МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Методичні вказівки до практичних занять
для студентів усіх спеціальностей з дисципліни "Вища математика"

Обговорено та рекомендовано
на засіданні кафедри «Промислового
та цивільного будівництва»
Протокол № 6
від “19” грудня 2019 року

Чернігів ЧНТУ 2020

Векторна алгебра. Методичні вказівки до практичних занять для студентів усіх спеціальностей з дисципліни "Вища математика"/ Укл.: Корнієнко С. П., Мурашковська В. П., Корнієнко І. В. – Чернігів, ЧНТУ, 2020. – 67 с.

Укладачі: КОРНІЄНКО Світлана Петрівна, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри промислового та цивільного будівництва
МУРАШКОВСЬКА Віра Петрівна, старший викладач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування
КОРНІЄНКО Ігор Валентинович, канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри геодезії, картографії та землеустрою

Відповідальний за випуск: САВЧЕНКО Олена Віталіївна, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри промислового та цивільного будівництва

Рецензент: СИНЕНКО Марина Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри кібербезпеки та математичного моделювання

ЗМІСТ

Вступ………………………………………………………………………....		4
1	СКАЛЯРНІ І ВЕКТОРНІ ВЕЛИЧИНИ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ПОНЯТТЯ………………………………………………………………..	5
2	ЛІНІЙНІ ДІЇ З ВЕКТОРАМИ………………………………………………	6
3	ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВІСЬ………………………………………….	10
4	ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ЗА ТЕМОЮ «ЛІНІЙНІ ДІЇ З ВЕКТОРАМИ»………………………………………………………..	11
5	ПОДІЛ ВІДРІЗКА В ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ……………………….	13
6	ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ЗА ТЕМОЮ «ПОДІЛ ВІДРІЗКА В ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ, ЦЕНТР ВАГИ»	16
7	ЛІНІЙНО-ЗАЛЕЖНІ ТА НЕЗАЛЕЖНІ ВЕКТОРИ………………………...	17
8	ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ЗА ТЕМОЮ «ЛІНІЙНО-ЗАЛЕЖНІ Й ЛІНІЙНО-НЕЗАЛЕЖНІ ВЕКТОРИ»	24
9	СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ…………………………………………	25
10	ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ЗА ТЕМОЮ «СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ»	30
11	ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ………………………………………….	33
12	ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ЗА ТЕМОЮ «ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ»	42
13	МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ……………………………………………	44
14	ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ЗА ТЕМОЮ «МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ»	47
15	ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ……………………………………………	49
16	ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ……………..	50
17	ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ	56
Рекомендована література …………………………………………………		66

ВСТУП

Методичні вказівки "Векторна алгебра" для студентів усіх спеціальностей з дисципліни "Вища математика" укладені відповідно до чинної навчальної програми з дисципліни "Вища математика" для технічних, технологічних і природничих спеціальностей закладів вищої освіти.

Векторна алгебра – це розділ математики, в якому вивчають дії над векторами. Виникла векторна алгебра у зв'язку з потребами механіки і фізики. Апарат векторного числення ефективно використовується в багатьох загальнонаукових та інженерних дисциплінах, таких як: математичне та лінійне програмування, електродинаміка, гідродинаміка, теоретична і технічна механіка, теорія машин і механізмів, фізика тощо.

Мета цієї методичної роботи – надати допомогу студентам при вивченні теоретичних питань та розв'язуванні практичних завдань за темою "Векторна алгебра". Методичні вказівки охоплюють як теоретичні, так і практичні аспекти основних розділів векторної алгебри.

Методична робота "Векторна алгебра" для студентів усіх спеціальностей з дисципліни "Вища математика" може бути використана як довідниковий матеріал під час проведення лекційних занять, містить багато завдань для розв'язування під час проведення практичних занять, а також при підготовці студентів до тематичного та модульного контролю.

1 СКАЛЯРНІ І ВЕКТОРНІ ВЕЛИЧИНИ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ПОНЯТТЯ

У математиці розглядають скалярні й векторні величини.

Означення. Величина, яка цілком характеризується своїм числовим значенням, називається скалярною (або просто скаляром). *Наприклад:* маса, об'єм, температура, час тощо.

Означення. Величина, яка, крім числового значення, потребує вказати ще й напрям дії, називається векторною. До векторних величин належать: швидкість, прискорення, сила тощо.

Означення. Вектором називається відрізок, який сполучає дві задані точки простору, причому зазначено, яка з точок є початком вектора, яка є його кінцем. Напрям вектора встановлюється від початкової точки до кінцевої. Вектор, початок якого знаходиться в точці A, а кінець у точці B, позначають символом $\overline{AB}$. Якщо не вказані точки початку і кінця вектора, то його позначають $\overline{a}$ (рисунок 1.1).

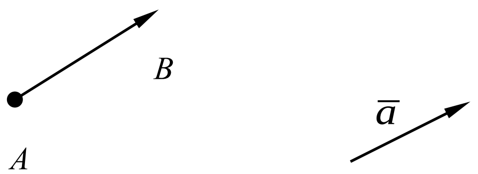


Рисунок 1.1

Означення. Відстань від початку до кінця вектора називається довжиною, або модулем вектора. Позначають: $\left|\overline{AB}\right|$, або $\left|\overline{a}\right|$.

Отже, *вектор – це відрізок, який має певну довжину й напрям.*

Нагадаємо: якщо задані дві точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то для знаходження координат вектора $\overline{AB}$ потрібно від координат точки кінця вектора – точки B відняти відповідні координати точки початку вектора – точки A, тоді одержимо:

$$\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Для знаходження довжини вектора потрібно знайти арифметичний квадратний корінь з суми квадратів координат вектора:

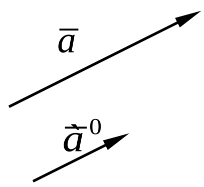
$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ ,$$

або, якщо вектор $\overline{a}$ заданий своїми координатами $\tilde{a}\left(x; y; z\right)$, то:

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Означення. Вектор, початок якого збігається з кінцем, називається нульовим вектором і позначається $\overline{0}$. Напрям нульового вектора невизначений (може бути яким завгодно), його довжина дорівнює нулю.

Означення. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним вектором. Якщо напрям одиничного вектора збігається з напрямом $\overline{a}$, то його називають ортом вектора $\overline{a}$, і позначають $\overline{a}^0$ (рисунок 1.2).



$\overline{a}^0$ – орт $\overline{a}$; $\left|\overline{a}^0\right| = 1$

Рисунок 1.2

Означення. Вектори, які знаходяться на одній прямій або паралельних прямих, називаються колінеарними. Колінеарні вектори позначатимемо: $\overline{a} \parallel \overline{b}$, $\overline{a} \parallel \overline{c}$, $\overline{c} \parallel \overline{b}$ (рисунок 1.3).

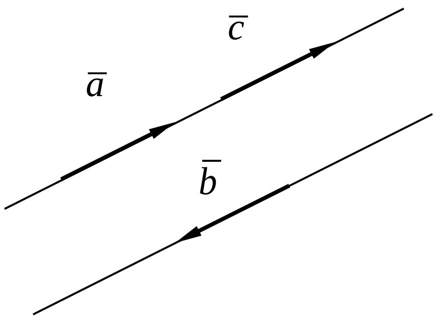


Рисунок 1.3

Колінеарні вектори можуть бути однаково напрямлені – співнапрямлені, які позначають $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{c}$, і протилежно напрямлені, які позначають $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Зауважимо, що завжди $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a^0}$, і нульовий вектор $\overline{0}$ колінеарний до будь-якого вектора.

Означення. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають рівними, якщо вони колінеарні, співнапрямлені і мають рівні довжини, тобто:

$$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b} \\ |\overline{a}| = |\overline{b}| \end{cases}.$$

Нагадаємо, що рівність векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, заданих своїми координатами $\overline{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b}(x_2, y_2, z_2)$, означає рівність відповідних координат:

$$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}.$$

Означення. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються ортогональними ($\overline{a} \perp \overline{b}$), якщо вони знаходяться на ортогональних (перпендикулярних) прямих.

Означення. Три вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ називають компланарними, якщо вони належать одній площині або паралельним площинам.

2 ЛІНІЙНІ ДІЇ З ВЕКТОРАМИ

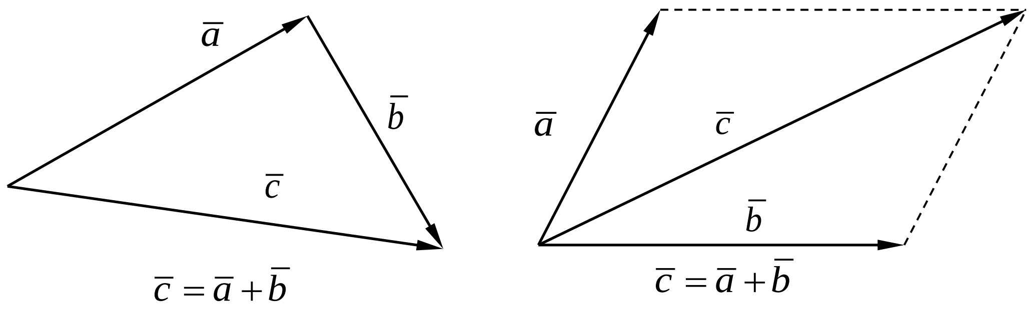
До лінійних дій з векторами належать: додавання, віднімання векторів та множення вектора на дійсне число.

Додавання векторів можливе за правилом трикутника, або правилом паралелограма.

Правило трикутника: сумою двох векторів $\overline{a} + \overline{b}$ є третій вектор $\overline{c}$, напрямлений з початку вектора $\overline{a}$ в кінець вектора $\overline{b}$, за умови, що початок вектора $\overline{b}$ збігається з кінцем вектора $\overline{a}$ (рисунок 2.1, а).

Правило паралелограма: на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, розташованих у спільному початку, побудуємо паралелограм. Діагональ паралелограму (вектор $\overline{c}$), що виходить зі спільного початку векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, і буде їх сумою (рисунок 2.1, б).

Нагадаємо, якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задані своїми координатами $\overline{a}(x_1, y_1, z_1)$ і $\overline{b}(x_2, y_2, z_2)$, то координати вектора суми двох векторів – вектора $\overline{c}$, дорівнюють сумі відповідних координат векторів-доданків $\overline{a}$ і $\overline{b}:\overline{c}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.



а) *б)*

Рисунок 2.1

Для того, щоб додати n векторів потрібно послідовно використовувати правило трикутника. Тоді, вектор суми скінченого числа n векторів, розміщених послідовно, причому так, що початок кожного наступного вектора-доданка збігається з кінцем попереднього вектора-доданка, сполучає початок першого вектора-доданка з кінцем останнього вектора-доданка (рисунок 2.2). Це правило справедливе й у випадку, коли всі n векторів-доданків розташовані на одній прямій.

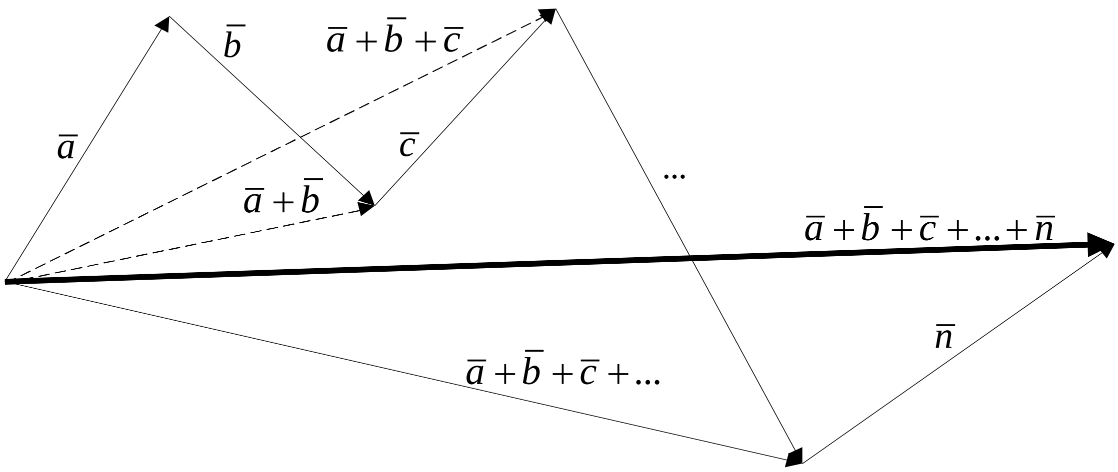


Рисунок 2.2

Зауважимо, що у випадку коли початок першого вектора-доданка збігається з кінцем n-го вектора-доданка, тобто вектори утворюють замкнену ламану, то вектор суми n векторів дорівнює нульовому вектору (рисунок 2.3):

$$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + ... + \overline{n} = \overline{0}.$$

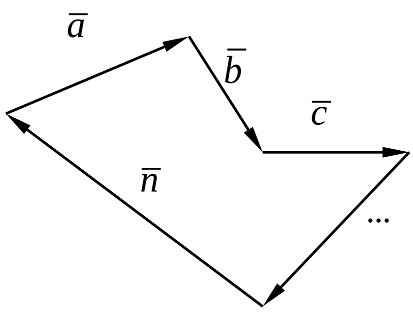


Рисунок 2.3

При множенні вектора на дійсне число λ використовуємо таке означення:

добутком ненульового вектора $\overline{a}$ *на дійсне,* *не рівне нулю число* λ *(*$\lambda \in R$*,* $\lambda \neq 0$*) називається вектор* $\overline{\lambda a}$*, співнапрямлений з вектором* $\bar{a}$*, якщо* $\lambda > 0$ *і протилежно напрямлений, якщо* $\lambda < 0$*, і для якого* $\left|\overline{\lambda a}\right| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$*; причому, якщо* $0 < |\lambda| < 1$ *то відбувається стиск вектора* $\bar{a}$ *в* $1/\lambda$ *раз; а якщо* $|\lambda| > 1$ *– то розтяг в* λ *раз.*

Зауважимо, що розділити вектор $\bar{a}$ на дійсне число $\lambda \neq 0$ означає помножити вектор $\bar{a}$ на число $1/\lambda$: $\dfrac{\bar{a}}{\lambda} = \bar{a} \cdot \dfrac{1}{\lambda}$.

Наприклад: якщо заданий вектор $\bar{a}$, то вектор $\overline{2a}$ колінеарний, співнапрямлений до вектора $\bar{a}$, та має довжину, вдвічі більшу за вектор $\bar{a}$. Вектор $-\dfrac{1}{2}\bar{a}$ колінеарний, але протилежно напрямлений до вектора $\bar{a}$, та має довжину вдвічі меншу, ніж вектор $\bar{a}$ (рисунок 2.4).

Нагадаємо, якщо вектор $\bar{a}$ заданий своїми координатами $\bar{a}(x, y, z)$, то координати вектора $\overline{\lambda a}$, якій дорівнює добутку заданого вектора $\bar{a}$ на число λ, дорівнюють добуткам координат заданого вектора на це число: $\overline{\lambda a}(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

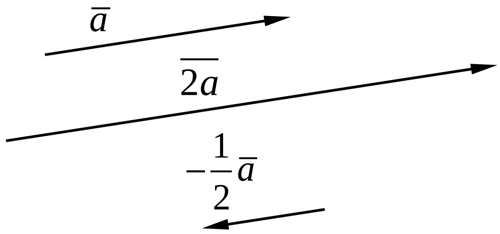


Рисунок 2.4

Якщо $\lambda = -1$, то $\lambda \bar{a} = -1\bar{a} = -\bar{a}$ – протилежний до $\bar{a}$. Вектори $\bar{a}$ і $-\bar{a}$ колінеарні, мають рівні довжини, але протилежні за напрямом. Якщо $\bar{a}(x, y, z)$, то $-\bar{a}(-x, -y, -z)$, тобто відповідні координати протилежних векторів мають протилежні знаки.

Потрібно пам'ятати, що вектори $\bar{a}$ і $\overline{\lambda a}$ завжди колінеарні, звідси випливає, що *у випадку колінеарних векторів (*$\bar{a} \parallel \bar{b}$*) завжди існує деяке дійсне число* λ *(*$\lambda \in R, \lambda \neq 0$*), таке що* $\bar{b} = \overline{\lambda a}$*, твердження правильне і навпаки, тобто якщо* $\bar{b} = \overline{\lambda a}$*, то вектори* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ *колінеарні.*

Для знаходження числа λ використовуємо: $\lambda = \pm \dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$,

причому беремо зі знаком "+" якщо $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, із знаком "–" якщо $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$.

