Міністерство освіти і науки України
Чернігівський національний технологічний університет
Навчально-науковий інститут будівництва
Кафедра геодезії, картографії та землеустрою

СУПУТНИКОВА ГЕОДЕЗІЯ

Методичні вказівки

до виконання лабораторних робіт
для бакалаврів спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»

Затверджено до друку засіданням кафедри

геодезії, картографії та землеустрою ННІБ

від 19 листопада 2019р. протокол №4

Чернігів 2019

Супутникова геодезія: Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для бакалаврів спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» Укладач:. Крячок С.Д., Мамонтова Л.С.,– Чернігів: ННІБ ЧНТУ, 2019 - 34 с.

Укладачі: Крячок С. Д. к.т.н., доцент кафедри геодезії, картографії та землеустрою,
Мамонтова Л.С., ст. викладач кафедри геодезії, картографії та землеустрою

Рецензент: Терещук О. І., к.т.н., професор кафедри геодезії, картографії та землеустрою

Відповідальний за випуск: Корнієнко І. В., к.т.н., завідувач кафедри геодезії, картографії та землеустрою

Зміст

Вступ

Методичні вказівки складено відповідно до програми навчальної дисципліни «Супутникова геодезія» і призначено для студентів спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій».

Лабораторні роботи з дисципліни мають за мету закріплення теоретичних знань та їх практичне застосування на прикладах розрахунків типових задач супутникової геодезії.

В ході виконання лабораторних робіт, крім методичних вказівок, студент використовує раніше набуті знання з геодезії та топографічного креслення і спеціальну літературу.

В методичних вказівках подано основні теоретичні відомості по темах лабораторних робіт, розглянуто порядок виконання робіт.

1. Планети Сонячної системи

Спочатку Сонячна система була хмарою з газу й частинок пилу, які рухались, і під впливом своєї маси утворили диск, у якому виникла нова зірка - Сонце, а навколо Сонця - і вся наша Сонячна система.

Сонячна система складається з восьми основних планет: Меркурій, Венера, Земля, Марс, Юпітер, Сатурн, Уран, Нептун (рис. 1) та кількох недавно відкритих карликових планет: Церера, Плутон, Хаумеа, Макемаке, Еріда [1].

У центрі Сонячної системи розташоване Сонце, навколо якого по орбітах обертаються планети. Оскільки Сонце зміщене від центру планетарних орбіт, то за цикл обертання навколо Сонця планети то наближаються, то віддаляються від нього. Планети рухаються навколо Сонця по еліптичним орбітам.

В таблиці 1 наведено порівняльні характеристики планет.

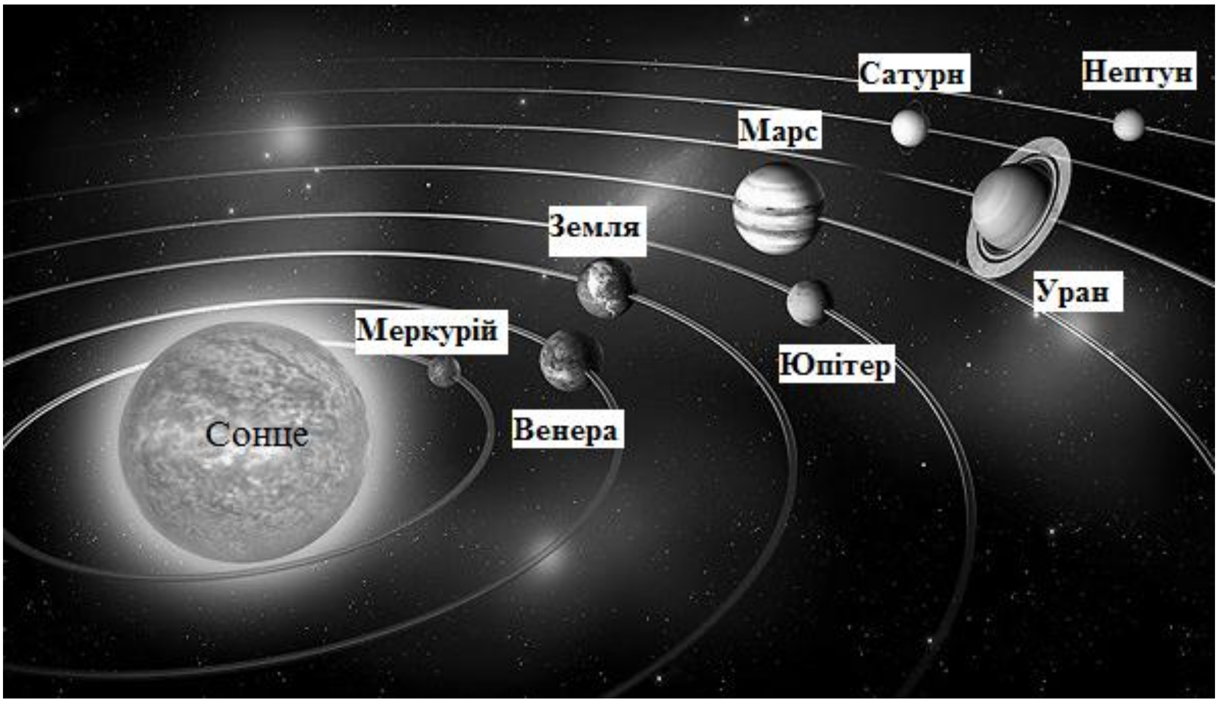

Рис. 1. Планети Сонячної системи

Таблиця 1

Порівняльні характеристики планет [2,3]

Показник	Меркурій	Венера	Земля	Марс	Юпітер	Сатурн	Уран	Нептун
Маса, кг	$3{,}30\cdot10^{23}$	$4{,}87\cdot10^{24}$	$5{,}97\cdot10^{24}$	$6{,}42\cdot10^{23}$	$1{,}90\cdot10^{27}$	$5{,}68\cdot10^{26}$	$8{,}68\cdot10^{25}$	$1{,}024\cdot10^{26}$
$M_П / M_З$	0,055	0,815	1	0,108	318	95,1	14,5	17,2
$R_П$, км	2439,7	6051,8	6371,3	3389,5	69911	58232	25362	24622
$R_П / R_З$	0,383	0,950	1	0,532	11,0	9,14	3,98	3,86
$S_{\odot}$, млн.. км	58	108	150	228	778	1430	2870	4500
$S_П / S_З$	0.39	0,72	1	1,52	5,19	9,53	19,1	30

В табл. 1: $M_П$ / $M_З$ – відношення маси планети до маси Землі; $R_П$ / $R_З$ відношення розмірів планети до розмірів Землі; $S_{\odot}$ - відстань центра планети відносно центра Сонця; $S_П$ / $S_З$ – відношення відстані планети до Сонця до відстані Землі до Сонця

2. Елементи теорії еліпса

Основними точками та лініями еліпса є (рис. 3): центр еліпса – точка *O*; фокуси F_1 та F_2; малі півосі $BO = OD = b$; великі півосі $CO = OE = a$; фокальна відстань $F_1 F_2 = 2c$ [4].

