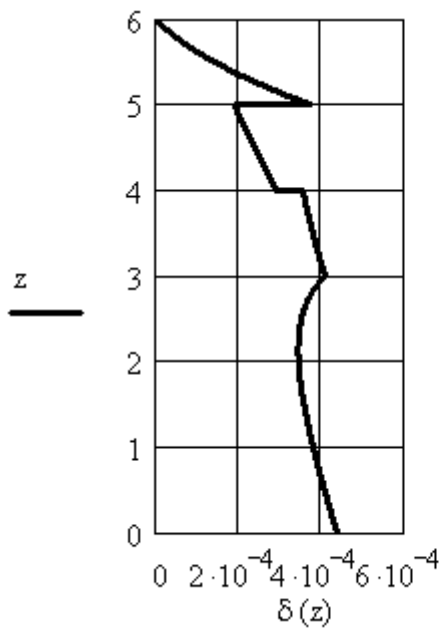
$$\sigma_{sm}(z) := \begin{cases} \delta\sigma_{1m}(z) & \text{if } 0.00001 \leq z \leq h_1 \\ \delta\sigma_{2m}(z - h_1) & \text{if } h_1 \leq z \leq h_1 + h_2 \\ \delta\sigma_{3m}(H - h_4 - z) & \text{if } h_1 + h_2 \leq z \leq H - h_4 \\ \delta\sigma_{4m}(H - z) & \text{if } H - h_4 \leq z \leq H \end{cases}$$

$$\sigma_{st}(z) := \begin{cases} \delta\sigma_{1t}(z) & \text{if } 0.00001 \leq z \leq h_1 \\ \delta\sigma_{2t}(z - h_1) & \text{if } h_1 \leq z \leq h_1 + h_2 \\ \delta\sigma_{3t}(H - h_4 - z) & \text{if } h_1 + h_2 \leq z \leq h_1 + h_2 + h_3 \\ \delta\sigma_{4t}(H - z) & \text{if } H - h_4 \leq z \leq H \end{cases}$$





Графік зміни товщини оболонки в залежності від  $z$ :



$$\delta(0.0001) = 4.375 \times 10^{-4} \text{ м}$$

Визначимо радіальні переміщення:

$\nu := 0.3$  - коефіцієнт Пуассона

$E := 2 \cdot 10^{11}$  - модуль Юнга  $z := 0.01, 0.02 \dots H$

$\varepsilon_t(z) := \frac{1}{E \cdot \delta} \cdot (\sigma_{s_t}(z) - \nu \cdot \sigma_{s_m}(z))$  - тангенційні деформації

$\Delta r(z) := \varepsilon_t(z) \cdot RS(z)$  - приріст радіуса

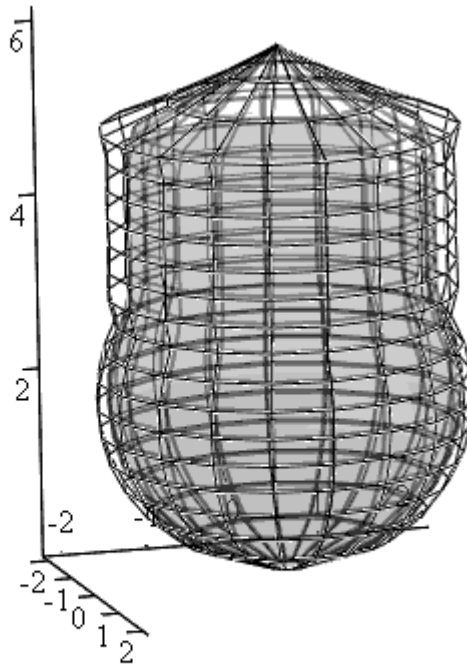
$fmap(\nu) := cyl2xyz(\nu_0, \nu_1, \nu_2)$  - перехід до циліндричних координат

Побудуємо початкову поверхню оболонки і поверхню після деформування:

$$SS0(z, \phi) := \begin{pmatrix} RS(z) \\ \phi \\ z \end{pmatrix} \quad SS0 := \text{CreateMesh}(SS0, 0.01, H, 0, 2 \cdot \pi, fmap)$$

$$SSD(z, \phi) := \begin{pmatrix} RS(z) + \Delta r(z) \cdot 10^{2.2} \\ \phi \\ z \end{pmatrix}$$

$$SSD := \text{CreateMesh}(SSD, 0.01, H, 0, 2 \cdot \pi, fmap)$$



SS0 ,SSD

## 7.2. Крайовий ефект у тонких циліндричних оболонках

Розглянемо тонкостінну циліндричну оболонку, завантажену на одному з торців радіальними силами  $q$  і моментами  $m$ , а також внутрішнім тиском  $p$ . Довжина оболонки  $L$  вважається достатньо великою порівняно з радіусом  $R$ . Під дією цих сил кожна точка оболонки буде переміщуватись у радіальному напрямку  $w$ . Це переміщення можна визначити, розглядаючи згин балки-смужки одиничної ширини, виділеної з оболонки. У кінцевому перерізі такої балки діють крайові сила  $Q_0$  і момент  $M_0$ , на поверхні - тиск  $p$ , а у поздовжніх перерізах погонні сили  $N$ , що виникають внаслідок взаємодії балки-смужки з оболонкою. Сумарне погонне навантаження на балку-смужку визначається як

$$q(x) = P - \frac{N}{R}.$$

Диференціальне рівняння згину балки-смужки можна одержати за методикою, яка використовувалась при аналізі плоского згину балок, з урахуванням наявності напружень  $\sigma_z$  у поздовжніх перерізах, у зв'язку з чим закон Гука записується у вигляді

$$\sigma_x = E \cdot \frac{\varepsilon_x}{1 - \nu^2}$$

Диференціальне рівняння згину балки-смужки має вигляд

$$\frac{d^4}{dx^4} w(x) + 4a^4 w(x) := \frac{p}{D}; \quad a := 4 \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}}.$$

Крайові умови для цього рівняння такі:

$$M(0) := M0; \quad Q(0) := Q0; \quad M(\infty) := 0; \quad Q(\infty) := 0.$$

Розв'язок рівняння з урахуванням граничних умов має вигляд:

Прогин:

$$w(x) := p \frac{R^2}{E \cdot h} + \frac{1}{2a^3 \cdot D} e^{-ax} \cdot [Q0 \cdot \cos(ax) + a \cdot M0 \cdot (\cos(ax) - \sin(ax))].$$

Кут повороту:

$$\theta(x) := \frac{1}{2a^2 \cdot D} e^{-ax} \cdot [Q0 \cdot (\cos(ax) + \sin(ax)) + 2a \cdot M0 \cdot \cos(ax)].$$

Згинаючий момент у поперечних перерізах балки-смужки:

$$M(x) := \frac{1}{a} e^{-ax} \cdot [Q0 \cdot \sin(ax) + a \cdot M0 \cdot (\cos(ax) + \sin(ax))].$$

Згинаючий момент у поздовжніх перерізах:

$$M1(x) := \nu \cdot M(x)$$

Поперечна сила:

$$Q(x) := e^{-ax} \cdot [Q0 \cdot (\cos(ax) - \sin(ax)) - 2a \cdot M0 \cdot \sin(ax)].$$

Кільцева сила:

$$N1(x) := E \cdot \frac{h}{R} \cdot w(x).$$

Циліндрична жорсткість:

$$D := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}.$$

Максимальні напруження у поздовжніх і поперечних перерізах визначаються за формулами

$$\sigma_t(x) := \frac{M1(x)}{W} + \frac{N1(x)}{A};$$

$$\sigma_m(x) := \frac{M}{W}; \quad W := \frac{l \cdot h^2}{6}; \quad A := l \cdot h.$$

Еквівалентні напруження за IV теорією міцності (з урахуванням малості радіальних напружень)

$$\sigma_{ekv4}(x) := \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_m(x) - \sigma_t(x))^2 + \sigma_m(x)^2 + \sigma_t(x)^2 \right]}.$$

Умова міцності

$$\sigma_{ekv}(0) \leq \sigma_{adm}$$

**ПРИКЛАД 7.2.** На сталю трубу ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коефіцієнт Пуассона 0.3, радіус  $R = 40$  мм, товщина стінки  $h = 2$  мм) діє рівномірно розподілений внутрішній тиск  $p = 2.5$  МПа і крайові моменти  $M_0 = 33.3$  Нм/м. Побудувати епюри переміщень, внутрішніх зусиль і напружень.

Для розрахунку використаємо результати аналітичного розв'язку [1].  
Введемо вхідні дані в одиницях СІ:

$$E := 2 \cdot 10^{11} \quad \nu := 0.3 \quad R := 40 \cdot 10^{-3} \quad h := 6.2 \cdot 10^{-3} \quad p := 2.5 \cdot 10^6$$

$$M_0 := 33.3 \quad W := \frac{1 \cdot h^2}{6} \quad A := 1 \cdot h \quad a := \sqrt[4]{\frac{3 \cdot (1 - \nu^2)}{R^2 \cdot h^2}} \quad Q_0 := 0$$

$$W = 6.4067 \times 10^{-6} \quad A = 6.2 \times 10^{-3} \quad a = 81.6234$$

Циліндрична жорсткість

$$D := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad D = 4.365 \times 10^3$$

Прогин і кут повороту:

$$w(x) := p \cdot \frac{R^2}{E \cdot h} + \frac{1}{2 \cdot a^3 \cdot D} \cdot e^{-a \cdot x} \cdot [Q_0 \cdot \cos(a \cdot x) + a \cdot M_0 \cdot (\cos(a \cdot x) - \sin(a \cdot x))] ]$$

$$\theta(x) := \frac{1}{2 \cdot a^2 \cdot D} \cdot e^{-a \cdot x} \cdot [Q_0 \cdot (\cos(a \cdot x) + \sin(a \cdot x)) + 2 \cdot a \cdot M_0 \cdot \cos(a \cdot x)]$$

Згинаючі моменти у поперечних і поздовжніх перерізах:

$$M(x) := \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot x} \cdot [Q_0 \cdot \sin(a \cdot x) + a \cdot M_0 \cdot (\cos(a \cdot x) + \sin(a \cdot x))] ]$$

$$M_1(x) := \nu \cdot M(x)$$

Поперечна і кільцева сила:

$$Q(x) := e^{-a \cdot x} \cdot [Q_0 \cdot (\cos(a \cdot x) - \sin(a \cdot x)) - 2 \cdot a \cdot M_0 \cdot \sin(a \cdot x)]$$

$$N_1(x) := E \cdot \frac{h}{R} \cdot w(x)$$

Напруження у поздовжніх і поперечних перерізах:

$$\sigma_m(x) := \frac{M(x)}{W} \quad \sigma_t(x) := \frac{M_1(x)}{W} + \frac{N_1(x)}{A}$$

Еквівалентні напруження:

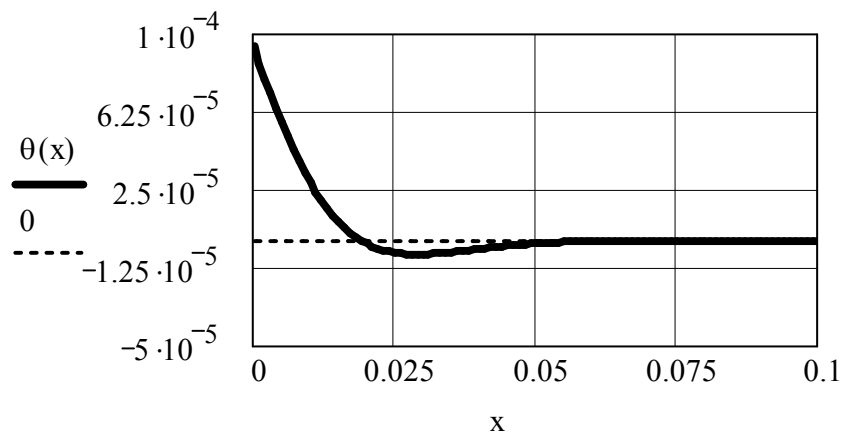
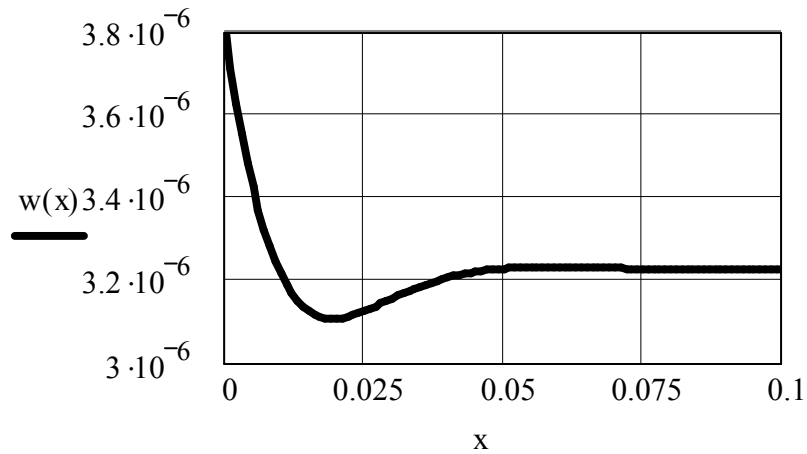
$$\sigma_{\text{ekv4}}(x) := \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_m(x) - \sigma_t(x))^2 + \sigma_m(x)^2 + \sigma_t(x)^2 \right]}$$

$$\sigma_{\text{ekv3}}(x) := \sigma_t(x)$$

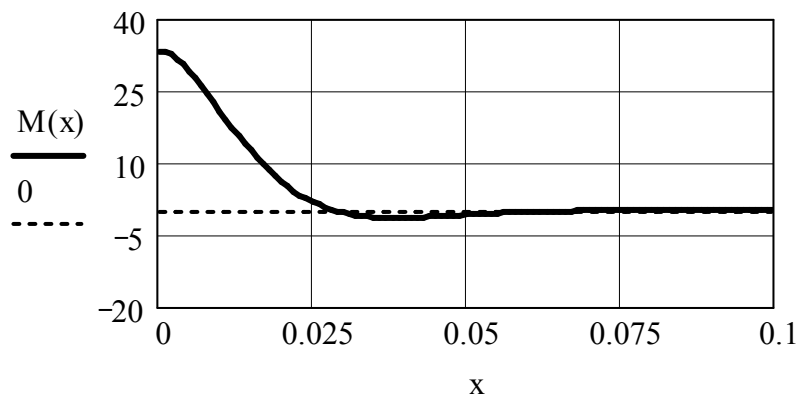
$$\sigma_{\text{adm}}(x) := 1.6 \cdot 10^7$$

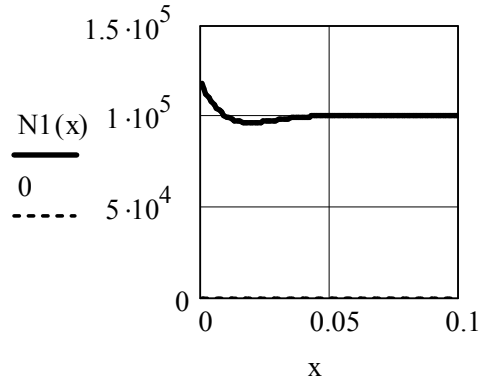
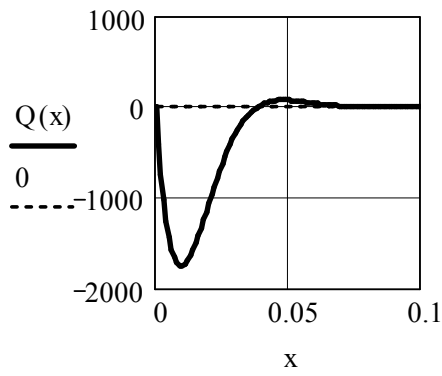
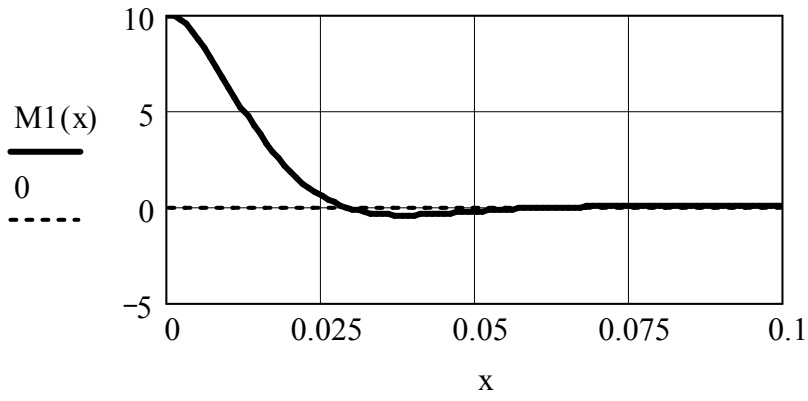
Побудуємо графіки прогинів і кутів повороту.

$$x := 0, 0.001 \dots 0.1$$

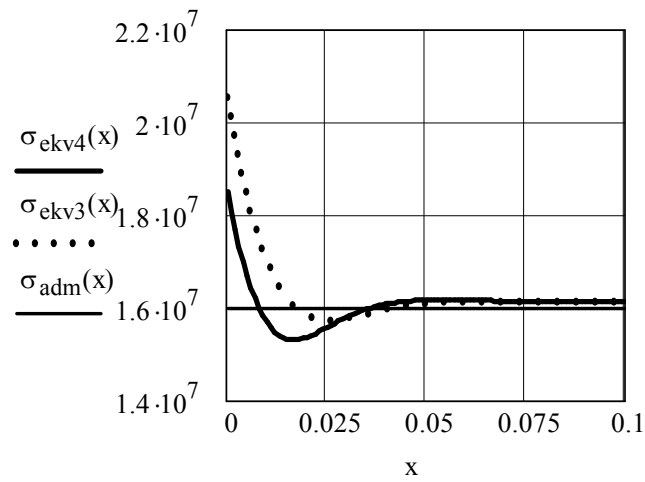
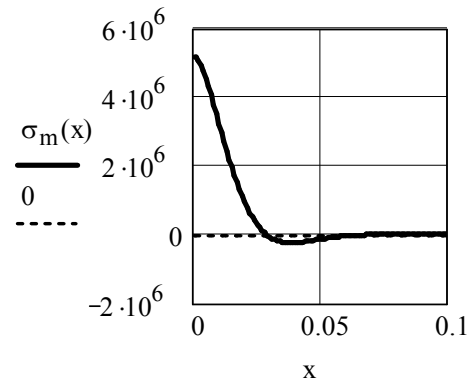
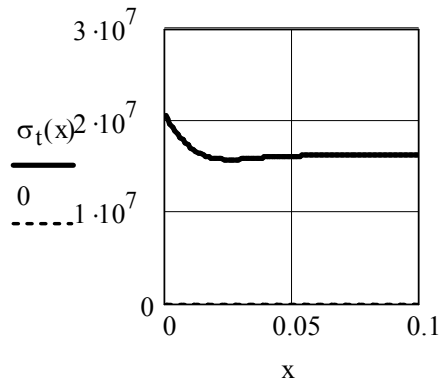


Графіки згинаючих моментів, поперечних і кільцевих сил:





Графіки напружень:



**ПРИКЛАД 7.3.** Розглянемо трубу, навантажену моментом  $M_0$  на лівому торці.

Використаємо для розв'язання задачі функцію MathCAD `odesolve()`.

$$\text{Given } w''''(x) + 4 \cdot a^4 \cdot w(x) = \frac{P}{D}$$

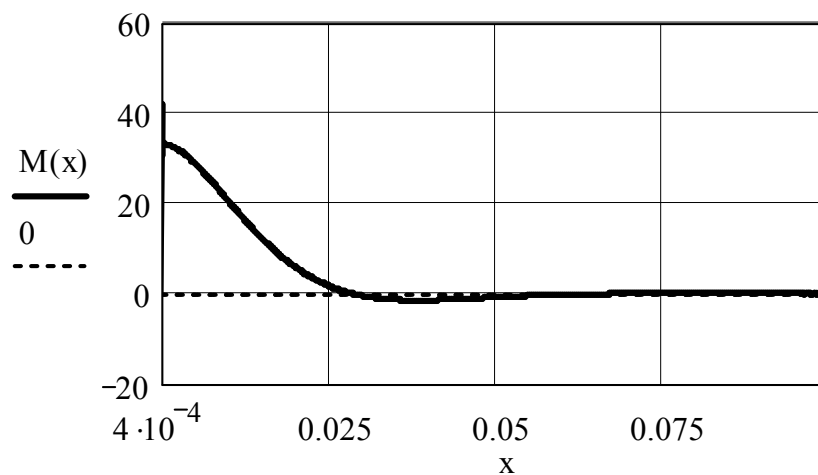
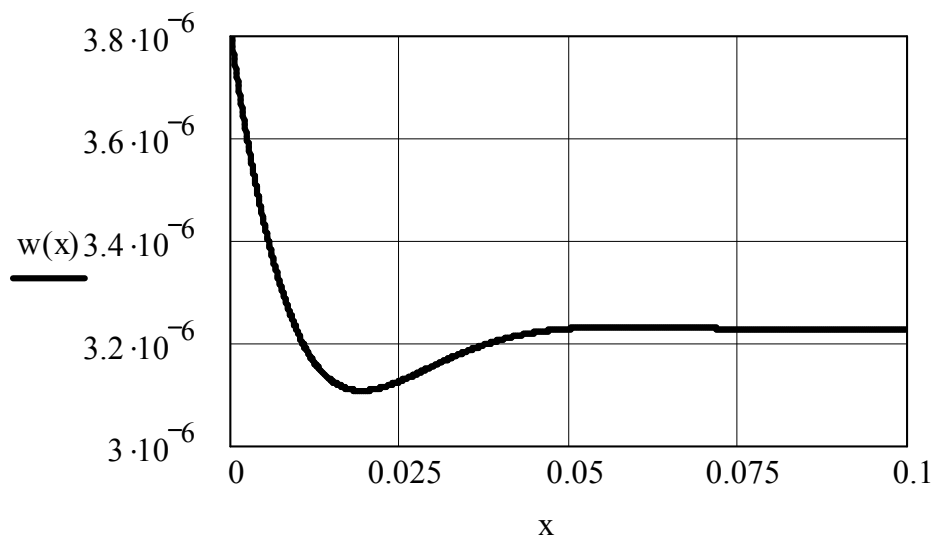
$$w''(0) = \frac{M_0}{D} \quad w'''(0) = 0 \quad w''(0.1) = 0 \quad w'''(0.1) = 0$$

$$w := \text{Odesolve}(x, 0.1, 1000)$$

$$M(x) := D \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) \quad Q(x) := D \cdot \frac{d^3}{dx^3} w(x)$$

Побудуємо графіки.

$$x := 0, 0.0001 .. 0.1$$



**ПРИКЛАД 7.4.** Розглянемо трубу із жорстким фланцем на лівому торці.

$$\text{Given } w''''(x) + 4 \cdot a^4 \cdot w(x) = \frac{p}{D}$$

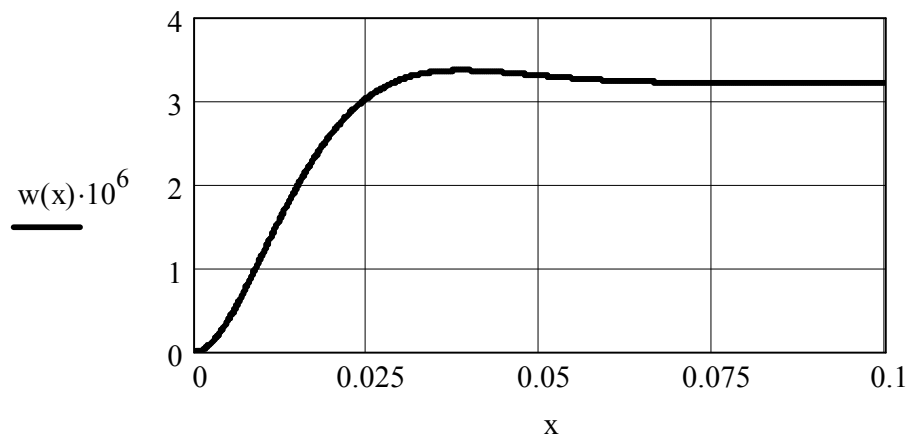
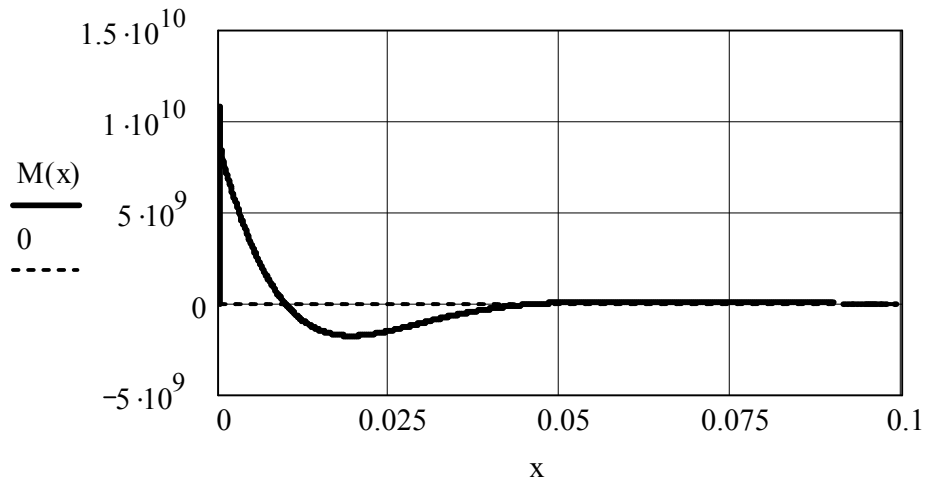
$$w(0) = 0 \quad w'(0) = 0 \quad w''(0.1) = 0 \quad w'''(0.1) = 0$$

$$w := \text{Odesolve}(x, 0.1, 1000)$$

$$M(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) \quad Q(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^3}{dx^3} w(x)$$

Побудуємо графіки.

$$x := 0, 0.0001 \dots 0.1$$



Проаналізувавши одержані результати, можна зробити такі висновки:

- 1) зростання моменту може бути суттєвим;
- 2) момент діє на невеликій відстані, що дозволяє конструктивно запобігти відповідному зростанню напружень місцевим потовщенням або плавним переходом від фланця до труби.