З цієї властивості випливає, що *у випадку колінеарних векторів* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$*, заданих своїми координатами* $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ *і* $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$ *– їх координати пропорційні, тобто* $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Оскільки $\bar{a}$ і $\bar{a}^0$ завжди колінеарні, то $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}^0$, де $|\bar{a}|$ відіграє роль числа λ, звідси $\bar{a}^0 = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$. Отже, якщо вектор $\bar{a}$ заданий своїми координатами $\bar{a}(x, y, z)$, то координати орта $\bar{a}^0$ вектора $\bar{a}$ знаходять за формулою:

$$\overline{a}^0 = \frac{\left(\overline{x, y, z}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

тобто:

$$\overline{a}^0\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

Приклад:

Знайти координати орта $\overline{a}^0$ вектора $\overline{a}(2;-1;3)$.

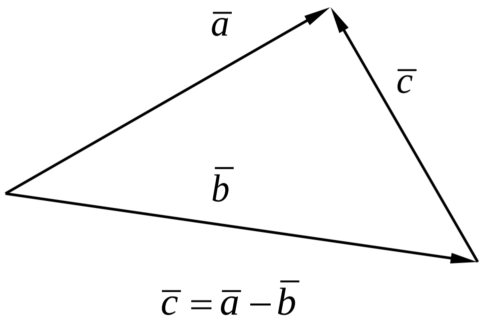
Використовуючи формулу для знаходження координат орта, маємо:

$$\overline{a}^0\left(\frac{2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}; \frac{-1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}; \frac{3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}\right) = \left(\overline{\frac{2}{\sqrt{14}}; -\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}}\right).$$

Відповідь: $\overline{a}^0\left(\frac{2}{\sqrt{14}}; -\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$.

Різницею двох векторів $\overline{a} - \overline{b}$ називається такий третій вектор $\overline{c}$, який при додаванні з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$, тобто $\overline{a} - \overline{b} = \overline{c}$: $\overline{b} + \overline{c} = \overline{a}$ (рисунок 2.5).

Пам'ятати, що вектор $\overline{c}$ різниці двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, розташованих у спільному початку, виходить із кінця вектора-від'ємника (вектора $\overline{b}$) і прямує в кінець вектора-зменшуваного (вектора $\overline{a}$).



$\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$

Рисунок 2.5

Нагадаємо, що коли вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задані своїми координатами $\overline{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b}(x_2, y_2, z_2)$, то для знаходження координат вектора $\overline{c}$, який є різницею двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$: $\overline{a} - \overline{b} = \overline{c}$, потрібно від координат вектора зменшуваного (вектора $\overline{a}$) відняти відповідні координати вектора від'ємника (вектора $\overline{b}$):

$$\overline{c}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Розглянемо приклад:

Знайти $\overline{d} = 2\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} - 3\overline{c}$, якщо $\overline{a}(-1;2;4)$, $\overline{b}(-4;6;2)$, $\overline{c}(0;1;-3)$.

$2\overline{a} = 2\left(\overline{-1;2;4}\right) = \left(\overline{-2;4;8}\right)$;

$\frac{1}{2}\overline{b} = \frac{1}{2}\left(\overline{-4;6;2}\right) = \left(\overline{-2;3;1}\right)$;

$-3\overline{c} = -3\left(\overline{0;1;-3}\right) = \left(\overline{0;-3;9}\right)$;

$\overline{d} = \left(\overline{-2;4;8}\right) + \left(\overline{-2;3;1}\right) + \left(\overline{0;-3;9}\right) = \left(\overline{-4;4;18}\right)$.

Відповідь: $\overline{d} = \left(\overline{-4;4;18}\right)$.

3 ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВІСЬ

Означення. Віссю l будемо називати пряму, на якій задано напрям, початок відліку та одиницю довжини. Заданий на осі напрям вважатимемо додатнім, протилежний йому – від'ємним.

При проектуванні вектора на вісь розрізняють геометричну й алгебраїчну проекції.

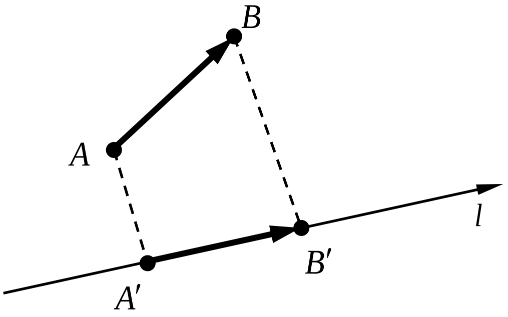


Рисунок 3.1

Означення. Геометричною проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь l називають вектор $\overline{A'B'}$, для якого A' – це проекція початку вектора – точки A, а B' – проекція кінця – точки B (рисунок 3.1).

Зауважимо, що геометричною проекцією вектора, який перпендикулярний до осі є нульовий вектор; геометричною проекцією вектора, який паралельний осі є вектор, рівний цьому вектору.

Означення. Алгебраїчною проекцією (надалі проекцією) вектора $\overline{AB}$ на вісь l називають довжину вектора геометричної проекції $\left|\overline{A'B'}\right|$, взяту із знаком "+", якщо вектор проекції $\overline{A'B'}$ співнапрямлений із віссю l і зі знаком "–", якщо вектор проекції $\overline{A'B'}$ і вісь l протилежно напрямлені. Позначають $Пр_l \overline{AB} = \pm\left|\overline{A'B'}\right|$.

Означення. Кутом між вектором і віссю називають кут між двома променями, які виходять зі спільного початку і напрям одного променя збігається з напрямом заданого вектора, напрям іншого – з напрямом осі (рисунок 3.2); $\angle\varphi = \angle(\overline{a}, l)$, $0 \le \varphi \le \pi$.

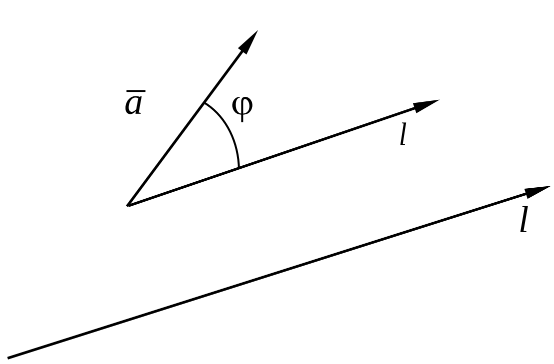


Рисунок 3.2

Оскільки вісь має напрям, то її можна розглядати як вектор, отже, означення кута між двома векторами, як і кута між двома осями визначається аналогічно.

Зауважимо, що коли вектор $\overline{a}$ і вісь l колінеарні співнапрямлені, то $\angle\varphi = \angle 0°$; якщо протилежно напрямлені то $\angle\varphi = \angle 180°$.

У випадку, коли $\angle\varphi = \angle(\bar{a}, l)$ і $\lambda \in R$, то $\angle(\lambda\bar{a}, l) = \angle\varphi$, якщо $\lambda > 0$; $\angle(\lambda\bar{a}, l) = \pi - \varphi$, якщо $\lambda < 0$.

Теорема. Проекція вектора $\bar{a}$ на вісь l дорівнює добутку довжини вектора $\bar{a}$ на косинус кута φ між вектором $\bar{a}$ і віссю l:

$$Пр_l\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi, \text{ де } \angle\varphi = \angle(\bar{a}, l).$$

Сформулюємо деякі властивості проекції:

1. Проекції рівних векторів на одну і ту саму вісь дорівнюють одна одній:

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow Пр_l\bar{a} = Пр_l\bar{b}.$$

2. Проекція суми скінченого числа векторів на вісь дорівнює сумі скінченого числа проекцій векторів-доданків на цю вісь:

$$Пр_l\left(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \ldots + \bar{n}\right) = Пр_l\bar{a} + Пр_l\bar{b} + Пр_l\bar{c} + \ldots + Пр_l\bar{n}.$$

3. Проекція добутку вектора на число дорівнює добутку проекції вектора на це число:

$$Пр_l\lambda\bar{a} = \lambda Пр_l\bar{a}, \ \lambda \in R.$$

Розглянемо приклад:

Знайти проекцію вектора $\bar{a}\left(2\sqrt{2}; 0; -2\sqrt{2}\right)$ на вектор $\bar{b}$, якщо кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює 120°.

Знаходимо:

$$|\bar{a}| = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 0^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4,$$

тоді,

$$Пр_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\left(a, b\right) = 4\cos 120^\circ = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2;$$

знак "–" означає, що вектор проекції і вектор $\bar{b}$ протилежно напрямлені.

Відповідь: $Пр_{\bar{b}}\bar{a} = -2$.

4 ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ЗА ТЕМОЮ «ЛІНІЙНІ ДІЇ З ВЕКТОРАМИ»

1. Для векторів *a* (-4, -2, 3), *b* (2, 1, 4), *c* (-3, 4, 5) знайти координати векторів *3a*; *2b; -3c; a+b+c; 2a-3b+4c*.
2. Для векторів a (3, -2, 6) і b (-2, 1, 0) знайти координати векторів $2a - \frac{1}{3}b; \frac{1}{3}a - b; 2a + 3b$.
3. Знайти координати вектора M_1M_2 та його довжину в кожному з таких випадків:

1) $M_1(4, -5, 2)$, $M_2(2, -3, 1)$; 2) $M_1(7, 3, -2)$, $M_2(4, 3, 2)$;
3) $M_1(9, 4, -3)$, $M_2(3, -4, -3)$; 4) $M_1(1, 5, -7)$, $M_2(6, 5, 5)$;
5) $M_1(3, -2, 2)$, $M_2(-1, 0, 2)$; 6) $M_1(3, 2, 0)$, $M_2(5, 3, -1)$.

4. Точки A(9, -11, 5), B(7, 4, -2), C(-7, 13, -3) є послідовними вершинами ромба. Знайти четверту вершину D. Обчислити периметр ромба та довжини його діагоналей.
5. Задані радіус-вектори трьох послідовних вершин паралелограма ABCD: $r_A=i+j+k$, $r_B=i+3j+5k$, $r_C=7i+9j+11k$. Знайти радіус-вектор четвертої вершини D.
6. Перевірити чи є чотирикутник з вершинами в точках A(1, 1, 1), B(4, 4, 1), C(7, 1, 1), D(4, -2, 1) квадратом.
7. В трикутнику з вершинами в точках A(-2, 1, 3), B(0, 3, 4), C(1, 5, 3) обчислити довжину бісектриси кута A.
8. В трикутнику з вершинами в точках A (7, 5, -4), B (4, 9, 1), C (6, -3, -7) обчислити довжину медіани, проведеної з вершини A і периметр трикутника.
9. Вектори $\overrightarrow{AB}$ (2, 6, -4) і $\overrightarrow{AC}$ (4, 2, -2) визначають сторони трикутника ABC. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{CD}$, який збігається з медіаною, що проведена з вершини C.
10 Знайти координати одиничного вектора e, напрямленого по бісектрисі кута, який утворюють вектори a(2, -3, 6) і b(-1, 2, -2).
11. Знайти довжини діагоналей паралелограма, який побудовано на векторах a(3, -5, 8) і b(-1, 1, -4).
12. Знайти проекцію вектора a на вісь Oy, що утворює з вектором кут φ, в таких випадках:

1) $|a| = 4, \phi = 0°$; 2) $|a| = 3, \phi = \frac{\pi}{2}$; 3) $|a| = 5, \phi = \pi$;

4) $|a| = 6, \phi = \frac{\pi}{3}$; 5) $|a| = \sqrt{2}, \phi = \frac{\pi}{3}$; 6) $|a| = 2, \phi = \frac{3}{4}\pi$.

13. Вектор a складає з координатними осями Ox і Oy кути α=60º, β=120º. Обчислити координати вектора a, якщо $|a|$=2.
14. Знайти одиничний вектор того самого напрямку, як і вектор $a=i+2j+2k$.
15. На осі Ox знайти точку, рівновіддалену від точок A (2, -4, 5) і B (-3, 2, 7).
16. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точок M_1(2, 4, 1) і M_2 (-3, 2, 5).
17. Показати, що трикутник ABC рівносторонній, якщо його вершини знаходяться в точках A(1, 2, 3), B(3, 2, 1), C(1, 4, 1).
18. Знайти вершини трикутника, якщо відомо середини його сторін M (3, -2), N (1; 6), P (-4; 2).
19. Задано суміжні вершини A(1, 3, -3) і B(2, -5, 5) паралелограма и точка перетину його діагоналей O(1, 1, 1). Знайти координати вершин C и D.
20. Задано три вершини паралелограма A (4; 2), B (5 7), C (-3; 4). Знайти четверту вершину D, яка протилежна вершині B.
21. Задано дві вершини A(2, -3, -5), B(-1, 3, 2) паралелограма ABCD і точка перетину його діагоналей E(4, -1, 7). Знайти координати інших вершин паралелограма.

5 ПОДІЛ ВІДРІЗКА В ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ

Знайдемо координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні:

якщо задано відрізок AB точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ (рисунок 5.1). Знайдемо на відрізку AB таку точку $M(x, y, z)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ, тобто:

$$\frac{AM}{MB} = \lambda .$$

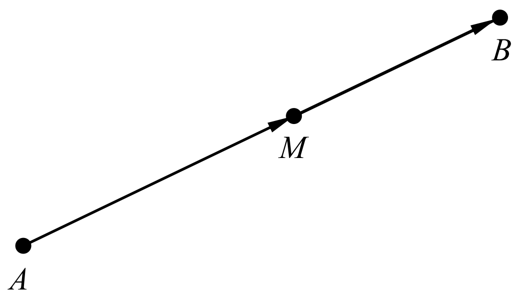


Рисунок 5.1

Розглянемо вектори $\overline{AM}(x - x_1; y - y_1; z - z_1)$ і $\overline{MB}(x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z)$. Оскільки вектори $\overline{AM}$ і $\overline{MB}$ колінеарні ($\overline{AM} \uparrow\uparrow \overline{MB}$), то за властивістю колінеарних векторів $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$, $\lambda \in R$. Запишемо цю рівність через координати векторів:

$$\left(\overline{x - x_1; y - y_1; z - z_1}\right) = \lambda\left(\overline{x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z}\right).$$

Використовуємо правило множення вектора $\overline{MB}$ на число λ, рівність двох векторів в координатній формі і групуємо відносно невідомих x, y, z, одержуємо шукані координати точки M , яка поділяє відрізок AB у відношенні λ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \end{cases}.$$

Якщо $\lambda = 1$, то точка M поділяє відрізок AB навпіл, одержуємо координати середини відрізку:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ z = \dfrac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}.$$

Розглянемо приклади:

1. Відрізок AB заданий точками $A(2;4;5)$, $B(-2;3;7)$. Знайти координати точки M , яка ділить відрізок у відношенні 2:3.

Задане відношення означає, що довжину відрізка AB можна розглядати як довжину п'яти частин, причому точка M розташована на відстані двох частин від точки A, і трьох частин від точки B (рисунок 5.2). Отже, $\lambda = 2/3$.

Використовуємо формули знаходження координат точки M, яка ділить відрізок AB у відношенні λ, маємо:

$$x=\frac{2+\frac{2}{3}(-2)}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{6}{3}-\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{2}{5};$$

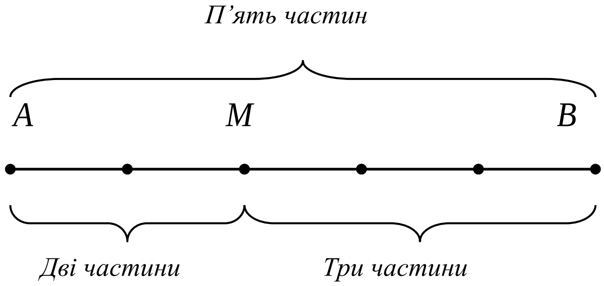


Рисунок 5.2

$$y=\frac{4+\frac{2}{3}\cdot 3}{1+\frac{2}{3}}=\frac{6}{\frac{5}{3}}=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5};$$

$$z=\frac{5+\frac{2}{3}\cdot 7}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{15}{3}+\frac{14}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{\frac{29}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{29}{5}=5\frac{4}{5};$$

$M\left(\frac{2}{5};3\frac{3}{5};5\frac{4}{5}\right)$, або $M(0,4;3,6;5,8)$.

2. Відрізок між точками $A(2;-3)$ і $B(6;8)$ точками C і D поділили на три рівні частини. Знайти координати точок C і D.