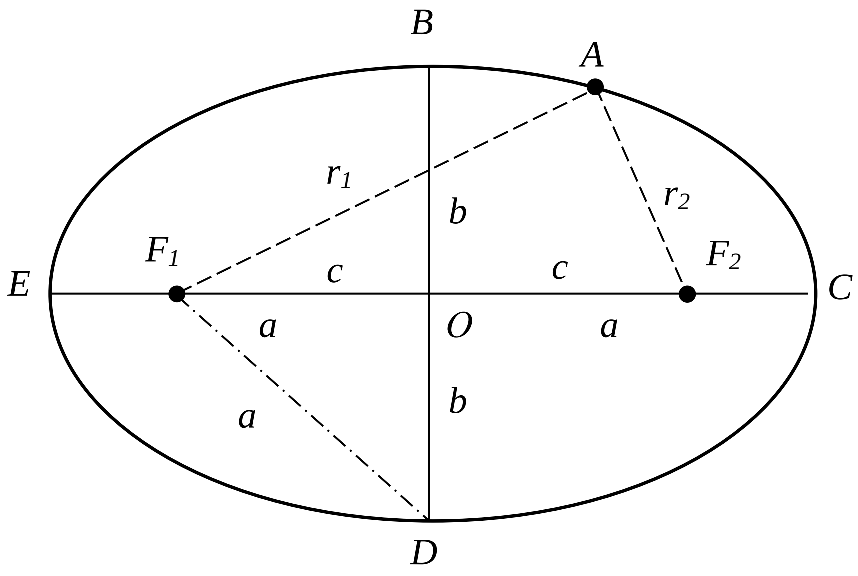

Рис. 2. Елементи еліпса

Щоб отримати положення фокусу F_1, необхідно (див. рис 2) з точки D розтином циркуля розміром a перетнути велику вісь EC. Аналогічно отримують положення фокусу F_2 з точок B або D. З прямокутного трикутника ODF_1 можна отримати співвідношення між півосями та фокальною пів відстанню еліпса c

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}\,. \tag{1}$$

Еліпсом називають множину точок площини, сума відстаней яких від двох фокусів є величиною сталою для даного еліпса і дорівнює великій осі еліпса [4]. Тобто (див. рис. 2)

$$r_1 + r_2 = 2a\,. \tag{2}$$

Ступінь відхилення еліпса від кола характеризується *ексцентриситетом*, який виражається через його півосі

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\,. \tag{3}$$

Для кола $a = b = R$ - радіус кола і згідно з (3) $e = 0$. На рис. 3 продемонстровано влив ексцентриситету на форму еліпса [5]. Тут $OA = R$.

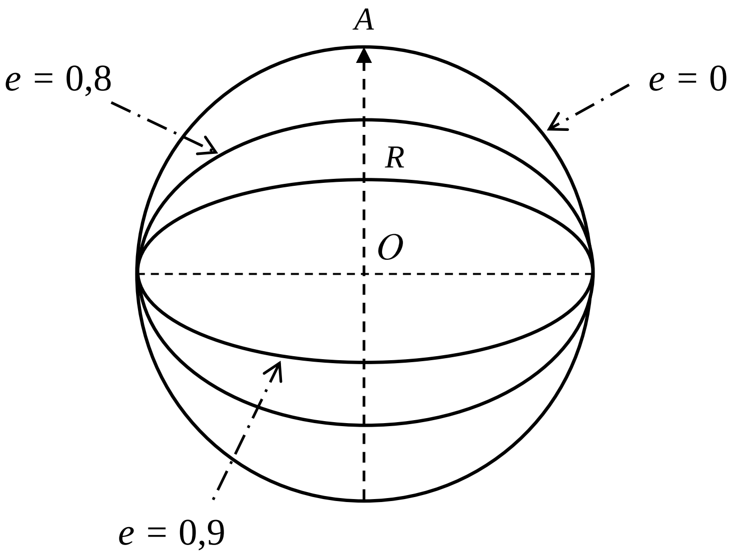

Рис. 3. Вплив ексцентриситету на форму еліпса.

3. Закони Кеплера

Німецький астроном Йоганн Кеплер (1571 - 1630) використав результати власних спостережень та багаторічних спостережень Тихо Браге (1546 - 1601) за планетою Марс і відкрив три закони, які описують незбурений рух планет навколо Сонця. Ці закони є універсальними та використовуються також для опису руху штучних супутників навколо Землі [6].

Перший закон Кеплера для ШСЗ: супутники рухаються, в загальному випадку, по еліптичній орбіті, в одному з фокусів якої знаходиться Земля [7].

На рис. 4 зображено еліптичну орбіту штучного супутника Землі (ШСЗ) з центром в точці *O*. Центр мас Землі знаходиться в одному з фокусів еліптичної орбіти, в даному випадку - в точці F_1. Найближча до Землі точка орбіти *П* називається *перигей*, а найдальша *A* - *апогей.* Лінія, що сполучає ці точки – лінія апсид (лінія *AП*).

Закони Кеплера *для ШСЗ* справедливі у випадку, коли існує тільки взаємне притягання маси ШСЗ і маси Землі, на ці тіла не діють ніякі інші сторонні сили, наприклад. планети Сонячної системи та їх супутники, а маси ШСЗ та Землі сконцентровані в матеріальних точках, відповідно до рис. 4 – в точках *C* та F_1, або ж допускають, що планета Земля має вигляд кулі з однорідним за густиною розподілом мас [6]. Рух супутника у цьому випадку називають *незбуреним*.

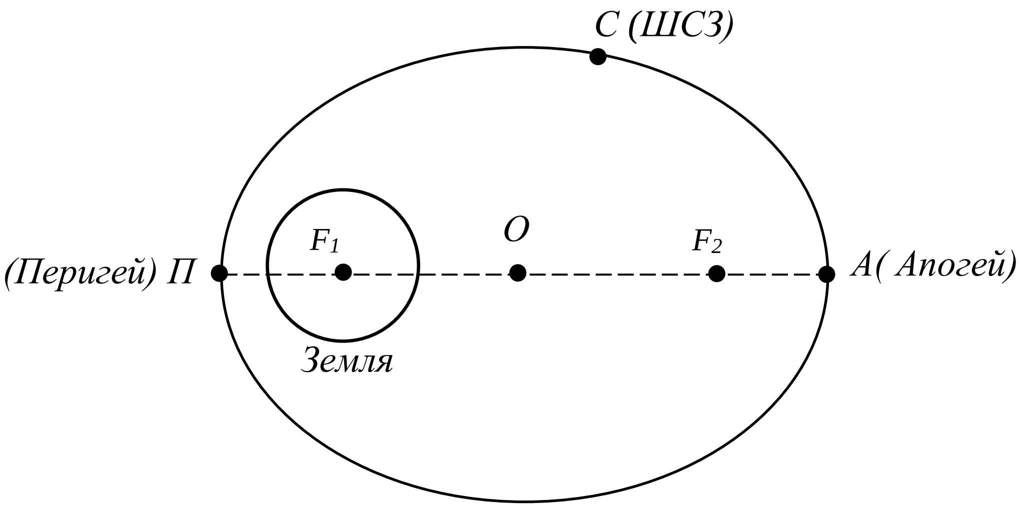

Рис. 4. Рух супутника по еліптичній орбіті.

Сила взаємного притягання ШСЗ масою *m* та Землі масою *M*, центри мас яких знаходяться на відстані r один від одного, згідно з Законом Ньютона (1643 – 1727), дорівнює

$$F = f\,\frac{M \cdot m}{r^2}, \qquad (4)$$

де f - універсальна гравітаційна стала, яка дорівнює $f = (6{,}672 \pm 0{,}041)\cdot 10^{-11}\ \cdot \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2$ [7].

На рис. 5 зображено чотири положення ШСЗ: C_1, C_2, C_3 C_4 та радіус-вектори супутника $FC_1 = r_1$, $FC_2 = r_2$, $FC_3 = r_3$, $FC_4 = r_4$. Радіус –вектори r_1 та r_2 у утворюють сектор $FC_1ПC_2$, а радіус-вектори r_3 та r_4 у утворюють сектор FC_3AC_4.