## РОЗДІЛ 8

### РОЗРАХУНОК НА СТІЙКІСТЬ СТЕРЖНІВ

#### 8.1. Визначення критичної сили. Задача Ейлера

Стійкість – це здатність конструкції зберігати початкову форму пружної рівноваги під дією зовнішніх чи внутрішніх збурень.

Навантаження, перевищення якого спричинює втрату стійкості, називається критичним. Задача визначення критичної сили є задачею Ейлера.

При визначенні критичної сили для шарнірно закріпленого стержня використовується диференціальне рівняння плоского згину. При цьому вважається, що стержень при втраті стійкості приймає форму синусоїди (рис. 8.1).

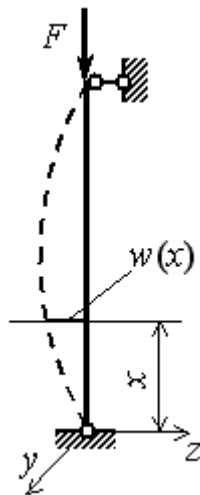


Рис. 8.1. Втрата стійкості при дії критичної сили

Диференціальне рівняння плоского згину має вигляд:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M_y}{EI}. \quad (8.1)$$

Запишемо функцію згинаючого момента відносно перерізу на відстані \$x\$ від початку координат у зігнутому положенні

$$M_y(x) = -F_{кр} \cdot w, \quad (8.2)$$

тоді диференціальне рівняння набуває вигляду однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k^2 w = 0, \quad (8.3)$$

де  $k^2 = \frac{F_{кр}}{EI_{\min}}$  – параметр, який визначається з розв'язку характеристичного рівняння;

$E$  – модуль Юнга;

$I_{\min}$  – мінімальний момент інерції (згин відбувається у площині, перпендикулярній осі найменшої жорсткості).

Звідси критична сила

$$F_{кр} = \frac{n^2 \pi^2 EI_{\min}}{l^2}, \quad (8.4)$$

де  $n$  – кількість півхвиль синусоїди при втраті стійкості;

$l$  – довжина стержня.

Частіше при розрахунку критичної сили використовують поняття приведеної довжини  $\mu l$ , де  $\mu = \frac{1}{n}$  – коефіцієнт приведення довжини, який залежить від умов закріплення (рис. 8.2).

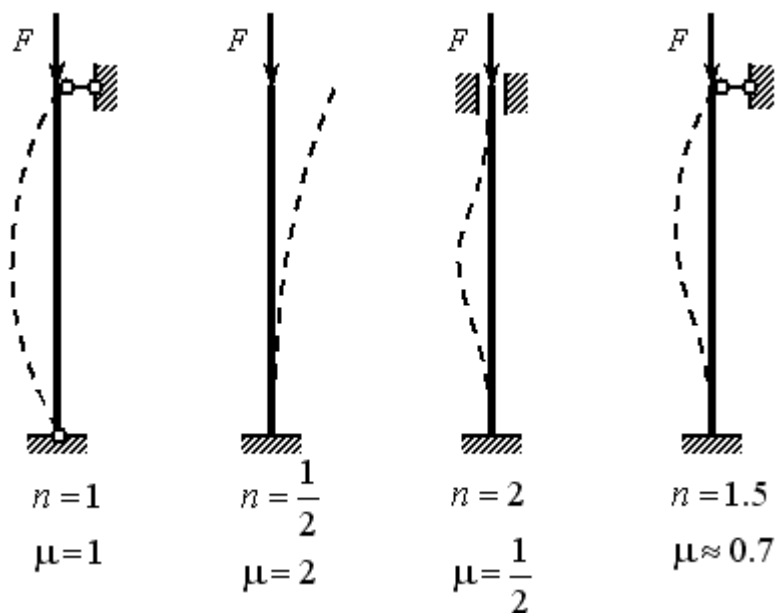


Рис. 8.2. Визначення коефіцієнта приведення довжини в залежності від умов закріплення

Таким чином, формула Ейлера для визначення критичної сили (8.4) набуває вигляду

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}. \quad (8.5)$$

Визначимо критичні напруження при втраті стійкості:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 A}.$$

Прийmemo коефіцієнт гнучкості

$$\lambda = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}}, \quad (8.6)$$

тоді напруження за формулою Ейлера

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (8.7)$$

Виведення формули Ейлера ґрунтується на використанні диференціального рівняння пружної лінії балки, отже цією формулою можна скористатися лише в межах закону Гука. Це означає, що  $\sigma_{кр}$  не повинно перевищувати границі пропорційності  $\sigma_{pr}$ . Визначимо коефіцієнт гнучкості, який відповідає умові  $\sigma_{кр} = \sigma_{pr}$ .

Для сталі Ст.3  $\sigma_{pr} \approx 200 \text{ МПа}$ , тоді

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Таким чином, для  $\lambda \geq 100$  критичне напруження при втраті стійкості визначається за формулою Ейлера (8.7). Для стержнів малої та середньої гнучкості формула Ейлера дає завищені значення критичного напруження. При  $\lambda < 100$  для визначення критичного напруження застосовується емпірична формула, одержана в результаті обробки експериментальних даних – формула Ясинського

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (8.8)$$

де  $a$  і  $b$  – коефіцієнти, які визначаються експериментально для кожного матеріалу.

При деякому значенні гнучкості  $\lambda_0$  напруження досягає граничного значення напруження при стиску, а саме: для пластичних матеріалів  $\sigma_{кр} = \sigma_T$ , для крихких матеріалів  $\sigma_{кр} = \sigma_u$ . Для сталі Ст.3  $\lambda_0 = 40$ . Стержні, в яких гнучкість  $\lambda < \lambda_0$ , називаються стержнями малої гнучкості. Їх розраховують тільки на міцність.

Побудуємо графік залежності критичного напруження від гнучкості (рис. 8.3).

Таким чином, критичне напруження при стиску визначається так:

$$\sigma_{кр} = \begin{cases} \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} & \text{при } \lambda \geq 100; \\ a - b\lambda & \text{при } 40 \leq \lambda \leq 100; \\ \sigma_T & \text{при } \lambda \leq 40. \end{cases} \quad (8.9)$$

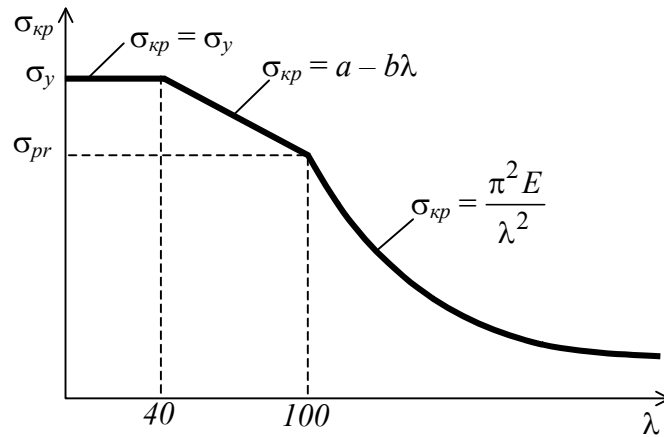


Рис. 8.3. Критичні напруження при втраті стійкості

За відомим значенням критичного напруження можна визначити критичну силу

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A, \quad (8.10)$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу.

**ПРИКЛАД 8.1.** Визначити мінімальну критичну і допустиму силу для заданого стержня (рис. 8.4).

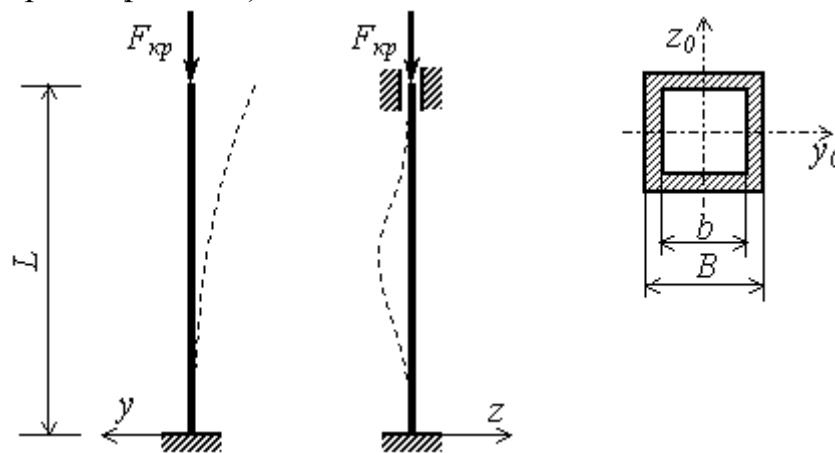


Рис. 8.4. Стержень, навантажений поздовжньою силою

Вхідні дані:

$L = 6 \text{ м}$ ,  $B = 10 \text{ см}$ ,  $b = 8 \text{ см}$ , матеріал Ст.3, коефіцієнт запасу  $k = 1.5$ .

Розв'язання:

1. Визначимо гнучкість стержня у заданих площинах.

Коефіцієнти приведення довжини для заданих умов закріплення:

$$\mu_y = 2, \quad \mu_z = \frac{1}{2}.$$

Площа поперечного перерізу:

$$A := B^2 - b^2 \quad A = 36 \text{ см}^2$$

Осьові моменти інерції відносно головних осей перерізу  $y_0$  і  $z_0$ :

$$I := \frac{B^4}{12} - \frac{b^4}{12} \quad I = 492 \text{ см}^4$$

Гнучкість стержня у заданих площинах:

$$\lambda_y := \frac{\mu_y \cdot L}{\sqrt{\frac{I}{A}}} \quad \lambda_y = 324.601 \quad \lambda_z := \frac{\mu_z \cdot L}{\sqrt{\frac{I}{A}}} \quad \lambda_z = 81.15$$

Як видно з розрахунку, гнучкість у площині  $yOx$  набагато більша, оскільки умови закріплення у цій площині гірші, а момент інерції перерізу однаковий відносно його головних площин. Критичне напруження розраховуємо за більшою гнучкістю

$$\sigma_{kr} := \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_y^2} \quad \sigma_{kr} = 1.873 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

Визначимо критичну силу

$$F_{kr} := \sigma_{kr} \cdot A \quad F_{kr} = 67.442 \text{ кН}$$

Визначимо допустиму силу

$$F_{dop} := \frac{F_{kr}}{1.5} \quad F_{dop} = 44.962 \text{ кН}$$

**ПРИКЛАД 8.2.** Визначити і порівняти критичну силу для стояка при раціонально і нераціонально розташованому перерізі відносно головних площин закріплення (рис. 8.5).

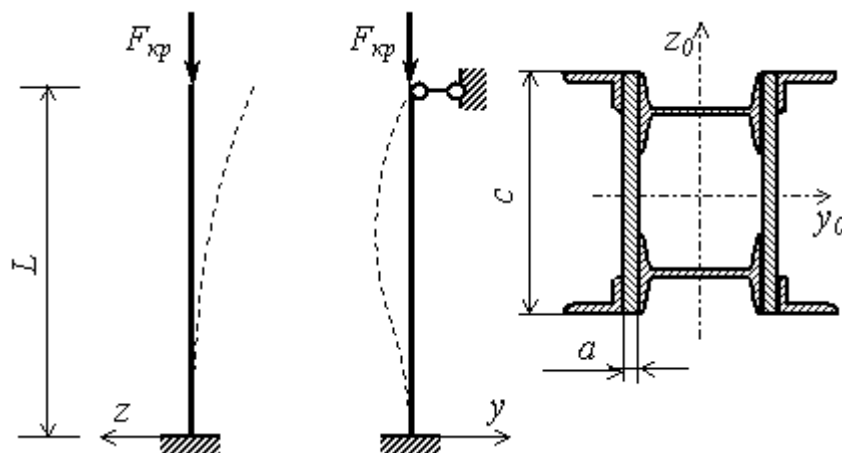


Рис. 8.5. Стояк складного перерізу

Вхідні дані:

$$a = 1 \text{ см}, \quad c = 20 \text{ см}, \quad L = 10 \text{ м}, \quad E = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}, \quad \mu_z = 2, \quad \mu_y = 0.7,$$

двотавр №10, кутник №4/2,5/4.

Розв'язання:

Для розв'язку задачі скористаємось математичним пакетом MathCAD.

Задаємо вхідні дані:

$$a := 1 \text{ см} \quad c := 20 \text{ см} \quad L := 10 \text{ м} \quad \mu_y := 0.7 \quad \mu_z := 2 \quad E := 2 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

Запишемо параметри кожного з профілів із сортаменту.

Для кутника (рис. 8.6, а):

$$B := 4 \text{ см} \quad b_1 := 2.5 \text{ см} \quad y_0 := 0.63 \text{ см} \quad z_0 := 1.37 \text{ см}$$

$$A_1 := 2.47 \text{ см}^2 \quad I_{y1} := 3.93 \text{ см}^4 \quad I_{z1} := 1.18 \text{ см}^4$$

Для двотавра (рис. 8.6, б):

$$h := 10 \text{ см} \quad b_2 := 5.5 \text{ см}$$

$$A_2 := 12 \text{ см}^2 \quad I_{x2} := 198 \text{ см}^4 \quad I_{y2} := 17.9 \text{ см}^4$$

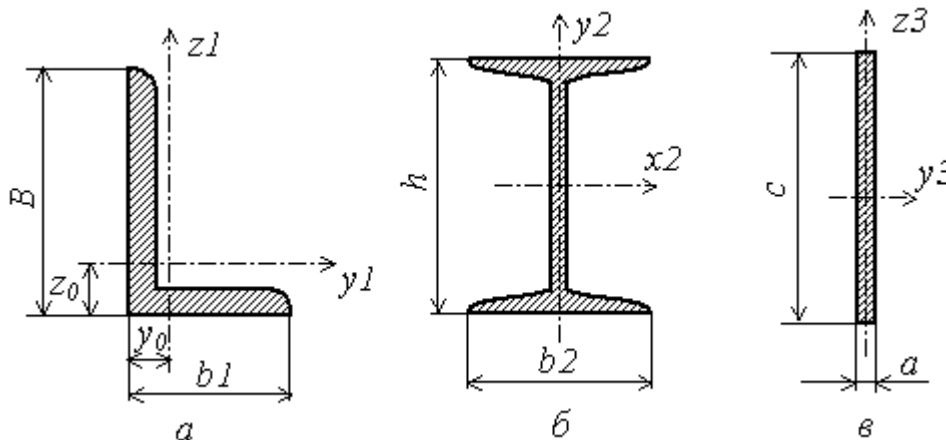


Рис. 8.6. Профілі, з яких складається поперечний переріз стояка

Для прямокутного профілю (рис.8.6, в) визначимо площу і моменти інерції відносно його головних осей:

$$A_3 := a \cdot c \quad A_3 = 20 \text{ см}^2$$

$$I_{y3} := \frac{a \cdot c^3}{12} \quad I_{y3} = 666.667 \text{ см}^4$$

$$I_{z3} := \frac{c \cdot a^3}{12} \quad I_{z3} = 1.667 \text{ см}^4$$

Площа поперечного перерізу стояка:

$$A := A1 \cdot 4 + A2 \cdot 2 + A3 \cdot 2 \quad A = 73.88 \quad \text{см}^2$$

Визначимо моменти інерції перерізу відносно його головних осей:

$$I_{y0} := \left[ I_{z1} + A1 \cdot \left( \frac{c}{2} - y_0 \right)^2 \right] \cdot 4 + \left[ I_{y2} + A2 \cdot \left( \frac{c}{2} - \frac{b2}{2} \right)^2 \right] \cdot 2 + I_{y3} \cdot 2$$

$$I_{y0} = 3.503 \times 10^3 \quad \text{см}^4$$

$$I_{z0} := \left[ I_{y1} + A1 \cdot \left( \frac{h}{2} + a + z_0 \right)^2 \right] \cdot 4 + I_{x2} \cdot 2 + \left[ I_{z3} + A3 \cdot \left( \frac{h}{2} + \frac{a}{2} \right)^2 \right] \cdot 2$$

$$I_{z0} = 2.162 \times 10^3 \quad \text{см}^4$$

Визначимо гнучкість перерізу у двох площинах при нераціональному розташуванні перерізу (вісь  $z_0$  є перпендикулярною осі  $z$ ):

$$\lambda_y := \frac{\mu_y \cdot L \cdot 100}{\sqrt{\frac{I_{y0}}{A}}} \quad \lambda_y = 101.661 \quad \lambda_z := \frac{\mu_z \cdot L \cdot 100}{\sqrt{\frac{I_{z0}}{A}}} \quad \lambda_z = 369.739$$

Розрахунок напруження ведемо за більшим значенням коефіцієнта гнучкості (більш небезпечним).

Коефіцієнт гнучкості  $\lambda_z > 100$ , отже критичне напруження визначаємо за формулою Ейлера:

$$\sigma_{кр1} := \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_z^2} \quad \sigma_{кр1} = 1.444 \quad \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

Тоді критична сила при стиску буде такою:

$$F_{кр1} := \sigma_{кр1} \cdot A \quad F_{кр1} = 106.676 \quad \text{кН}$$

Розглянемо інший варіант розташування перерізу, коли вісь  $z_0$  є перпендикулярною осі  $y$ , тобто раціональне розташування перерізу.

Визначимо гнучкість, критичне напруження і критичну силу:

$$\lambda_y := \frac{\mu_y \cdot L \cdot 100}{\sqrt{\frac{I_{z0}}{A}}} \quad \lambda_y = 129.409 \quad \lambda_z := \frac{\mu_z \cdot L \cdot 100}{\sqrt{\frac{I_{y0}}{A}}} \quad \lambda_z = 290.46$$

$$\sigma_{кр2} := \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_z^2} \quad \sigma_{кр2} = 2.34 \quad \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

$$F_{кр2} := \sigma_{кр2} \cdot A \quad F_{кр2} = 172.856 \quad \text{кН}$$

Як видно з розрахунку, критична сила при раціональному розташуванні перерізу відносно площин закріплення є більшою в 1.62 рази.

## 8.2. Проектний розрахунок на стійкість

При проектному розрахунку на стійкість необхідно, як правило, визначити розміри поперечного перерізу стержня при заданих навантаженні, умовах закріплення та матеріалі стержня.

Розміри перерізу визначаємо за умовою стійкості

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm\ st}, \quad (8.11)$$

де  $\sigma_{\max} = \frac{F}{A}$  максимальне напруження, яке виникає в стержні при стиску;

$\sigma_{adm\ st} = \varphi \sigma_{adm}$  – допустиме напруження при розрахунку на стійкість;

$\varphi$  – коефіцієнт зменшення допустимого напруження для статички. Значення коефіцієнта  $\varphi$  знаходиться у межах  $0 \leq \varphi \leq 1$  і залежить від гнучкості, як видно з *рис. 8.7*, і від матеріалу. Таблиці залежності  $\varphi(\lambda)$  для різних матеріалів наводяться у довідниках і підручниках [1, 3], а також у Додатку Б.2.

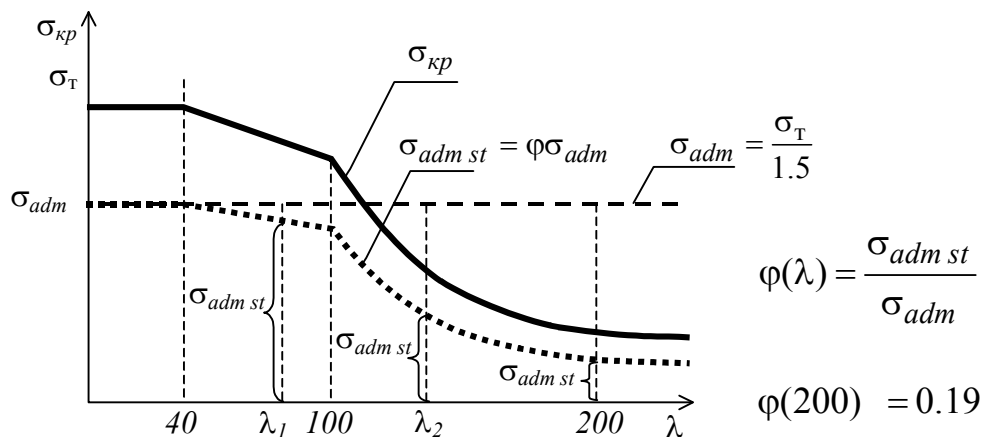


Рис. 8.7. Визначення коефіцієнта  $\varphi(\lambda)$

Таким чином, умова (7.11) набуває вигляду

$$\frac{F}{A} \leq \varphi \sigma_{adm}, \quad (8.12)$$

де невідомими є площа  $A$  і коефіцієнт  $\varphi$ .