Аналогічними міркуваннями одержуємо, що $\frac{AC}{CB}=\frac{1}{2}$, отже $\lambda=\frac{1}{2}$ (рисунок 5.3). Тоді:

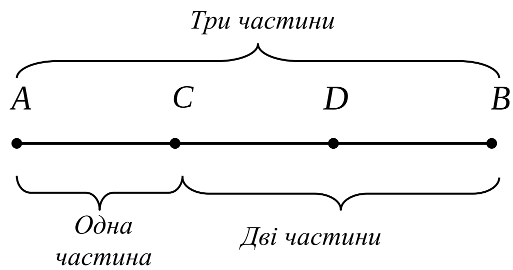


Рисунок 5.3

$$x_C=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 6}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{4+6}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{10}{3};$$

$$y_C=\frac{-3+\frac{1}{2}\cdot 8}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{-6+8}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3};$$

$C\left(\frac{10}{3};\frac{2}{3}\right)$ – шукані координати точки C.

Координати точки D можна знайти аналогічно, розглянувши, що $\frac{AD}{DB}=\frac{2}{1}$, тобто $\lambda=\frac{2}{1}=2$, маємо:

$$x_D=\frac{2+2\cdot 6}{1+2}=\frac{14}{3};$$

$$y_D=\frac{-3+2\cdot 8}{1+2}=\frac{13}{3};$$

$D\left(\frac{14}{3};\frac{13}{3}\right)$ – шукані координати точки D.

Або точка D є серединою відрізка CB. Тому, використовуємо знайдені координати точки C, і координати середини відрізка, одержуємо:

$$x_D = \frac{\frac{10}{3}+6}{2} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3};$$

$$y_D = \frac{\frac{2}{3}+8}{2} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3};$$

$D\left(\frac{14}{3};\frac{13}{3}\right)$ – шукані координати точки D.

Знайдемо координати центру ваги (центру інерції) системи двох точок $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$, в яких зосереджено маси m_1 і m_2 відповідно (рисунок 5.4). Центр ваги знаходиться на відрізку M_1M_2 в точці N, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні, яке обернено пропорційне масам, тобто: $\frac{\overline{M_1N}}{\overline{NM_2}} = \lambda$; $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$, тоді:

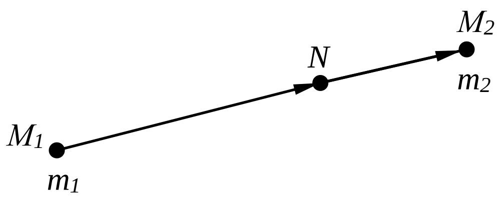


Рисунок 5.4

$$x_N = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2};$$

$$y_N = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2};$$

$$z_N = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{z_1+\frac{m_2}{m_1}z_2}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2}.$$

Методом математичної індукції можна довести, що центр ваги (центр інерції) системи з n матеріальних точок $M_i(x_i;y_i;z_i)$, $i=1...n$, в яких розташовано відповідно n мас m_i знаходиться в точці $C(x_C;y_C;z_C)$, для якої:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};\ y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};\ z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Розглянемо приклади:

1. У точках $A(-2)$ і $B(7)$ розташовані маси $m_A = 5$ і $m_B = 3$. Знайти центр ваги, точку $C(x)$.

$$x_C = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = \frac{5\cdot(-2) + 3\cdot 7}{5+3} = \frac{-10+21}{8} = \frac{11}{8}.$$

Отже $C\left(\frac{11}{8}\right)$.

2. Точки $A(4;2)$, $B(7;-2)$, $C(1;6)$ є вершинами трикутника, виготовленого з однорідного дроту. Знайти центр ваги трикутника ABC.

Оскільки трикутник виготовлений з однорідного дроту, то маси, розташовані у вершинах рівні між собою, покладемо $m_A = m_B = m_C = m$. Нехай центр ваги трикутника ABC розташований у точці $D(x_D; y_D)$. Тоді:

$$x_D = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{m(x_A + x_B + x_C)}{3m} = \frac{4+7+1}{3} = 4;$$

$$y_D = \frac{m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{m(y_A + y_B + y_C)}{3m} = \frac{2+(-2)+6}{3} = 2.$$

Отже, точка $D(4;2)$ – центр маси трикутника ABC.

6 ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ЗА ТЕМОЮ «ПОДІЛ ВІДРІЗКА В ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ, ЦЕНТР ВАГИ»

1. Відрізок між точками A (3; 2); B (15; 6) поділити на п’ять рівних частин. Знайти координати точок ділення.
2. Знайти координати кінців відрізка, який точками M(3, -2, 2), N(5, -5, 3) поділений на три рівні частини.
3. Відрізок між точками A=(1, -5), B=(4,3) розділений на три рівні частини. Знайти координати точок ділення.
4. Дано точки A (3, 3, 3) і B (-1, 5, 7). Знайти координати точок C и D, які ділять відрізок AB на три рівні частини
5. Відрізок, обмежений точками A(-1, 8, -3) и B(9, -7, -2), поділений точками M_1, M_2, M_3, M_4 на п’ять рівних частин. Знайти координати точок M_1 і M_3.
6. Знайти координати кінців відрізка, який точками C(2, 0, 2) і D(5, -2, 0) поділений на три рівні частини.

7. Знайти координати середини відрізка, якщо кінці відрізка знаходяться в точках A(-1, 2, 4), B(9, -4, -2).)
8. Знайти на відрізку між точками O(0, 0, 0) і A(1, 2, 2), точку M, яка поділяє відрізок у співвідношенні 2:3.
9. Знайти координати центра ваги M системи двох матеріальних точок A=(3, -5), B=(-1, 1), в яких розташовані маси $q=p=1$. Розв'язати задачу за умови $q=3$, $p=5$.
10. Знайти координати центра ваги трикутника ABC, якщо його вершини знаходяться в точках A (2, 3, 4), B (3, 1, 2) і C (4, -1, 3), і в вершинах трикутника розташовані рівні маси.

7 ЛІНІЙНО-ЗАЛЕЖНІ ТА НЕЗАЛЕЖНІ ВЕКТОРИ

Застосовуючи лінійні операції над векторами (множення вектора на число та додавання векторів) можна дати таке означення:

Означення. Вектор $\bar{a}$ називають лінійною комбінацією n векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$, якщо $\bar{a} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + ... + \lambda_n\bar{e}_n$, де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – дійсні числа, які називають коефіцієнтами лінійного розкладу.

Означення. Вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ називають лінійно-незалежними, якщо їх лінійна комбінація $\lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + ... + \lambda_n\bar{e}_n = 0$ можлива лише за умови, що всі $\lambda_i = 0$, $i = 1...n$; якщо ж їх лінійна комбінація $\lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + ... + \lambda_n\bar{e}_n = 0$, але хоча б один з $\lambda_i \neq 0$, $i = 1...n$, то вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ називають лінійно-залежними.

Означення. Базисом векторного простору будемо називати будь-яку упорядковану сукупність лінійно-незалежних векторів, через які лінійно виражається довільний вектор цього простору. Розкласти вектор за базисом означає зобразити його у вигляді лінійної комбінації базисних векторів. Розмірність векторного простору відповідає кількості базисних векторів.

Якщо вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ лінійно-незалежні, тобто утворюють базис векторного простору V^n, то будь-який вектор $\bar{a}$ в цьому просторі має розклад за базисними векторами виду $\bar{a} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + ... + \lambda_n\bar{e}_n$, де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ координати вектора $\bar{a}$ в векторному просторі V^n. Зазначимо, що будь-який вектор $\bar{a}$ в векторному просторі V^n має стільки координат, скільки базисних векторів у цьому просторі, тобто n.

Без доведення наведемо наступні твердження:

Теорема 1. Якщо два вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (не нульові) лінійно-залежні, то вони колінеарні, і навпаки – колінеарні вектори завжди лінійно-залежні.

Теорема 2. Якщо три вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (не нульові) лінійно-залежні, то вони компланарні, і навпаки – компланарні вектори завжди лінійно-залежні.

Теорема 3. Чотири і більше довільні вектори завжди в просторі V^3 лінійно-залежні.

Нагадаємо, що найбільш поширеною у використанні серед систем координат є прямокутна декартова система координат, в якій базисні вектори позначають через $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ і які належать осям OX, OY, OZ відповідно.

Базисні вектори $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ мають властивості:

1. $|\bar{i}|=|\bar{j}|=|\bar{k}|=1$.

2. $\left(\bar{i},\bar{j}\right)=\left(\bar{j},\bar{k}\right)=\left(\bar{k},\bar{i}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

Такий базис називають ортонормованим, а вектори $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ – ортами.

Слід пам’ятати, що:

1. На осі OX базисний вектор $\bar{i}\left(1\right)$, і будь-який вектор $\bar{a}\left(x\right)$ має розклад:

$$\bar{a}=x\bar{i}.$$

2. На площині OXY два базисні вектори $\bar{i}\left(1;0\right)$, $\bar{j}\left(0;1\right)$, і будь-який вектор $\bar{a}\left(x;y\right)$ має розклад:

$$\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}.$$

3. У просторі $OXYZ$ три базисні вектори $\bar{i}\left(1;0;0\right)$, $\bar{j}\left(0;1;0\right)$, $\bar{k}\left(0;0;1\right)$ і будь-який вектор $\bar{a}\left(x;y;z\right)$ має розклад:

$$\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}.$$

Наприклад, вектор $\bar{a}\left(3;5;-3\right)$ розкладається за базисними векторами $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ таким чином:

$$\bar{a}=3\bar{i}+5\bar{j}+\left(-3\right)\bar{k}.$$

Якщо ж вектор $\bar{b}=2\bar{i}-4\bar{j}-2\bar{k}$, то це означає, що вектор $\bar{b}$ має координати $\left(\overline{2;-4;-2}\right)$.

У декартовій площині від ортонормованого базису $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ можна перейти до будь-якого іншого. Треба пам’ятати, що при переході від одного базису до іншого кількість базисних векторів не змінюється, але при зміні базису координати вектора змінюються, тобто координати того ж самого вектора в різних базисах різні.

Під час дослідження, чи утворюють вектори новий базис використовують умову лінійної незалежності.

Розглянемо приклади:

1. Чи утворюють вектори $\bar{a}\left(3;4;-3\right)$, $\bar{b}\left(-5;5;0\right)$, $\bar{c}\left(2;1;-4\right)$ базис? Знайти координати вектора $\bar{d}\left(8;-16;17\right)$ в новому базисі $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.

Для перевірки чи утворюють вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ базис використаємо умову лінійної незалежності векторів:

$\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}+\lambda_3\bar{c}=0$, вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ будуть лінійно-незалежні тоді і тільки тоді, коли $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Отже, нас цікавлять, чому дорівнюють $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.

Якщо початковий базис не вказаний, то вважаємо за початковий базис $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$. Далі використовуємо розклад векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ в базисі $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$:

$\overline{a}=3\overline{i}+4\overline{j}-3\overline{k}$;

$\overline{b}=-5\overline{i}+5\overline{j}+0\overline{k}$;

$\overline{c}=2\overline{i}+1\overline{j}-4\overline{k}$.

Підставимо в умову лінійної незалежності $\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}=0$ вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ розкладені в базисі $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$; оскільки з лівого боку рівності записана сума векторів, а сумою векторів є вектор, то число 0 запишемо як нуль-вектор $\overline{0}(0;0;0)$, маємо:

$$\lambda_1\left(\overline{3i+4j-3k}\right)+\lambda_2\left(\overline{-5i+5j+0k}\right)+\lambda_3\left(\overline{2i+1j-4k}\right)=\left(\overline{0;0;0}\right).$$

Перегрупуємо відносно базисних векторів $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ і розпишемо $\overline{0}(0;0;0)$ як $\overline{0}=0\overline{i}+0\overline{j}+0\overline{k}$:

$$\overline{i}\left(3\lambda_1-5\lambda_2+2\lambda_3\right)+\overline{j}\left(4\lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3\right)+\overline{k}\left(-3\lambda_1+0\lambda_2-4\lambda_3\right)=0\overline{i}+0\overline{j}+0\overline{k}.$$

Використовуємо умову рівності двох векторів, прирівнюємо вирази відносно базисних векторів $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$, одержуємо систему лінійних однорідних рівнянь (СЛОР):

$$\begin{cases}3\lambda_1-5\lambda_2+2\lambda_3=0;\\4\lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3=0;\\-3\lambda_1+0\lambda_2-4\lambda_3=0.\end{cases}$$

СЛОР має тільки тривіальний розв’язок, коли головний визначник системи $\Delta\neq 0$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&-5&2\\4&5&1\\-3&0&-4\end{vmatrix}=-60+15+30-80=-95,$$

таким чином, головний визначник $\Delta\neq 0$, тобто СЛОР має тільки тривіальні розв’язки, тобто:

$$\begin{cases}\lambda_1=0;\\\lambda_2=0;\\\lambda_3=0.\end{cases}$$

Умова лінійної незалежності виконана повністю, вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – лінійно-незалежні, отже, утворюють базис.

Вектор $\overline{d}$ має невідомі координати в базисі $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$; позначимо $\overline{d}_{\overline{a},\overline{b},\overline{c}}(x;y;z)$ і розкладемо за базисом $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$:

$$\bar{d}_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c},$$

підставимо вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ розкладені в початковому базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, одержимо:

$$\bar{d}_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}} = x\left(\overline{3i + 4j - 3k}\right) + y\left(\overline{-5i + 5j + 0k}\right) + z\left(\overline{2i + 1j - 4k}\right).$$

З правого боку відкриваємо дужки і групуємо відносно $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, маємо:

$$\bar{d}_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}} = \bar{i}\left(3x - 5y + 2z\right) + \bar{j}\left(4x + 5y + z\right) + \bar{k}\left(-3x + 0y - 4z\right) \ (*).$$

По суті, ми одержали вектор $\bar{d}$ в базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, розкладемо вектор $\bar{d}\left(8;-16;17\right)$ в цьому базисі:

$$\bar{d}_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} = 8\bar{i} - 16\bar{j} + 17\bar{k},$$

підставляємо одержаний розклад у рівність $(*)$:

$$8\bar{i} - 16\bar{j} + 17\bar{k} = \bar{i}\left(3x - 5y + 2z\right) + \bar{j}\left(4x + 5y + z\right) + \bar{k}\left(-3x + 0y - 4z\right).$$

Прирівнюємо координати відносно базисних векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\left.\begin{aligned} \bar{i} &: 8 = 3x - 5y + 2z \\ \bar{j} &: -16 = 4x + 5y + z \\ \bar{k} &: 17 = -3x + 0y - 4z \end{aligned}\right\}.$$

Одержана СЛАР правильно визначена, неоднорідна, тому розв'яжемо її за формулами Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -95.$$

$$\Delta_1 = \Delta(x) = \begin{vmatrix} 8 & -5 & 2 \\ -16 & 5 & 1 \\ 17 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -160 - 85 - 170 + 320 = -95;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x = \frac{-95}{-95};\ x = 1.$$

$$\Delta_2 = \Delta(y) = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 4 & -16 & 1 \\ -3 & 17 & -4 \end{vmatrix} = 192 + 136 - 24 - 96 - 51 + 18 = 285;$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ y = \frac{285}{-95};\ y = -3.$$

$$\Delta_3 = \Delta(z) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 4 & 5 & -16 \\ -3 & 0 & 17 \end{vmatrix} = 225 - 240 + 120 + 340 = 475;$$

$z=\frac{\Delta_3}{\Delta}$; $z=\frac{475}{-95}$; $z=-5$.

$\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=-5 \end{cases}$ – шукані координати вектора $\bar{d}$ в новому базисі $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.

$\bar{d}_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}(1;-3;-5)$.

$\bar{d}_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}=1\bar{a}-3\bar{b}-5\bar{c}$, – розклад вектора $\bar{d}$ в новому базисі $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.

Зауважимо, що математичний запис можна спростити, не надаючи розклад кожного заданого вектора за базисом $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, а тільки маючи це на увазі, тобто підставляти тільки координати векторів.

2. Чи буде система векторів $\bar{a}(2;0;3)$, $\bar{b}(1;2;3)$, $\bar{c}(4;0;6)$ лінійно-незалежною?

Використовуємо умову лінійної незалежності векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$: $\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}+\lambda_3\bar{c}=0$, нас цікавлять значення $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.