***Другий закон Кеплера для ШСЗ*:** радіус-вектор супутника за рівні проміжки часу описує рівновеликі площі [7].

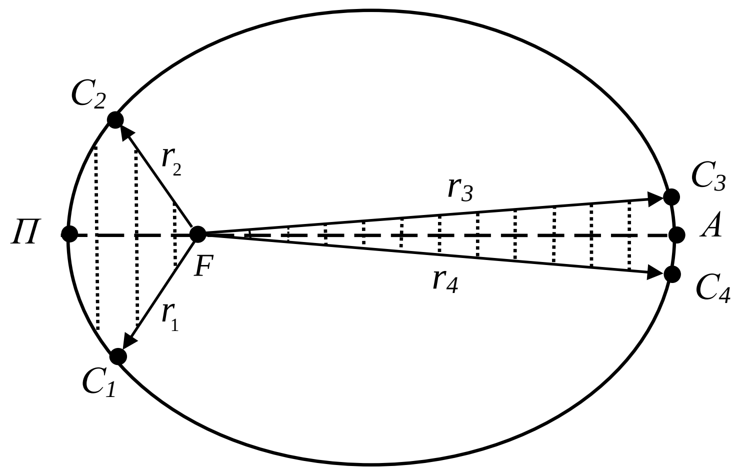

Рис. 5. До другого закону Кеплера

Це означає, що площі секторів $FC_1ПC_2$ та FC_3AC_4 , які утворює супутник за один і той же проміжок часу Δt, мають рівні значення. В аналітичній формі другий закон Кеплера можна записати за допомогою формули

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = const\,, \tag{5}$$

де ΔS - приріст площі сектора, який описує радіус-вектор супутника за проміжок часу Δt.

В супутниковій геодезії використовується поняття справжньої (істинної) аномалії ν як кута, який відлічують від напрямку на перигей до напрямку на супутник за рухом супутника, вершина якого знаходиться в силовому центрі - центрі маси Землі. На рис. 6 ν - справжня аномалія, ϑ - швидкість ШСЗ, центр маси Землі знаходиться в точці F_2.

Тоді другий закон Кеплера можна аналітично записати у вигляді [7]:

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\nu}{dt} = const\,, \tag{6}$$

де $\frac{d\nu}{dt}$ - приріст справжньої аномалії за одиницю часу.

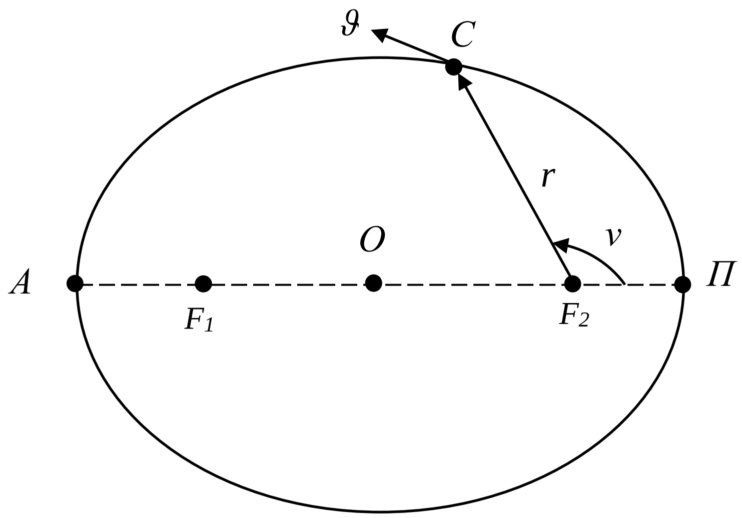

Рис. 6. До поняття справжньої (істинної) аномалії

З формули (6) випливає, що в точці перигею, коли радіус-вектор r супутника найменший, кутова швидкість найбільша, а в точні апогею максимальному значенню радіус-вектора r відповідає найменша кутова швидкість супутника.

Аналогічно, в перигею лінійна швидкість супутника максимальна, а в апогеї – мінімальна. Тому (див. рис. 5) супутник за рівні проміжки часу пролітає в районі перигею більшу ділянку траєкторії - дуга $C_1ПC_2$ в апогеї меншу ділянку C_3AC_4.

Положення супутника на його траєкторії описується рівнянням кривої другого порядку в полярних координатах, коли полюс знаходиться у точці F_2 (див. рис. 6) [5]

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\nu}, \quad (7),$$

де p - параметр еліпса, який визначається за формулою

$$p = \frac{b^2}{a}, \tag{8}$$

або за формулою

$$p = a(1 - e^2). \tag{9}$$

На рис. 7 зображено дві орбіти ШСЗ, великі півосі яких дорівнюють a_1 та a_2, відповідно. Обидві орбіти мають спільний фокус F, в якому знаходиться центральне тіло – Земля. Кожний з супутників робить повний оберт за період T_1 та T_2, відповідно.

Третій закон Кеплера для ШСЗ: квадрати періодів обертання двох супутників навколо Землі відносяться як куби великих півосей їх орбіт [7]. Тобто

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \tag{10}$$

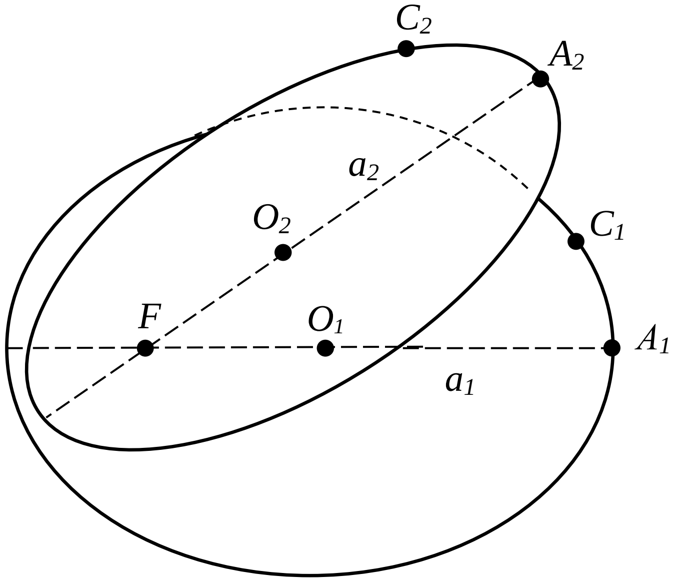

Рис. 7. До третього закону Кеплера

Третій закон Кеплера було отримано за умови, що під час руху матеріальної точки масою m по криволінійній траєкторії відносно центрального тіла масою M відцентрова сила повинна врівноважуватись силою гравітаційного притягання, а саме [6]

$$m\omega^2 r = f\,\frac{mM}{r^2}, \tag{10}$$

де ω - кутовою швидкістю руху матеріальної точки, яка дорівнює $\omega = 2\pi / T$.

Тому, з рівності (10) для відстані $r = a$ випливає залежність

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}, \tag{11}$$

де μ - гравітаційний параметр Землі або планетарна гравітаційна стала, ($\mu = f \cdot M_{\oplus}$), яка за даними лазерної локації місяця складає $\mu = 398600{,}46 \pm 0{,}03$ км$^3\cdot$с$^{-2}$ [7].

Ньютон узагальнив третій закон Кеплера стосовно ШСЗ у вигляді [7]

$$\frac{T_1^2 (M_{\oplus} + m_1)}{T_2^2 (M_{\oplus} + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \tag{12}$$

де $M_{\oplus}$ - маса Землі.

4. Незбурений рух штучних супутників Землі

Незбурений (кеплерівський) рух супутників описується диференціальними рівняннями другого порядку [7]

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + f(M_{\oplus} + m)\frac{x}{r^3} = 0,\\
&\frac{d^2x}{dt^2} + f(M_{\oplus} + m)\frac{x}{r^3} = 0,\\
&\frac{d^2x}{dt^2} + f(M_{\oplus} + m)\frac{x}{r^3} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Після інтегрування рівнянь (13) отримують характеристики незбуреного руху ШСЗ у вигляді шести елементів орбіти, про які йтиметься далі.