Для розрахунку розмірів поперечного перерізу використаємо метод послідовних наближень, при якому задається початкове значення коефіцієнта  $\varphi_1 = 0.5$ , проводиться розрахунок, в результаті якого одержується кінцеве значення  $\varphi'_1$ . Якщо різниця між кінцевим і початковим значенням  $\varphi$  більша за 5 %, то розрахунок проводиться знову для другого наближення



$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2}$ ). Розрахунок повторюється до тих пір, поки похибка між кінцевим і початковим значенням не стане меншою 5 %

$$\delta = \frac{\varphi_n - \varphi_n'}{\varphi_n'} \cdot 100\% \leq 5. \quad (8.13)$$

**ПРИКЛАД 8.3.** Підібрати розміри поперечного перерізу стояка, розмістивши його найраціональніше (рис. 8.8).

Вхідні дані:

$$F := 100 \text{ кН} \quad L := 5 \text{ м} \quad \sigma_{adm} := 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

$$\mu_y := 2 \quad \mu_z := 1$$

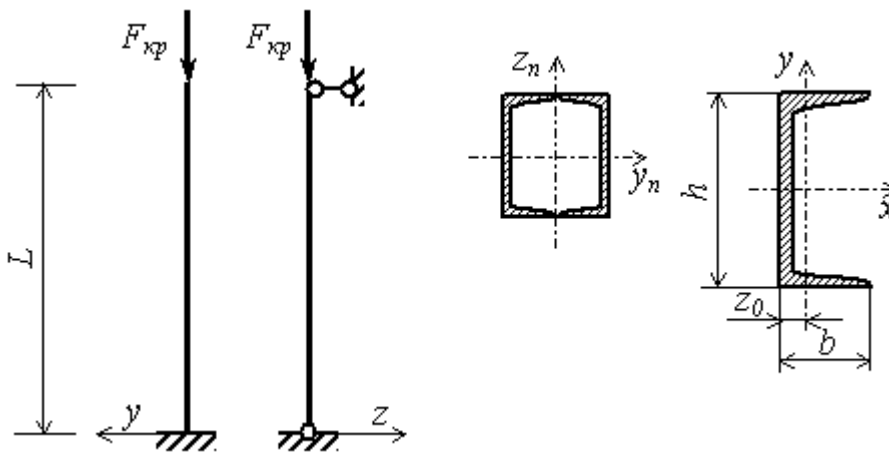


Рис. 8.8. Умови закріплення, поперечний переріз стояка і параметри швелера

Розв'язання:

Запишемо умову стійкості

$$\frac{F}{A} \leq \phi \sigma_{adm}, \text{ звідки } A = \frac{F}{\phi \sigma_{adm}}.$$

Оскільки в умові стійкості дві невідомі величини, для визначення розмірів поперечного перерізу застосуємо метод послідовних наближень.

Задаємо перше наближення:

$$\phi_1 := 0.5$$

З умови міцності визначимо площу поперечного перерізу:

$$A_1 := \frac{F}{\phi_1 \cdot \sigma_{adm}} \quad A_1 = 12.5 \text{ см}^2$$

\*) Умова такого вибору наступного коефіцієнта забезпечує збіжність даного варіанту методу послідовних наближень.

Переріз складається з двох однакових швелерів, отже площа одного швелера:

$$A_{11} := \frac{A_1}{2} \quad A_{11} = 6.25 \text{ см}^2$$

Із сортаменту підбираємо найближче значення площі швелера.

Для швелера № 5

$$A_{11} := 6.16 \text{ см}^2 \quad I_x := 22.8 \text{ см}^4 \quad I_y := 5.61 \text{ см}^4$$

$$z_0 := 1.16 \text{ см} \quad h := 5 \text{ см} \quad b := 3.2 \text{ см}$$

Визначимо моменти інерції перерізу відносно його головних осей:

$$I_{yn} := I_x \cdot 2 \quad I_{yn} = 45.6 \text{ см}^4$$

$$I_{zn} := \left[ I_y + A_{11} \cdot (b - z_0)^2 \right] \cdot 2 \quad I_{zn} = 62.491 \text{ см}^4$$

Розмістимо переріз раціонально. Гірші умови закріплення у площині  $xOy$  ( $\mu_y > \mu_z$ ), тому розмістимо переріз так, щоб вісь найбільшої жорсткості  $zn$  ( $I_{zn} > I_{yn}$ ) була перпендикулярною площині  $xOy$ .

Визначимо гнучкість стержня у двох площинах:

$$\lambda_y := \frac{\mu_y \cdot L \cdot 100}{\sqrt{\frac{I_{zn}}{2 \cdot A_{11}}}} \quad \lambda_y = 444.014 \quad \lambda_z := \frac{\mu_z \cdot L \cdot 100}{\sqrt{\frac{I_{yn}}{2 \cdot A_{11}}}} \quad \lambda_z = 259.892$$

Розрахунок ведемо за найбільшою гнучкістю.

З таблиці Б.8 (Додаток Б.2) визначимо відповідний гнучкості коефіцієнт  $\phi_1(444) \approx 0.04$ .

Як видно, різниця між початковим і кінцевим значенням  $\phi$  велика, тому проведемо розрахунок для другого наближення.

Друге наближення приймаємо з умови:

$$\phi_2 := \frac{\phi_1 + \phi_{11}}{2} \quad \phi_2 = 0.27$$

Площа поперечного перерізу:

$$A_2 := \frac{F}{\phi_2 \cdot \sigma_{adm}} \quad A_2 = 23.148 \text{ см}^2$$

$$A_{22} := \frac{A_2}{2} \quad A_{22} = 11.574 \text{ см}^2$$

Підбираємо швелер № 10, характеристики якого запишемо із сортаменту:

$$A_{22} := 10.9 \text{ см}^2 \quad I_x := 174 \text{ см}^4 \quad I_y := 20.4 \text{ см}^4$$

$$z_0 := 1.44 \text{ см} \quad h := 10 \text{ см} \quad b := 4.6 \text{ см}$$

Моменти інерції перерізу:

$$I_{yn} := I_x \cdot 2 \quad I_{yn} = 348 \text{ см}^4$$

$$I_{zn} := \left[ I_y + A22 \cdot (b - z_0)^2 \right] \cdot 2 \quad I_{zn} = 258.486 \text{ см}^4$$

Для такого перерізу віссю найбільшої жорсткості є  $yn$ , оскільки  $I_{yn} > I_{zn}$ , тому розташовуємо переріз так, щоб вісь  $yn$  була перпендикулярною площині  $xOy$ .

Визначимо коефіцієнти гнучкості стояка у двох площинах:

$$\lambda_y := \frac{\mu_y \cdot L \cdot 100}{\sqrt{\frac{I_{yn}}{2 \cdot A22}}} \quad \lambda_y = 250.287 \quad \lambda_z := \frac{\mu_z \cdot L \cdot 100}{\sqrt{\frac{I_{zn}}{2 \cdot A22}}} \quad \lambda_z = 145.204$$

Значення  $\phi$ , відповідне найбільшій гнучкості  $\lambda_y = 250$ :

$$\phi_{22} := 0.15 \quad \frac{\phi_2 - \phi_{22}}{\phi_{22}} \cdot 100 = 80$$

Третє наближення:

$$\phi_3 := \frac{\phi_2 + \phi_{22}}{2} \quad \phi_3 = 0.21$$

Проводимо розрахунок аналогічно попередньому:

$$A_3 := \frac{F}{\phi_3 \cdot \sigma_{adm}} \quad A_3 = 29.07 \text{ см}^2$$

$$A_{33} := \frac{A_3}{2} \quad A_{33} = 14.535 \text{ см}^2$$

Підбираємо швелер № 14 з такими характеристиками:

$$A_{33} := 15.6 \text{ см}^2 \quad I_x := 491 \text{ см}^4 \quad I_y := 45.4 \text{ см}^4$$

$$z_0 := 1.67 \text{ см} \quad h := 14 \text{ см} \quad b := 5.8 \text{ см}$$

Моменти інерції:

$$I_{y0} := I_x \cdot 2 \quad I_{y0} = 982 \text{ см}^4$$

$$I_{z0} := \left[ I_y + A_{33} \cdot (b - z_0)^2 \right] \cdot 2 \quad I_{z0} = 622.975 \text{ см}^4$$

Коефіцієнти гнучкості:

$$\lambda_y := \frac{\mu_y \cdot L \cdot 100}{\sqrt{\frac{I_{y0}}{2 \cdot A_{33}}}} \quad \lambda_y = 178.247 \quad \lambda_z := \frac{\mu_z \cdot L \cdot 100}{\sqrt{\frac{I_{z0}}{2 \cdot A_{33}}}} \quad \lambda_z = 111.895$$

Значення  $\phi_{33}$ , відповідне гнучкості  $\lambda_y = 178.247$ , визначимо з таблиці Б.8 (Додаток Б.2) інтерполяцією:

$$\phi_{33} := 0.26 - \frac{0.26 - 0.23}{10} \cdot 8.247 \quad \phi_{33} = 0.235$$

Похибка складає

$$\left| \frac{\phi_3 - \phi_{33}}{\phi_{33}} \right| \cdot 100 = 10.737$$

Похибка більша за 5 %, тому проведемо ще один розрахунок.

$$\phi_4 := \frac{\phi_3 + \phi_{33}}{2} \quad \phi_4 = 0.223$$

$$A_4 := \frac{F}{\phi_4 \cdot \sigma_{adm}} \quad A_4 = 28.074 \text{ см}^2$$

$$A_{44} := \frac{A_4}{2} \quad A_{44} = 14.037 \text{ см}^2$$

Для такої площі підходить той самий швелер, що при попередньому наближенні.

Перевіримо похибку:

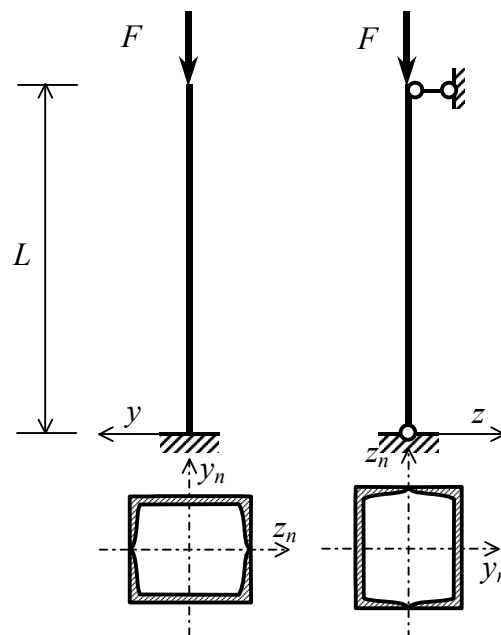
$$\left| \frac{\phi_4 - \phi_{33}}{\phi_{33}} \right| \cdot 100 = 5.368$$

Як видно, похибка зменшується, тобто функція сходиться до значень, відповідних швелеру № 14.

Перевіримо напруження:

$$\sigma := \frac{F}{A_{33} \cdot 2 \cdot \phi_{33}} \quad \sigma = 13.624 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \quad \sigma < \sigma_{adm}$$

Умова стійкості виконується, отже остаточно приймаємо швелер №14 і розміщуємо його так, як показано на *рис. 8.9*.



*Рис. 8.9. Раціональне розташування перерізу стояка*

## РОЗДІЛ 9

### РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПОВТОРНО-ЗМІННИХ (ЦИКЛІЧНИХ) НАВАНТАЖЕННЯХ

#### 9.1. Поняття про циклiчні навантаження

Крім статичних навантажень, багато конструкцій зазнають впливу динамічних, тобто таких, що змінюються в часі, одним із видів яких є повторно-змінні або циклiчні навантаження. Конструкції, які зазнають впливу циклiчних навантажень – це осі залізничних вагонів, гребні та повітряні гвинти, колінчасті вали, шатуни моторів, лопатки турбін, корпуси літаків, підводних човнів тощо.

Було помічено, що рухомі частини машин руйнуються при навантаженнях, які були б абсолютно безпечними, якби конструкції були нерухомими, тобто при статичних навантаженнях.

Основна небезпека циклiчних навантажень полягає у зміні знаку напруження у кожній точці конструкції, як показано на рис. 9.1.

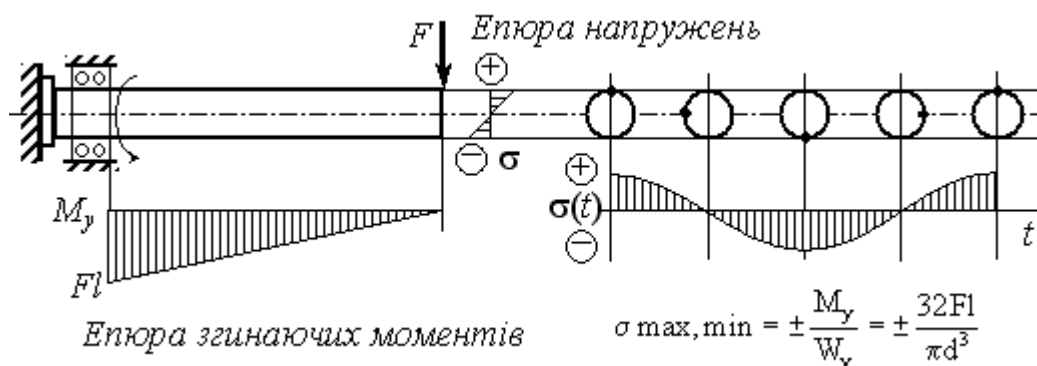


Рис. 9.1. Зміна напружень у поперечному перерізі при циклiчних навантаженнях

Якщо елемент конструкції багаторазово піддавати змінному навантаженню, то після деякої кількості циклів (змін напружень) у ньому з'являється тріщина, яка розвивається спочатку повільно, а потім все швидше, і нарешті конструкція руйнується миттєво, не зазнавши при цьому пластичних деформацій (навіть високопластичні матеріали). Таке руйнування називають руйнуванням від втоми матеріалу.

**Втома** – процес поступового накопичення пошкоджень, утворення і розвитку тріщин у матеріалі під дією циклiчних навантажень.

Таким чином, руйнування при циклічних навантаженнях відбувається шляхом появи мікротріщин, поступового розвитку їх у макротріщини, на останній стадії зразок руйнується миттєво крихким руйнуванням.

Розрахунок на міцність при циклічних навантаженнях називають розрахунком на витривалість.

**Витривалість** – це здатність матеріалу чинити опір руйнуванню при дії циклічних навантажень.

## 9.2. Характеристики циклу коливань

При повторно-змінних навантаженнях зміна напружень відбувається за циклічним законом. Основними характеристиками циклу коливань є такі (рис. 9.2):

$T$  – період;

$\sigma_m$  – середнє напруження (напруження при статичному навантаженні, незмінне в часі);

$\sigma_a$  – амплітудне напруження;

$\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  – максимальне і мінімальне динамічні напруження;

$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$  – коефіцієнт асиметрії циклу;

Характеристики пов'язані між собою залежностями

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_{\max}}{2}(1 + r),$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_{\max}}{2}(1 - r).$$

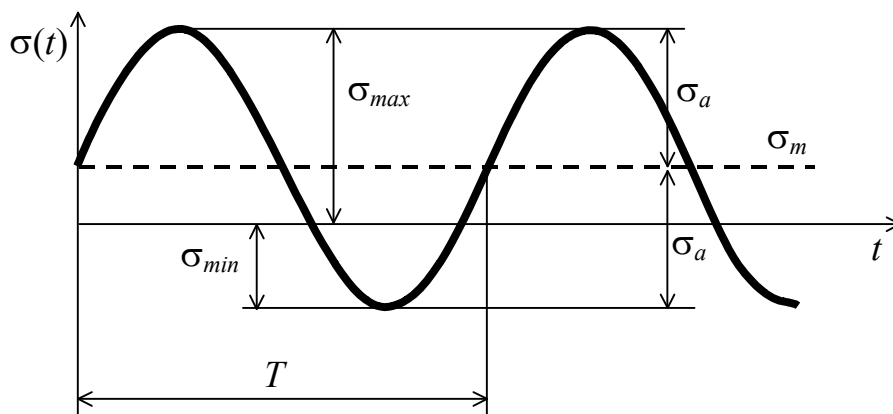


Рис. 9.2. Характеристики циклу коливань

Найбільш небезпечним є симетричний цикл, для якого

$$\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}, \quad \sigma_m = 0, \quad r = -1.$$

### 9.3. Характеристики витривалості

Для визначення характеристик витривалості того чи іншого матеріалу зразки випробовують на відповідній випробувальній машині. Навантаження на зразок поступово зменшують від максимального до такого, при якому зразок витримує необхідну кількість циклів навантаження. Результати випробувань обробляють у вигляді кривої, яка показує залежність руйнівного напруження для даного матеріалу від кількості циклів – кривої Велера (рис. 9.3).

Для чорних металів крива асимптотично наближається до деякого значення, яке називається **границею витривалості**  $\sigma_{-1}$  – найбільшого напруження при якому зразок може пропрацювати нескінченно велику кількість циклів не руйнуючись. Кількість циклів, при якому встановлюється границя витривалості для чорних металів  $N = 10^6 - 10^7$ .

Для кольорових металів крива спадає весь час, чітко визначеної границі немає, для них приймається границя витривалості при  $N = 10^8$  (умовна границя витривалості).

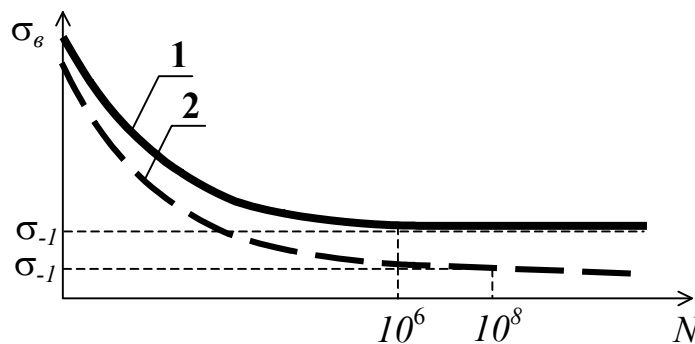


Рис. 9.3. Крива Велера; 1 – для чорних металів, 2 – для кольорових металів

На величину границі витривалості впливає багато факторів, які необхідно враховувати при розрахунку на витривалість. Коефіцієнти впливу визначають експериментально, порівнюючи результати випробувань еталонних зразків з експериментальними.

Основними конструкційно-технологічними факторами, які враховують при розрахунках на витривалість, є такі:

– **коефіцієнт концентрації напружень**  $K_\sigma$ , який характеризує концентрацію, тобто місцеве збільшення напружень у перерізах, де різко змінюється форма деталі, наприклад, при зміні діаметра у ступінчастих стержнях, при наявності отворів, виточок, зварних швів. Коефіцієнт концентрації напружень залежить від виду деформації, виду і розмірів концентратора, матеріалу і визначається з таблиць і графіків у довідниках [1, 2, 3] (або див. Додаток Б.3);

– **коефіцієнт стану обробки поверхні**  $K_{II}$  ( $\alpha_{II}$ ) – характеризує вплив виду обробки на границю витривалості, який пов'язаний з тим, що поверхневі шари більш напружені, ніж внутрішні, крім того, поверхня завжди має дефекти, спричинені обробкою деталі або корозією внаслідок впливу оточуючого середовища. Еталонним видом обробки вважається полірування ( $K_{II} = 1$ );

– **коефіцієнт масштабу**  $K_M$  ( $\varepsilon_M$ ) характеризує вплив розмірів деталі; еталонним зразком є зразок діаметром 10 мм, а зі збільшенням абсолютних розмірів границя витривалості знижується.

На величину границі витривалості також впливають температура, паузи в навантаженні, тренування деталі та інші фактори, які при необхідності треба враховувати.

#### 9.4. Розрахунок на міцність при симетричному циклі

Симетричний цикл (рис. 9.4, а) вважається найбільш небезпечним, характеристики симетричного циклу такі:

$$\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}, \quad \sigma_m = 0, \quad r = -1.$$

Умови міцності при багатоцикловому симетричному навантаженні

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{-1adm} \text{ – при розтягу-стиску або згині,}$$

$$\tau_{\max} \leq \tau_{-1adm} \text{ – при крученні,}$$

де  $\sigma_{-1adm}$ ,  $\tau_{-1adm}$  – допустимі напруження при симетричному навантаженні,

$\sigma_{\max}$ ,  $\tau_{\max}$  – максимальні динамічні напруження циклу у перерізі, який розраховується\*).

При визначенні допустимого напруження враховують конструкційно-технологічні фактори – концентрацію напружень, стан обробки поверхні і масштабний фактор. Таким чином, допустиме напруження визначається за формулою

$$\sigma_{-1adm} = \sigma_{-1} \cdot \frac{K_{II} K_M}{K_0 K_\sigma},$$

де  $\sigma_{-1}$  – границя витривалості для даного матеріалу;

$K_0$  – коефіцієнт запасу, як правило,  $K_0 = 1.5$ ;

$K_\sigma$  – коефіцієнт концентрації напружень;

$K_M$  – коефіцієнт масштабу;

$K_{II}$  – коефіцієнт впливу стану поверхні.

\*) Напруження циклу визначають, аналізуючи поведінку конкретних конструкцій при заданому навантаженні (див. далі Приклад 9.1).



## 9.5. Розрахунок на міцність при асиметричному циклі

При експлуатації машин та інженерних конструкцій в елементах виникають напруження, що змінюються в часі за різноманітними циклами (рис. 9.4, а, б).

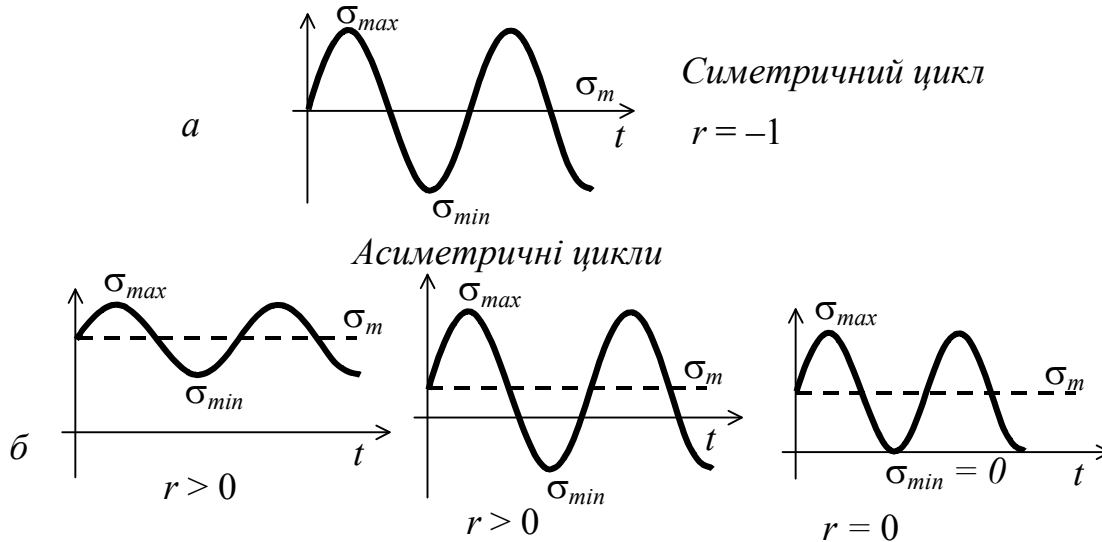


Рис. 9.4. Види циклів навантаження

Для розрахунків на витривалість необхідно знати границі витривалості при циклах із різними коефіцієнтами асиметрії. Визначення границі витривалості при асиметричних циклах (рис. 9.4, б) проводиться експериментально. Результати випробувань представляють у вигляді графіків або діаграм, які дозволяють записати емпіричні формули для визначення напружень при асиметричних циклах.