В умову лінійної незалежності підставимо координати заданих векторів:

$$\lambda_1\left(\overline{2;0;3}\right)+\lambda_2\left(\overline{1;2;3}\right)+\lambda_3\left(\overline{4;0;6}\right)=\bar{0},$$

використовуємо правило множення вектора на дійсне число λ і правило додавання векторів. Одержуємо вектор суми трьох векторів:

$$\left(\overline{2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3;2\lambda_2;3\lambda_1+3\lambda_2+6\lambda_3}\right)=\left(\overline{0;0;0}\right);$$

використовуємо умову рівності двох векторів, одержуємо систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3=0; \\ 2\lambda_2=0; \\ 3\lambda_1+3\lambda_2+6\lambda_3=0. \end{cases}$$

Нас цікавлять розв'язки цієї системи, для цього знайдемо визначник системи:

$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}=0$ – для СЛОР це означає, що існують нетривіальні розв'язки. Тобто, хоча б один з $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ не дорівнює нулю, а це повністю відповідає означенню лінійно-залежних векторів.

Відповідь: система векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ лінійно-залежна.

3. Чи утворюють вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ базис? Якщо так, то знайти координати вектора $\bar{d}$ в базисі $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, якщо $\bar{a}(1;2;3)$; $\bar{b}(0;1;2)$; $\bar{c}(1;3;-1)$; $\bar{d}(2;3;5)$.

Аналогічно до прикладу 2 перевіряємо умову лінійної незалежності векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$: $\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}=0$. Пропонуємо читачеві самостійно підставити координати векторів в умову лінійної незалежності й одержати СЛОР:

$$\begin{cases}1\lambda_1+0\lambda_2+1\lambda_3=0;\\ 2\lambda_1+1\lambda_2+3\lambda_3=0;\\ 3\lambda_1+2\lambda_2-1\lambda_3=0.\end{cases}$$

Перевіряємо визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&3\\3&2&-1\end{vmatrix}=-1+4+0-3-0-6=-6;$$

$\Delta\neq 0$ – це означає, що існують тільки тривіальні розв'язки СЛОР, тобто $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ (всі $\lambda_i=0$), а це повністю відповідає означенню лінійно-незалежних векторів.

Отже, вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ лінійно-незалежні, тобто утворюють новий базис.

Знайдемо координати вектора $\overline{d}$ в новому базисі $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$. Ці координати невідомі, позначимо $\overline{d}_{\overline{a},\overline{b},\overline{c}}(x;y;z)$; розкладемо вектор $\overline{d}$ за новими базисними векторами $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$:

$$\overline{d}_{\overline{a},\overline{b},\overline{c}}=x\overline{a}+y\overline{b}+z\overline{c}.$$

Підставимо задані координати векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d}$ в одержану рівність:

$$\left(\overline{2;3;5}\right)=x\left(\overline{1;2;3}\right)+y\left(\overline{0;1;2}\right)+z\left(\overline{1;3;-1}\right);$$

використовуємо правила множення вектора на число й додавання векторів одержимо

$$\left(\overline{2;3;5}\right)=\left(\overline{x+0y+z;\ 2x+1y+3z;\ 3x+2y-z}\right);$$

$$\left(\overline{2;3;5}\right)=\left(\overline{x+z;\ 2x+y+3z;\ 3x+2y-z}\right).$$

Використовуючи умову рівності двох векторів одержуємо систему:

$$\begin{cases}x\qquad\ \ +z=2;\\ 2x+y+3z=3;\\ 3x+2y-z=5,\end{cases}$$ – правильно визначена система лінійних алгебраїчних рівнянь, для якої $\Delta=-6$, і можна використовувати формули Крамера:

$$\Delta_1=\Delta(x)=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&3\\5&2&-1\end{vmatrix}=-2+6-5-12=-13;\ x=\frac{\Delta(x)}{\Delta}=\frac{-13}{-6}=\frac{13}{6}.$$

$$\Delta_2=\Delta(y)=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&3\\3&5&-1\end{vmatrix}=-3+10+18-9+4-15=5;\ y=\frac{\Delta(y)}{\Delta}=\frac{5}{-6}=-\frac{5}{6}.$$

$$\Delta_3=\Delta(z)=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&3\\3&2&5\end{vmatrix}=5+8-6-6=1;\ z=\frac{\Delta(z)}{\Delta}=\frac{1}{-6}=-\frac{1}{6}.$$

Отже, шукані координати вектора $\bar{d}_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}\left(\frac{13}{6};-\frac{5}{6};-\frac{1}{6}\right)$; розклад вектора $\bar{d}$ в базисі $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$: $\bar{d}_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}=\frac{13}{6}\cdot\bar{a}-\frac{5}{6}\cdot\bar{b}-\frac{1}{6}\cdot\bar{c}$.

При переході від деякого базису L до базису L' можна використовувати матрицю переходу $T_{L\to L'}$, в якій координати нових базисних векторів записані в стовпчик, тоді якщо заданий вектор $\bar{x}$ в базисі L то його координати $\bar{x}'$ в базисі L' можна знайти за формулою переходу:

$$X'=T^{-1}\cdot X,$$

де: X – це матриця стовпчик координат заданого вектора $\bar{x}$; T^{-1} – матриця, обернена до матриці переходу $T_{L\to L'}$.

Розглянемо приклади:

1. В ортонормованому базисі $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ заданий вектор $\bar{x}(-1;\,2;\,1)$. Знайти координати вектора $\bar{x}$ в базисі L', якщо базисними векторами є вектори $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, такі що: $\bar{e}_1=\bar{i}+\bar{j}$; $\bar{e}_2=\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{e}_3=\bar{i}+\bar{k}$. Записати розклад вектора $\bar{x}$ за новими базисними векторами $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$.

Запишемо нові базисні вектори через координати $\bar{e}_1(1;1;0)$, $\bar{e}_2(0;1;1)$, $\bar{e}_3(1;0;1)$. Складемо матрицю переходу:

$$T=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

$$T^{-1}=\frac{1}{|T|}\left(T^*\right)^T,$$

де: $\left(T^*\right)^T$ – транспонована матриця, складена з алгебраїчних доповнень до кожного елементу матриці T. Пропонуємо читачеві перевірити самостійно.

$$T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix},$$

тоді:

$$X'=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix};$$

$$X'=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\4\\-2\end{bmatrix};\ X'=\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

Отже, $\bar{x}(0;2;-1)$ – координати вектора $\bar{x}$ в новому базисі $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$; $\bar{X}_{e_1,e_2,e_3}=0\bar{e}_1+2\bar{e}_2+(-1)\bar{e}_3$ – розклад вектора $\bar{x}$ за новими базисними векторами.

2. За допомогою матриці переходу знайти координати вектора $\bar{d}(11;-6;5)$ в новому базисі $\bar{a}(3;-2;1)$, $\bar{b}(-1;1;-2)$, $\bar{c}(2;1;-3)$.

Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ своїми координатами задані в стандартному базисі $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$. Нам потрібно перейти від базису $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ до нового базису $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$. Нагадаємо, що при переході до нового базису координати вектора $\bar{d}$ змінюються. Складемо матрицю переходу:

$$T_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\to\bar{a},\bar{b},\bar{c}}=\begin{bmatrix}3&-1&2\\-2&1&1\\1&-2&-3\end{bmatrix}.$$

Аналогічно пропонуємо самостійно знайти T^{-1};

$$T^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1&-7&-3\\-5&-11&-7\\3&5&1\end{bmatrix},$$

тоді:

$$\bar{d}_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1&-7&-3\\-5&-11&-7\\3&5&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}11\\-6\\5\end{bmatrix};\ \bar{d}_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-11+42-15\\-55+66-35\\33-30+5\end{bmatrix};$$

$$\bar{d}_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}16\\-24\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix};\ \bar{d}_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}.$$

Отже, $\bar{d}_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}(2;-3;1)$ – шукані координати вектора $\bar{d}$ в новому базисі $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$. $\bar{d}_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}=2\bar{a}-3\bar{b}+1\bar{c}$ – розклад вектора $\bar{d}$ за новими базисними векторами $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.

8 ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ЗА ТЕМОЮ «ЛІНІЙНО-ЗАЛЕЖНІ Й ЛІНІЙНО-НЕЗАЛЕЖНІ ВЕКТОРИ»

1. Перевірити, чи є лінійно- незалежними вектори a_1 ,a_2 і a_3, якщо:

а) a_1 (2, 3, -1), a_2 (1, -1, 3), a_3 (1, 9, -11);

б) a_1 (3, -2, 1), a_2 (2, 1, 2), a_3 (3, -1, -2).

2. Перевірити, чи утворюють вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ базис? Знайти координати вектора $\vec{d}$ в новому базисі $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Записати лінійний розклад вектора $\vec{d}$ за новими базисними векторами, якщо:

1) $\vec{a}=(1,3,5)$, $\vec{b}=(0,4,5)$, $\vec{c}=(7,-8,4)$, $\vec{d}=(2,-1,3)$;

2) $\vec{a}=(1,2,5)$, $\vec{b}=(-1,6,3)$, $\vec{c}=(0,0,2)$, $\vec{d}=(1,0,4)$.

3. У деякому початковому базисі вектори задані: a=(1, 1, 2), e_1=(2, 2, -1), e_2=(0, 4, 8), e_3=(-1, -1, 3). Показати, що вектори e_1, e_2, e_3 утворюють новий базис, знайти в ньому координати вектора a.

9 СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Означення. Скалярним добутком $\overline{a}\cdot\overline{b}$ двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число (скаляр), що дорівнює добутку довжин (модулів) цих векторів на косинус кута між ними, і записують:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi,\text{ де } \angle\varphi=\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right) - \text{кут між векторами } \overline{a} \text{ і } \overline{b}.$$

За означенням, скалярний добуток – це добуток трьох чисел, з яких два (модулі векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$) завжди додатні, а третє – $\cos\varphi$ може бути як додатнім, так і від'ємним, а також дорівнювати нулю, залежно від $\angle\varphi$.

Нагадаємо, що $\angle\varphi\in\left[0;\pi\right]$, при цьому, якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ ненульові, то:

1) якщо $\overline{a}\cdot\overline{b}>0$, то $\cos\varphi>0$ і $\varphi\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$;

Зауважимо, що при $\varphi=0^\circ$, $\cos\varphi=1$ і $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|$;

2) якщо $\overline{a}\cdot\overline{b}<0$, то $\cos\varphi<0$ і $\varphi\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$;

Зауважимо, що при $\varphi=\pi$, $\cos\varphi=-1$ і $\overline{a}\cdot\overline{b}=-\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|$;

3) якщо $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, то $\cos\varphi=0$ і $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, тобто $\overline{a}\perp\overline{b}$;

4) якщо $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{a}$, то $\overline{a}^2=\overline{a}\cdot\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{a}\right|\cdot\cos0^\circ=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{a}\right|=\left|a\right|^2$, тобто $\overline{a}^2=\left|\overline{a}\right|^2$ – *скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини*.

Потрібно пам'ятати, що *вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ ортогональні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю:*

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=0\Leftrightarrow\overline{a}\perp\overline{b}.$$

Згадаємо, що за означенням проекції $Пр_{\overline{b}}\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cos\varphi$, де $\angle\varphi=\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)$, тоді:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi=\left|\overline{b}\right|\cdot Пр_{\overline{b}}\overline{a}.$$

Тоді одержимо $Пр_{\overline{b}}\overline{a}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}$.

Аналогічно $Пр_{\overline{a}}\overline{b}=\left|\overline{b}\right|\cos\varphi$, де $\angle\varphi=\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)$, тоді:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi=\left|\overline{a}\right|\cdot Пр_{\overline{a}}\overline{b},\ Пр_{\overline{a}}\overline{b}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|}.$$

Отже, можна сказати, що *проекція вектора на вектор – це відношення скалярного добутку цих векторів до довжини вектора, на якій проектують.*

Скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами: $\overline{a}\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $\overline{b}\left(x_2,y_2,z_2\right)$ знаходять за допомогою формули:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Отже, *скалярний добуток векторів, які задані своїми координатами дорівнює сумі добутків відповідних координат.*

Приклад:

Знайти скалярний добуток векторів $\overline{a}\left(-2;3;4\right)$ і $\overline{b}\left(1;-1;5\right)$.

Обчислимо $\overline{a}\cdot\overline{b}=-2\cdot1+3\cdot\left(-1\right)+4\cdot5=-2-3+20=15$.

Відповідь: $\overline{a}\cdot\overline{b}=15$.

Зауваження. Використовуючи скалярний добуток векторів можна знайти косинус кута між векторами, а отже, і сам кут:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\left(\overline{a},\overline{b}\right);$$

$$\cos\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|};$$

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задані своїми координатами $\overline{a}\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $\overline{b}\left(x_2,y_2,z_2\right)$, то:

$$\cos\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\cdot\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}}.$$

Розглянемо приклади:

1. Знайти скалярний добуток векторів $\overline{c}\cdot\overline{d}$, якщо вектор $\overline{c}=2\overline{a}-3\overline{b}$, $\overline{d}=4\overline{a}+5\overline{b}$ і $\left|\overline{a}\right|=2$; $\left|\overline{b}\right|=4$; $\angle\left(\overline{a};\overline{b}\right)=\frac{\pi}{3}$.

$$\overline{c}\cdot\overline{d}=\left(2\overline{a}-3\overline{b}\right)\cdot\left(4\overline{a}+5\overline{b}\right)=8\overline{a}^2+10\overline{a}\overline{b}-12\overline{a}\overline{b}-15\overline{b}^2=8\left|\overline{a}\right|^2-2\overline{a}\overline{b}-15\left|\overline{b}\right|^2=$$

$$=8\left|\overline{a}\right|^2-2\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\left(\overline{a},\overline{b}\right)-15\left|\overline{b}\right|^2=8\cdot2^2-2\cdot2\cdot4\cdot\cos\frac{\pi}{3}-15\cdot4^2=$$

$$=8\cdot4-16\cdot\frac{1}{2}-15\cdot16=-216.$$

Відповідь: $\overline{c}\cdot\overline{d}=-216$.

2. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}=2\overline{i}-\overline{j}$, $\overline{b}=-\overline{j}+2\overline{k}$, як на сторонах (рисунок 9.1).

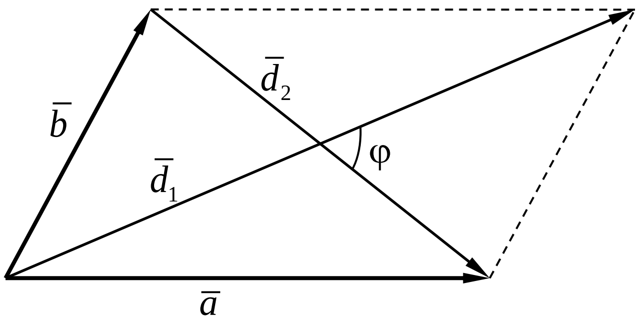


Рисунок 9.1

Вектори задані координатами: $\overline{a}\left(2;-1;0\right)$; $\overline{b}\left(0;-1;2\right)$. Діагоналі паралелограма дорівнюють:

$$\overline{d}_1=\overline{a}+\overline{b}=\left(\overline{2;-1;0}\right)+\left(\overline{0;-1;2}\right);$$

$$\overline{d}_1=(2;-2;2);$$

$$\overline{d}_2=\overline{a}-\overline{b}=\left(\overline{2;-1;0}\right)-\left(\overline{0;-1;2}\right);$$

$\bar{d}_2 = (2;0;-2)$.

$\angle\varphi$ – це шуканий кут між діагоналями паралелограма.

Для його знаходження використовуємо, що діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, тобто $\frac{\bar{d}_1}{2}(1;-1;1)$; $\frac{\bar{d}_2}{2}(1;0;-1)$.

Тоді, $\angle\varphi = \angle\left(\frac{\bar{d}_1}{2};\frac{\bar{d}_2}{2}\right)$, і $\cos\varphi = \cos\left(\frac{\bar{d}_1}{2};\frac{\bar{d}_2}{2}\right)$;

$$\cos\left(\frac{\bar{d}_1}{2};\frac{\bar{d}_2}{2}\right) = \frac{\frac{\bar{d}_1}{2}\cdot\frac{\bar{d}_2}{2}}{\left|\frac{\bar{d}_1}{2}\right|\cdot\left|\frac{\bar{d}_2}{2}\right|};\ \left|\frac{\bar{d}_1}{2}\right| = \sqrt{3};\ \left|\frac{\bar{d}_2}{2}\right| = \sqrt{2}.$$

Маємо:

$$\cos\left(\frac{\bar{d}_1}{2};\frac{\bar{d}_2}{2}\right) = \frac{\left(\overline{1;-1;1}\right)\cdot\left(\overline{1;0;-1}\right)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = 0.$$

Отже, $\cos\left(\frac{\bar{d}_1}{2};\frac{\bar{d}_2}{2}\right) = 0$, тобто $\cos\varphi = 0$, $\angle\varphi = 90^\circ$, тому $\frac{\bar{d}_1}{2}\perp\frac{\bar{d}_2}{2}$.