На рис. 8 зображено планету Земля з центром у точці O та радіусом R. .У точку A ракетою-носієм доставлено ШСЗ, який має початкову лінійну швидкість ϑ_0 та знаходиться на висоті H над поверхнею планети. Якщо початкова швидкість недостатня, то супутник обертатися навколо Землі не буде. Після досягнення лінійної швидкості ϑ_1 ШСЗ буде обертатися по коловій орбіті з центром у точці O – центрі мас Землі. Модуль радіус-вектора колової орбіти дорівнює

$$r_1 = R + H \, . \tag{14}$$

Якщо збільшити початкову швидкість до значення ϑ_2, то ШСЗ вийде на еліптичну орбіту, причому центр мас Землі буде знаходитись в одному з фокусів еліптичної орбіти.

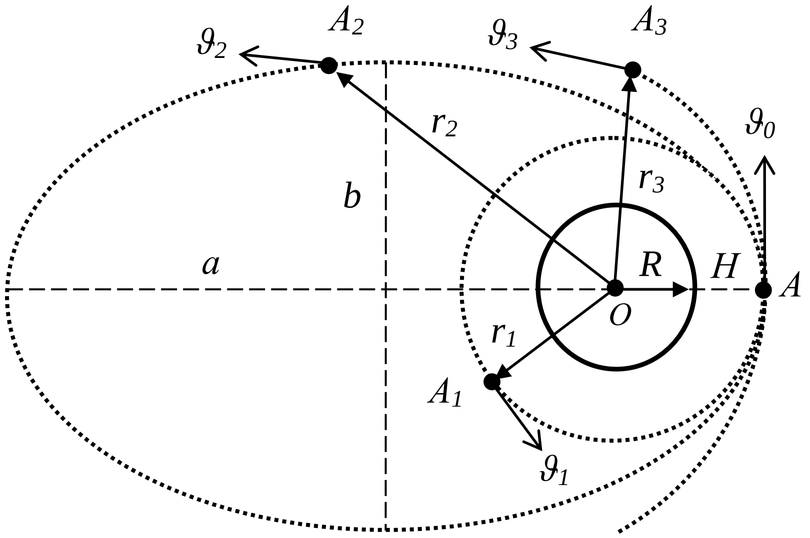

Рис. 8. Відповідність вигляду орбіт ШСЗ його лінійним швидкостям

Після подальшого збільшення швидкості ШСЗ ексцентриситет еліптичної орбіти буде збільшуватись, а її другий фокус буде віддалятися від Землі. За досягнення значення лінійної швидкості ϑ_3 супутник вийде на параболічну орбіту та вилетить за межі сили тяжіння Землі і не повернеться в точку A.

З теорії руху ШСЗ відомо, що лінійна швидкість супутника ϑ на його орбіті в загальному випадку дорівнює [7]

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2\mu}{r} + C_E}\,, \tag{15}$$

де C_E - стала енергії, яка визначається за значенням ексцентриситету орбіти e, параметра орбіти p та значення μ за формулою

$$C_E = -\frac{\mu \cdot (1 - e^2)}{p}\,, \tag{16}$$

причому параметр орбіти може бути визначений за формулою (8), або ж (9).

Щоб визначити першу космічну швидкість по коловій орбіті, необхідно у формулах (16) та (9) покласти $e = 0$, підставити їх у формулу (15) та зробити заміну $a = R + H$ та $r = R + H$. Отже, швидкість, яку необхідно надати ШСЗ на висоті H над Землею, щоб він рухався по коловій орбіті, визначається за формулою [7]

$$\vartheta_K = \sqrt{\frac{\mu}{R + H}}\,. \tag{17}$$

Найбільше значення першої космічної швидкості буде, якщо супутник запустити з поверхні Землі. Тому у формулі (17) приймається $H = 0$ та для середнього радіуса земної кулі $R = 6371$ км (див. табл. 1) і значення $\mu = 398600{,}5$ км^3·с$^{-2}$, ϑ_K = 7,91 км/с.

Другу космічну швидкість, яку необхідно надати ШСЗ для руху його по параболі, визначають для значення ексцентриситету орбіти $e = 1$. Тоді з формули (15) $C_E = 0$, за формулою (15) [7]

$$\vartheta_P = \sqrt{2\frac{\mu}{r}}\,. \tag{18}$$

Якщо другу космічну швидкість надати супутнику з поверхні Землі, то у формулі (18) $r = R$. Для наведених вище значень R та μ з формули (18) визначиться швидкість виходу ШСЗ з поля сили тяжіння Землі, яка дорівнює ϑ_P = 11,2 км/с.

З попереднього матеріалу зрозуміло, що швидкість руху ШСЗ по еліптичній орбіті ϑ_E буде більшою за першу космічну, але менше за другу космічну швидкість та визначається за формулами (15), (16) (9), з яких випливає вираз [7]

$$\vartheta_E = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}. \tag{19}$$

В апогеї, коли справжня аномалія $\nu = 180^\circ$, з виразу (7) випливає $r_A = p(1-e)$, а підстановка значення p формули (9) дозволяє отримати модуль радіус-вектора супутника в апогеї у вигляді

$$r_A = a(1+e), \tag{20}$$

Підстановка, виразу (20) у формулу (19) дає вираз для визначення швидкості ШСЗ в апогеї

$$\vartheta_A = \sqrt{\frac{\mu}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}. \tag{21}$$

В перигеї, де справжня аномалія $\nu = 0^\circ$, після аналогічних дій можна отримати модуль радіус-вектора супутника в перигеї

$$r_П = a(1-e), \tag{22}$$

Підстановка, виразу (22) у формулу (19) дає вираз для визначення швидкості ШСЗ в перигеї

$$\vartheta_П = \sqrt{\frac{\mu}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}. \tag{23}$$

5. Елементи орбіти штучних супутників Землі

Радіус-вектор r супутника під час його руху по орбіті перетинає поверхню земної кулі (рис. 9) в точках, які називають *підсупутниковими точками* - точки, на які проектується положення супутника під час його руху по орбіті. Підсупутникові точки лежать у площині орбіти ШСЗ. З їх допомогою вводяться кутові елементи орбіти ШСЗ.