Допустиме напруження для заданого циклу з коефіцієнтом асиметрії  $r$  визначається за формулою

$$\sigma_{r adm} = \frac{2\sigma_{-1 adm}\sigma_{adm}}{(1-r)\sigma_{adm} + (1+r)\sigma_{-1 adm}},$$

де  $\sigma_{-1 adm}$  – допустиме напруження для симетричного циклу;

$\sigma_{adm}$  – допустиме статичне напруження для даного матеріалу.

При відомих характеристиках циклу можна перевірити коефіцієнт запасу

$$K = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{K_n K_m} \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_T} \sigma_m},$$

де  $\sigma_{-1}$  – границя витривалості для матеріалу;

$\sigma_a$  – амплітудне напруження;

$\sigma_m$  – середнє (статичне) напруження;

$\sigma_T$  – границя текучості.

**ПРИКЛАД 9.1.** Розрахунок на міцність при змінних навантаженнях.

Електродвигун масою  $M = 80$  кг встановлено так, як показано на *рис. 9.6*. Ротор двигуна масою  $m = 0.5M$  має ексцентриситет  $e = 5$  мм.

Визначити, при якому числі обертів  $n_0$  настає резонанс. Перевірити на міцність зазначені перерізи з концентрацією напружень. Форми концентраторів напружень показано на *рис. 9.5*.

Визначити дійсний коефіцієнт запасу і порівняти його з необхідним  $K_0 = 1.5$ .

Вхідні дані:

$$M = 80 \text{ кг}, \quad m = 40 \text{ кг}, \quad L = 1.5 \text{ м}, \quad L_1 = 0.5 \cdot L = 0.75 \text{ м},$$

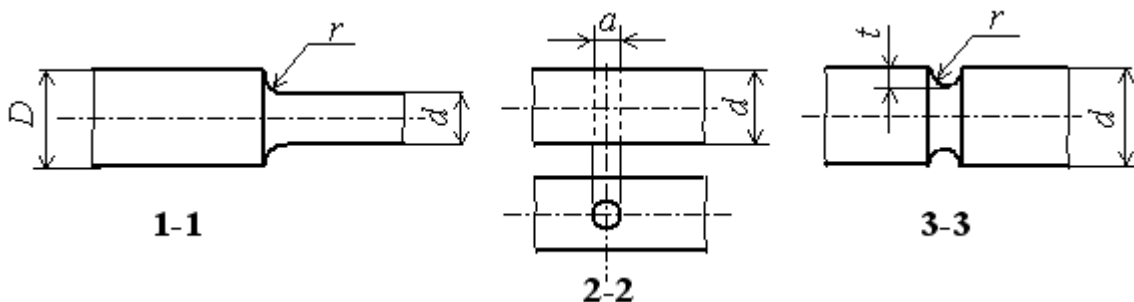
$$d = 30 \text{ мм}, \quad \frac{D}{d} = 1.1, \quad \frac{r}{d} = 0.35, \quad \frac{t}{r} = 0.1,$$

$\sigma_g = 400$  МПа – границя міцності для матеріалу,

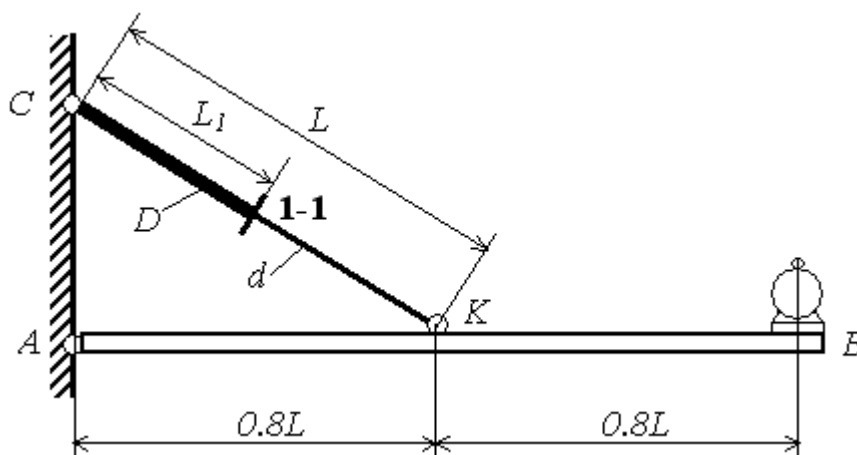
$f = 0.9$  – відношення робочого числа обертів до резонансного,

$\gamma = 1$  – коефіцієнт, який характеризує затухання коливань у системі, вид обробки поверхні – полірування,

Стержень  $AB$  є абсолютно жорстким.



*Рис. 9.5. Концентратори напружень*



*Рис. 9.6. Розрахункова схема стержневої системи з двигуном*

Розв'язання<sup>\*)</sup>:

<sup>\*)</sup> Паралельно розглядаються інші розрахункові схеми.

1. Визначимо, на який вид деформації працює елемент, який перевіряється. Для даної розрахункової схеми маємо шарнірно-стержневу систему, отже елемент СК працює на розтяг-стиск.

Якщо конструкція є балкою на двох опорах або консольною балкою – то розрахунковий елемент працює на згин.

Якщо конструкція є рамою з опорою у вигляді підшипника, то елемент, який розраховується, працює на кручення.

При розтягу-стиску і згині в елементі виникають нормальні напруження, при крученні – дотичні.

2. Визначимо власну частоту коливань стержневої системи з двигуном, вважаючи конструкцію системою з одним ступенем вільності,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{M}},$$

де  $C$  – жорсткість конструкції;

$M$  – маса двигуна.

Жорсткість – це величина, обернена до податливості

$$C = \frac{1}{\delta_{11}},$$

де  $\delta_{11}$  – податливість, тобто переміщення точки прикріплення двигуна від одиничної сили.

Згідно з умовою задачі стержень АВ є абсолютно жорстким і не деформується, отже точка В переміщується тільки за рахунок подовження стержня СК (рис. 9.7, а).

Визначимо поздовжню силу  $\bar{N}$ , яка виникає у стержні СК від одиничної сили, з умови рівноваги – суми моментів відносно точки А (рис. 9.7, б)

$$\sum M_A = \bar{N} \sin \alpha \cdot 0.8L - 1 \cdot 1.6L = 0, \quad \bar{N} = 3.333$$

Визначимо переміщення від одиничної сили способом Верещагіна.

Побудуємо епюру поздовжніх сил для стержня СК (рис. 9.7, в). Стержень має різні діаметри на ділянках, тому епюру  $\bar{N}$  треба розбити на дві площі. За правилом Верещагіна необхідно перемножити епюру від одиничного навантаження саму на себе, тобто і площу, і ординату, відповідну центру ваги площі, записати для одиничної епюри.

Переміщення:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA_1} \Omega_1 \bar{N} + \frac{1}{EA_2} \Omega_2 \bar{N} = \frac{1}{EA_1} \bar{N} L_1 \bar{N} + \frac{1}{EA_2} \bar{N} (L - L_1) \bar{N},$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \text{ – модуль пружності;}$$

$$A_1 = \frac{\pi D^2}{4} = 0.854 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \quad A_2 = \frac{\pi d^2}{4} = 0.707 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \text{ – площі}$$

поперечних перерізів стержнів,

$$\delta_{11} = 1.077 \cdot 10^{-7} \frac{\text{М}}{\text{Н}}.$$

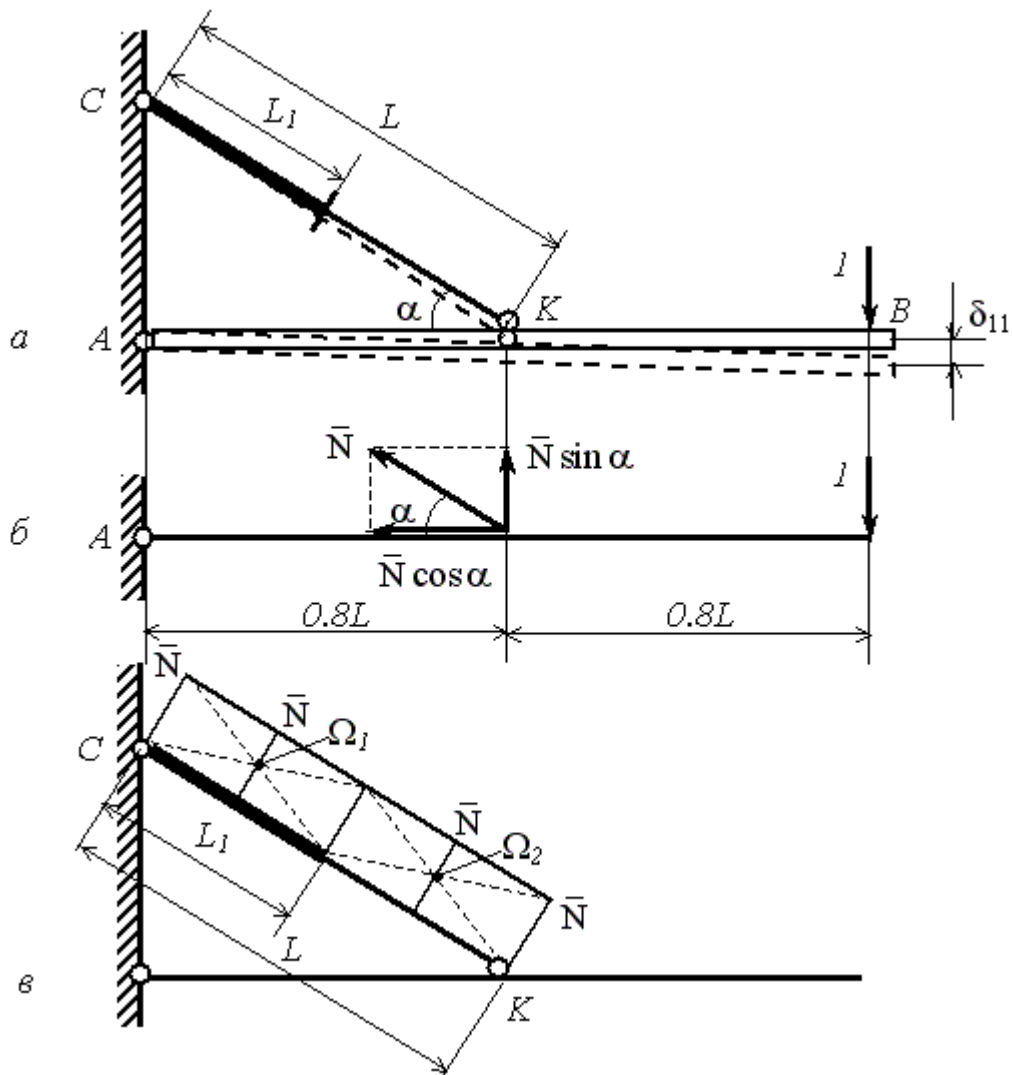


Рис. 9.7. Визначення переміщення від одиничної сили

Розглянемо визначення переміщення від одиничної сили для інших розрахункових схем (рис. 9.8, 9.9).

При згині (рис. 9.8) будемо епюру згинаючих моментів від одиничної сили, прикладеної в точці прикріплення двигуна.

За правилом Верещагіна переміщення дорівнює:

– варіант а (рис. 9.8, а):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI_1} \Omega_1 m_{c1} + \frac{1}{EI_2} \Omega_2 m_{c2} = \\ &= \frac{1}{EI_1} \frac{1}{2} L_1 (L - L_1) \frac{2}{3} (L - L_1) + \frac{1}{EI_2} \frac{1}{2} (L - L_1) (L - L_1) \frac{2}{3} (L - L_1), \end{aligned}$$

де  $I_1 = \frac{\pi D^4}{64}$ ,  $I_2 = \frac{\pi d^4}{64}$  – осьові моменти інерції перерізів;

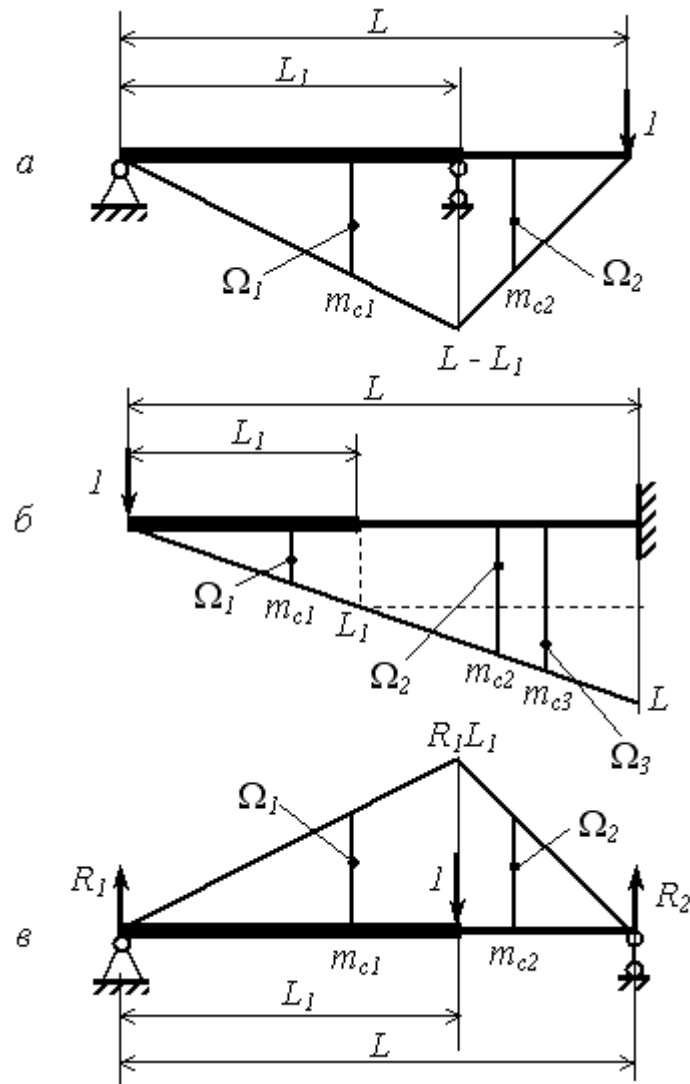


Рис. 9.8. Визначення переміщень при згині

– варіант б (рис.9.8, б):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI_1} \Omega_1 m_{c1} + \frac{1}{EI_2} \Omega_2 m_{c2} + \frac{1}{EI_2} \Omega_3 m_{c3} = \\ &= \frac{1}{EI_1} \frac{1}{2} L_1 L_1 \frac{2}{3} L_1 + \frac{1}{EI_2} L_1 (L - L_1) \left( L_1 + \frac{1}{2} (L - L_1) \right) + \\ &+ \frac{1}{EI_2} \frac{1}{2} (L - L_1) (L - L_1) \left( L_1 + \frac{2}{3} (L - L_1) \right); \end{aligned}$$

– варіант в (рис.9.8, в):

Для побудови епюри необхідно визначити опорні реакції від одиничної сили з рівнянь рівноваги:

$$R_1 = \frac{L - L_1}{L}, \quad R_2 = \frac{L_1}{L},$$

а потім розбивати на площі аналогічно варіанту а:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_1} \Omega_1 m_{c1} + \frac{1}{EI_2} \Omega_2 m_{c2},$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} L_1 \cdot R_1 L_1, \quad \Omega_2 = \frac{1}{2} (L - L_1) \cdot R_1 L_1, \quad m_{c1} = m_{c2} = \frac{2}{3} R_1 L_1.$$

Для схеми, зображеної на *рис. 9.9*, при дії одиничної сили в точці прикріплення двигуна на першій ділянці виникає згин, на другій ділянці – кручення, отже будемо відповідні епюри і визначаємо переміщення з урахуванням згину і кручення.

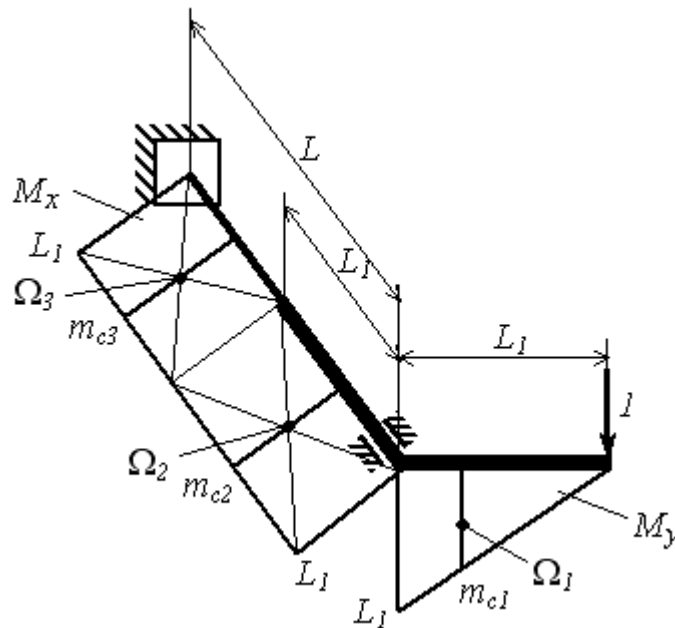
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_1} \Omega_1 m_{c1} + \frac{1}{GI_{\rho 1}} \Omega_2 m_{c2} + \frac{1}{GI_{\rho 2}} \Omega_3 m_{c3},$$

$$I_1 = \frac{\pi D^4}{64} \text{ – осьовий момент інерції,}$$

$$I_{\rho 1} = \frac{\pi D^4}{32}, \quad I_{\rho 2} = \frac{\pi d^4}{32} \text{ – полярні моменти інерції,}$$

$$G = 8 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \text{ – модуль зсуву для сталі;}$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} L_1 \cdot L_1, \quad \Omega_2 = L_1 L_1, \quad \Omega_3 = L_1 (L - L_1), \quad m_{c1} = \frac{2}{3} L_1, \quad m_{c2} = m_{c3} = L_1.$$



*Рис. 9.9. Визначення переміщень при згині з крученням*

Після визначення податливості  $\delta_{11}$  обчислимо власну частоту коливань для заданої розрахункової схеми (*рис.9.6*)

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} \cdot M}} \quad \omega_0 = 340.74 \frac{1}{\text{с}}$$

Визначимо число обертів за хвилину, відповідне власній частоті коливань

$$n_0 := \frac{30 \cdot \omega_0}{\pi} \quad n_0 = 3.254 \times 10^3 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$$

Визначимо робоче число обертів і робочу частоту

$$n_p := f \cdot n_0 \quad n_p = 2.928 \times 10^3 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$$

$$\omega_p := f \cdot \omega_0 \quad \omega_p = 306.666 \frac{1}{\text{с}}$$

Двигун працює у дорезонансному режимі.

3. Визначимо середнє напруження у перерізі – напруження, яке виникає в розрахунковому елементі від ваги двигуна.

Вага двигуна –  $M \cdot g$ ,  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$  – прискорення вільного падіння.

**Напруження при розтягу-стиску (рис. 9.6)**

$$\sigma_m = \frac{N}{A},$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу у заданому перерізі з урахуванням виду концентратора (рис. 9.5),

$N = \bar{N} \cdot M \cdot g$  – зусилля у розрахунковому стержні від ваги двигуна.

**Напруження при згині (рис. 9.8)**

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y},$$

де  $M_y = \bar{M}_y \cdot M \cdot g$ ,  $\bar{M}_y$  – згинаючий момент від одиничної сили у перерізі, де розташований концентратор,

$W_y$  – осьовий момент опору перерізу з концентратором, визначається в залежності від форми перерізу.

**Напруження при крученні (рис. 9.9)**

$$\tau = \frac{M_x}{W_\rho},$$

де  $M_x = \bar{M}_x \cdot M \cdot g$  – момент кручення у розрахунковому стержні,

$\bar{M}_x = L_1$  – момент кручення від одиничної сили (див. епюру на рис. 9.9),

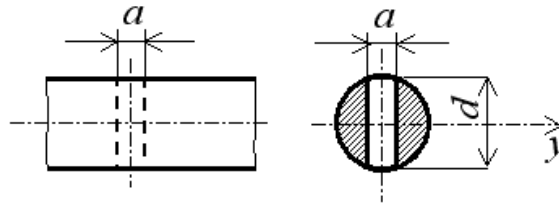
$W_\rho$  – полярний момент опору перерізу з концентратором, визначається в залежності від форми перерізу.

Розглянемо геометричні характеристики перерізів із концентраторами (рис. 9.5).

**Для перерізу 1-1:**

$$A = \frac{\pi d^2}{4}, \quad W_y = \frac{\pi d^3}{32}, \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Для перерізу 2-2 визначаємо геометричні характеристики, приймаючи отвір прямокутної форми:



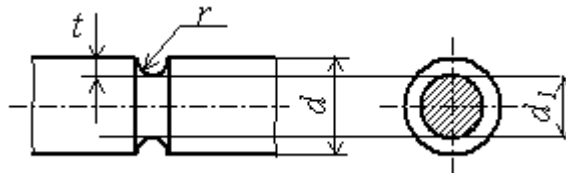
$$A = \frac{\pi d^2}{4} - ad, \quad W_y = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{ad^2}{6}, \quad W_p = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi d^4}{32} - \beta da^3}{\frac{d}{2}},$$

$\beta$  – коефіцієнт, який залежить від співвідношення сторін прямокутного перерізу, визначається з довідника (“Кручення стержнів некругового перерізу” [1], або див. Додаток Б.4), співвідношення  $\frac{a}{d}$  задано в умові задачі.

Примітка: Якщо заданий переріз розташований у частині стержня діаметром  $D$ , то у формули підставляється, відповідно, значення  $D$ .

Для перерізу 3-3 геометричні характеристики визначають у перерізі виточки, параметри якої задано в умові задачі:

$$d_1 = d - 2t, \quad A = \frac{\pi d_1^2}{4}, \quad W_y = \frac{\pi d_1^3}{32}, \quad W_p = \frac{\pi d_1^3}{16}.$$



Для даної задачі (рис. 9.6) середнє (статичне) напруження

$$\sigma_m = \frac{\bar{N} \cdot M \cdot g}{\frac{\pi d^2}{4}} = 3.7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0.37 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

4. Визначимо коефіцієнт динамічності, який показує, у скільки разів максимальне динамічне напруження більше, ніж статичне. Коефіцієнт динамічності враховує згасання коливань у системі.

$$K_d := 1 + \frac{Q}{M \cdot g} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \gamma \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}}$$



де  $Q$  – відцентрова сила інерції, яка виникає у системі з двигуном при наявності ексцентриситету (відстань між центром ваги ротора і віссю обертання)

$$Q := m \cdot \omega_p^2 \cdot e \quad Q = 1.881 \times 10^4$$

$$K_d = 27.063$$

5. Визначаємо характеристики циклу коливань (рис. 9.2) для заданої розрахункової схеми.

$$\sigma_{\max} := \sigma_m \cdot K_d \quad \sigma_{\max} = 10.013$$

$$\sigma_a := \sigma_{\max} - \sigma_m \quad \sigma_a = 9.643$$

$$\sigma_{\min} := \sigma_m - \sigma_a \quad \sigma_{\min} = -9.273$$

$$r := \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad r = -0.926$$

Коефіцієнт асиметрії циклу близький до  $-1$ , тобто маємо близький до симетричного цикл, який є дуже небезпечним.