Відповідь: діагоналі паралелограма взаємно перпендикулярні, $\angle\varphi = 90^\circ$.

3. Знайти проекцію вектора $\bar{c}$ на вектор $\bar{b}$, якщо $\tilde{n} = 2\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a}(2;0;-2)$, $\bar{b}(-2;1;2)$.

Спочатку знайдемо координати $\bar{c}$:

$\bar{c} = 2\left(\overline{2;0;-2}\right) + \left(\overline{-2;1;2}\right)$; $\bar{c} = \left(\overline{4;0;-4}\right) + \left(\overline{-2;1;2}\right)$; $\bar{c} = \left(\overline{2;1;-2}\right)$.

$$Пр_{\bar{b}}\bar{c} = \frac{\bar{c}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{b}\right|} = \frac{\left(\overline{2;1;-2}\right)\cdot\left(\overline{-2;1;2}\right)}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{-4+1-4}{\sqrt{9}} = \frac{-7}{\sqrt{9}} = -\frac{7}{3}.$$ Знак "–" означає, що вектор проекції і вектор $\bar{b}$ протилежно напрямлені.

Відповідь: $Пр_{\bar{b}}\bar{c} = -\frac{7}{3}$.

4. Трикутник ABC заданий координатами своїх вершин $A(-2;-1;4)$, $B(-2;-4;0)$, $C(-2;3;1)$. Знайти внутрішній кут при вершині B і зовнішній при вершині C.

$\angle ABC = \left(\overline{BA},\overline{BC}\right)$(рисунок 9.2).

Використовуємо формулу для знаходження косинуса кута між векторами $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$:

$$\cos\left(ABC\right) = \cos\left(\overline{BA}, \overline{BC}\right) = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|}.$$

Знаходимо координати векторів $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$ і їх довжини:

$\overline{BA}(0;3;4)$, $\overline{BC}(0;7;1)$;

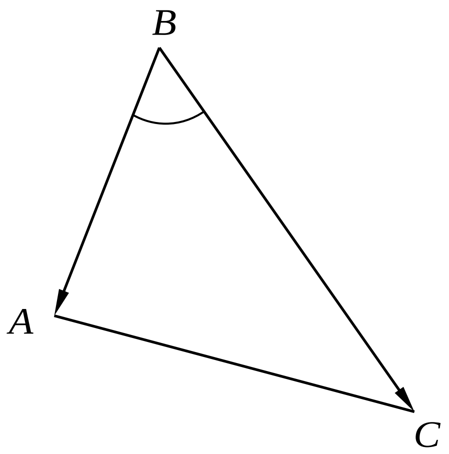


Рисунок 9.2

$\left|\overline{BA}\right| = \sqrt{0^2+3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$;

$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = \sqrt{25\cdot 2} = 5\sqrt{2}$.

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$:

$\overline{BA}\cdot\overline{BC} = \left(\overline{0;3;4}\right)\cdot\left(\overline{0;7;1}\right) = 0\cdot 0 + 3\cdot 7 + 4\cdot 1 =$

$= 21 + 4 = 25,$

тоді: $\cos\left(ABC\right) = \dfrac{25}{5\cdot 5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Отже, $\angle ABC = 45^\circ$.

Для знаходження зовнішнього кута при вершині C (рисунок 9.3) використовуємо:

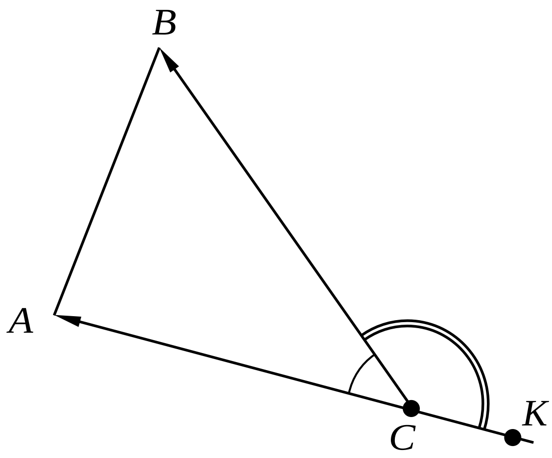


Рисунок 9.3

$\angle BCK = 180^\circ - \angle BCA$.

Спочатку знайдемо внутрішній кут при вершині C ($\angle BCA$):

$$\cos\left(BCA\right) = \cos\left(\overline{CB}, \overline{CA}\right) = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{\left|\overline{CB}\right|\cdot\left|\overline{CA}\right|}.$$

$\overline{CA}(0;-4;3)$; $\left|\overline{CA}\right| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

$\overline{CB}(0;-7;-1)$; $\left|\overline{CB}\right| = \left|\overline{BC}\right| = 5\sqrt{2}$.

$\overline{CA}\cdot\overline{CB} = \left(\overline{0;-4;3}\right)\cdot\left(\overline{0;-7;-1}\right) = 0\cdot 0 + (-4)\cdot(-7) + 3\cdot(-1) = 28 - 3 = 25$;

$\cos\left(BCA\right) = \dfrac{25}{5\cdot 5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\angle BCA = 45^\circ$, $\angle BCK = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Відповідь: внутрішній кут при вершині B дорівнює 45°, а зовнішній при вершині С дорівнює 135°.

Означення. Кути α, β, γ, які утворює вектор $\overline{a}$ відносно додатних напрямів осей координат називають **напрямними кутами** вектора $\overline{a}$ (рисунок 9.4).

$$\angle\alpha = \angle\left(\overline{a}, OX^{+}\right); \angle\beta = \angle\left(\overline{a}, OУ^{+}\right); \angle\gamma = \angle\left(\overline{a}, OZ^{+}\right).$$

Косинуси напрямних кутів називають **напрямними косинусами**: $\cos\alpha$; $\cos\beta$; $\cos\gamma$.

Якщо вектор $\overline{a}$ заданий координатами, то з означення проекції вектора на вісь одержуємо:

$$\overline{a}\left(x, y, z\right) \Rightarrow \begin{cases} x = Пр_{OX}\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\alpha \\ y = Пр_{OУ}\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\beta \\ z = Пр_{OZ}\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{\left|\overline{a}\right|} \\ \cos\beta = \dfrac{y}{\left|\overline{a}\right|} \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{\left|\overline{a}\right|} \end{cases}. \ (*)$$

Оскільки: $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

– формули для знаходження напрямних косинусів вектора $\overline{a}$.

Зауваження: згадаємо, що $\overline{a}^0\left(\dfrac{x}{\left|\overline{a}\right|}; \dfrac{y}{\left|\overline{a}\right|}; \dfrac{z}{\left|\overline{a}\right|}\right)$ – координати орта $\overline{a}^0$ вектора $\overline{a}$, то з урахуванням формули (*) одержуємо, що $\left(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\right)$ – це координати орта $\overline{a}^0$ вектора $\overline{a}$.

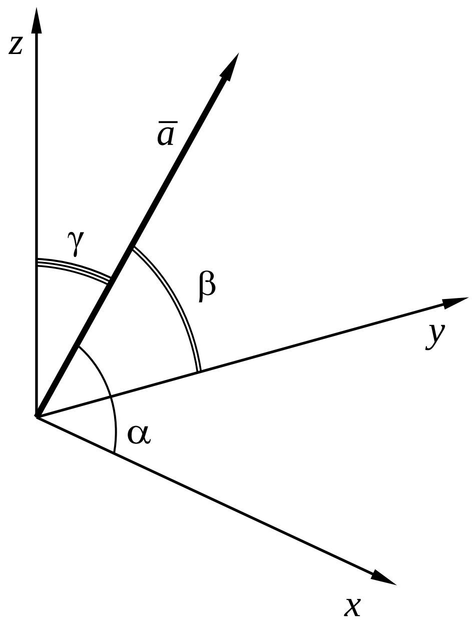


Рисунок 9.4

Якщо кожну рівність (*) піднести до квадрату і додати відповідні частини, то одержимо:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

Отже, *сума квадратів напрямних косинусів вектора дорівнює одиниці:*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

З фізичного погляду:

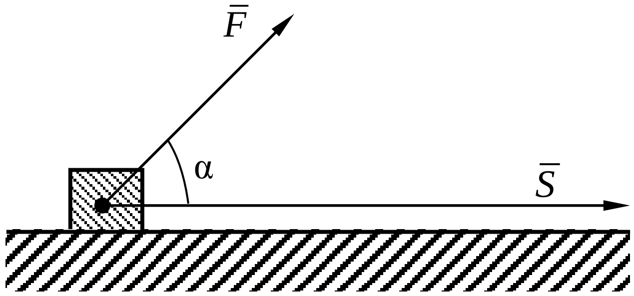


Рисунок 9.5

Згадаємо, що робота A сили $\overline{F}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\overline{S}$, який утворює з вектором $\overline{F}$ кут α дорівнює: $A = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{S}\right| \cdot \cos\alpha$ (рисунок 9.5), або за означенням скалярного добутку $A = \overline{F} \cdot \overline{S}$ ($Дж = H \cdot м$).

Отже, *робота дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення.*

Розглянемо приклади:

1. Обчислити роботу, яку виконує сила $\overline{F}(2;-1;4)$ при прямолінійному переміщенні точки з $M(-1;0;3)$ в $N(2;-3;5)$.

Знайдемо вектор переміщення $\overline{S} = \overline{MN}$, $\overline{MN}(3;-3;2)$.

$A = \overline{F} \cdot \overline{S} = \overline{F} \cdot \overline{MN} = \left(\overline{2;-1;4}\right) \cdot \left(\overline{3;-3;2}\right) = 6 + 3 + 8 = 17$.

Відповідь: $A = 17\,(Дж)$.

2. На точку M діє сила $\overline{F}(3;4)$, яка переміщує точку M на вектор $\overline{S}(7;1)$. Обчислити роботу. Визначити кут між вектором сили $\overline{F}$ і вектором переміщення $\overline{S}$.

Визначимо роботу A:

$A = \overline{F} \cdot \overline{S} = \left(\overline{3;4}\right) \cdot \left(\overline{7;1}\right) = 21 + 4 = 25$.

Використовуємо зауваження до скалярного добутку векторів, одержуємо:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{F} \cdot \overline{S}}{\left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{S}\right|} = \frac{A}{\left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{S}\right|} = \frac{25}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, отже $\alpha = 45°$.

Відповідь: $A = 25\,(Дж)$; $\alpha = 45°$.

10 ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ЗА ТЕМОЮ «СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ»

1. Обчислити скалярний добуток векторів, заданих своїми координатами:

1) *a*=(4, -3), *b*=(2, 1); 2) *a*=(5, -6), *b*=(3, 2);
3) *a*=(1, -3, 4), *b*=(5, 1, 2); 4) *a*=(6, -2, 1), *b*=(1, 8, -3);
5) *a*=(7, -3, 9), *b*=(3, 7, 0); 6) *a*=(4, 2, -5), *b*=(2, 6, 4).

2. Обчислити скалярний добуток векторів *a* і *b*, які утворюють кут φ у таких випадках:

1) $|a| = 2, |b| = 5, \phi = 0$; 2) $|a| = 3, |b| = 4, \phi = \frac{\pi}{3}$;

3) $|a| = 7, |b| = 9, \phi = \pi / 2$; 4) $|a| = 6, |b| = \sqrt{2}, \phi = 3\pi / 4$.

3. Вектори *a* и *b* утворюють кут φ=2π/3 і |*a*|=3, |*b*|=4. Обчислити: a^2; b^2; $(a+b)^2$; $(a-b)^2$; $(3a-2b)\cdot(a+2b)$.

4. Для заданих векторів *a*=(4, -2, -4), *b*=(6, -3, 2) обчислити: $a\cdot b$; a^2; b^2; $(a+b)^2$; $(a-b)^2$; $(2a-3b)\cdot(a+2b)$.

5. Знайти $(5a+3b)\cdot(2a-b)$, якщо довжина вектора *a=2*,і довжина вектора *b=3*, $a \perp b$.

6. Знайти скалярний добуток векторів *3a-2b* і *5a-6b*, якщо довжина вектора *a=4*, довжина вектора *b=6* і кут між векторами *a* і *b* дорівнює π/3.

7. Знайти скалярний добуток векторів *2a+3b+4c* і *5a+6b+7c*, якщо довжина вектора *a=1, b=2, c=3*, а кути між векторами $\left(a,b\right) = \left(a,c\right) = \left(b,c\right) = \pi / 3$.

8. При якому значенні *α* вектори *a=αi-3j+2k* і *b=i+2j-αk* взаємно перпендикулярні?

9. При якому значенні *m* вектори *a=mi+3j+4k* и *b=4i+mj-7k* взаємно перпендикулярні?

10. Знайти координати вектора *b*, який колінеарний вектору *a*=(2, 1, -1) за умови $a\cdot b=3$.

11. Знайти координати вектора *x*, який колінеарний вектору *a*=(1, -2, 2) за умови $x\cdot a=-18$.

12. Для векторів *a*=(2, 3, -5) і *b*=(4, 5, -6) знайти вектор *x*, який перпендикулярний до осі Oz і задовольняє вимогам : $x\cdot a=2$, $x\cdot b=8$.

13. Для векторів: *a*=(1, 2, 2), *b*=(4, -2, -5), *c*=(6, -1, 3) знайти вектор *x*, який задовольняє умовам: $a\cdot x=3$, $b\cdot x=5$, $c\cdot x=1$.

14. Знайти кут між векторами:

1) *a*=(5, 6), *b*=(6, -5); 2) *a*=(3, 4), *b*=(5, 12);

3) *a*=(4, -10, 1), *b*=(11, -8, -7); 4) *a*=(2, 1, -2), *b*=(2, 4, 4).

15. Знайти косинус кута між векторами:

а) *a*=(2, -4, 4), *b*=(-3, 2, 6);

б) *a*=($\sqrt{2}$, 1, -1), *b*=(1, 0, 0);

в)) *a*=(1, 3, $\sqrt{6}$), *b*=(1, 1, 0).

16. Знайти внутрішні кути трикутника з вершинами в точках A(1, 7, 2), B(5, -3, 3), C(12, -1, -5).

17. Для трикутника ABC з вершинами в точках: A(-1, -2, 4), B(-4, -2, 0), C(3, -2, 1), обчислити зовнішній кут при вершині B.

18. Для трикутника ABC з вершинами в точках: A(1, -1, 5), B(-2, -1, 1), C(5, -1, 2), обчислити зовнішній кут при вершині B.

19. Для трикутника ABC з вершинами в точках: A(4, 3, -1), B(6, 2, 0), C(2, -1, 2) довести, що кути при вершинах A і B рівні між собою.

20. Обчислити проекцію вектора *a*=(1, -2, 2) на вектор *b*=(2, 10, 11).

21. Дано вектори: a=(10, 2, -11) і b=(-2, 1, -2). Обчислити проекцію кожного з цих векторів на вісь іншого вектора: $np_a b$ і $np_b a$.

22. Дано три вектори $a=7i-5j+3k$, $b=-2i+4j-7k$, $c=4i+4j-2k$. Обчислити $np_c(a+b)$.

23. Для заданих векторів: $a=4i+3j+8k$, $b=4i-9j+8k$, $c=7i+j-6k$. Обчислити $np_{b+c}a$.

24. Дано вектори: $a=2i+2j+k$, и $b=6i+3j+2k$. Обчислити проекцію кожного з цих векторів на вісь іншого вектора: $np_a b$ і $np_b a$.

25. Для заданих векторів $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$ і $\vec{b}=4\vec{j}-6\vec{k}$ визначити проекції на координатні осі наступних векторів:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $-3\vec{a}$; 4) $5\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

26. Обчислити координати x, y, z вектора a, якщо $|\vec{a}|=2$, $\alpha=\pi/4$, $\beta=\pi/3$, $\gamma=2\pi/3$, де α, β, γ – кути, що утворює вектор a з осями x, y, z відповідно.

27. Знайти координати вектора a, если $|\vec{a}|=3$, $\alpha=\beta=\gamma$, де α, β, γ – кути, що утворює вектор a з осями x, y, z відповідно.

28. Вектор $\overline{OM}$ складає з осями координат рівні гострі кути. Знайти ці кути, якщо довжина вектора дорівнює $2\sqrt{3}$.