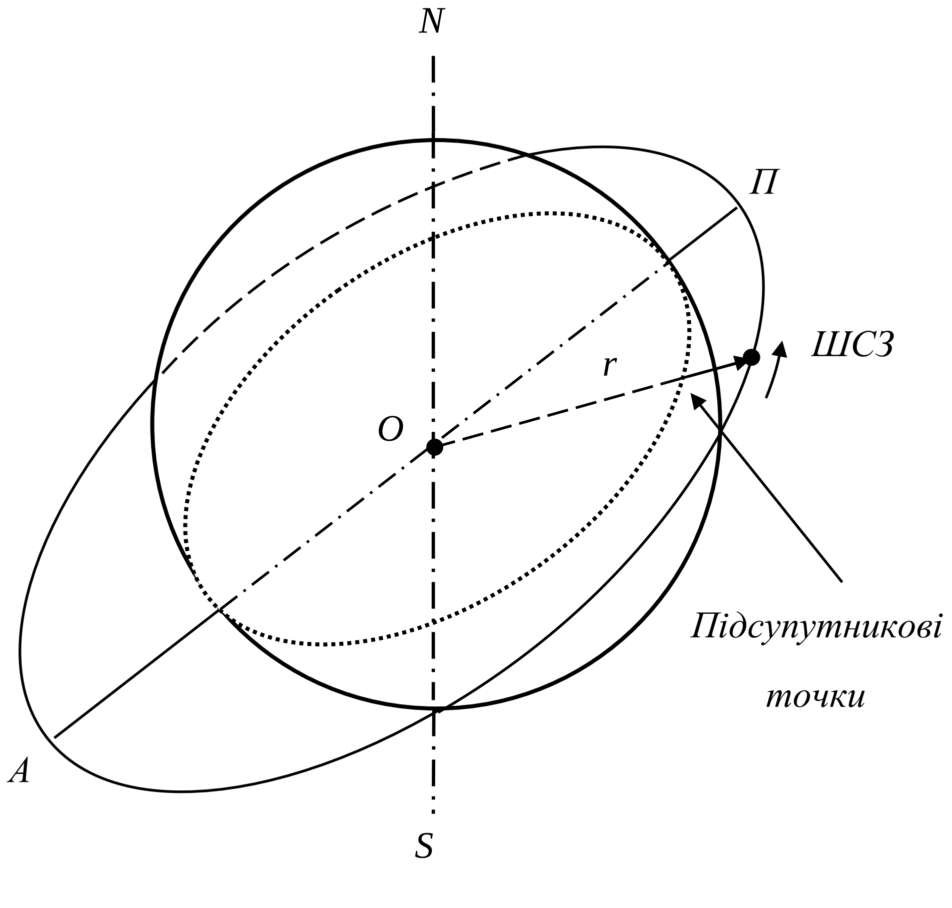

Рис. 9. Утворення підсупутникових точок на поверхні земної кулі

На рис. 10: $\Omega\Pi\sigma\Omega'$ - коло, утворене підсупутниковими точками; O – центр мас Землі; σ - проекція ШСЗ на поверхню земної куті; Ω - *висхідний вузол орбіти* як точка, яку перетинає ШСЗ, рухаючись з південної півкулі у північну; Ω' – *низхідний вузол орбіти,* в якому ШСЗ перетинає екватор, рухаючись з північної півкулі до південної; Υ – *точка весняного рівнодення*, в яку на екваторі проектується Сонце під час його видимого руху з північної півкулі у південну 21 березня – в день весняного рівнодення [8]; *П* - перицентр, як проекція перигею орбіти ШСЗ на земну кулю; *Ω – довгота висхідного вузла* як кут у площині екватора між напрямком на висхідний вузол та напрямком від точки весняного рівнодення (або – дуга екватора між цими ж точками); *ω – аргумент (довгота) перигею* – кут у площині орбіти ШСЗ між напрямками на перицентр від висхідного вузла; *ν* - справжня аномалія.

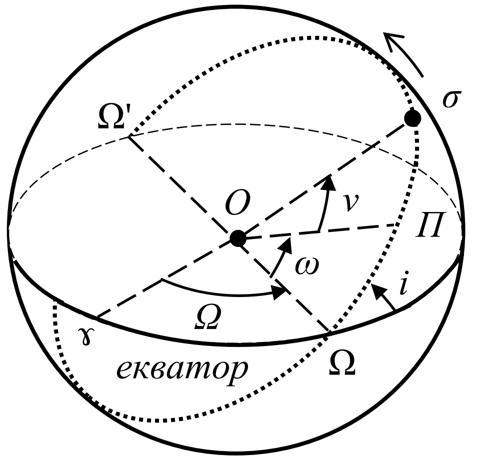

Рис. 10. Кутові елементи орбіти

Елементи орбіти ШСЗ – це величини, які описують форму, розміри і положення орбіти супутника в просторі та його положення на орбіті в конкретний момент часу. Незбурену еліптичну орбіту визначають шість елементів [7]:

a – велика піввісь орбіти,

e – ексцентриситет орбіти,

Ω – довгота висхідного вузла,

i – кут нахилу орбіти,

ω – аргумент перицентру,

τ – момент проходження супутника через перицентр.

Інколи замість ω використовують сумарну величину – довготу перицентру u

$$u = \Omega + \omega \tag{24}$$

Орієнтацію орбіти в просторі визначають три лементи: i, Ω, ω. Розміри орбіти залежать від елементів: a та e.

Миттєве розташування ШСЗ на його орбіті визначається кутовою величиною, яку з історичних причин називають *справжньою (істинною) аномалією* (в перекладі з грецької - відхилення) [9].

Положення ШСЗ на орбіті визначається за допомогою радіус-вектора r та справжньої аномалії v, яку інколи використовують в якості елемента орбіти (рис. 11).

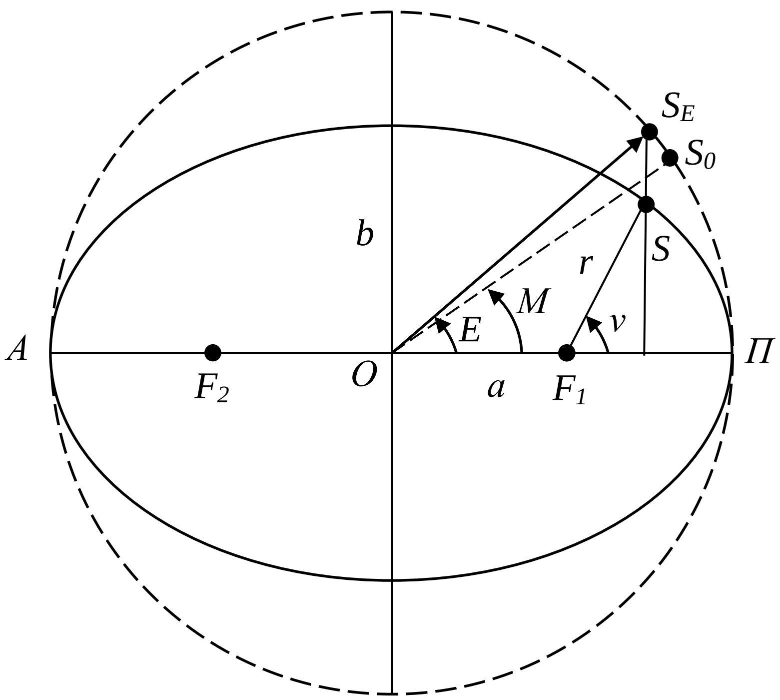

Рис. 11. До поняття справжньої, середньої та ексцентричної аномалій

Оскільки ШСЗ S рухається по еліптичній орбіті із змінною швидкістю, то вводиться фіктивний супутник S_0, який рухається рівномірно по коловій орбіті радіусом a (див. рис. 11). Фіктивному супутнику S_0 відповідає *середня аномалія*

M - кут між напрямком на перигей та напрямком на фіктивний супутник, визначений за напрямком руху супутника.

Положення фіктивного супутника на коловій орбіті визначається рівнянням

$$M = n(t - \tau)\,, \qquad (25)$$

де τ - момент проходження супутника через перигей, *t* - *n – середній рух ШСЗ.*

Середня аномалія може змінюватись від 0° до 360°*N*, де *N* – ціле число. Середній рух *n* є середньою кутовою швидкістю ШСЗ, яка визначається у градусній чи радіанній мірі за формулою [7]

$$n = \frac{360^\circ}{T} = \frac{2\pi}{T}\,, \qquad (26)$$

де *T* – період обертання супутника.

З формули (11) випливає, що $4\pi^2 / T^2 = \mu / a^3$, а з урахуванням формули (26) можна отримати ще один вираз для розрахунку середнього руху

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,. \qquad (27)$$

Якщо з точки *S* (див. рис. 11), яка відповідає положенню супутника на еліптичній орбіті в момент часу *τ*, провести перпендикуляр до лінії апсид та продовжити його до перетину з коловою орбітою в точці S_E, то з’єднавши цю точку з центром орбіт *O*, можна отримати положення ще одного, другого фіктивного супутника S_E з радіус-вектором OS_E. Тоді $S_EO\Pi = E$ *– ексцентрична аномалія* як центральний кут між напрямком на другий фіктивний супутник та лінією апсид, що відраховується за напрямком руху ШСЗ [7].