6. Визначимо допустиме статичне напруження, а також границю текучості і границю витривалості для матеріалу із заданою границею міцності за наближеними формулами.

$$\sigma_u := 40 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

$$\sigma_{\text{adm}} := \frac{\sigma_u}{3} \quad \sigma_{\text{adm}} = 13.333 \quad \tau_{\text{adm}} := \frac{\sigma_u}{6} \quad \tau_{\text{adm}} = 6.667$$

**Для розтягу-стиску**

$$\sigma_t = \frac{\sigma_u}{2} = 20 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}, \quad \sigma_{-1} = 0.28\sigma_u = 11.2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

**Для згину**

$$\sigma_t = \frac{\sigma_u}{2}, \quad \sigma_{-1} = 0.4\sigma_u.$$

**Для кручення**

$$\tau_t = \frac{\sigma_u}{4}, \quad \tau_{-1} = 0.22\sigma_u.$$

7. Визначимо допустиме напруження для симетричного циклу (див. підрозд. 9.3, 9.4)

$$\sigma_{-1\text{adm}} = \sigma_{-1} \cdot \frac{K_{\Pi} K_M}{K_0 K_{\sigma}},$$

$K_0 = 1.5$  – коефіцієнт запасу;

$K_{\sigma}$  – коефіцієнт концентрації напружень, визначається з графіків в залежності від форми концентратора, розмірів перерізу і матеріалу.

Значення  $K_{\sigma}$  візьмемо з посібника [2]<sup>\*)</sup>:

**Для перерізу 1-1:**

- при розтягу-стиску і згині – рис. 9.18 + 9.19, стор. 243-244;
- при крученні – рис. 9.20 + 9.19, стор. 243-244.

На рис. 9.19 – поправка  $\xi$ , яка залежить від  $\frac{D}{d}$  і характеризує чутливість матеріалу до концентрації напружень, для згину і розтягу-стиску – крива 1, для кручення – крива 2.

Коефіцієнт концентрації визначаємо за формулою:

$$K_{\sigma} = 1 + \xi(K_{\sigma 0} - 1).$$

**Для перерізу 2-2:**

- при розтягу-стиску – рис. 9.23 (крива 2), стор. 246;
- при згині – рис. 9.23 (крива 1), стор. 246];
- при крученні – рис. 9.24, стор. 246.

Коефіцієнт визначається безпосередньо з графіків.

**Для перерізу 3-3:**

- при розтягу-стиску і згині – рис. 9.21+ 9.22, стор. 245;

На рис. 9.22 – поправка  $\xi$ , яка залежить від  $\frac{t}{r}$ .

Коефіцієнт концентрації визначаємо за формулою:

$$K_{\sigma} = 1 + \xi(K_{\sigma 0} - 1).$$

- при крученні коефіцієнт визначаємо за формулою:

$$K_{\tau} = 1 + \xi(K_{\sigma} - 1).$$

Визначимо коефіцієнт концентрації напружень для даної задачі для перерізу **1-1**, який працює при розтягу-стиску.

Скористаємося графіком 9.18, стор. 243 [2]. Графік побудовано для відношення сторін  $\frac{D}{d} = 2$ . Значення коефіцієнта залежить від  $\frac{r}{d}$  і границі міцності матеріалу ( $r$  – радіус заокруглення при переході від  $D$  до  $d$ ).

При  $\frac{r}{d} = 0.35$  і  $\sigma_u = 40 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$  з графіка шукаємо  $K_{\sigma 0} = 1.25$ .

З графіка 9.19 (крива 1) візьмемо поправку  $\xi = 0.6$  для заданого відношення  $\frac{D}{d} = 1.1$ .

Визначимо коефіцієнт концентрації напружень для даної конструкції:

$$K_{\sigma} = 1 + \xi(K_{\sigma 0} - 1) = 1 + 0.6(1.25 - 1) = 1.15.$$

<sup>\*)</sup> Зазначені графіки подано також у даному посібнику у Додатку Б.3.

$K_M$  – масштабний фактор, залежить від діаметра деталі, визначаємо з графіка у підручнику [1], рис. 565, крива 3 (або див. Додаток Б.3).

Для даної задачі –  $K_M = 0.7$ .

$K_{\Pi}$  – коефіцієнт впливу стану поверхні, залежить від виду обробки поверхні деталі і границі міцності, визначаємо з графіка у підручнику [1], рис. 570 (або див. Додаток Б.3).

Для даної задачі при полірованій поверхні  $K_{\Pi} = 1$ .

З урахуванням усіх коефіцієнтів

$$\sigma_{-1adm} = \sigma_{-1} \cdot \frac{K_{\sigma} K_M}{K_0 K_{\Pi}} = 4.545 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

8. Визначаємо допустиме напруження для циклу з коефіцієнтом асиметрії  $r = -0.926$ :

$$\sigma_r = \frac{2\sigma_{-1adm}\sigma_{adm}}{(1-r)\sigma_{adm} + (1+r)\sigma_{-1adm}} = 4.658 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Оскільки цикл дуже близький до симетричного, то напруження ненабагато більше за допустиме напруження при симетричному циклі.

Отже максимальне динамічне напруження не повинно перевищувати допустимого напруження для даного циклу, в даному випадку умова не виконується.

9. Визначаємо дійсний коефіцієнт запасу міцності:

$$K = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}}{K_{\Pi} K_M} \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_r} \sigma_m} = 0.698 \leq 1.5.$$

Як видно, запасу міцності немає, коефіцієнт запасу менше необхідного, отже умова міцності не виконується, і конструкція зруйнується від втолюваності, не пропрацювавши необхідну кількість циклів.

Для того, щоб підвищити запас міцності, треба зменшити концентрацію напружень, взяти більш міцний матеріал або збільшити розміри поперечного перерізу.

При згині розрахункові формули для визначення допустимого напруження при симетричному циклі  $\sigma_{-1adm}$ , допустимого напруження для заданого циклу з коефіцієнтом асиметрії  $r$  і дійсного коефіцієнта запасу є такими ж, як і при розтягу-стиску.

При крученні розрахункові формули мають вигляд:

$$\tau_{-1adm} = \tau_{-1} \cdot \frac{K_{\tau} K_M}{K_0 K_{\Pi}}; \quad \tau_r = \frac{2\tau_{-1adm}\tau_{adm}}{(1-r)\tau_{adm} + (1+r)\tau_{-1adm}};$$

$$K = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_{\tau}}{K_{\Pi} K_M} \tau_a + \frac{\tau_{-1}}{\tau_r} \tau_m}.$$

---

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Опір матеріалів: Підручник / Г.С.Писаренко, О.Л.Квітка, Е.С.Уманський; За ред. Г.С.Писаренка. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.
2. Дубенець В.Г., Хільчевський В.В. Розрахунково-графічні роботи з опору матеріалів в алгоритмах і задачах. – К.: НМК ВО, 1992. – 400 с.
3. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.; Отв. ред. Писаренко Г.С. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736 с.
4. Лихарев К.К., Сухова Н.А. Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов»: Учеб. пособие для машиностроительных вузов. – М.: Машиностроение, 1980. – 224 с.
5. Розв'язування задач опору матеріалів у системі MathCAD / В.В.Хільчевський, В.Г.Дубенець: Навч. посібник. – К. ІЗМН, 1997. – 108 с.
6. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе MathCAD. – СПб: БХВ-Петербург, 2004. – 512 с.
7. Методичні вказівки по використанню математичного пакета MathCAD – Укл. Дубенець В.Г. – Чернігів: ЧТУ, 1996. – 81 с.
8. ДСТУ 3008–95. Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення. – К.: Держстандарт України, 1995. – 38 с.
9. Кирьянов Д.В. Самоучитель MathCAD 2001. – СПб: БХВ-Петербург, 2002. – 544 с.

## ДОДАТОК А

## ВБУДОВАНІ ОПЕРАТОРИ І ФУНКЦІЇ MathCAD

Таблиця А.1. Арифметичні оператори

Оператор	Клавіші	Скаляр	Вектор	Матриця
$\mathbf{:=}$	$\langle \text{:} \rangle$	Присвоювання		
$\mathbf{\equiv}$	$\langle \sim \rangle$	Глобальне присвоювання		
$\mathbf{=}$	$\langle \text{=} \rangle$	Чисельне виведення		
$\mathbf{=}$	$\langle \text{Ctrl} \rangle + \langle \text{=} \rangle$	Символьне виведення		
$\mathbf{+}$	$\langle \text{+} \rangle$	Додавання		
$\mathbf{-}$	$\langle \text{-} \rangle$	Віднімання		
$\mathbf{\cdot}$	$\langle \text{*} \rangle$	Множення	Матричне множення, множення на скаляр	
$\mathbf{\times}$	$\langle \text{Ctrl} \rangle + \langle \text{8} \rangle$		Скалярний добуток	
$\mathbf{\div}$	$\langle \text{/} \rangle$ або $\langle \text{Ctrl} \rangle + \langle \text{/} \rangle$	Ділення		
$\mathbf{!}$	$\langle \text{!} \rangle$	Факторіал		
$\mathbf{\sqrt{\quad}}$	$\langle \text{\} \rangle$	Квадратний корінь		
$\mathbf{\sqrt[n]{\quad}}$	$\langle \text{Ctrl} \rangle + \langle \text{\} \rangle$	Корінь n-го степеня		
$\mathbf{()}$	$\langle \text{' } \rangle$	Дужки (зміна пріоритету)		
$\mathbf{\subscript}$	$\langle \text{[} \rangle$		Нижній індекс	
$\mathbf{\textsuperscript}}$	$\langle \text{Ctrl} \rangle + \langle \text{1} \rangle$		Транспонування	
$\mathbf{ \cdot }$	$\langle \text{Shift} \rangle + \langle \text{\} \rangle$	Модуль	Модуль вектора	Визначник матриці
$\mathbf{\Sigma}$	$\langle \text{Ctrl} \rangle + \langle \text{4} \rangle$		Сума елементів	
$\mathbf{\textsuperscript{-1}}$		Обернена величина		Обернена матриця
$\mathbf{\textsuperscript{\quad}}$	$\langle \text{Shift} \rangle + \langle \text{6} \rangle$	Піднесення до степеня		Піднесення матриці до степеня
$\mathbf{\rightarrow}$ nnn	$\langle \text{Ctrl} \rangle + \langle \text{-} \rangle$		Векторизація	

Таблиця А.2. Обчислювальні оператори

Оператор	Клавіші	Описання
$\langle \rangle$	<Ctrl> + <6>	Виділення стовпця
$\int \cdot d\cdot$	<Shift> + <7>	Визначений інтеграл
$\int \cdot d\cdot$	<Ctrl> + <I>	Невизначений інтеграл
$\frac{d}{d\cdot}$	<?>	Диференціювання
$\frac{d^n}{d\cdot^n}$	<Ctrl> + <?>	Обчислення $n$ -ї похідної
$\sum_{\cdot=\cdot}$	<Ctrl> + <Shift> + <4>	Сума
$\sum_{\cdot}$	<Shift> + <4>	Сума ранжированої змінної
$\prod_{\cdot=\cdot}$	<Ctrl> + <Shift> + <3>	Добуток
$\prod_{\cdot}$	<Shift> + <3>	Добуток ранжированої змінної
$\lim_{\cdot \rightarrow \cdot}$	<Ctrl> + <L>	Границя

Таблиця А.3. Вбудовані функції за алфавітом

Функція	Позначення	Операція
$a^*(z)$	$z$ – аргумент	Обернена тригонометрична або гіперболічна функція *
$Ai(x)$	$x$ – аргумент	Функція Ейрі першого роду
$angle(x,y)$	$x, y$ – координати точки	Кут між точкою і віссю $OX$

APPENDPRN(file)	file – шлях до файлу	Дозапис даних в існуючий текстовий файл
arg(z)	z – аргумент функції	Аргумент комплексного числа
atan2(x,y)	x, y – координати точки	Кут, який відраховується від осі $OX$ до точки (x, y)
Augment(A,B,C,...)	A, B, C, ... – вектори або матриці	Об'єднання матриць зліва направо
bei(n,x) ber(n,x)	n – порядок; x – аргумент	Уявна і дійсна частини функції Бесселя-Кельвіна
Bi(x)	x – аргумент	Функція Ейрі другого роду
bspline(x,y,u,n)	x, y – вектори даних; u – вектор значень вузлів В-сплайнів; n – порядок поліномів	Вектор коефіцієнтів В-сплайну
Bulstoer(y0,t0,t1 M,D)	Див. rkfixed	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для системи ЗДР методом Булірша-Штера
bulstoer(y0,t0,t1,acc,D, k,s)	Див. rkadapt	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для системи ЗДР методом Булірша-Штера (для визначення тільки останньої точки інтервалу)
Bvalfit(z1,z2,x0,x1,xf,D, load1,load2,score)	z1, z2 – вектор початкових значень відсутніх лівих и правих граничних умов; x0 – ліва границя; x1 – права границя; xf – внутрішня точка; D(x, y) – векторна функція, яка задає систему ЗДР; load1(x0,z), load2(x1,z) – векторні функції, які задають ліві и праві граничні умови; score(xf, y) – векторна функція, яка задає розв'язок у проміжній точці xf	Повертає вектор відсутніх граничних умов у крайовій задачі для системи $N$ ЗДР з додатковою умовою у проміжній точці
ceil(x)	x – аргумент	Найменше ціле, не менше x
cfft(y) CFFT(y)	y – вектор даних	Вектор прямого комплексного перетворення Фур'є (з різною нормалізацією)
cholesky(A)	A – квадратна визначена матриця	Розкладення Холецького
cols(A)	A – матриця або вектор	Число стовпців

<code>concat(S1,S2,...)</code>	$S1, S2, \dots$ – рядки	Об'єднання рядкових змінних
<code>cond1(A)</code> <code>cond2(A)</code> <code>conde(A)</code> <code>condi(A)</code>	$A$ – квадратна матриця	Числа обумовленості в різних нормах ( $L1, L2$ , Евклідова, $\infty$ )
<code>cos(z)</code>	$z$ – аргумент	Косинус
<code>cosh(z)</code>	$z$ – аргумент	Гіперболічний косинус
<code>cot(z)</code>	$z$ – аргумент	Котангенс
<code>coth(z)</code>	$z$ – аргумент	Гіперболічний котангенс
<code>csort(A,i)</code>	$A$ – матриця $i$ – індекс стовпця	Сортування рядків матриці за елементами 1-го стовпця
<code>CreateMesh(F,s0,s1,t0,t1, sgr,tgr,fmap)</code>	$F(s, t)$ – функція двох трьохелементних векторів $t0, t1$ – границі $t$ ; $s0, s1$ – границі $s$ ; $tgr, sgr$ – число точок сітки по $t$ і $s$ ; $fmap$ – функція перетворення координат	Створення вкладеного масиву, який представляє $x$ -, $y$ - і $z$ - координати параметричної поверхні, заданої функцією $F$
<code>CreateSpace(F,t0,t1, tgr, fmap)</code>	$F(t)$ – функція двох трьохелементних векторів $t0, t1$ – границі $t$ ; $tgr$ – число точок сітки по $t$ ; $fmap$ – функція перетворення координат	Створення вкладеного масиву, який представляє $x$ -, $y$ - і $z$ - координати параметричної просторової кривої, заданої функцією $F$
<code>csc(z)</code>	$z$ – аргумент	Косеканс
<code>csch(z)</code>	$z$ – аргумент	Гіперболічний косеканс
<code>csgn(z)</code>	$z$ – аргумент	Комплексний знак числа
<code>cspline(x,y)</code>	$x, y$ – вектори даних	Вектор коефіцієнтів кубічного сплайну
<code>cyl2xyz(r,θ,z)</code>	$r, \theta, z$ – циліндричні координати	Перетворення циліндричних координат у прямокутні
<code>D*(x,par)</code>	$x$ – значення випадкової величини; $par$ – список параметрів розподілу *	Густина розподілу ймовірності зі статистикою розподілу*
<code>diag(v)</code>	$v$ – вектор	Діагональна матриця, на діагоналі якої знаходяться елементи вектора
<code>eigenvals(A)</code>	$A$ – квадратна матриця	Власні значення матриці
<code>eigenvec(A,z)</code>	$A$ – квадратна матриця; $z$ – власне значення	Власний вектор матриці, який відповідає заданому власному значенню
<code>eigenvecs(A)</code>	$A$ – квадратна матриця	Власні вектори матриці



$\text{erf}(x)$	$x$ – аргумент	Функція помилок
$\text{erfc}(x)$	$x$ – аргумент	Обернена функція помилок
$\text{error}(S)$	$S$ – рядок	Повертає рядок $S$ як повідомлення про помилку
$\text{exp}(z)$	$z$ – аргумент	Експонента у степені $z$
$\text{expfit}(x,y,g)$	$x, y$ – вектори даних; $g$ – вектор початкових значень $a, b, c$	Експоненціальна регресія $a \cdot e^{bx} + c$
$\text{fft}(y)$ $\text{FFT}(y)$	$y$ – вектор даних	Вектор прямого перетворення Фур'є (з різною нормалізацією)
$\text{fhyper}(a,b,c,x)$	$a, b, c$ – параметри; $x$ – аргумент, $-1 < x < 1$	Гаусова гіпергеометрична функція
$\text{Find}(x_1, x_2, \dots)$	$x_1, x_2, \dots$ – змінні	Повертає корінь алгебраїчного рівняння (скаляр) або системи (вектор), визначених у блоці з Given
$\text{floor}(x)$	$x$ – аргумент	Найбільше ціле число, яке не перевищує $x$
$\text{Gamma}(x)$ $\text{Gamma}(a,x)$	$x$ – аргумент	Гамма-функція Ейлера або неповна гамма-функція порядку $a$
$\text{genfit}(x,y,g,G)$	$x, y$ – вектори даних; $g$ – вектор початкових значень параметрів регресії; $G(x, C)$ – векторна функція, яка складена з функції користувача і її частинних похідних за кожним параметром	Вектор коефіцієнтів регресії функціями користувача загального виду
$\text{geninv}(A)$	$A$ – матриця	Створення оберненої матриці
$\text{genvals}(A,B)$	$A, B$ – квадратні матриці	Розрахунок узагальнених власних значень
$\text{genvecs}(A,B)$	$A, B$ – квадратні матриці	Розрахунок узагальнених власних векторів
Given		Ключове слово для введення систем рівнянь, нерівностей тощо
$\text{heaviside step}(x)$	$x$ – аргумент	Функція Хевісайда
$\text{Her}(n,x)$	$x$ – аргумент; $n$ – порядок	Поліном Ерміта

I0(x) I1(x) In(m,x)	x – аргумент	Модифікована функція Бесселя першого роду нульового, першого і n-го порядку
ibeta (a, x,y)	x, y – аргументи a – параметр	Неповна бета-функція
identity (N)	N – розмір матриці	Створення одиничної матриці
icfft (v) ICFFT(v)	v – вектор частотних даних Фур'є-спектра	Вектор комплексного оберненого перетворення Фур'є (з різною нормалізацією)
if (cond,x,y)	cond – логічна умова; x, y – значення, які повертаються, якщо умова правильна (хибна)	Функція умови
ifft(v) IFFT(v)	v – вектор частотних даних Фур'є-спектра	Вектор оберненого перетворення Фур'є (з різною нормалізацією)
IsString(x)	x – аргумент	Повертає 1, якщо x – рядок, і 0 в інших випадках
iwave (v)	v – вектор частотних даних вейвлет-спектра	Вектор оберненого вейвлет-перетворення
Im(z)	z – аргумент	Уявна частина комплексного числа
interp (s,x,y,t)	s – вектор других похідних; x, y – вектори даних; t – аргумент	Сплайн-інтерполяція
intercept (x,y)	x, y – вектори даних	Коефіцієнт b лінійної регресії $b+ax$
J0(x) J1(x) Jn(m,x)	x – аргумент	Функція Бесселя першого роду нульового, першого і m-го порядку
Jac(n,a,b,x)	x – аргумент; a, b – параметри; n – порядок	Поліном Якобі
Is(n,x)	n – порядок; x – аргумент	Сферична функція Бесселя першого роду
K0(x) K1(x) Kn(m,x)	x – аргумент	Модифікована функція Бесселя другого роду нульового, першого і m-го порядку
Kronecker delta(x,y)	x, y – аргументи	Дельта-символ Кронекера
ksmooth(x,y,b)	x, y – вектори даних; b – ширина вікна згладжування	Згладжування за допомогою функції Гауса
Lag(n,x)	x – аргумент; n – порядок	Поліном Лагерра

last(v)	v – вектор	Індекс останнього елемента
Leg(n,x)	x – аргумент; n – порядок	Поліном Лежандра
length(v)	v – вектор	Число елементів вектора
line(x,y)	x, y – вектори даних	Вектор із коефіцієнтів лінійної регресії $b+ax$
linfit(x,y,F)	x, y – вектори даних; F(x) – векторна функція користувача	Вектор коефіцієнтів регресії функцією користувача
linterp(x,y,t)	x, y – вектори даних t – аргумент	Кусково-лінійна інтерполяція
lgsfit(x,y,g)	x, y – вектори даних g – вектор початкових значень a, b, c	Регресія логістичною функцією $a/(1+b \cdot e^{-cx})$
ln(z)	z – аргумент	Натуральний логарифм
lnfit(x,y)	x, y – вектори даних	Регресія логарифмічною функцією $a \cdot \ln(x) + b$
loess(x,y,span)	x, y – вектори даних; span – параметр розміру поліномів	Вектор коефіцієнтів для регресії відрізками поліномів (використовуються разом з linterp)
log(z)	z – аргумент	Десятковий логарифм
log(z,b)	z – аргумент	Логарифм z за основою b
logfit(x,y,g)	x, y – вектори даних; g – вектор початкових значень a, b, c	Регресія логарифмічною функцією $a \cdot \ln(x+b)+c$
lsolve(A,b)	A – матриця СЛАР; b – вектор правих частин	Розв'язок системи лінійних рівнянь СЛАР
lspline(x,y)	x, y – вектори даних	Вектор коефіцієнтів лінійного сплайну
lu(A)	A – квадратна матриця	LU- розкладання
matrix(M,N,f)	M – кількість рядків; N – кількість стовпців; f(i, j) – функція	Створення матриці з елементами f(i, j)
Maximize(f,x1...)	f(x1,...) – функція; x1, ... – аргументи, за якими здійснюється максимізація	Вектор значень аргументів, при яких функція f досягає максимуму (можна задати додаткові умови у блоці з Given)
mhyper(a,b,x)	x – аргумент; a, b – параметри	Конфлюентна гіпергеометрична функція
Minerr(x1,x2,...)	x1, x2,... – змінні	Повертає вектор наближеного розв'язку системи рівнянь і нерівностей, визначених у блоці з Given