29. Знайти координати вектора a, якщо відомі кути α, β, γ, які утворює вектор a з осями x, y, z відповідно та довжина вектора:

1) $|a|=4, \alpha=60°, \beta=45°, \gamma=60°$; 2) $|a|=8, \alpha=135°, \beta=60°, \gamma=60°$;

3) $|a|=2, \alpha=120°, \beta=45°, \gamma=120°$; 4) $|a|=6, \alpha=120°, \beta=60°, \gamma=45°$.

30. Обчислити довжину вектора $\vec{a}=6\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ і кути, які він утворює з осями координат.

31. Під дією сили F=(5, 4, 3) тіло перемістилось з початку вектора s=(2, 1, -2) в його кінець. Обчислити роботу A сили F і кут φ між напрямом дії сили і вектором переміщення.

32. Три сили F_1, F_2, F_3, прикладені до однієї точки, мають взаємно перпендикулярні напрями. Визначити величину їх рівнодійної сили F, якщо відомо, що $|F_1|=22H, |F_2|=20H, |F_3|=4H$.

33. Дано проекції сили F на координатні осі: $X=5$, $У=5\sqrt{2}$, $Z=-5$. Знайти величину сили F і напрямні кути вектора дії сили.

34. Дано проекції сили F на координатні осі: $X=4$, $У=4$, $Z=-4\sqrt{2}$. Знайти величину сили F і напрямні кути вектора дії сили.

35. На точку подіяли трьома силами: F_1 =(2, -1, 3), F_2 =(-1, -2, -2), F_3 =(3, -1, 1). Знайти величину и напрямні кути їх рівнодійної сили.

36. Обчислити роботу, виконану силою F=(8, 4, -6) при переміщенні її точки прикладання з початку в кінець вектора s=(5, -3, 2).

37. Обчислити роботу, виконану силою F=(4, 7, -1) при переміщенні її точки прикладання з точки A(3, 5, 9) в точку B(4, 8, 11).

38. Три сили F_1 =(1, -3, 4), F_2 =(2, 6, -5), F_3 =(7, -8, 9) прикладені в одній точці. Обчислити роботу, виконану рівнодійною трьох сил , якщо точка прикладання рухається з точки A(3, -2, 4) в точку B(6, 8, 7).

39. Знайти роботу сили F при переміщенні на вектор s, якщо $|F| = 2, |s| = 5$ і кут між вектором сили і вектором переміщення $\varphi = \left(\widehat{F, s} \right) = \pi / 6$.

40. Вектори a і b перпендикулярні, причому довжина вектора $|a| = 4, |b| = 3$. Знайти $|a| + |b|; |a| - |b|$.

41. Вектори a і b утворюють кут φ=60º. Знайти $|a + b|$ і $|b - a|$, якщо відомо, що довжина вектора $|a| = 2, |b| = 2$.

42. Для заданих векторів a і b таких, що $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|a + b| = 24$. Знайти $|a - b|$.

43. Для заданих векторів a і b таких, що $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|a - b| = 30$. Знайти $|a + b|$

11 ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Означення. Впорядкована трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, які виходять із спільного початку, називається правою, якщо ставши в кінець третього вектора $\bar{c}$ найменший кут повороту від першого вектора $\bar{a}$ до другого $\bar{b}$ ми бачимо проти руху годинникової стрілки (рисунок 11.1, а), якщо найменший кут повороту від першого вектора $\bar{a}$ до другого вектора $\bar{b}$ ми бачимо за рухом годинникової стрілки, то впорядкована трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – ліва (рисунок 11.1, б).

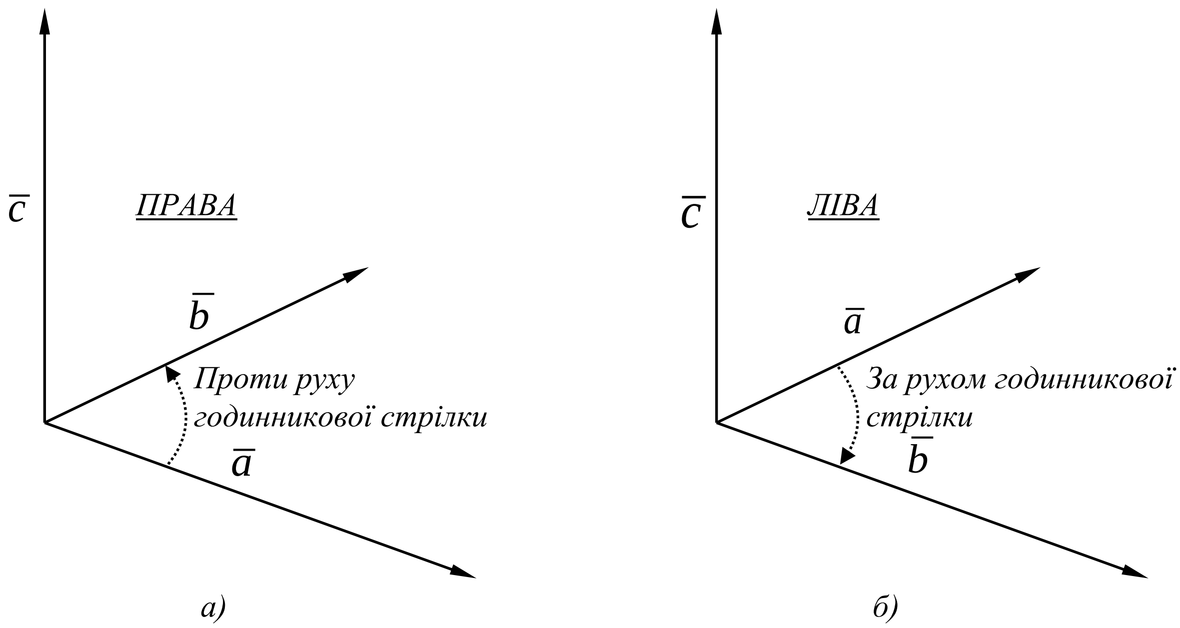


Рисунок 11.1

Декартова система координат називається правою (лівою), якщо базисні вектори утворюють праву (ліву) впорядковану трійку векторів.

Означення. Векторним добутком вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ називають третій вектор $\bar{c}$, який задовольняє таким трьом умовам:

1. Модуль (довжина) вектора $\bar{c}$ дорівнює добутку модулів (довжин) векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ помножених на синус кута між ними:

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi, \text{ де } \angle\varphi = \left(\bar{a}, \bar{b}\right).$$

2. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$$\bar{c} \perp \bar{a}; \bar{c} \perp \bar{b}.$$

3. Вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють праву трійку векторів (якщо вектор $\bar{c}$ не є нульовим).

Позначають векторний добуток: $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, або $\bar{c} = \left[\bar{a} \times \bar{b}\right]$, або $\bar{c} = \left[\bar{a}\bar{b}\right]$.

Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні:

$$\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

Оскільки $a \cdot b \cdot \sin\varphi = S_{паралелограма}$, то модуль векторного добутку неколінеарних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, що виходять із спільного початку, як на сторонах (рисунок 11.2).

Оскільки $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$; то $\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = |\bar{c}|$, а, використовуючи означення векторного добутку, $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$.

Отже, $S_{паралелограма} = |\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$,

де $\angle\varphi = \left(\bar{a}, \bar{b}\right)$, тобто

$$S_{паралелограма} = |\bar{c}| = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|.$$

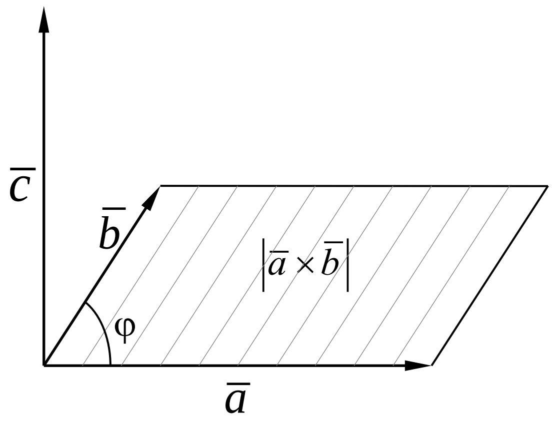


Рисунок 11.2

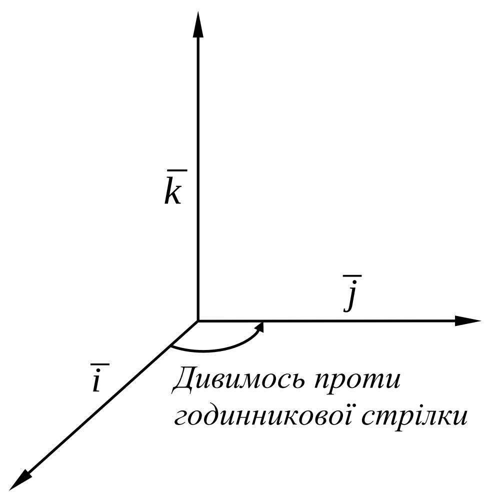


Рисунок 11.3

Якщо орти $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ утворюють праву трійку векторів (рисунок 11.3), то векторні добутки ортів задовольняють умовам:

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}; \; \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i};$$

$$\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}.$$

За антикомутативною властивістю:

$$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}; \; \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i};$$

$$\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}.$$

За властивістю колінеарних векторів:

$$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{0};\ \bar{j}\times\bar{j}=\bar{0};\ \bar{k}\times\bar{k}=\bar{0}.$$

Векторний добуток двох векторів, заданих своїми координатами: $\bar{a}(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{b}(x_2,y_2,z_2)$ *знаходять за допомогою визначника, в якому в першому рядку записують орти* $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, *в другому рядку записують координати першого множника – вектора* $\bar{a}$, *в третьому – координати другого множника – вектора* $\bar{b}$:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\bar{k},$$

$$\text{або } \bar{a}\times\bar{b}=\tilde{n};\ \tilde{n}\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right).$$

Нагадаємо, що визначник обчислюється за правилом розкладу за першим рядком.

Зауваження 1. Якщо в площині *OXY* потрібно обчислити площу паралелограма, побудованого на неколінеарних векторах $\bar{a}(x_1,y_1)$, $\bar{b}(x_2,y_2)$, як на сторонах, то:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & 0\\ x_2 & y_2 & 0\end{vmatrix}=\bar{k}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix};$$

$$\text{тобто: } \bar{a}\times\bar{b}=\tilde{n},\ \tilde{n}\left(0;0;\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right).$$

$$S_{паралелограма}=|\bar{c}|=|\bar{a}\times\bar{b}|,\ S_{паралелограма}=\mathrm{mod}\left(\overline{0;0;\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}}\right)$$

$$S_{паралелограма}=\sqrt{\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2}$$

Зауваження 2. Якщо потрібно обчислити площу трикутника заданого координатами своїх вершин $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$, то доповнивши трикутник *ABC* до паралелограма *ABDC* (рисунок 11.4) одержимо,

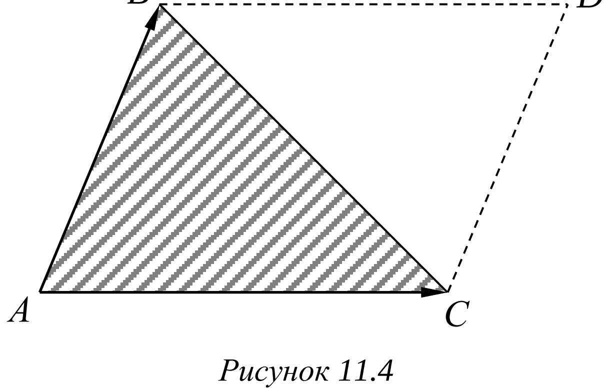


Рисунок 11.4

$$S_{трикутника\ ABC}=\frac{1}{2}S_{паралелограма\ ABDC}=$$
$$=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

Знайдемо координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}\left(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right);$$
$$\overline{AC}\left(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\right),\ \text{тоді:}$$

$$S_{трикутника\ ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\left(\overline{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}}\right),$$

остаточно одержимо

$$S_{трикутника\ ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\left(-\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\right)^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}.$$

Якщо трикутник ABC лежить у площині OXY, то $z_1=z_2=z_3=0$, і формула для обчислення прощі трикутника набуває вигляду:

$$S_{трикутника\ ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}=$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\left(\overline{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & 0\\ y_3-y_1 & 0\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}x_2-x_1 & 0\\ x_3-x_1 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}}\right).$$

$$S_{трикутника\ ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}.$$

Розглянемо приклади:

1. Знайти вектор $\bar{c}$, перпендикулярний до векторів $\bar{a}\left(1;2;3\right)$ і $\bar{b}\left(3;-5;4\right)$.

За означенням векторного добутку:

$\bar{a}\times\bar{b}=\tilde{n}$; $\tilde{n}\perp\bar{a}$ і $\tilde{n}\perp\bar{b}$, тоді:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & -5 & 4\end{vmatrix}=23\bar{i}+5\bar{j}-11\bar{k}.$$

Отже, вектор $\bar{c}(23;5;-11)$. Оскільки $\bar{c}$ і $-\bar{c}$ колінеарні, але протилежно-напрямлені, то вектор $-\bar{c}(-23;-5;11)$ буде також перпендикулярний до векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Відповідь: вектори $\bar{c}(23;5;-11)$ і $-\bar{c}(-23;-5;11)$ перпендикулярні до векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

2. Знайти модуль векторного добутку векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо $\bar{a}=2\bar{m}-3\bar{n}$; $\bar{b}=3\bar{m}+4\bar{n}$ і $|\bar{m}|=2$; $|\bar{n}|=3$, $\left(\widehat{\bar{m},\bar{n}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

Спочатку знайдемо векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, враховуючи, що числовий множник можна винести за знак добутку:

$$\bar{a}\times\bar{b}=(2\bar{m}-3\bar{n})\times(3\bar{m}+4\bar{n})=6(\bar{m}\times\bar{m})-9(\bar{n}\times\bar{m})+8(\bar{m}\times\bar{n})-12(\bar{n}\times\bar{n}).$$

Використовуємо властивості векторного добутку, маємо:

$\bar{n}\times\bar{m}=-(\bar{m}\times\bar{n})$, $\bar{m}\times\bar{m}=0$, $\bar{n}\times\bar{n}=0$, тоді

$\bar{a}\times\bar{b}=17(\bar{m}\times\bar{n})$;

Таким чином, $|\bar{a}\times\bar{b}|=17|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cdot\sin\left(\widehat{\bar{m},\bar{n}}\right)=17\cdot2\cdot3\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=17\cdot2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}=51.$

Відповідь: $|\bar{a}\times\bar{b}|=51$.

3. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\bar{a}(-1;2;1)$ і $\bar{b}(-2;-1;3)$.

Оскільки $\bar{a}\times\bar{b}=\tilde{n}$, і $|\tilde{n}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$, то $|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$, звідки:

$$\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\frac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}.$$

Знайдемо спочатку векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 2 & 1\\ -2 & -1 & 3\end{vmatrix}=7\bar{i}+1\bar{j}+5\bar{k};$$

тоді:

$$|\bar{a}\times\bar{b}|=\left|\overline{(7;1;5)}\right|=\sqrt{7^2+1^2+5^2}=\sqrt{49+1+25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}.$$

Знайдемо довжини векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$$|\bar{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6};$$

$$\left|\overline{b}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 3} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14};$$

$$\sin\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{28}} = \frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

Відповідь: $\sin\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

4. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}(1;2;3)$, $\overline{b}(3;-5;4)$ як на сторонах.

$S_{паралелограма} = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$, знайдемо векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}\overline{k} = 23\overline{i} - (-5)\overline{j} - 11\overline{k};$$

$$\overline{a}\times\overline{b} = \left(\overline{23;5;-11}\right);$$

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \left|\left(\overline{23;5;-11}\right)\right| = \sqrt{23^2 + 5^2 + (-11)^2} = \sqrt{529+25+121} = \sqrt{675} = 15\sqrt{3}.$$

Відповідь: $S_{паралелограма} = 15\sqrt{3}$ (квадратних одиниць).

5. Знайти висоту паралелограма (рисунок 11.5), проведену з вершини B до сторони AD, якщо вершини паралелограма знаходяться в точках: $A(2;-1;1)$, $B(2;-6;5)$, $C(-1;3;1)$, $D(-1;8;-3)$.