Існує зв'язок між ексцентричною *E* та середньою *M* аномаліями, який випливає з рівняння Кеплера (28), кути в якому виражаються в радіанній мірі, а рівняння розв’язується методом наближень [7]

$$M = E - e \cdot \sin E, \tag{28}$$

Зв'язок між справжньою та ексцентричною аномаліями визначається формулою

$$tg\frac{\nu}{2} = tg\frac{E}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,. \tag{29}$$

6. Різновиди орбіт штучних супутників Землі

Наразі на геоцентричних орбітах знаходиться близько 2500 супутників. Серед них активними є понад 900. Третина з них використовується для комунікацій. Навігаційні, військові супутники, супутники для дистанційного зондування Землі, астрофізичні та метеорологічні супутники складають 5 – 7% [7].

В залежності від кута нахилу орбіти супутники поділяють (рис. 12) на:

- *екваторіальні* – 1 ($i = 0°$),
- *полюсні* – 2 ($i = 90°$),
- *похилі* – 3,4 ($0° < i < 90°$ або $90° < i < 180°$) [10].

Розташування супутника на полюсній орбіті дозволяє виконувати дослідження всієї земної поверхні. Нахилені орбіти забезпечують смугове знімання земної поверхні. Чим більша висота ШСЗ та нахил орбіти, там ширшою є земна смуга знімання.

Геосинхронна орбіта ШСЗ має період обертання, що дорівнює середньому періоду обертання Землі 23 години 56 хвилин 4,1 секунди з розміром 6,6 земних радіусів. Якщо ексцентриситет орбіти та її нахил дорівнюють нулю, то така орбіта забезпечує фіксоване положення супутника на небосхилі відносно Землі [7].

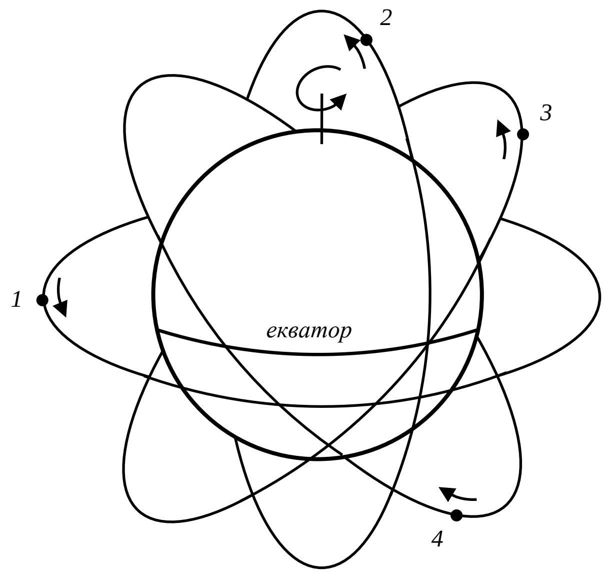

Рис. 12. Різновиди орбіт ШСЗ за кутом нахилу

Геостаціонарна орбіта ШСЗ має кут нахилу та ексцентриситет, які дорівнюють нулю, період обертання, що дорівнює середньому періоду обертання Землі 23 години 56 хвилин 4,091 секунда.

Таблиця 2

Висотні параметри орбіт ШСЗ [11]

Назва орбіти	Абревіатура назви орбіти	Висота над поверхнею Землі, км
Низьковисотна	LEO	200 - 1200
Середньовисотна	MEO	1200 – 35790
Геосинхронна	GEO	35790
Геостаціонарна	GSO	35790
Висотна	HEO	вище 35790

На такій орбіті супутник перебуватиме в одній точці над поверхні землі [7].

7. Умови видимості штучного супутника з поверхні Землі

Зоною видимості ШСЗ називають частину небесної сфери, в якій можна його спостерігати з наземного пункту. Розміри зони видимості обмежуються мінімальним кутом над горизонтом - кутом відсічки.

На рис. 13 показано наземний пункт *C,* з якого ведуться спостереження за супутником [12].

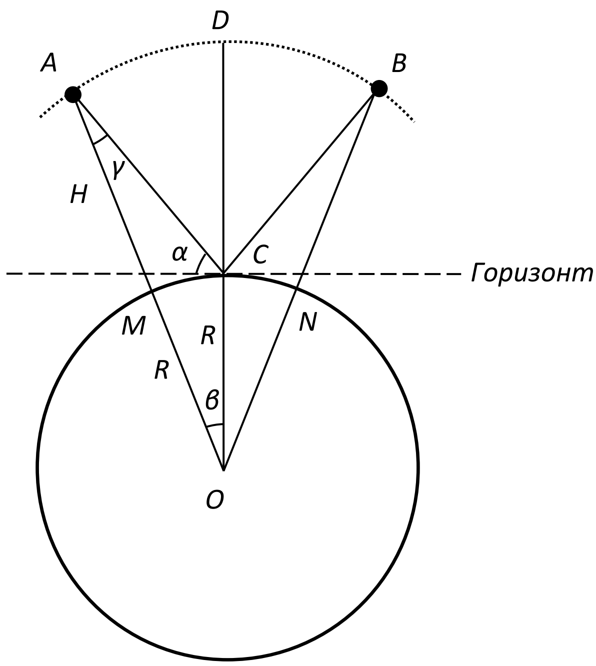

Рис. 13. До визначення зони видимості ШСЗ

За відомого вертикального кута відсічки α супутник можна спостерігати в точках *A* та *B* його траєкторії. *DO* – вертикаль точки спостереження. У трикутнику *ACO* кут $ACO = 90° + \alpha$ та теоремою синусів

$$\frac{R+H}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{R}{\sin\gamma}, \tag{30}$$

де R – радіус земної кулі, H – висота ШСЗ над Землею.

З трикутника ACO випливає, що $\gamma = 180^\circ - (90 + \alpha) - \beta = 90^\circ - (\alpha + \beta)$, а підстановка цього значення у формулу (30) дозволяє визначити

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{R}{R + H} \cos\alpha , \tag{31}$$

звідки значення допоміжного кута дорівнює

$$\beta = \arccos\left(\frac{R}{R + H} \cos\alpha \right) - \alpha . \tag{32}$$

Для дуги $MN=L$, яка відповідає розміру зони видимості на поверхні земної кулі, можна скласти пропорцію

$$\frac{L}{2\pi R} = \frac{2\beta}{360^\circ} , \tag{33}$$

Звідки

$$L = \frac{\pi R}{90^\circ} \beta . \tag{34}$$

Якщо відома швидкість супутника ϑ та діаметра зони видимості L, визначеного за формулою (34), то час перебування його в зоні видимості дорівнює

$$\Delta t = \frac{L}{\upsilon}. \tag{35}$$

Лабораторна робота №1

ПОБУДОВА ПРОЕКЦІЇ ОРБІТИ ШСЗ НА ЗЕМНУ КУЛЮ

Мета роботи: навчитись розрізняти елементи орбіти ШСЗ.

Вихідні дані: довгота висхідного вузла Ω = 15° + №°; кут нахилу орбіти i = 5° + №°; аргумент перицентру ω = 10° + №°; справжня аномалія v = 20° + №°, де № - номер варіанту.

Порядок виконання завдання

Необхідно накреслити проекцію орбіти ШСЗ на земну кулю (підсупутникові точки) та положення ШСЗ згідно з рис. 10.

Лабораторна робота №2

ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ КОЛОВОЇ ОРБІТИ

Завдання 1

Мета роботи: виконати обчислення радіусу колової орбіти r, лінійної швидкості супутника на орбіті ϑ, періоду обертання ШСЗ T.