Minimize(f,x1,...)	f(x1,...) – функція; x1,... – аргументи, за якими здійснюється мінімізація	Вектор значень аргументів, при яких функція f досягає мінімуму (можна задати додаткові умови у блоці з Given)
medsmooth(y,b)	y – вектор даних; b – ширина вікна згладжування	Згладжування за допомогою методу "рухомих медіан"
Multigrid(F,ncycle)	F – матриця правої частини рівняння Пуассона; ncycle – розмір матриці розв'язку	Матриця розв'язку рівняння Пуассона у квадратній області з нульовими граничними умовами
n*(M,par)	M – розмірність вектора; X – значення випадкової величини; par – список параметрів розподілу *	Вектор випадкових чисел зі статистикою*
norm1(A) norm2(A) norme(A) normi(A)	A – квадратна матриця	Норми матриць (L1, L2, Евклідова, $\infty$ )
num2str(z)	z – число	Повертає рядок, в якому символи відповідають десятковому представленню числа z
Odesolve(t,t1,[step])	t – змінна інтегрування; t1 – кінцева точка інтервалу інтегрування; step – число кроків інтегрування ЗДР	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для одного ЗДР, визначеного у блоці з Given і початковими умовами у точці t0
p*(x,par)	x – значення випадкової величини; par – список параметрів розподілу *	Функція розподілу зі статистикою *
pdesolve(u,x,xrange,t, trange,[xpts],[tpts])	u – вектор імен функцій; x – просторова змінна; xrange – інтервал інтегрування за просторовою змінною; t – часова змінна; trange – інтервал інтегрування за часом; xpts – число просторових вузлів сітки; tpts – число часових кроків сітки	Повертає скалярну функцію двох аргументів (x, t), які є розв'язком диференціального рівняння (або системи рівнянь) у частинних похідних
pol2xy(r,θ)	r, θ – полярні координати	Перетворення полярних координат у прямокутні
polyroots (v)	v – вектор, складений з коефіцієнтів полінома	Повертає вектор усіх коренів полінома

predict (y,m,n)	y – початковий вектор; m – число елементів y, за якими будується екстраполяція; n – кількість передбачуваних елементів	Функція передбачення, яка екстраполює вектор
pspline(x,y)	x, y – вектори даних	Вектор коефіцієнтів квадратичного сплайну
pwfit(x,y,g)	x, y – вектори даних; g – вектор початкових значень a, b, c	Регресія степеневою функцією $a \cdot x^b + c$
q*(p,par)	p – значення ймовірності; par – список параметрів розподілу*	Квантиль (функція, обернена до функції розподілу) зі статистикою *
qr(A)	A – вектор або матриця	QR-розкладення
Radau(y0,t0,t1,M,D)	Див. rkfixed	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для жорсткої системи ЗДР методом RADAU5
rank(A)	A – матриця	Ранг матриці
Re(z)	z – аргумент	Дійсна частина комплексного числа
READ*(file)	file – шлях до файлу	Запис даних у файл типу *
regress(x,y,k)	x, y – вектори даних; k – степінь полінома	Вектор коефіцієнтів для поліноміальної регресії (застосовується разом з interp)
Relax(a,b,c,d,e,F,v,rjac)	a, b, c, d, e – матриці коефіцієнтів різницевої схеми; F – матриця правої частини рівняння; v – матриця граничних умов; rjac – параметр алгоритму (0...1)	Матриця розв'язку методом сіток диференціального рівняння у частинних похідних у квадратній області
reverse(v)	v – вектор	Перестановка елементів вектора в зворотному порядку
Rkadapt(y0,t0,t1 M,D)	Див. rkfixed	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для системи ЗДР методом Рунге-Кутти зі змінним кроком
rkadpt(y0,t0,t1,acc,D,k,s)	y0 – вектор початкових умов; (t0, t1) – інтервал інтегрування; acc – похибка обчислення;	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для системи ЗДР методом Рунге-Кутти зі змінним кроком і заданою точністю (для визначення тільки

	$D(t, y)$ – векторна функція, яка задає систему ЗДР; $k$ – максимальне число кроків інтегрування; $s$ – мінімальний крок інтегрування	останньої точки інтервалу)
<code>rkfixed(y0 t0,t1,M,D)</code>	$y_0$ – вектор початкових умов; $(t_0, t_1)$ – інтервал інтегрування; $M$ – число кроків інтегрування; $D(t, y)$ – векторна функція, яка задає систему ЗДР	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для системи ЗДР методом Рунге-Кутти з фіксованим кроком
<code>root(f(x,...),x[a,b])</code>	$f(x, \dots)$ – функція; $x$ – змінна; $(a, b)$ – інтервал пошуку кореня	Повертає корінь функції
<code>round(x,n)</code>	$x$ – аргумент; $n$ – число знаків округлення після десяткової точки	Округлення
<code>rows(A)</code>	$A$ – матриця або вектор	Число рядків
<code>rref(A)</code>	$A$ – матриця або вектор	Перетворення матриці до ступінчастого вигляду
<code>rsort(A,i)</code>	$A$ – матриця; $i$ – індекс рядка	Сортування матриці за елементами $i$ -го рядка
<code>sbval(z,x0,x1,D,load,score)</code>	$z$ – вектор початкових наближень для відсутніх початкових умов; $x_0$ – ліва границя; $x_1$ – права границя; $D(x, y)$ – векторна функція, яка задає систему ЗДР; $load(x_0, z)$ – векторна функція з початковими умовами; $score(x_1, y)$ – векторна функція, яка задає праві початкові умови	Повертає вектор відсутніх початкових умов для двоточної крайової задачі для системи ЗДР
<code>search(S,Subs.m)</code>	$S$ – рядок ; $Sub$ – підрядок; $m$ – стартова позиція пошуку	Стартова позиція підрядка у рядку

$\sec(z)$	$z$ – аргумент	Секанс
$\operatorname{sech}(z)$	$z$ – аргумент	Гіперболічний секанс
$\operatorname{sign}(x)$	$x$ – аргумент	Знак числа
$\operatorname{signum}(z)$	$z$ – аргумент	Комплексний знак числа ( $Z/ Z $ )
$\sin(z)$	$z$ – аргумент	Синус
$\sinh(z)$	$z$ – аргумент	Гіперболічний синус
$\operatorname{sinfitt}(x,y,g)$	$x, y$ – вектори даних; $g$ – вектор початкових значень $a, b, c$	Регресія синусоїдною функцією $f(x) = a \cdot \sin(x+b)+c$
$\operatorname{slope}(x,y)$	$x, y$ – вектори даних	Коефіцієнт $a$ лінійної регресії $b+ax$
$\operatorname{sort}(v)$	$v$ – вектор	Сортування елементів вектора
$\operatorname{sph2xyz}(r,\theta,\phi)$	$r, \theta, \phi$ – сферичні координати	Перетворення сферичних координат у прямокутні
$\operatorname{stack}(A,B,C,\dots)$	$A, B, C, \dots$ – вектори або матриці	Об'єднання матриць згори вниз
$\operatorname{Stiffb}(y_0,t_0,t_1,M,D,J)$	Див. $\operatorname{rkfixed}$ ; $J(t, y)$ – матрична функція Якобі для $D(t, y)$	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для жорсткої системи ЗДР методом Булірша-Штера
$\operatorname{stiffb}(y_0,t_0,t_1,\operatorname{acc},D,J,k,s)$	Див. $\operatorname{rkadapt}$ ; $J(t, y)$ – матрична функція Якобі для $D(t, y)$	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для жорсткої системи ЗДР методом Булірша-Штера (для визначення тільки останньої точки інтервалу)
$\operatorname{StiffR}(y_0,t_0,t_1,M,D,J)$	Див. $\operatorname{Stiffb}$	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для жорсткої системи ЗДР методом Розенброка
$\operatorname{stiffR}(y_0,t_0,t_1,\operatorname{acc},D,J,k,s)$	Див. $\operatorname{stiffb}$	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для жорсткої системи ЗДР методом Розенброка (для визначення тільки останньої точки інтервалу)
$\operatorname{str2num}(S)$	$S$ – рядок	Перетворення рядкового представлення у дійсне число
$\operatorname{str2vec}(S)$	$S$ – рядок	Перетворення рядкового представлення у вектор ASCII-кодів
$\operatorname{strlen}(S)$	$S$ – рядок	Кількість символів у рядку
$\operatorname{submatrix}(A,ir,jr,ic,jc)$	$A$ – матриця; $ir, jr$ – рядки; $ic, jc$ – стовпці	Повертає частину матриці, яка знаходиться між $ir$ -, $jr$ -ми рядками і $ic$ -, $jc$ -ми стовпцями

substr(S,m,n)	S – рядок	Підрядок, одержаний з рядка S виділенням n знаків, починаючи з позиції m у рядку
supsmooth(x,y)	x, y – вектори даних	Згладжування за допомогою адаптивного алгоритму
svd(A)	A – дійсна матриця	Сингулярне розв'язання
svds(A)	A – дійсна матриця	Вектор, який складається із сингулярних чисел
tan(z)	z – аргумент	Тангенс
tanh(z)	z – аргумент	Гіперболічний тангенс
Tcheb(n,x)	x – аргумент n – порядок	Поліном Чебишева першого роду
tr(A)	A – квадратна матриця	Слід матриці
trunc(x)	x – аргумент	Ціла частина числа
Ucheb(n,x)	x – аргумент n – порядок	Поліном Чебишева другого роду
vec2str(v)	v – вектор ASCII-кодів	Рядкове представлення елементів вектора V
wave(y)	y – вектор даних	Вектор прямого вейвлет-перетворення
WRITE*(file)	file – шлях до файлу	Запис даних у файл типу *
xy2pol(x,y)	x, y – прямокутні координати у площині	Перетворення прямокутних координат у полярні
xyz2cyl(x,y,z)	x, y, z – прямокутні координати	Перетворення прямокутних координат у циліндричні
xyz2sph(x,y,z)	x, y, z – прямокутні координати	Перетворення прямокутних координат у сферичні
Y0(x) Y1(x) Yn(m,x)	x – аргумент, x>0	Функція Бесселя другого роду нульового, першого і m-го порядку
ys(n,x)	n – порядок; x – аргумент	Сферична функція Бесселя другого роду



**ДОДАТОК Б****ДОВІДКОВІ ДАНІ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ НА МІЦНІСТЬ,  
ЖОРСТКІСТЬ, СТІЙКІСТЬ, ВИТРИВАЛІСТЬ****Б.1. Механічні характеристики матеріалів**

Таблиця Б.1. Орієнтовні значення основних допустимих напружень на розтяг і стиск

Матеріал	Допустиме напруження, МПа	
	розтяг	стиск
Чавун сірий у відливках	28...80	120...150
Сталь Ст 2	140	
« Ст 3	160	
« Ст 3 у мостах	140	
Сталь машинобудівна (конструкційна) вуглецева	60...250	
Сталь машинобудівна (конструкційна) « легована	100...400 і вище	
Мідь	30...120	
Латунь	70...140	
Бронза	60...120	
Алюміній	30...80	
Бронза алюмінієва	80...120	
Дуралюмін	80...150	
Текстоліт	30...40	
Гетинакс	50...70	
Фанера бакелізована	40...50	
Сосна вздовж волокон	7...10	10...12
« поперек волокон	–	1,5...2
Дуб уздовж волокон	9...13	13...15
« поперек волокон	–	2...3,5
Кам'яна кладка	до 0,3	0,5...4
Цегляна кладка	до 0,2	0,6...2,5
Бетон	0,1...0,7	1...9

Таблиця Б.2. Модулі пружності і коефіцієнти Пуассона для деяких матеріалів

Матеріал	Модуль пружності, МПа		Коефіцієнт Пуассона $\nu$
	$E$	$G$	
Чавун білий, сірий	$(1,15...1,60) \cdot 10^5$	$4,5 \cdot 10^4$	0,23...0,27
» ковкий	$1,55 \cdot 10^5$	–	–
Сталь вуглецева	$(2,0...2,1) \cdot 10^5$	$(8,0...8,1) \cdot 10^4$	0,24...0,28
» легована	$(2,1...2,2) \cdot 10^5$	$(8,0...8,1) \cdot 10^4$	0,25...0,30
Мідь прокатана	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,31...0,34
» холоднотягнута	$1,3 \cdot 10^3$	$4,9 \cdot 10^4$	–
» лита	$0,84 \cdot 10^5$	–	–
Бронза фосфориста катана	$1,15 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	0,32...0,35
Бронза марганцевиста катана	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,35
Бронза алюмінієва лита	$1,05 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	–
Латунь холоднотягнута	$(0,91...0,99) \cdot 10^5$	$(3,5...3,7) \cdot 10^4$	0,32...0,42
Латунь корабельна катана	$1,0 \cdot 10^5$	–	0,36
Алюміній катаний	$0,69 \cdot 10^5$	$(2,6...2,7) \cdot 10^4$	0,32...0,36
Дріт алюмінієвий тягнутий	$0,7 \cdot 10^5$	–	–
Дуралюмін катаний	$0,71 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^4$	–
Цинк катаний	$0,84 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^4$	0,27
Свинець	$0,17 \cdot 10^5$	$0,70 \cdot 10^4$	0,42
Лід	$0,1 \cdot 10^5$	$(0,28...0,3) \cdot 10^4$	–
Скло	$0,56 \cdot 10^5$	$2,2 \cdot 10^4$	0,25
Граніт	$0,49 \cdot 10^5$	–	–
Вапняк	$0,42 \cdot 10^5$	–	–
Мармур	$0,56 \cdot 10^5$	–	–
Пісковик	$0,18 \cdot 10^5$	–	–
Кам'яна кладка з граніту	$(0,09...0,1) \cdot 10^5$	–	–
» » з цегли	$(0,027...0,030) \cdot 10^5$	–	–
Бетон при границі міцності, МПа,			
» 10	$(0,146...0,196) \cdot 10^5$	–	0,16...0,18
» 20	$(0,182...0,232) \cdot 10^5$	–	0,16...0,18
Деревина вздовж волокон	$(0,1...0,12) \cdot 10^5$	$0,055 \cdot 10^4$	–
» впоперек волокон	$(0,005...0,01) \cdot 10^5$	–	–
Каучук	$0,00008 \cdot 10^5$	–	0,47
Текстоліт	$(0,06...0,1) \cdot 10^5$	–	–
Гетинакс	$(0,1...0,17) \cdot 10^5$	–	–
Бакеліт	$(2...3) \cdot 10^3$	–	0,36
Целулоїд	$(14,3...27,5) \cdot 10^2$	–	0,33...0,38

Таблиця Б.3. Механічні характеристики вуглецевих конструкційних сталей, МПа

Марка сталі	$\sigma_u$	$\sigma_T$	$\tau_T$	Відно- сне подо- вження $\delta, \%$ , при $l = 10d$	Удар- на в'яз- кість $KC,$ $\text{кДж/м}^2$	$\sigma_{-1 \text{ зг}}$	$\sigma_{-1 \text{ р}}$	$\tau_{-1 \text{ кр}}$
	не менше							
10	340	210	140	31	2400	160...220	120...150	80...120
20	420	250	160	25	—	170...220	120...160	100...130
25	460	280	—	23	900	190...250	—	—
30	500	300	170	21	800	200...270	170...210	110...140
35	540	320	190	20	700	220...300	170...220	130...180
40	580	340	—	19	600	230...320	180...240	140...190
45	610	360	220	16	500	250...340	190...250	150...200
50	640	380	—	14	400	270...350	200...260	160...210
55	660	390	—	13	—	—	—	—
60	690	410	—	12	—	310...380	220...280	180...220
20Г	460	280	—	24	—	—	—	—
30Г	550	320	—	20	800	220...320	—	—
50Г	660	400	—	13	400	290...360	—	—
20Х	800	650	—	11	600	380	—	170...230
40Х	1000	800	—	10	600	350...380	250	225
45Х	1050	850	—	9	500	400...500	—	—
30ХМ	950	750	—	11	800	310...410	370	230
35ХМ	1000	850	—	12	800	470...510	—	—
40ХН	1000	800	390	11	700	400	290	240
50ХН	1100	900	—	9	500	550	—	—
40ХФА	900	750	—	10	900	380...490	—	—
38ХМЮА	1000	850	—	14	900	420...550	—	—
12ХНЗА	950	700	400	11	900	390...470	270...320	220...260
15ХСНД	640	400	—	20	700	310	—	160
20ХНЗА	950	750	—	12	1000	430...450	300...320	245...255
30ХНЗА	1000	800	—	10	800	520...700	—	320...400
40ХНМА	1100	950	—	12	1000	500...700	—	270...380
30ХГСА	1100	850	—	10	500	510...540	500...535	220...245
1Х13	610	410	—	22	1100	370	—	—
1Х17Н2	960	770	—	17	—	370	—	—
1Х18Н9Т	580	240	—	70	2800	200...240	—	135

**Примітки:** 1. Границі витривалості добуто на полірованих зразках.

2. При використанні сталей слід урахувати приблизну відповідність марок: Ст3 відповідає сталі 20; Ст4 – сталі 25; Ст5 – сталі 35; Ст6 – сталі 45.

Таблиця Б.4. Механічні характеристики чавунів

Марка чавуну	Границя міцності, МПа, при				Твердість за Брінеллем НВ	Границя витривалості, МПа, при	
	розтягу $\sigma_u$	стиску $\sigma_c$	згині $\sigma_{зг}$	крученні $\tau_u$		згині $\sigma_{-1 зг}$	крученні $\tau_{-1 кр}$
СЧ 12	120	500	280	–	143...229	–	–
СЧ 15	150	650	320	240	163...229	70	50
СЧ 18	180	700	360	–	170...229	–	–
СЧ 21	210	750	400	280	171...241	100	80
СЧ 24	240	850	440	300	187...217	120	100
СЧ 28	280	1000	480	350	170...241	140	110
СЧ 32	320	1100	520	390	187...255	140	110
СЧ 35	350	1200	560	400	197...269	150	115
СЧ 38	380	1400	600	460	207...269	150	115
ВЧ 40-10	400	1600...1700	–	480... 510	156...197	150...170	198
ВЧ 50-1,5	500	1860...2000	–	740...790	187...255	230...270	170...210
ВЧ 60-2	600	2040...2290	–	660...810	197...269	170...230	150...160

**Примітка:** Границя текучості  $\sigma_T$  для ВЧ 40-10 становить 300, для ВЧ 50-1,5 – 380 та для ВЧ 60-2 – 420 МПа.

Таблиця Б.5. Механічні характеристики кольорових сплавів

Матеріал	Марка	$\sigma_u$ , МПа	$\sigma_T$ , МПа	$\delta$ , %	$E \times 10^{-5}$ , МПа	Твердість, НВ
Латунь	Л68 м'яка тверда	320	91	55	1,1	55
		660	520	3	1,15	150
Латунь алюмінієва	ЛА77-2 м'яка тверда	400	140	55	1,05	60
		650	–	12	1,05	170
Латунь марганцева	ЛМц58-2 м'яка тверда	400	156	40	1	85
		700	–	10	1	175
Бронза олов'яна	БрО-10 БрОФ10-1	250	–	11	1	80
		200...300	140	3	0,754	80...100
Бронза алюмінієва	Бр.А5, м'яка тверда	380	160	65	1	60
		800	500	4	1,1	200
Бронза алюмінієво-марганцева	Бр АМц9-2, м'яка тверда	400	300	25	1,05	110...130
		600	500	4...5	1,05	160...180
Бронза кремнієва	Бр.КМц3-1, м'яка тверда	350...400	100...200	25...45	1,04	70...90
		650...750	100...200	5...10	1,04	170...190
Дуралюмін	Д1	210	110	18	0,71	45
Дуралюмін підвищеної міцності	Д6, м'який твердий	220	110	15	0,71	50
		460	300	–	0,71	105
Алюмінієво-магнієвий сплав	АМг6	320	170	24	0,7	45...60

Таблиця Б.6. Допустимі напруження на зріз для заклепочних і зварних з'єднань

Тип з'єднання	Напруження на зріз, МПа
<b>Заклепочне:</b>	
основні елементи із сталі 20	100
заклепка в розсвердлених отворах (клас В)	140
заклепка в продавлених отворах (клас С)	100
<b>Зварне:</b>	
зварювання ручне, електроди з тонкою обмазкою	80
те саме, електроди з товстою обмазкою	110
зварювання автоматичне	110

Таблиця Б.7. Коефіцієнти лінійного розширення

Матеріал	$\alpha$ , м/град С
Алюміній	$255 \cdot 10^{-7}$
Магній	$255 \cdot 10^{-7}$
Мідь	$167 \cdot 10^{-7}$
Бронза і латунь	$(170...220) \cdot 10^{-7}$
Бетон	$(100...140) \cdot 10^{-7}$
Лід	$507 \cdot 10^{-7}$
Сталь	$(100...130) \cdot 10^{-7}$
Кам'яна кладка	$(40...70) \cdot 10^{-7}$
Дерево	$(20...50) \cdot 10^{-7}$
Целулоїд	$(16...20) \cdot 10^{-5}$

## Б.2. Довідкові дані для розрахунків на стійкість

Таблиця Б.8. Коефіцієнти зменшення основного допустимого напруження при розрахунку на стійкість для деяких матеріалів

Гнуч- кість $\lambda$	Коефіцієнт $\phi$				Гнуч- кість $\lambda$	Коефіцієнт $\phi$			
	Ст2 Ст3 Ст4	Ст3	Чавун	Дере- вина		Ст2 Ст3 Ст4	Ст3	Чавун	Дере- вина
0	1,00	1	1	1					
10	0,99	0,98	0,97	0,99	110	0,52	0,43	—	0,25
20	0,96	0,95	0,91	0,97	120	0,45	0,36	—	0,22
30	0,94	0,92	0,81	0,93	130	0,40	0,33	—	0,18
40	0,92	0,89	0,69	0,87	140	0,36	0,29	—	0,16
50	0,89	0,86	0,57	0,80	150	0,32	0,26	—	0,14
60	0,86	0,82	0,44	0,71	160	0,29	0,24	—	0,12
70	0,81	0,76	0,34	0,60	170	0,26	0,21	—	0,11
80	0,75	0,70	0,26	0,48	180	0,23	0,19	—	0,10
90	0,69	0,62	0,20	0,38	190	0,21	0,17	—	0,09
100	0,60	0,51	0,16	0,31	200	0,19	0,16	—	0,08

Таблиця Б.9. Коефіцієнти для обчислення критичних напружень за формулою Ясинського для деяких матеріалів

Матеріал	$\lambda_{гр}$	$a$	$b$
		МПа	
Ст 2, Ст 3	100	310	1,14
Ст 5	100	464	3,26
Сталь 40	90	321	1,16
Кремениста сталь	100	589	3,82
Деревина (сосна)	110	29,3	0,194
Чавун	80	776	12,0

### Б.3. Довідкові дані при розрахунках на витривалість

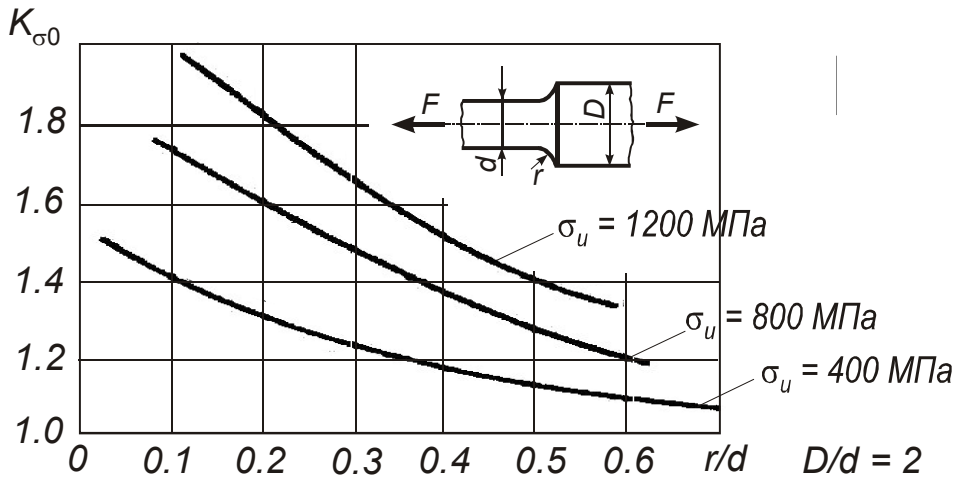


Рис. Б.1. Графіки ефективних коефіцієнтів концентрації напружень для ступінчастих валів при розтягу-стиску при  $D/d = 2$  і  $d = 30...50$  мм