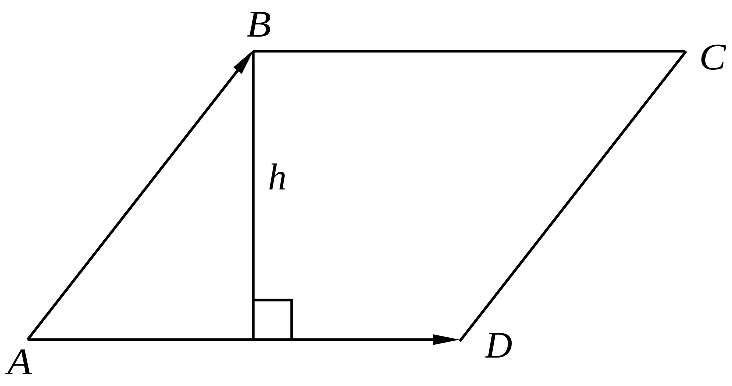


Рисунок 11.5

За відомою формулою:
$S_{ABCD} = h\cdot\left|\overline{AD}\right|$, звідки:

$$h = \frac{S_{ABCD}}{\left|\overline{AD}\right|}.$$

Як відомо, $S_{ABCD} = \left|\overline{AB}\times\overline{AD}\right|$,

тоді $h = \dfrac{\left|\overline{AB}\times\overline{AD}\right|}{\left|\overline{AD}\right|}$.

Знайдемо координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$:

$\overline{AB}(0;-5;4)$; $\overline{AD}(-3;9;-4)$.

Знайдемо їх векторний добуток:

$$\overline{AB}\times\overline{AD} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -5 & 4 \\ -3 & 9 & -4 \end{vmatrix} = -16\overline{i} - 12\overline{j} - 15\overline{k}, \text{ тоді:}$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AD}\right| = \left|\left(\overline{-16;-12;-15}\right)\right| = \sqrt{(-16)^2+(-12)^2+(-15)^2} = \sqrt{256+144+225} =$$

$$= \sqrt{625} = 25;$$

$$\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{(-3)^2+9^2+(-4)^2} = \sqrt{9+81+16} = \sqrt{106}\,;$$

$$h = \frac{25}{\sqrt{106}} = \frac{25\sqrt{106}}{106}\,.$$

Відповідь: $h = \dfrac{25\sqrt{106}}{106}$ (одиниць довжини).

6. Знайти площу трикутника з вершинами в точках $A(1;2;0)$, $B(0;-2;1)$, $C(-1;0;2)$.

$$S_{трикутника\ ABC} = \frac{1}{2}S_{паралелограма\ ABDC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$$

Знайдемо координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$:

$\overline{\text{ÀÂ}}(-1;-4;1)$;

$\overline{\text{ÀÑ}}(-2;-2;2)$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}\overline{k} = -6\overline{i} - 0\overline{j} - 6\overline{k}\,;$$

$$\overline{\text{ÀÂ}}\times\overline{\text{ÀÑ}} = \left(\overline{-6;0;-6}\right)$$

$$S_{трикутника\ ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\overline{-6;0;-6}\right)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+0^2+(-6)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+36} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{72} = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Відповідь: $S_{трикутника\ ABC} = 3\sqrt{2}$ (квадратних одиниць).

З фізичного погляду:

Відомо, що момент сили M є векторна величина, яка чисельно дорівнює добутку сили на плече й вектор моменту сили напрямлений по осі обертання так, що коли дивитись з його кінця, то обертання тіла відбувається проти руху годинникової стрілки.

Якщо на тіло закріплене в точці O діє сила $\overline{F}$, прикладена в точці A, то тіло обертається навколо осі l, причому $\left|\overline{M}\right| = \left|\overline{F}\right|\cdot h$, де h – плече, тобто відстань від точки, відносно якої шукають момент сили до лінії дії сили (на рисунку 11.6

плече h – це відрізок ON, відрізок NA – лінія дії сили $\overline{F}$). Виразимо плече h через вектор $\overline{OA} = \overline{R}$, де $\overline{R}$ – радіус вектор точки A в яку прикладена сила $\overline{F}$.

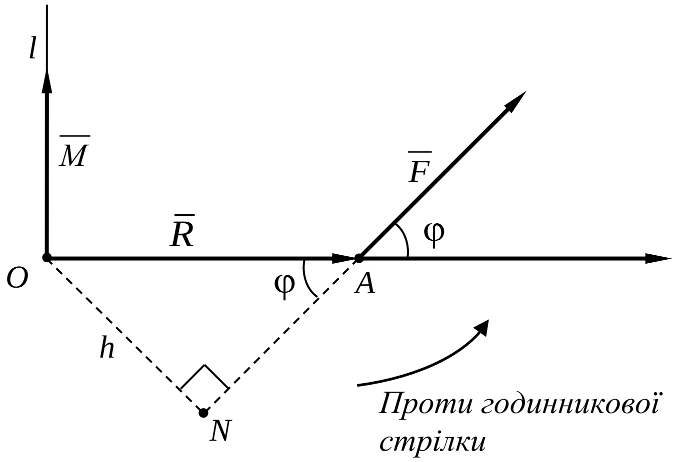


Рисунок 11.6

$$h = \left|\overline{OA}\right| \cdot \sin\varphi = \left|R\right| \cdot \sin\varphi,$$

тоді $\left|\overline{M}\right| = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{R}\right| \cdot \sin\varphi$,

оскільки обертання тіла відбувається проти годинникової стрілки, то впорядкована трійка векторів $\overline{R}, \overline{F}, \overline{M}$ повинна бути правою, тому за властивостями векторного добутку:

$$\overline{M} = \overline{R} \times \overline{F} \text{ і } \left|\overline{M}\right| = \left|\overline{R} \times \overline{F}\right|.$$

Розглянемо приклади:

1. Сила $\overline{F}(4;-3;-7)$ прикладена в точці $A(1;6;5)$. Знайти момент сили відносно початку координат точки O.

Як відомо $\overline{M} = \overline{R} \times \overline{F}$, де $\overline{R} = \overline{OA}$; $\overline{OA}(1;6;5)$.

$$\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & -7 \end{vmatrix} = -27\overline{i} + 27\overline{j} - 27\overline{k}.$$

Відповідь: $\overline{M}(-27;27;-27)$.

2. Сила $\overline{F}(2;4;6)$ прикладена в точці $A(3;-5;7)$. Знайти момент сили відносно точки $B(1;-8;9)$.

Аналогічно: $\overline{M} = \overline{R} \times \overline{F}$, де $\overline{R} = \overline{BA}$; $\overline{BA}(2;3;-2)$.

$$\overline{M} = \overline{BA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 26\overline{i} - 16\overline{j} + 2\overline{k}.$$

Відповідь: $\overline{M}(26;-16;2)$.

3. Сила $\overline{F}(3;-4;2)$ прикладена в точці $A(2;1;2)$. Знайти величину й напрямні косинуси моменту сили відносно початку координат точки O.

$$\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 10\overline{i} + 2\overline{j} - 11\overline{k},\ \overline{M}(10;2;-11).$$

$$\left|\bar{M}\right| = \left|\left(\overline{10;2;-11}\right)\right| = \sqrt{10^2 + 2^2 + (-11)^2} = \sqrt{100+4+121} = \sqrt{225} = 15.$$

Як відомо, якщо вектор $\bar{M}(x;y;z)$, то напрямні косинуси мають вигляд:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\bar{M}\right|},\ \cos\beta = \frac{y}{\left|\bar{M}\right|},\ \cos\gamma = \frac{z}{\left|\bar{M}\right|}.$$

Отже, $\cos\alpha = \frac{10}{15} = \frac{2}{5}$; $\cos\beta = \frac{2}{15}$; $\cos\gamma = -\frac{11}{15}$.

4. Сила $\bar{F}(2;-2;-3)$ прикладена в точці $A(4;5;6)$. Знайти величину напрямні косинуси моменту сили відносно точки $C(2;3;-3)$.

$$\overline{M} = \overline{CA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 9 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 12\bar{i} + 24\bar{j} - 8\bar{k},\ \bar{M}(12;24;-8).$$

$$\left|\bar{M}\right| = \left(\overline{12;24;-8}\right) = \sqrt{12^2 + 24^2 + (-8)^2} + \sqrt{144+576+64} = \sqrt{784} = 28.$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{28} = \frac{3}{7};\ \cos\beta = \frac{24}{28} = \frac{6}{7};\ \cos\gamma = -\frac{8}{28} = -\frac{2}{7}.$$

5. Визначити величину моменту рівнодійної трьох сил, $\bar{F}_1(3;2;-1)$, $\bar{F}_2(2;-1;-3)$, $\bar{F}_3(-4;1;3)$, яка прикладена в точці $A(-4;1;2)$ відносно точки $O(2;3;-1)$.

Знайдемо силу $\bar{F}$, яка є рівнодійною трьох сил:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \left(\overline{3;2;-1}\right) + \left(\overline{2;-1;-3}\right) + \left(\overline{-4;1;3}\right) = \left(\overline{1;2;-1}\right),$$

отже рівнодійна сила $\bar{F}(1;2;-1)$.

Далі за відомою формулою $\overline{M} = \overline{R} \times \overline{F}$, де $\overline{R} = \overline{OA}$; $\overline{OA}(-6;-2;3)$,

$$\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -6 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4\bar{i} - 3\bar{j} - 10\bar{k},\ \overline{M}(-4;-3;-10).$$

$$\left|\bar{M}\right| = \sqrt{16+9+100} = \sqrt{125}.$$

Відповідь: $\left|\bar{M}\right| = \sqrt{125}$.

6. У точку $A(1;3;3)$ прикладені три сили $\bar{F}_1(2;-4;8)$, $\bar{F}_2(3;1;-7)$, $\bar{F}_3(-8;7;1)$. Знайти величину й напрямні косинуси моменту рівнодійної трьох сил відносно точки $C(-1;2;5)$.

Знайдемо рівнодійну силу $\bar{F}$ і вектор $\overline{CA}$:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \left(\overline{2;-4;8}\right) + \left(\overline{3;1;-7}\right) + \left(\overline{-8;7;1}\right) = \left(\overline{-3;4;2}\right),\ \bar{F}(-3;4;2),$$

$\overline{CA}(2;1;-2)$.

$$\overline{M}=\overline{CA}\times\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & 4 & 2\end{vmatrix}=10\overline{i}+2\overline{j}+11\overline{k},\ \overline{M}(10;2;11)$$

$\left|\overline{M}\right|=\sqrt{100+4+121}=\sqrt{225}=15$ – шукана величина моменту сили, тоді напрямні косинуси мають вид:

$$\cos\alpha=\frac{10}{15}=\frac{2}{3};\ \cos\beta=\frac{2}{15};\ \cos\gamma=\frac{11}{15}.$$

12 ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ЗА ТЕМОЮ «ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ»

1. Знайти векторний добуток векторів *a* і *b:*

1) *a=7i+4j+6k, b=i+2j-2k*; 2) *a =2i+11j-10k, b =3i+6j-2k*;

3) *a* =(1, 2, -2), *b* =(8, 6, 4); 4) *a* =(1, -5, 8), *b* =(3, 6, -2);

5) *a=2i+5j+k, b=i+2j-3k.*

2. Знайти одиничний вектор, перпендикулярний до векторів *a* і *b:*

1) *a=i+j+2k, b=2i+j+k;*

2) *a=2i+3j+5k, b=i+2j+k.*

3. Для заданих векторів *a* (3, -1, 2)і *b* (1, 2, -1) знайти векторний добуток веторів: 2*a*+ *b* і *b; 2a+b* і *2b +a*.

4. Знайти синус кута між векторами *a* і *b*:

1) *a*=(2, -4, 4), *b*=(2, 1, -2); 2) *a*=(2, 1, -2), *b*=(6, -3, 2);

3) *a*=(2, 2, 1), *b*=(11, 10, 2); 4) *a*=(2, 1, 2), *b*=(-2, 2, 1).

5. Спростити вирази:

1) [(3a-4b), (2a+5b)]; 2) [(5a-3b+2c), (4a+7b-6c)];

3) [(2i-3j+4k), (4i+5j-6k)].

6. Для заданих векторів *a*=(3, -1, -2), *b*=(1, 2, -1) знайти координати векторів *a×b; (2a+b)×b; (2a-b)×(2a+b).*

7. Вектори *a* і *b* взаємно перпендикулярні, |*a*|=3, |*b*|=4. Обчислити: |*a×b*|*;* |*(a+b)×(a-b)*|*;* |*(3a-b)×(a-2b)*|.

8. Обчислити проекцію вектора $\vec{a}=3\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}$ на вектор $\vec{b}=(\vec{i}-2\vec{k})\times(\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k})$.

9. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах *a* і *b,* як на сторонах:

1) a=6i+3j-2k и *b=3i-2j+6k* ; 2) *a=3i+2j-2k*; *b=j+k;*

3) *a*=(2, 1, 2), *b*=(3, -4, 2); 4) *a*=(0, -1, 1) и *b*=(1, 1, 1).

10. Обчислити площу паралелограма, три послідовні вершини якого знаходяться в точках A(7, -5, 6), B(9, -4, 8), C(6, 0, 6).

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах *a+3b і 3a+b*, якщо $|a| = |b| = 1, \left(\widehat{a,b}\right) = 30°$.

12. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$; $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 5$; $|\vec{n}| = 1$ і $(\widehat{mn}) = 30°$.

13. Обчислити периметр і площу трикутника, якщо вершини трикутника знаходяться в точках:
1) A (-2; 1); B (2; -2); C (8; 6);
2) A (1; 1; 1), B (2; 3; 4), C (4; 3; 2);
3) A(1, 1, 3), B(3, -1, 6), C(5, 1, -3);
4) A(1, 2, 0), B(3, 0, 3), C(5, 2, 6).

14. Для трикутника ABC знайти довжину висоти, яка проведена з вершини C до сторони AB, якщо вершини трикутника знаходяться в точках:
1) A(3, -4, 5), B(5, -3, 7), C(6, -8, 7);
2) A(1, 3, 4), B(3, 4, 2), C(4, -1, 2);
3) A (2; 2; 2), B (4; 0; 3), C(0; 1; 0);
4) A (1, -1, 2), B (5, -6, 2), C (1, 3, -1)

15. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах *a*-*2b* і *3a+2b,* як на сторонах, якщо $|a| = |b| = 5, \left(\widehat{a,b}\right) = \pi / 4$.

16. Обчислити момент сили *F*, яка прикладена до точки A, відносно початку координат O, якщо:
1) *F*=(3, 2, 1), A(-1, 2, 4);
2) *F*=(3, 2, -4), A(2, -1, 1);
3) *F* =(4, -3, -7); A(1, 6, 5).

17. Сила *F*=(2, 4, 6) прикладена в точці A (3, -5, 7). Знайти момент цієї сили відносно точки B(1, -8, 9).

18. Сила *F*=(3, -4, 2) прикладена в точці A (2, 1, 2). Знайти величину й напрямні косинуси моменту цієї сили відносно початку координат.

19. Сила *F* прикладена в точці A. Знайти величину й напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки C, якщо:
1) *F*=(2, -2, -3), A (4, 5, 6), C (2, 3, -3);
2) *F*=(2, 2, 9), A (4, 2, -3), C (2, 4, 0).
3) $F = 2i - 4j + 5k$, A (4, -2, 3), C (3, 2, -1).

20. В точці A прикладені три сили F_1, F_2, F_3. Знайти величину й напрямні косинуси момента рівнодійної трьох сил відносно точки B, якщо:
1) A(1, 3, 3), F_1=(2, -4, 8), F_2=(3, 1, -7), F_3=(-8, 7, 1), B (-1, 2, 5);

2) A (-4, 1, 2), $\vec{F}_1$ (3, 2, -1), $\vec{F}_2$ (2, -1, -3), $\vec{F}_3$ (-4, 1, 3), B (2, 3, -1);
3) A (-1, 4, 2), $\vec{F}_1$ (2, -1, -3), $\vec{F}_2$ (3, 2, -1) и $\vec{F}_3$ (-4, 1, 3), B (0, -3, -1).

13 МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Означення. Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ називають векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ скалярно помножений на третій вектор $\bar{c}$.

Позначають мішаний добуток або $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, або як векторно-скалярний добуток $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$. З огляду на комутативність скалярного добутку інколи мішаний добуток називають скалярно-векторним і пишуть $\bar{c}\cdot\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)$.

Зауважимо, що векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дає нам вектор, якій ми потім скалярно множимо на вектор $\bar{c}$, тому у відповіді ми одержуємо число (скаляр): $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{d}\cdot\bar{c}=const$.