Вихідні дані: середній радіус земної кулі R = 6371 км [12]; гравітаційний параметр Землі або планетарна гравітаційна стала $\mu = 398600{,}5$ км^3·с$^{-2}$; висота орбіти над поверхнею Землі H = 7000 км + 10 км ·№, де № - номер варіанту.

Порядок виконання завдання 1.

Якщо відома висота орбіти над поверхнею Землі H та середній радіус земної кулі R то радіус колової орбіти дорівнює (рис. 13)

$$r = R + H\,. \tag{36}$$

За відомим радіусом орбіти обчислюють лінійну швидкість супутника на коловій орбіті за формулою (17). Період обертання T ШСЗ по коловій орбіті визначають формули (11) для $a = r$. З неї випливає, що

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{\mu}}\,. \tag{37}$$

Обчислення виконувати з точністю: швидкості – до 0,1 м/с; періоду - до секунд.

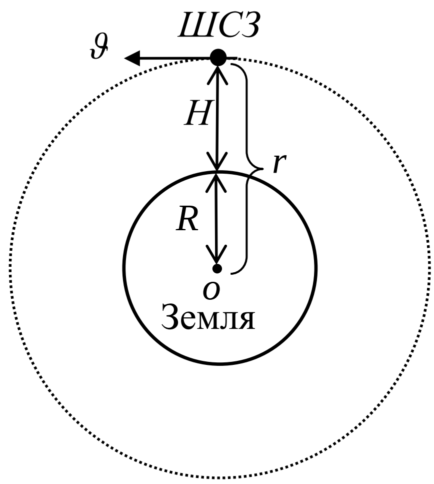

Рис. 14. Положення ШСЗ на коловій орбіті.

За результатами обчислень необхідно зробити рисунок, аналогічний рис. 14, на якому у вибраному масштабі показати: значення середнього радіусу земної кулі R та висоту орбіти над поверхнею Землі H.

Завдання 2.

Мета роботи: виконати обчислення періоду обертання ШСЗ *T;* радіусу колової орбіти *r*, висоту супутника над поверхнею Землі *H*.

Вихідні дані: середній радіус земної кулі R = 6371 км [12]; гравітаційний параметр Землі або планетарна гравітаційна стала $\mu = 398600{,}5$ км^3·с$^{-2}$; значення середнього руху ШСЗ n = 5 – 0,01·№., де № - номер варіанту

Порядок виконання завдання 2

Середній рух в даному випадку обчислюється в обертах супутника по коловій орбіті впродовж доби. Тривалість добі 24 години або 86400 секунди. Тоді

$$n = \frac{24^h}{T} = \frac{86400^S}{T}. \tag{38}$$

Звідки період обертання супутника

$$T = \frac{86400^S}{n}. \tag{39}$$

За обчисленим періодом обертання n згідно з формулою (11) можна визначити велику піввісь орбіти a ШСЗ, яка для колової орбіти дорівнює її радіусу r

$$r = \sqrt[3]{\frac{\mu}{4} \cdot \left(\frac{T}{\pi}\right)^2}. \tag{40}$$

За обчисленим радіусом колової орбіти r визначають висоту супутника над поверхнею Землі H

$$H = r - R, \tag{41}$$

та лінійну швидкість супутника ϑ за формулою (17).

Обчислення виконувати з точністю: періоду - до секунд; значення радіусу орбіти – до км.

За результатами обчислень необхідно зробити рисунок, аналогічний рис. 14, на якому у вибраному масштабі показати: значення середнього радіусу земної кулі *R* та висоту орбіти над поверхнею Землі *H*.

Лабораторна робота №3

ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЕЛІПТИЧНОЇ ОРБІТИ

Завдання 1

Мета роботи: для ШСЗ, який знаходиться на еліптичній орбіті, необхідно обчислити: період обертання супутника T; радіус-вектор супутника r, висоту H ШСЗ та швидкість його ϑ в точці орбіти з заданою справжньою аномалією v; значення радіус-вектора супутника кулею в точках перигею $r_П$ і апогею r_A, висоту супутника над земною кулею в точках перигею $H_П$ і апогею H_A, лінійну швидкість його в точках перигею $\vartheta_П$ і апогею ϑ_A.

Вихідні дані: велика піввісь орбіти ШСЗ a = 17500 км +10 км·№, мала піввісь b = 15000 км, справжня аномалія v = 100° + 2°·№, радіус земної кулі R = 6371 км, № - номер варіанту.

Порядок виконання завдання

Період обертання супутника T можна обчислити з формули (11)

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}. \tag{42}$$

Квадрат ексцентриситету еліптичної орбіти ШСЗ дорівнює

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \tag{43}$$

За значенням фокального параметру p, обчисленого за формулою (8) або (9), та значенням справжньої аномалії v визначають радіус-вектор r супутника за формулою (7).

Висота супутника H над поверхнею земної кулі для обчисленого радіус-вектора r обчислюється за формулою (41).

Швидкість ШСЗ в точці орбіти з радіус-вектором r визначають за формулою (19).

Значення радіус-вектора ШСЗ в точках перигею $r_П$ та апогею r_A визначають за формулами (22) та (20), а швидкості супутника в цих точках – за формулами (23) та (21).

Висоти супутника в точках перигею $H_П$ та апогею H_A визначають за формулою (41).

Обчислення виконувати з точністю: періоду - до секунд; значення радіус-вектора супутника – до км, швидкостей – до 0,1 км/с.

До задачі необхідно зробити малюнок, на якому відкласти значення справжньої аномалії v, відповідно до індивідуального завдання (рис. 15).

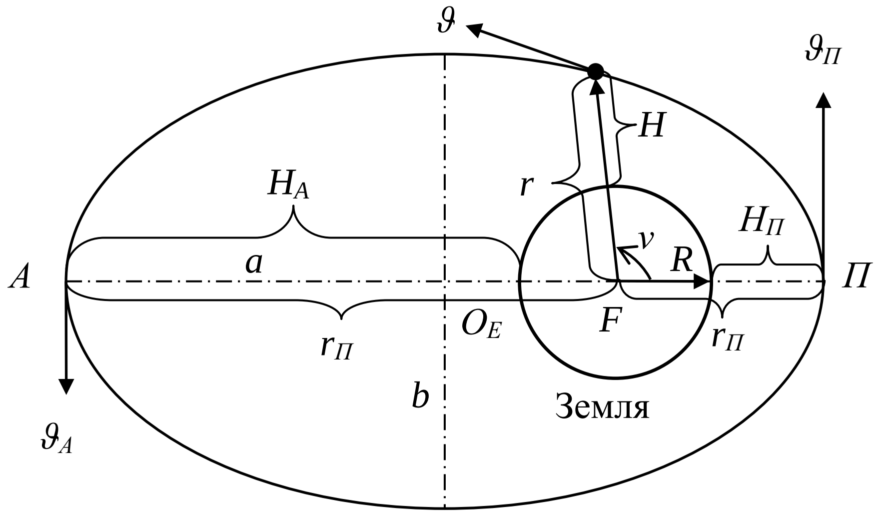

Рис. 15. Еліптична орбіта супутника

Завдання 2

Мета роботи: для ШСЗ, який знаходиться на еліптичній орбіті, необхідно обчислити: середній рух супутника *n*; середню аномалію *M*; ексцентричну аномалію *E*: справжню аномалію *v*; ексцентриситет орбіти *e*; фокальний параметр *p*; радіус-вектор ШСЗ *r*.

Вихідні дані: велика піввісь орбіти ШСЗ *a* = 17500 км +10 км·№; мала піввісь орбіти *b* = 15000 км; час перебування ШСЗ на орбіті *t* = $9^h10^m34^s$ + 2^m·№; момент проходження супутника через перигей τ = $8^h33^m10^s$.