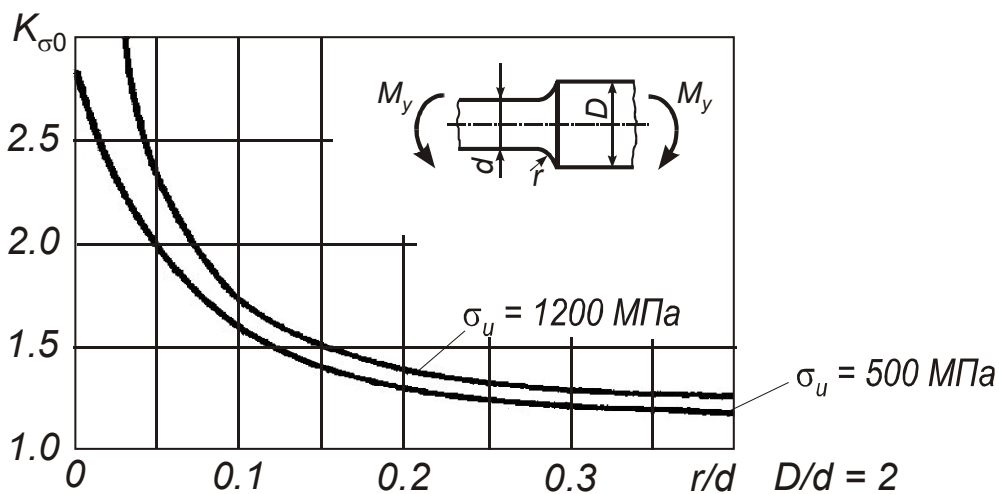


Рис. Б.2. Графіки ефективних коефіцієнтів концентрації напружень для ступінчастих валів при згині при  $D/d = 2$  і  $d = 30...50$  мм

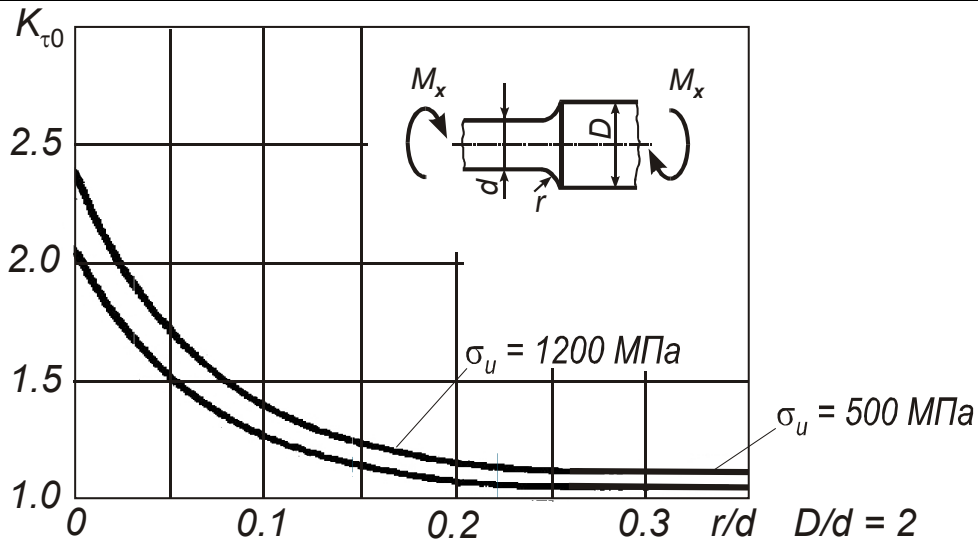


Рис. Б.3. Графіки ефективних коефіцієнтів концентрації напружень для ступінчастих валів при крученні при  $D/d = 2$  і  $d = 30 \dots 50$  мм

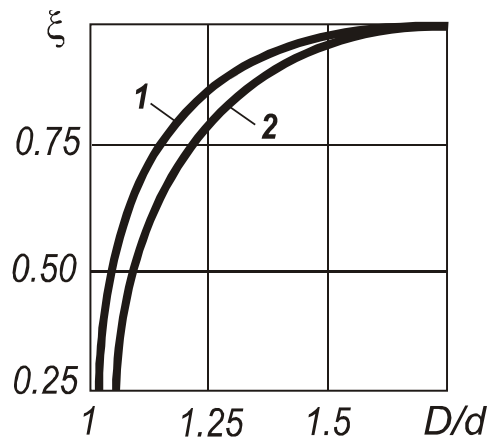


Рис. Б.4. Графіки поправочних коефіцієнтів при відношенні  $D/d < 2$  для рис. Б.1-Б.3

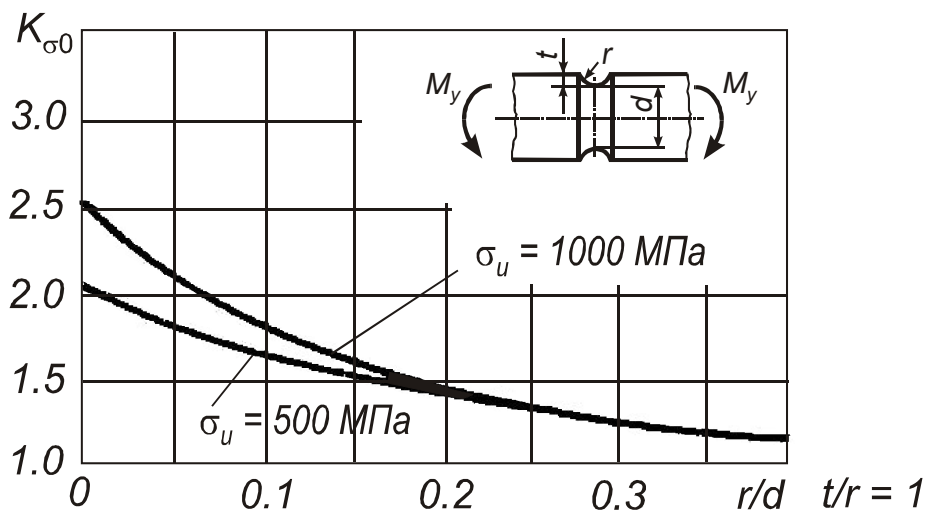


Рис. Б.5. Графіки ефективних коефіцієнтів концентрації напружень для валів з виточкою при згині при  $t/d = 1$  і  $d = 30 \dots 50$  мм

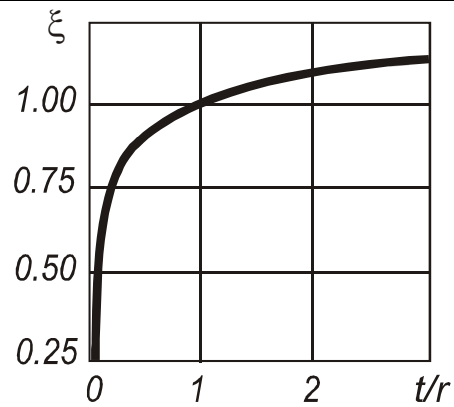


Рис. Б.6. Графік поправочних коефіцієнтів при відношенні  $t/r \neq 1$  для рис. Б.5

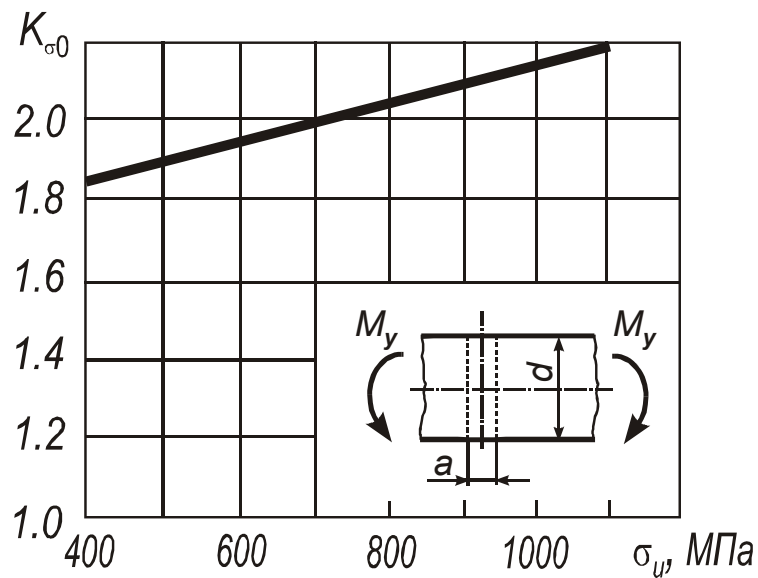


Рис. Б.7. Графіки ефективних коефіцієнтів концентрації напружень для валів з отвором при згині при  $a/d = 0.05 \dots 0.25$  і  $d = 30 \dots 50$  мм

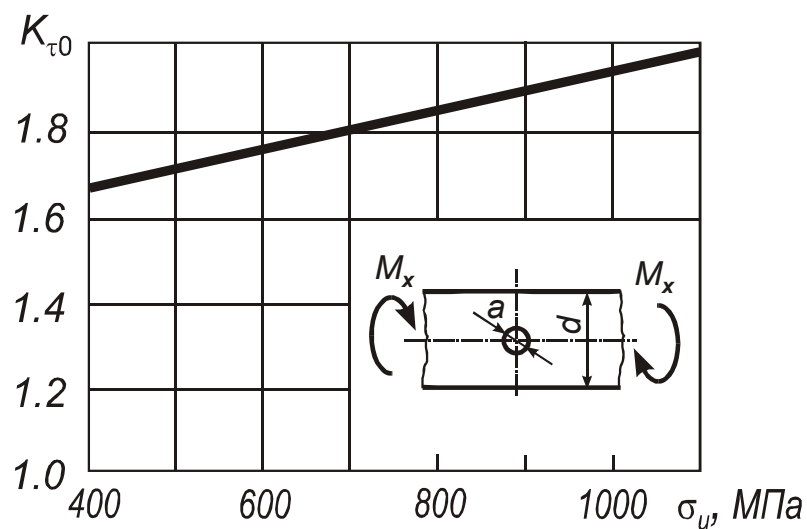


Рис. Б.8. Графіки ефективних коефіцієнтів концентрації напружень для валів з отвором при крученні при  $a/d = 0.05 \dots 0.25$  і  $d = 30 \dots 50$  мм



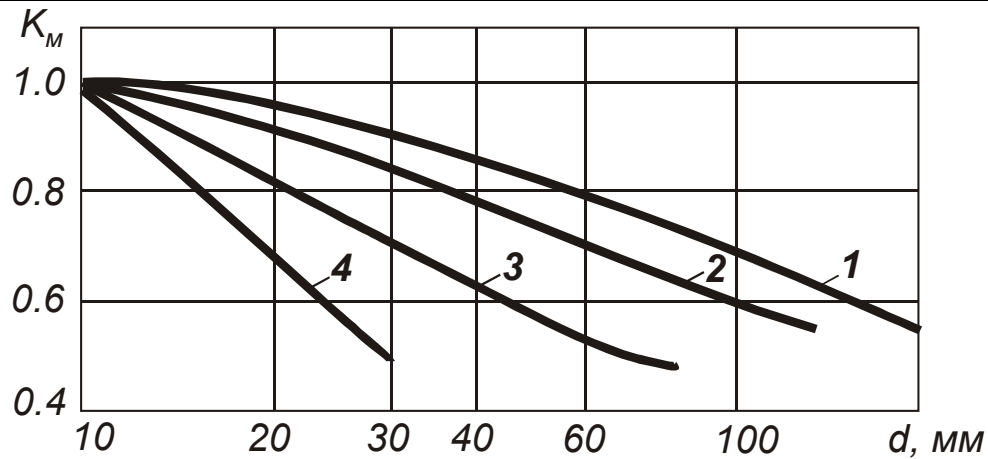


Рис. Б.9. Коефіцієнти впливу розмірів деталі:  
 крива 1 відповідає деталі з вуглецевої сталі без джерела концентрації напружень; крива 2 – деталі з легованої сталі ( $\sigma_u = 1000 \dots 1200$  МПа) при відсутності концентрації напружень та вуглецевої сталі за наявності помірної концентрації напружень; крива 3 – деталі з легованої сталі за наявності концентрації напружень; крива 4 – будь-якій сталі при сильній концентрації (типу надрізу)

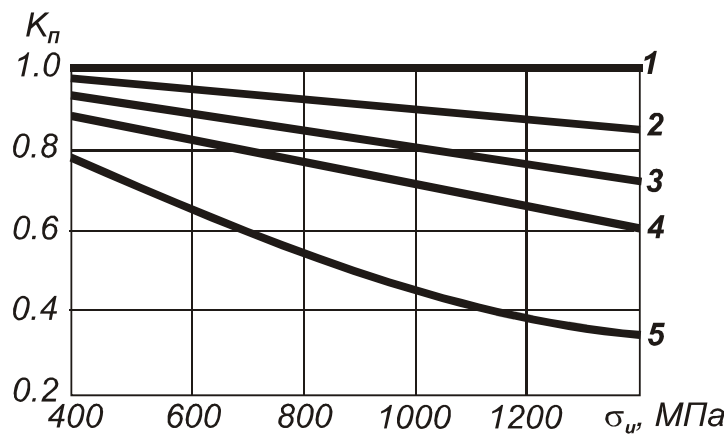
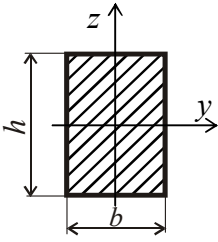
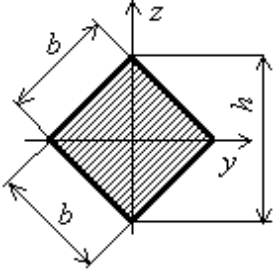
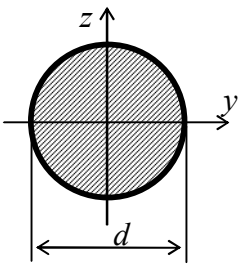
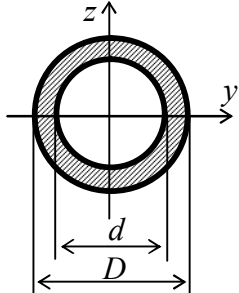
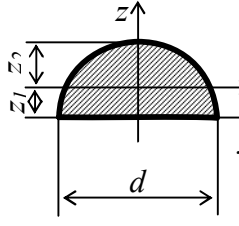
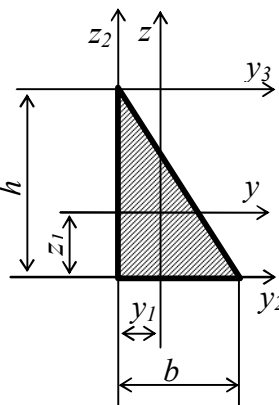


Рис. Б.10. Коефіцієнти впливу стану обробки поверхні:  
 Крива 1 відповідає полірованим зразкам; крива 2 – шліфованим; крива 3 – зразкам з тонкою обточкою; крива 4 – зразкам з грубою обточкою; крива 5 – при наявності окалини

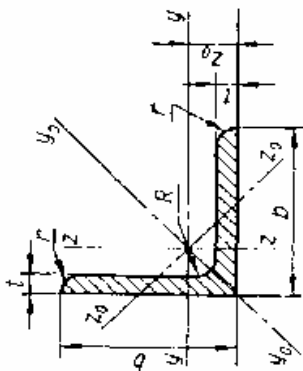
### Б.4. Геометричні характеристики плоских перерізів

Форма перерізу	Площа перерізу $A$	Моменти інерції: осьові $J_y, J_z$ , відцентровий $J_{yz}$ , полярний $J_\rho$	Моменти опору: осьові $W_y, W_z$ , полярний $W_\rho$																																																
 <p style="text-align: center;">Осі <math>y, z</math> – головні, центральні</p>	$A = bh$	$J_y = \frac{bh^3}{12}$ $J_z = \frac{hb^3}{12}$ $J_\rho = \beta hb^3$	$W_y = \frac{bh^2}{6}$ $W_z = \frac{hb^2}{6}$ $W_\rho = \alpha hb^2$																																																
<p>Найбільші дотичні напруження при крученні:</p> <p>посередині довгих сторін <math>\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_\rho}</math>;</p> <p>посередині коротких сторін <math>\tau' = \gamma \tau_{\max}</math>.</p> <p>Коефіцієнти <math>\alpha, \beta, \gamma</math> в залежності від співвідношення сторін</p> <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th><math>h/b</math></th> <th><math>\alpha</math></th> <th><math>\beta</math></th> <th><math>\gamma</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0,208</td><td>0,141</td><td>1</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>0,231</td><td>0,196</td><td>0,859</td></tr> <tr><td>1,75</td><td>0,239</td><td>0,214</td><td>–</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,246</td><td>0,229</td><td>0,795</td></tr> <tr><td>2,5</td><td>0,256</td><td>0,249</td><td>–</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,267</td><td>0,263</td><td>0,753</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,282</td><td>0,281</td><td>0,745</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,299</td><td>0,299</td><td>0,743</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,307</td><td>0,307</td><td>0,743</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,313</td><td>0,313</td><td>0,743</td></tr> <tr><td><math>\infty</math></td><td>0,333</td><td>0,333</td><td>0,743</td></tr> </tbody> </table>				$h/b$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	1	0,208	0,141	1	1,5	0,231	0,196	0,859	1,75	0,239	0,214	–	2	0,246	0,229	0,795	2,5	0,256	0,249	–	3	0,267	0,263	0,753	4	0,282	0,281	0,745	6	0,299	0,299	0,743	8	0,307	0,307	0,743	10	0,313	0,313	0,743	$\infty$	0,333	0,333	0,743
$h/b$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$																																																
1	0,208	0,141	1																																																
1,5	0,231	0,196	0,859																																																
1,75	0,239	0,214	–																																																
2	0,246	0,229	0,795																																																
2,5	0,256	0,249	–																																																
3	0,267	0,263	0,753																																																
4	0,282	0,281	0,745																																																
6	0,299	0,299	0,743																																																
8	0,307	0,307	0,743																																																
10	0,313	0,313	0,743																																																
$\infty$	0,333	0,333	0,743																																																
 <p style="text-align: center;">Осі <math>y, z</math> – головні, центральні</p>	$A = b^2$	$J_y = J_z = \frac{b^4}{12} = \frac{h^4}{48}$	$W_y = W_z = \frac{\sqrt{2}}{12} b^3 = \frac{h^3}{24}$																																																

 <p>Будь-яка центральна вісь є головною</p>	$A = \frac{\pi d^2}{4}$	$J_y = J_z = \frac{\pi d^4}{64}$ $J_p = 2J_y = \frac{\pi d^4}{32}$	$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32}$ $W_p = 2W_y = \frac{\pi d^3}{16}$
 <p>Будь-яка центральна вісь є головною</p>	$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2);$ $\alpha = \frac{d}{D}$	$J_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4);$ $J_z = J_y$	$W_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4);$ $W_z = W_y$
 <p>Осі y, z – головні, центральні</p>	$A = \frac{\pi d^2}{8};$ $z_1 = \frac{2d}{3\pi} \approx 0,212d;$ $z_2 \approx 0,288d$	$J_y = \frac{d^4}{16} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right);$ $J_z = J_{y1} = \frac{\pi d^4}{128}$	$W_z = \frac{\pi d^3}{64}$
 <p>Осі y, z – центральні</p>	$A = \frac{1}{2}bh;$ $z_1 = \frac{h}{3}, \quad y_1 = \frac{b}{3}$	$J_y = \frac{bh^3}{36};$ $J_{y2} = \frac{bh^3}{12};$ $J_{y3} = \frac{bh^3}{4};$ $J_z = \frac{hb^3}{36};$ $J_{z2} = \frac{hb^3}{12};$ $J_{yz} = -\frac{b^2h^2}{72};$ $J_p = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2)$	$W_{yH} = \frac{bh^2}{12} \text{ для нижніх волокон};$ $W_{yB} = \frac{bh^2}{24} \text{ для верхніх волокон};$ $W_{zL} = \frac{hb^2}{12} \text{ для лівих волокон};$ $W_{zP} = \frac{hb^2}{24} \text{ для правих волокон}$

## ДОДАТОК В СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЇ СТАПІ

## Кутники рівнобічні



Позначення:

$b$  – ширина полиці;  $t$  – товщина полиці;  $R$  – радіус внутрішнього заокруглення;  $r$  – радіус заокруглення полиці;  $J$  – момент інерції;  $i$  – радіус інерції;  $z_0$  – відстань від центра ваги до зовнішньої грані полиці;  $J_{yz}$  – відцентровий момент інерції;  $W$  – момент опору

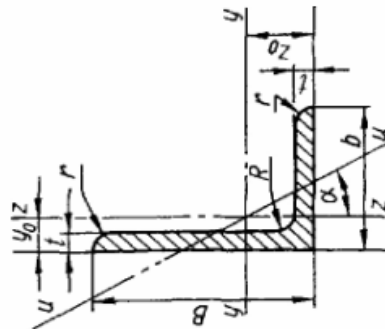
Номер про-філю	Розміри, мм			Площа попе-речного пере-різу, см <sup>2</sup>	Довідкові значення для осей								$J_{yz}$ см <sup>4</sup>	$z_0$ , см	Маса, кг
	$h$	$t$	$r$		$y - y_0$				$z_0 - z_0$						
					$J_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$J_{y0\ max}$ см <sup>4</sup>	$i_{y0\ max}$ см	$J_{z0\ min}$ см <sup>4</sup>	$W_{z0}$ см <sup>3</sup>	$i_{z0\ min}$ см			
2	20	3	1.2	0.40	0.28	0.59	0.63	0.75	0.17	0.20	0.39	0.23	0.60	0.89	
		4		0.50	0.37	0.58	0.78	0.73	0.22	0.24	0.38	0.28	0.64	1.15	
2.5	25	3	1.2	0.81	0.46	0.75	1.29	0.95	0.34	0.33	0.49	0.47	0.73	1.12	
		4		1.03	0.59	0.74	1.62	0.93	0.44	0.41	0.48	0.59	0.76	1.46	
		5		1.22	0.72	0.73	1.91	0.92	0.53	0.47	0.48	0.69	0.80	1.78	
2.8	28	3	1.3	1.16	0.58	0.85	1.84	1.07	0.48	0.42	0.55	0.68	0.80	1.27	
3	30	3	1.3	1.45	0.67	0.91	2.30	1.15	0.60	0.53	0.59	0.85	0.85	1.36	
		4		1.84	0.87	0.90	2.92	1.13	0.77	0.61	0.58	1.08	0.89	1.78	
		5		2.20	1.06	0.89	3.47	1.12	0.94	0.71	0.58	1.27	0.93	2.18	
3.2	32	3	1.5	1.77	0.77	0.97	2.80	1.23	0.74	0.59	0.63	1.03	0.89	1.46	
		4		2.26	1	0.96	3.58	1.21	0.94	0.71	0.62	1.32	0.94	1.91	