Порядок виконання завдання

Середній рух ШСЗ *n* визначають за формулою (27). Визначають різницю часу, який пролетів ШСЗ з моменту проходження через перигей

$$\Delta t = t - \tau \, . \tag{44}$$

та години *h* і хвилини *s*, що входять до складу Δt, переводять у секунди *s*. Наприклад, $2^h15^m34^s = 2\cdot3600^s + 15\cdot60^s + 34^s = 8134^s$.

За формулою (25) обчислюють середню аномалію *M* у радіанах. Користуючись рівнянням Кеплера (28), виконують обчислення ексцентричної аномалії *E* методом наближень. Для цього значення середньої аномалії *M* у радіанах необхідно визначити у кутовій мірі множенням числа радіан на 206265" та виділенням з отриманого добутку цілих чисел градусів, мінут, секунд. Наприклад, *M* = 1,34125 рад. Тоді: 1,34125·206265" = 276653". Виділення цілих чисел градусів, мінут, секунд виконується рядом наступних дій: 276653"/3600" = 7**6°**,848056 – 76° = 0,848056·60′ = **50′**,88336 - 50′ = 0,88336·60" = **53"**. Тобто *M*° = 76°50′53".

Далі, у першому наближенні приймають $E_1 = M$ та визначають друге наближенні значення ексцентричної аномалії E_2 у радіанній мірі

$$E_2 = M - e \cdot \sin M^{\circ} \, . \tag{45}$$

Третє наближення E_3 виконують після переведення E_2 з радіанної міри у градусну $E°$ за формулою

$$E_3 = M - e \cdot \sin E_2^{\circ}. \tag{46}$$

Для ознайомлення з методикою обчислень способом наближень досить виконати таку кількість наближень, в результаті яких різниця між найближчими значеннями E_i° та E_{i-1}° не перевищуватиме 10°. Значення M у радіанах в рівняннях типу (46), які описують наближення, залишається постійним.

За отриманим у наближеннях значенням E_i° визначають справжню аномалію v, користуючись формулою (29), з якої

$$v = 2 \cdot arctg\left(tg\frac{E_i^{\circ}}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \right). \tag{47}$$

Наступним кроком є обчислення фокального параметру p за формулою (9) та радіус вектора r супутника за формулою (7).

Обчислення виконувати з точністю: середній рух - до шести значущих цифр, середню та ексцентричну аномалії – до шести значущих цифр у радіанах і до кутових секунд; справжню аномалію – до кутових секунд; фокальний параметр та радіус вектор ШСЗ – до км.

Лабораторна робота № 4

ВИЗНАЧЕННЯ ЗОНИ ВИДИМОСТІ ШТУЧНОГО СУПУТНИКА ЗЕМЛІ

Мета роботи: для ШСЗ, який буде знаходитись в момент часу t_c над заданим пунктом, необхідно обчислити: розмір зони видимості L на поверхні земної кулі з центром в заданому пункті; час Δt перебування супутника в зоні видимості; момент часу t_A входження ШСЗ в зону видимості та момент часу t_B виходу із зони видимості.

Вихідні дані: гравітаційний параметр Землі або планетарна гравітаційна стала $\mu = 398600{,}5$ км^3·с$^{-2}$; радіус земної кулі R = 6371 км; висота орбіти над поверхнею Землі H = 7000 км + 10 км·№; кут відсічки α = 5° + 1°·№; момент часу $t_C = 1^h02^m36^s$ знаходження ШСЗ над наземним пунктом C.

Порядок виконання завдання

Допоміжний кут β, під яким з борту ШСЗ можна було б бачити центр земної кулі та заданий пункт C в момент входження супутника в зону видимості обчислюється за формулою (32).

Розмір зони видимості L на поверхні земної кулі з центром в заданому пункті визначають за формулою (34).

Час Δt перебування супутника в зоні видимості обчислюють згідно з формулою (35).

Момент часу t_A входження ШСЗ в зону видимості визначають за формулою

$$t_A = t_C - \Delta t, \tag{48}$$

а момент часу t_B виходу із зони видимості

$$t_B = t_C + \Delta t. \tag{49}$$

Обчислення виконувати з точністю: допоміжного кута – до 0,001 частки кутового градуса; розміру зони видимості – до 1 км; часу перебування супутника в зоні видимості – до 0,01 секунди; моментів входження ШСЗ та виходу його із зони видимості - до 0,01 секунди. Дати рис. 15 та вміти пояснити його елементи під час захисту лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Назвіть планети Сонячної системи.
2. Покажіть на малюнку основні точки та лінії еліпса.
3. Як отримати положення фокусів еліпса?
4. Яка властивість точок, які утворюють еліпс?
5. Яким показником характеризується ступінь відхилення еліпса від кола?
6. Як називаються найближча та найдальша точки еліптичної орбіти?
7. В яких точках еліптичної орбіти супутник має найбільшу та найменшу швидкості?
8. Який рух супутника називається незбуреним?
9. За якими законами відбувається незбурений рух супутника? Розтлумачте ці закони.
10. Що таке справжня (істинна) аномалія? Поясніть на малюнку.
11. Що таке перша космічна швидкість і чому вона дорівнює?
12. Що таке друга космічна швидкість і чому вона дорівнює?
13. Зробіть малюнок та вкажіть на малюнку елементи орбіти супутника.
14. Що таке середній рух супутника та чому він дорівнює?
15. Зробіть малюнок та вкажіть на ньому середню та ексцентричну аномалії.
16. Які існують різновиди орбіт в залежності від кута їх нахилу?
17. Які особливості має геосинхронна орбіта?
18. Чим цікава геостаціонарна орбіта?
19. Що таке зона видимості супутника?
20. Дайте малюнок та вкажіть на ньому елементи, які визначають зону видимості супутника.

Використана література

1. Планети Сонячної системи [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://tut-cikavo.com/tse-tsikavo/kosmos-vsesvit/381-planeti-sonyachnoji-sistemi. – Назва. з екрану. – Дата звернення 20.08. 2019.
2. Характеристики планет Сонячної системи [Електронний ресурс]. - Режим доступу: merkator.org.ua. – Назва з екрану. - Дата звернення 15.09. 2019.
3. Відстань планет до Сонця [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://moyaosvita.com.ua/ . – Назва з екрану. - Дата звернення 15.09. 2019.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
5. Кононюк А.Ю. Вища математика. (Модульна технологія навчання): навчаль. Посібник. – В 2-х кн. – Кн.1. – К.: КНТ, 2009. – 680 с.
6. Кузьмичев В.Е. Законы и формулы физики / В.Е Кузьмичев. – К.: Наук. Думка, 1989. – 864 с.
7. Желєзняк О.О. Космічна фотограмметрія: навч. посіб. / О.О. Желєзняк, Л.С. Чубко. – К.: НАУ, 2012. – 220 с.
8. Ильчевский И.Д. Сферическая астрономия / И.Д. Ильчевский. – К.: Вища школа, 1978. – 88 с.
9. О.С. Словник іншомовних слів / під. ред. Мельничука О.С.. – К.: Головна редакція УРЕ, 1977. – 775 с.
10. Супутникова радіонавігаційні системи: навч. посібник / І.В. Корнієнко, В.І. Богом’я, О.І. Терещук, С.П. Корнієнко. – Чернігів: Черні. нац. технол. ун-т, 2014, - 280 с.
11. Визначення супутникових орбіт [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://mediasat.info/2015/06/30/satellite-orbit-guide/. – Назва з екрану. - Дата звернення 15.09. 2019.
12. Черняга П.Г., Бялик М.І., Ярчук Р.М. Супутникава геодезія. Інтерактивний комплекс навчально методичного забезпечення. – Рівне: НУВГП, 2009. – 150 с.