Номер про-філо	Розміри, мм				Площа попе-речного пере-різу, см <sup>2</sup>	Довідкові значення для осей												Маса, кг
						y - y			y <sub>0</sub> - y <sub>0</sub>			z <sub>0</sub> - z <sub>0</sub>			J <sub>yz</sub> см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> см		
	J <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см	J <sub>y<sub>0</sub></sub> см <sup>4</sup>		i <sub>y<sub>0</sub></sub> см	J <sub>z<sub>0</sub></sub> см <sup>4</sup>	W <sub>z<sub>0</sub></sub> см <sup>3</sup>	i <sub>z<sub>0</sub></sub> см									
	h	t	R	γ														
4	3	3	5	1,7	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85			
	4	4	5	1,7	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42			
	5	5	5	1,7	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98			
	6	6	5	1,7	6,41	2,30	1,20	10,13	1,50	2,70	1,58	0,78	3,72	1,21	3,52			
	4,5	3	5	1,7	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3	1,21	2,08			
	5	4	5	1,7	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73			
5	5	5	5	1,8	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37			
	6	6	5	1,8	9,35	2,95	1,36	14,80	1,71	3,90	2,96	0,88	5,45	1,34	3,99			
	4	3	5	1,8	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1	4,16	1,33	2,32			
	5	4	5	1,8	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05			
	6	5	5,5	1,8	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77			
	7	6	6	1,8	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47			
	8	7	7	1,8	14,84	4,23	1,50	23,47	1,89	6,21	2,93	0,97	8,63	1,50	5,15			
	5,6	8	8	1,8	16,51	4,76	1,49	26,03	1,87	6,98	3,22	0,97	9,52	1,53	5,82			
6	4	4	6	2	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44			
	5	5	6	2	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25			
	4	4	7	2,3	16,21	3,70	1,85	25,69	2,33	6,72	2,93	1,19	9,48	1,62	3,71			
	5	5	7	2,3	19,79	4,56	1,84	31,40	2,32	8,18	3,49	1,18	11,61	1,66	4,58			
	6	6	7	2,3	23,21	5,40	1,83	36,81	2,31	9,60	3,99	1,18	13,60	1,70	5,43			
	6,3	8	8	2,3	29,55	7	1,81	46,77	2,27	12,34	4,90	1,17	17,22	1,78	7,10			
7	4	4	10	2,7	35,32	8,52	1,79	55,64	2,24	15	5,70	1,16	20,32	1,85	8,70			
	5	5	10	2,7	49,6	11,08	1,95	79,90	2,45	17,81	7,81	1,25	28,32	1,99	12,10			
	6	6	10	2,7	63,13	13,10	1,94	103,20	2,44	21,52	9,52	1,25	38,70	2,02	16,10			
	7	7	10	2,7	77,28	15,12	1,93	127,50	2,43	25,27	11,18	1,24	50,00	2,05	20,10			
	8	8	10	2,7	91,43	17,14	1,93	151,80	2,43	29,02	13,10	1,24	63,20	2,08	24,10			
	7,5	10	10	2,7	105,58	19,16	2,16	176,10	2,72	32,77	15,06	1,39	77,50	2,11	28,10			
8	4,5	4,5	8	2,7	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17	1,88	4,87			
	5	5	8	2,7	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38			
	6	6	8	2,7	37,58	7,42	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39			
	7	7	8	2,7	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	7,39			
	8	8	8	2,7	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02	8,37			
	9	9	8	2,7	53,34	10,79	2,12	84,50	2,64	22,22	7,68	1,36	31,30	2,05	9,37			
	10	10	8	2,7	57,90	11,82	2,10	91,52	2,64	24,27	8,17	1,36	33,60	2,10	10,29			
	11	11	8	2,7	62,46	12,85	2,10	98,54	2,64	26,22	8,86	1,36	35,90	2,13	11,29			
	12	12	8	2,7	67,00	13,88	2,10	105,56	2,64	28,17	9,55	1,36	38,20	2,16	12,29			
	13	13	8	2,7	71,54	14,91	2,10	112,58	2,64	30,12	10,24	1,36	40,50	2,19	13,29			

7,5	75	5	9	3	7,39 8,78 10,15 11,50 12,83	39,53 46,57 53,34 59,84 66,10	7,21 8,57 9,89 11,18 12,43	2,31 2,30 2,29 2,28 2,27	62,65 73,87 84,61 94,89 104,72	2,91 2,90 2,89 2,87 2,86	16,41 19,28 22,07 24,80 27,48	5,74 6,62 7,43 8,16 8,91	1,49 1,48 1,47 1,47 1,46	23,10 27,30 31,20 35 38,60	2,02 2,06 2,10 2,15 2,18	5,80 6,89 7,96 9,02 10,07
8	80	5,5 6 7 8 10 12	9	3	8,63 9,38 10,85 12,30 15,14 17,90	52,68 56,97 65,31 73,36 88,58 102,74	9,03 9,80 11,32 12,80 15,67 18,42	2,47 2,47 2,45 2,44 2,42 2,40	83,56 90,40 103,66 116,39 140,31 162,27	3,11 3,11 3,09 3,08 3,04 3,01	21,80 23,54 26,97 30,32 36,85 43,21	7,10 7,60 8,55 9,44 11,09 12,62	1,59 1,58 1,58 1,57 1,56 1,55	30,90 33,40 38,30 43 56,70 59,50	2,17 2,19 2,23 2,27 2,35 2,42	6,78 7,36 8,51 9,65 11,88 14,05
9	90	6 7 8 9 10 12	10	3,3	10,61 12,28 13,92 15,60 17,17 20,33	82,10 94,30 106,11 118 128,60 149,67	12,49 14,45 16,36 18,29 20,07 23,85	2,78 2,77 2,76 2,75 2,74 2,71	130 149,67 168,42 186 203,93 235,88	3,50 3,49 3,48 3,46 3,45 3,41	33,97 38,94 43,80 48,60 53,27 62,40	9,88 11,15 12,34 13,48 14,54 16,53	1,79 1,78 1,77 1,77 1,76 1,75	48,10 55,40 62,30 68,00 75,30 86,20	2,43 2,47 2,51 2,55 2,59 2,67	8,33 9,64 10,93 12,20 13,48 15,96
10	100	6,5 7 8 10 12 14 15 16	12	4	12,82 13,75 15,60 19,24 22,80 26,28 27,99 29,68	122,10 130,59 147,19 178,95 208,90 237,15 250,68 263,82	16,69 17,90 20,30 24,97 29,47 33,83 35,95 38,04	3,09 3,08 3,07 3,05 3,03 3 2,99 2,98	193,46 207,01 233,46 283,83 330,95 374,98 395,87 416,04	3,89 3,88 3,87 3,84 3,81 3,78 3,76 3,74	50,73 54,16 60,92 74,08 86,84 99,32 105,48 111,61	13,38 14,13 15,66 18,51 21,10 23,49 24,62 25,79	1,99 1,98 1,98 1,96 1,95 1,94 1,94 1,94	71,40 76,40 86,30 110 122 138 145 152	2,68 2,71 2,75 2,83 2,91 2,99 3,03 3,06	10,06 10,79 12,25 15,10 17,90 20,63 21,97 23,30
11	110	7 8	12	4	15,15 17,20	175,61 198,17	21,83 24,77	3,40 3,39	278,54 314,51	4,29 4,28	72,68 81,83	17,36 19,29	2,19 2,18	106 116	2,96 3	11,89 13,50
12	120	8 10 12 15			18,80 23,24 27,60 33,99	259,75 317,16 371,80 448,90	29,68 36,59 43,30 52,96	3,72 3,69 3,67 3,63	412,45 503,79 590,28 711,32	4,68 4,66 4,62 4,57	107,04 130,54 153,33 186,48	23,29 27,72 31,79 37,35	2,39 2,37 2,36 2,34	153 187 218 262	3,25 3,33 3,41 3,53	14,76 18,24 21,67 26,68
12,5	125	8 9 10 12 14 16	14	4,6	19,69 22 24,33 28,89 33,37 37,77	294,36 327,48 359,82 422,23 481,76 538,56	32,20 36 39,74 47,06 54,17 61,09	3,87 3,86 3,85 3,82 3,80 3,78	466,76 520 571,04 670,02 763,90 852,84	4,87 4,86 4,84 4,82 4,78 4,75	121,96 135,88 148,59 174,43 199,62 224,22	25,67 28,26 30,45 34,94 39,10 43,10	2,49 2,48 2,47 2,46 2,45 2,44	172 192 211 248 282 315	3,36 3,40 3,45 3,52 3,61 3,68	15,46 17,30 19,10 22,68 26,20 29,65

Номер про- філю	Розміри, мм			Площа попе- речного перері- зу, см <sup>2</sup>	Довідкові значення для осей										$J_{yz}$ см <sup>4</sup>	$z_0$ см	Маса, кг
					y - y			y <sub>0</sub> - y <sub>0</sub>			z <sub>0</sub> - z <sub>0</sub>						
	h	t	R		r	$J_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$J_{y_0}$ см <sup>4</sup>	$i_{y_0}$ см	$J_{z_0}$ см <sup>4</sup>	$W_{z_0}$ см <sup>3</sup>	$i_{z_0}$ см				
														$J_{y_0}$ см <sup>4</sup>			
14	9	14	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274	3,78	19,41		
	10	14	4,6	27,33	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301	3,82	21,45		
	12	14	4,6	32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354	3,90	29,50		
15	10	14	4,6	29,33	634,76	58,07	4,65	1008,56	5,86	260,97	45,34	2,98	374	4,07	23,02		
	12	14	4,6	34,89	747,48	68,90	4,63	1187,86	5,83	307,09	52,32	2,97	440	4,15	27,39		
	15	14	4,6	43,08	908,38	84,66	4,59	1442,60	5,79	374,17	61,96	2,95	534	4,27	33,82		
	18	14	4,6	51,09	1060,08	99,86	4,56	1680,92	5,74	439,24	70,91	2,93	621	4,38	40,11		
16	10	16	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,38	52,52	3,19	455	4,30	24,67		
	11	16	5,3	34,42	844,21	72,44	4,95	1340,66	6,24	347,77	56,52	3,18	496	4,35	27,02		
	12	16	5,3	37,39	912,89	78,62	4,94	1450	6,23	375,78	60,53	3,17	537	4,39	29,35		
	14	16	5,3	43,57	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615	4,47	33,97		
	16	16	5,3	49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690	4,55	38,52		
	18	16	5,3	54,79	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	671	4,63	43,01		
18	20	16	5,3	60,40	1418,85	125,00	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830	4,70	47,44		
	11	16	5,3	38,80	216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716	4,85	30,47		
	12	16	5,3	42,19	316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776	4,89	33,12		
	15	16	5,3	52,18	607,36	123,74	5,55	2554,99	7	659,73	93,11	3,56	948	5,01	40,96		
	18	16	5,3	61,99	884,07	146,36	5,51	2992,69	6,95	775,44	106,88	3,54	1108	5,13	48,66		
	20	16	5,3	68,43	2061,11	161,07	5,49	3271,31	6,91	850,92	115,71	3,53	1210	5,20	53,72		
20	12	18	6	47,10	822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073	5,37	36,97		
	13	18	6	50,85	960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156	5,42	39,92		
	14	18	6	54,60	2097	144,17	6,20	3333	7,81	861	111,50	3,97	1236	5,46	42,80		
	16	18	6	61,98	2362,57	163,37	6,17	3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393	5,54	48,65		
	18	18	6	69,30	2620,64	182,22	6,15	4164,54	7,75	1076,74	135,48	3,94	1544	5,62	54,40		
	20	18	6	76,54	2871,47	200,73	6,12	4560,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689	5,70	60,08		
22	24	21	7	90,78	3350,66	236,77	6,08	5313,59	7,65	1387,73	167,74	3,91	1963	5,85	71,26		
	25	21	7	94,29	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028	5,89	74,02		
	30	21	7	111,54	4019,60	288,57	6	6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332	6,07	87,56		
	14	21	7	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655	5,91	47,40		
16	21	7	68,50	3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1862	6,02	53,83			

25	16	8	78,40	4717,10	258,43	7,76	7492,10	9,78	1942,09	203,45	4,98	2775	6,75	61,55
	18		87,72	5247,24	288,82	7,73	8336,69	9,75	2157,78	233,39	4,96	3089	6,83	68,86
	20		96,96	5764,87	318,76	7,71	9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	3395	6,91	76,11
	22		106,12	6270,32	348,26	7,69	9961,60	9,69	2579,04	260,52	4,93	3691	7	83,21
	25		119,71	7006,39	391,72	7,65	1125,52	9,64	2887,26	287,14	4,91	4119	7,11	93,97
	28		133,12	7716,86	434,86	7,61	2243,84	9,59	3189,89	311,98	4,90	4527	7,23	104,50
	30		141,96	8176,51	462,11	7,59	2964,66	9,56	3388,98	327,82	4,89	4788	7,31	111,44



### Кутники нерівнобічні

Позначення.

$B$  – ширина більшої полиці;  $b$  – ширина меншої полиці;  $t$  – товщина полиці;  $R$  – радіус внутрішнього заокруглення;  $r$  – радіус заокруглення полиці;  $J$  – момент інерції;  $i$  – радіус інерції;  $y_0, z_0$  – відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиці;  $J_{yz}$  – відцентровий момент інерції;  $W$  – момент опору

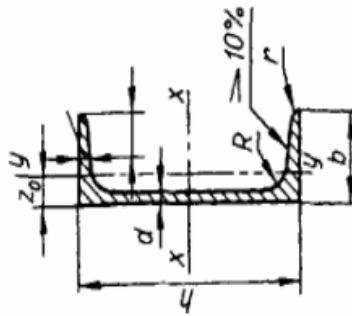
Номер про-фільо	Розміри, мм				Площа поперечного перерізу, см <sup>2</sup>	Довідкові значення для осей										Кут нахилу осі $\alpha$ tg $\alpha$	Маса 1 м, кг			
						$y - y$					$z - z$							$u - u$		
						$J_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$J_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см	$J_{yz}$ см <sup>4</sup>	$J_u$ миль <sup>4</sup> см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$i_u$ миль <sup>2</sup> см			$y_0$ см	$z_0$ см	$J_{yz}$ см <sup>4</sup>
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392	0,91
3/2	30	20	3	3,5	1,2	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,51	1,00	0,43	0,427	1,12
	32	20	4	3,5	1,2	1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	1,04	0,54	0,421	1,46
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382	1,17
	32	20	4	3,5	1,2	1,94	1,93	0,93	1	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374	1,52



Номер про- філю	Розміри, мм					Площа попе- речно- го пе- рерізу, см <sup>2</sup>	Довідкові значення для осей												Кут нахи- лу осі tg α	Маса 1 м, кг
							y - y				z - z				u - u					
	B	b	t	R	r		J <sub>y</sub> <sup>4</sup> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> <sup>3</sup> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> <sup>3</sup> см	J <sub>z</sub> <sup>4</sup> см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> <sup>3</sup> см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> <sup>3</sup> см	J <sub>u</sub> <sup>4</sup> см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> <sup>3</sup> см <sup>3</sup>	i <sub>u</sub> <sup>3</sup> см	J <sub>yo</sub> см	Z <sub>o</sub> см			
																		4/2,5		
4/2,5	40	25	3	4	1,3	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	1,48	
	40	25	4	4	1,3	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,381	1,94	
	40	30	5	4	1,3	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374	2,38	
4/3	40	30	4	4	1,3	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,09	0,75	0,64	0,78	1,28	1,68	0,544	2,09	
	40	30	5	4	1,3	5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	1,33	0,91	0,64	0,82	1,32	2	0,539	2,57	
4,5/2,8	45	28	3	5	1,7	4,41	1,45	1,43	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	1,68	
	45	28	4	5	1,7	5,68	1,90	1,42	1,60	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379	2,20	
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	1,90	
	50	32	4	5,5	1,8	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	2,49	
5,6/3,6	56	36	4	6	2	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81	
	56	36	5	6	2	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404	3,46	
6,3/4	63	40	4	7	2,3	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	3,17	
	63	40	5	7	2,3	19,91	4,72	2	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91	
	63	40	6	7	2,3	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63	
	63	40	8	7	2,3	29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,387	6,03	
6,5/5	65	50	5	6	2	23,41	5,20	2,05	12,08	3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	1,26	2	9,77	0,576	4,36	
	65	50	6	6	2	27,46	6,16	2,04	14,12	3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	1,30	2,04	11,46	0,575	5,18	
	65	50	7	6	2	31,32	7,08	2,03	16,05	4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	1,34	2,08	12,94	0,571	5,98	
	65	50	8	6	2	35	7,99	2,02	18,88	4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	1,37	2,12	13,61	0,570	6,77	
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406	4,39	
7,5/5	75	50	5	8	2,7	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12	0,436	4,79	
	75	50	6	8	2,7	40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435	5,69	
	75	50	7	8	2,7	46,77	9,31	2,36	16,61	4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435	6,57	
	75	50	8	8	2,7	52,38	10,52	2,35	18,52	4,88	1,40	10,87	4,14	1,07	1,29	2,62	17,80	0,430	7,43	
8/5	80	50	5	8	2,7	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	7,57	2,75	1,09	1,13	2,60	13,20	0,387	4,99	
	80	50	6	8	2,7	48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386	5,92	

8/6	80	60	6	8	2,7	8,15 9,42 10,67	52,06 59,61 66,88	9,42 10,87 12,38	2,53 2,52 2,50	25,18 28,74 32,15	5,58 6,43 7,26	1,76 1,75 1,74	13,61 15,58 17,49	4,66 5,34 5,99	1,29 1,29 1,28	1,49 1,53 1,57	2,47 2,52 2,56	20,98 24,01 26,83	0,547 0,546 0,544	6,39 7,39 8,37
9/5,6	90	56	5,5 6 8	9 3		7,86 8,54 11,18	65,28 70,58 90,87	10,74 11,66 15,24	2,88 2,88 2,85	19,67 21,22 27,08	4,53 4,91 6,39	1,58 1,58 1,39	11,77 12,70 16,56	3,81 4,12 16,29	1,22 1,22 5,32	1,26 1,28 1,21	2,92 2,95 1,36	20,54 22,23 3,04	0,384 0,384 0,380	6,17 6,70 8,77
10/6,3	100	63	6 7 8 10	10 3,3		9,58 11,09 12,57 15,47	98,29 112,86 126,96 153,83	14,52 16,78 19,01 23,32	3,20 3,19 3,18 3,15	30,58 34,99 39,21 47,18	6,27 7,23 8,17 9,99	1,79 1,78 1,77 1,75	18,20 20,83 23,38 28,34	5,27 6,06 6,82 8,31	1,38 1,37 1,36 1,35	1,42 1,46 1,50 1,58	3,23 3,28 3,32 3,40	31,50 36,10 40,50 48,60	0,393 0,392 0,391 0,387	7,53 8,70 9,87 12,14
10/6,5	100	65	7 8 10	3,3		11,23 12,73 15,67	114,05 138,31 155,52	16,87 19,11 23,45	3,19 3,18 3,15	38,32 42,96 51,68	7,70 8,70 10,64	1,85 1,84 1,82	22,77 25,24 30,60	6,43 7,26 8,83	1,41 1,41 1,40	1,52 1,56 1,64	3,24 3,28 3,37	38 42,54 51,18	0,415 0,414 0,410	8,81 9,99 12,30
11/7	110	70	6,5 8	3,3		11,45 13,93	142,42 171,54	19,11 23,22	3,53 3,51	45,61 54,64	8,42 10,20	2 1,98	26,94 32,31	7,05 8,50	1,53 1,52	1,58 1,64	3,55 3,61	46,80 55,90	0,402 0,400	8,98 10,93
12,5/8	125	80	7 8 10 12	3,7		14,06 15,98 19,70 23,36	226,53 255,62 311,61 364,79	26,67 30,27 37,27 44,03	4,01 4 3,98 3,95	73,73 80,95 100,47 116,84	11,89 13,47 16,52 19,46	2,29 2,28 2,26 2,24	43,40 48,82 59,33 69,47	9,96 11,25 13,74 16,11	1,76 1,75 1,74 1,72	1,80 1,84 1,92 2,00	4,01 4,04 4,14 4,22	74,70 84,10 102 118	0,407 0,406 0,404 0,400	11,04 12,54 15,47 18,34
14/9	140	90	8 10	4		18 22,24	363,68 444,45	38,25 47,19	4,49 4,47	119,79 145,54	17,19 21,14	2,58 2,56	70,27 85,51	14,39 17,58	1,98 1,96	2,03 2,12	4,49 4,58	121 147	0,411 0,409	14,13 17,46
16/10	160	100	9 10 12 14	4,3		22,87 25,28 30,04 34,72	605,97 666,59 784,22 897,19	56,04 61,91 73,42 84,65	5,15 5,13 5,11 5,08	186,03 204,09 238,75 271,60	23,96 26,42 31,23 35,89	2,85 2,84 2,82 2,80	110,40 121,16 142,14 162,49	20,01 22 25,93 29,75	2,20 2,19 2,18 2,16	2,24 2,28 2,36 2,43	5,19 5,23 5,32 5,40	194 213 249 282	0,391 0,390 0,388 0,385	17,96 19,85 23,58 27,26
18/11	180	110	10 12	4,7		28,33 33,69	952,28 1122,56	78,59 93,33	5,80 5,77	276,37 324,09	32,27 38,20	3,12 3,10	165,44 194,28	26,96 31,83	2,42 2,40	2,44 2,52	5,88 5,97	295 348	0,376 0,374	22,24 26,45
20/12,5	200	125	11 12 14 16	4,7		34,87 37,89 43,87 49,77	1449,02 1568,19 1800,83 2026,08	107,31 116,51 134,64 152,41	6,45 6,43 6,41 6,38	446,36 481,93 550,77 616,66	45,98 49,85 57,43 64,83	3,58 3,57 3,54 3,52	263,84 285,04 326,54 366,99	38,27 41,45 47,57 53,56	2,75 2,74 2,73 2,72	2,79 2,83 2,91 2,99	6,50 6,54 6,62 6,71	465 503 575 643	0,392 0,392 0,390 0,388	27,37 29,74 34,43 39,07

**Швелери з нахилом внутрішніх граней полиць**

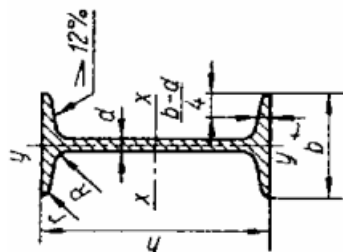


Позначення:

$h$  – висота швелера,  $b$  – ширина полиці;  $d$  – товщина стінки;  $t$  – середня товщина полиці;  $J$  – момент інерції;  
 $i$  – радіус інерції;  $z_0$  – відстань від осі  $y$  до зовнішньої грані стінки,  $W$  – момент опору;  $S$  – статичний момент половини перерізу

Номер профілю	Розміри, мм			Площа перерізу $A$ , $\text{см}^2$	$J_x$ $\text{см}^4$	$W_x$ $\text{см}^3$	$i_x$ $\text{см}$	$S_x$ $\text{см}^3$	$J_y$ $\text{см}^4$	$W_y$ $\text{см}^3$	$i_y$ $\text{см}$	$z_0$ $\text{см}$	Маса 1 м, кг
	$h$	$b$	$d$										
5	50	32	4,4	7,0	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5,0	9,0	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22a	220	87	5,4	10,2	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24a	240	95	5,6	10,7	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

### Балки двотаврові



Позначення:

$h$  – висота балки;  $b$  – ширина полиці;  $d$  – товщина стінки;  $t$  – середня товщина полиці;  $J$  – момент інерції;  
 $i$  – радіус інерції;  $W$  – осьовий момент опору;  $S$  – статичний момент половини перерізу

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу $A$ , $\text{cm}^2$	$J_x$ $\text{cm}^4$	$W_x$ $\text{cm}^3$	$i_x$ $\text{cm}$	$S_x$ $\text{cm}^3$	$J_y$ $\text{cm}^4$	$W_y$ $\text{cm}^3$	$i_y$ $\text{cm}$	Маса $I$ $\text{M}$ , $\text{kg}$
	$h$	$b$	$d$	$t$									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108

**Савченко О.В.**

**С 79** Практикум з опору матеріалів: Навчальний посібник. – Ніжин: ООО “Видавництво “Аспект-поліграф”, 2007. – 318 с.

**ISBN 978-966-7496-19-7**

У посібнику викладено короткі теоретичні відомості з основних розділів опору матеріалів і наведено приклади розв'язання задач у системі MathCAD.

Для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

**УДК 539.3/.6(075.8)**

**ББК 30.121**

*Навчальне видання*

**САВЧЕНКО Олена Віталіївна**

# **ПРАКТИКУМ З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ**

*Навчальний посібник*

В авторській редакції  
Обкладинка художника Савченка О.І.  
Коректор – Дубенець М.Л.  
Комп'ютерний набір – Савченко І.О.