Мішаний добуток трьох векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, які задані своїми координатами $\bar{a}\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $\bar{b}\left(x_2;y_2;z_2\right)$, $\bar{c}\left(x_3;y_3;z_3\right)$ знаходять *за допомогою визначника третього порядку, в якому в першому рядку записані координати першого вектора-множника − вектора* $\bar{a}$*, в другому рядку − координати другого вектора-множника − вектора* $\bar{b}$*, в третьому рядку − координати третього вектора-множника − вектора* $\bar{c}$*:*

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\tilde{n}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Приклад:

Знайти мішаний добуток векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, якщо $\bar{a}\left(-3;2;1\right)$, $\bar{b}\left(1;1;2\right)$, $\bar{c}\left(1;3;-1\right)$.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=3+3+4-1+2+18=29.$$

Відповідь: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=29$.

Якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю, і навпаки, якщо мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, то вектори компланарні.

Модуль мішаного добутку трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ дорівнює об'єму V паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, віднесених до спільного початку, як на ребрах: $V=\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$.

Наслідки:

а) Об'єм трикутної призми, побудованої на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ як на ребрах, є половиною об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих же векторах (рисунок 13.1):

$$V_{\text{трикутної призми}} = \frac{1}{2} V_{\text{паралелепіпеда}} = \frac{1}{2}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$$

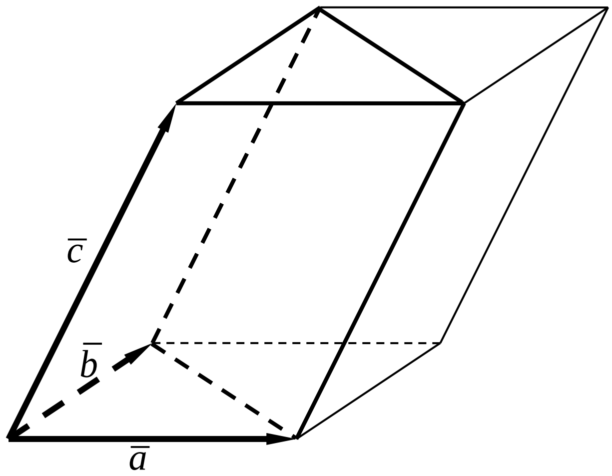


Рисунок 13.1

б) Об'єм трикутної піраміди побудованої на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ як на ребрах, є третиною об'єму трикутної призми, побудованої на цих же векторах (рисунок 13.2):

$$V_{\text{трикутної піраміди}} = \frac{1}{3} V_{\text{трикутної призми}} =$$

$$= \frac{1}{6} V_{\text{паралелепіпеда}} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$$

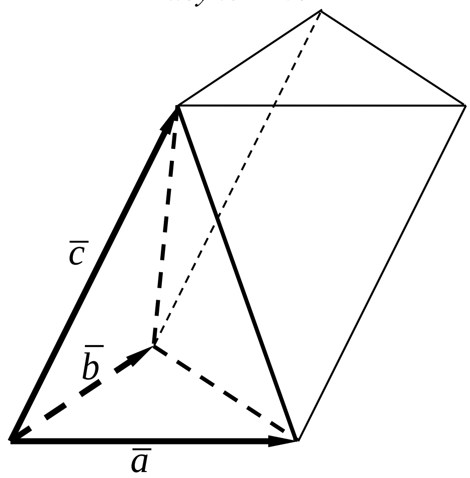


Рисунок 13.2

Якщо мішаний добуток додатний $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ утворюють праву трійку векторів; якщо $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ утворюють ліву трійку векторів.

Зауваження. При розв'язуванні задач часто потрібно знаходити об'єм трикутної піраміди, яка задана координатами своїх вершин: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$ (рисунок 13.3).

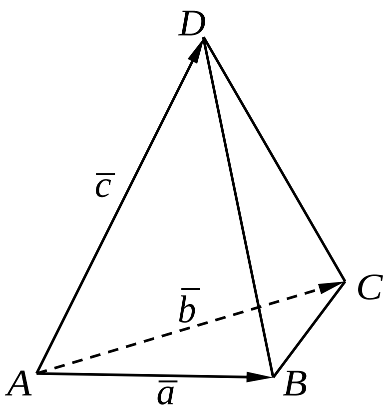


Рисунок 13.3

Як ми показали об'єм трикутної піраміди $V_{\text{трикутної піраміди}} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$.

Оберемо точку A за спільний початок трьох векторів:

$\overline{AB} = \bar{a}$; $\overline{AC} = \bar{b}$; $\overline{AD} = \bar{c}$.

Знайдемо координати цих векторів:

$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$;

$\overline{AC} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$;

$\overline{AD} = (x_4 - x_1; y_4 - y_1; z_4 - z_1)$.

Отже: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}\right|; V_{ABCD} = \frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$

Розглянемо приклади:

1. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами в точках $A(2;-1;0)$; $B(5;5;3)$; $C(3;2;-2)$; $D(4;1;2)$.

Згідно зауваження, знаходимо:

$\overline{AB}(3;6;3)$; $\overline{AC}(1;3;-2)$; $\overline{AD}(2;2;2)$.

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\;\overline{AC}\;\overline{AD}\right|,\; V_{ABCD}=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}3&6&3\\1&3&-2\\2&2&2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|-18\right|=3.$$

Відповідь: $V_{ABCD}=3$ (кубічних одиниць).

2. З'ясувати, чи належать одній площині точки $A(0;1;2)$, $B(-2;0;-1)$, $C(-1;5;8)$, $D(1;6;11)$.

Припустимо, що точки A, B, C, D належать одній площині. Тоді, обравши, наприклад, точку A за спільний початок, три вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$ також належать цій площині. Тому, за властивостями мішаного добутку $\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}=0$. Перевіряємо, чому дорівнює мішаний добуток векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$:

$\overline{AB}(-2;-1;-3)$; $\overline{AC}(-1;4;6)$; $\overline{AD}(1;5;9)$.

$$\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-2&-1&-3\\-1&4&6\\1&5&9\end{vmatrix}=-72+15-6+12+60-9=0,$$

це означає, що три вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$ належать одній площині, а відповідно й точки A, B, C, D також належать одній площині.

3. З'ясувати, яку впорядковану трійку утворюють вектори $\overline{a}(8;4;1)$, $\overline{b}(2;-2;1)$, $\overline{c}(4;0;3)$.

Знаходимо знак мішаного добутку трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}8&4&1\\2&-2&1\\4&0&3\end{vmatrix}=-48+0+16+8-0-24=-48.$$

Оскільки $\overline{a}\overline{b}\overline{c}<0$, то вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ утворюють ліву трійку векторів.

4. Обчислити об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\overline{a}(1;2;3)$, $\overline{b}(-1;0;2)$, $\overline{c}(1;-2;5)$. Знайти довжину висоти піраміди h, проведеної до площини векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Як відомо, $V_{піраміди}=\frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$.

Знаходимо $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{vmatrix}=0+4+6-0+4+10=24;$$

$V_{піраміди}=\frac{1}{6}|24|=4$ (кубічні одиниці).

Використовуємо відому формулу, що $V_{піраміди}=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$, тоді $3V_{піраміди}=S_{осн}\cdot h$.

Як відомо, в основі піраміди трикутник, тоді $S_{осн}=S_{\triangle}=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$;

З іншого боку, $V_{піраміди}=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$, маємо:

$3\frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|\cdot h$; звідки знаходимо висоту: $h=\frac{\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|}{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}$.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}=4\bar{i}-5\bar{j}+2\bar{k}.$$

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\left|\left(\overline{4;-5;2}\right)\right|=\sqrt{4^2+(-5)^2+2^2}=\sqrt{16+25+4}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}.$$

$$h=\frac{24}{3\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

Відповідь: $V_{піраміди}=4$ (кубічні одиниці), $h=\frac{8\sqrt{5}}{5}$ (одиниць довжини).

14 ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ЗА ТЕМОЮ «МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ»

1. Обчислити мішаний добуток векторів *a, b, c,* якщо:

1) *a*=(-4, -3, -9), *b*=(1, 0, -1), *c*=(-5, -4, 3);
2) *a*=(1, 2, 1), *b*=(1, 2, -2), *c*=(8, 6, 4);
3) *a*=(1, 2, 3), *b*=(3, 1, 2), *c*=(2, 3, 1);
4) *a*=(9, 7, 8), *b*=(6, 4, 5), *c*=(1, 2, 3);
5) *a=i-j+k, b=i+j+k, c=2i+3j+4k;*
6) *a=2i-j-k, b=i+3j-k, c=i+j+4k.*

2. Визначити, якою трійкою векторів (правою чи лівою) буде трійка векторів *a, b, c,* якщо:

1) $a=(1, -1, 2)$, $b=(-2, 1, 1)$, $c=(1, -2, 2)$;
2) $a=(1, 2, 1)$, $b=(2, 1, 1)$, $c=(1, 1, 2)$;
3) $a=(3, -2, -1)$, $b=(2, -3, 1)$, $c=(1, -2, -3)$;
4) $a=(1, 4, 3)$, $b=(2, -5, 1)$, $c=(1, -3, 2)$;
5) $a=(3, 4, 0)$, $b=(0, -4, 1)$, $c=(0, 2, 5)$.

3. З'ясувати, чи будуть компланарними вектори *a, b, c,* якщо:
1) $a=i+2j+3k$, $b=4i+5j+6k$, $c=7i+8j+9k$;
2) $a=i+3j+5k$, $b=2i+4j+6k$, $c=8i+9j+7k$;
3) $a=2i+j+2k$, $b=i+2j+2k$, $c=2i+2j+k$;
4) $a=i+7j+k$, $b=8i+j+8k$, $c=i+2j+k$;
5) $a =(2, 3, 1)$, $b=(1, -1, 3)$, $c=(-1, 9, -11)$;
6) $a=(3, -2, 1)$, $b=(2, 1, 2)$, $c=(3, -1, -2)$;
7) $a=7i-3j+2k$, $b=3i-7j+8k$, $c=i-j+k$.

4. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах *a, b, c,* як на ребрах, якщо:
1) $a=2i+j+3k$, $b=3i+j+2k$, $c=i+3j+k$;
2) $a=4i-5j+k$, $b=-2i-3j+k$, $c=2i+j+3k$;
3) $a=2i+2j+3k$, $b=3i+j+2k$, $c=i+3j+k$;
4) $a=2p+3q$, $b=p-4q$, $c=3p+5q$, де $|p|=1/2; |q|=4; \phi=(p,q)=45°$;
5) $a=i-3j+k$, $b=2i+j-3k$, $c=i+2j+k$;
6) $a=3i+2j-5k$, $b=i-j+4k$, $c=i-3j+k$.

5. Перевірити, чи лежать в одній площині чотири точки A, B, C, D, якщо:
1) A(-1, 2, 1), B(-3, 1, 2), C(3, -2, 2), D(3, -4, 3);
2) A(-, -11, 5), B(7, 4, -2), C(-7, 13, -3), D(1, 1, 1);
3) A (5; 7; -2), B (3; 1; -1), C (9; 4; -4), D (1; 5; 0);
4) A(1, 2, -1), B(4, 1, 5), C(-1, 2, 1), D(2, 1, 3);
5) A (1, 2, -1), B (0, 1, 5), C (-1, 2, 1), D (2, 1, 3).

6. Обчислити об'єм трикутної піраміди, вершини якої знаходяться в точках A, B, C, D, знайти площу вказаної грані і висоту, опущену на цю грань, якщо:
1) 1) A(6, 1, 4), B(2, -2, 5), C(7, 1, 3), D(1, -3, 7), ABC;
2) A(1, 2, 6), B(0, 3, 8), C(-5, -1, 4), D(-3, 2, -6), ACD;
3) A(2, 1, 1), B(6, -2, 2), C(4, 3, 2), D(-6, 8, 7), BCD;
4) A(2, 0, 4), B(0, 3, 7), C(0, 0, 6), D (4, 3, 5), ACD;
5) A (0; 0; 1), B(2; 3; 5), C (6; 2; 3), D (3; 7; 2), BCD;
6) A (2; 2; 2), B (4; 3; 3), C (4; 5; 4), D (5; 5; 6), ABC;
7) A (2, -3, 5), B (0, 2, 1), C (-2, -2, 3), D (3, 2, 4), ABC.

7. Обчислити об'єм трикутної призми, побудованої на векторах *a, b, c,* як на ребрах, якщо $a=(7, 6, 1)$, $b=(4, 0, 3)$, $c=(3, 6, 4)$.

8. Трикутна піраміда ABCD має об’єм V=2, три її вершини знаходяться в точках A(2, 1, 3), B(3, 3, 2), C(1, 2, 4). Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона знаходиться на осі Oz.

9. Трикутна піраміда ABCD має об’єм V=3, три її вершини знаходяться в точках A(1, 2, 3), B(3, 1, 2), C(2, 3, 1). Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона знаходиться на осі Ox.

10. Показати, що вектори $a=i+j+mk$, $b=i+j+(m+1)k$ и $c=i-j+mk$ не можуть бути компланарними ні для яких значень m.

15 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називається вектором, ортом, нульовим вектором?
2. Записати формулу для знаходження координат вектора, заданого точкою початку і точкою кінця.
3. Що називається довжиною вектора?
4. Записати формулу для знаходження довжини вектора, заданого своїми координатами.
5. Які вектори називаються колінеарними, компланарними, рівними?
6. Записати умову рівності двох векторів заданих своїми координатами.
7. За якими правилами можна додавати вектори, віднімати вектори.
8. Записати формулу для знаходження координат вектора, який є сумою або різницею двох векторів, заданих своїми координатами.
9. Як визначається добуток вектора на дійсне число?
10. Який вектор називають протилежним до заданого?
11. Яка властивість у координат протилежних і колінеарних векторів?
12. Записати формулу для знаходження координат орта заданого вектора.
13. Сформулювати властивості додавання векторів та множення вектора на дійсне число.
14. Яку множину називають замкненою відносно операцій додавання і множення на дійсне число?
15. Що називається геометричною та алгебраїчною проекцією вектора на вісь?
16. Що називається кутом між вектором і віссю?
17. Чому дорівнює проекція вектора на вісь? Довести цю формулу.
18. Сформулювати властивості проекції.
19. Вивести формулу для знаходження координат точки поділу відрізка в заданому відношенні.
20. Вивести формулу знаходження координат центру ваги системи матеріальних точок.
21. Дати означення лінійної комбінації векторів.
22. Які вектори називають лінійно-залежними?
23. Які вектори називають лінійно-незалежними?
24. Дати означення базису векторного простору.
25. Що називається базисом на прямій, на площині, в просторі?

26. Як позначають базисні вектори на прямій, на площині, у просторі?
27. Записати розклад вектора за базисом на прямій, на площині, у просторі.
28. Записати формулу переходу від одного базису до іншого.
29. Дати означення скалярного добутку векторів.
30. Сформулювати основні властивості скалярного добутку векторів.
31. Записати умову ортогональності двох векторів.
32. Записати формулу для знаходження проекції вектора на вектор.
33. Вивести формулу для знаходження скалярного добутку двох векторів заданих своїми координатами.
34. Вивести формулу для знаходження косинуса кута між векторами.
35. Дати означення напрямних кутів та напрямних косинусів вектора.
36. Чому дорівнює сума квадратів напрямних косинусів вектора?
37. Чому дорівнює робота сили при переміщені матеріальної точки з початку в кінець вектора?
38. Яка впорядкована трійка векторів називається правою, лівою?
39. Дати означення векторного добутку двох векторів.
40. Сформулювати основні властивості векторного добутку двох векторів.
41. Записати умову колінеарності двох векторів.
42. Вивести формулу для знаходження векторного добутку двох векторів заданих своїми координатами.
43. Як знайти площу паралелограма, площу трикутника за допомогою векторного добутку векторів?
44. Сформулювати фізичний зміст векторного добутку векторів.
45. Дати означення мішаного добутку трьох векторів.
46. Вивести формулу для знаходження мішаного добутку трьох векторів заданих своїми координатами.
47. Сформулювати основні властивості мішаного добутку трьох векторів.
48. Записати умову компланарності трьох векторів.
49. Записати формули для знаходження об'єму паралелепіпеда, трикутної призми, трикутної піраміди.
50. Як визначити, праву чи ліву впорядковану трійку утворюють задані вектори?
51. Вивести формулу для знаходження об'єму трикутної піраміди.

16 ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
І РІВЕНЬ

1. Знайти координати та довжину вектора $\overline{AB}$, якщо:

а) $A(2;-4;5)$, $B(3;-1;4)$;

відповідь: $\overline{AB}(1;3;-1), \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{11}$;

б) $A(2;-2;-1)$, $B(1;3;-7)$;

відповідь: $\overline{AB}(-1;5;-6), \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{62}$;

в) $A(-1;3;-2)$, $B(1;-4;5)$;

відповідь: $\overline{AB}(2;-7;7), \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{102}$.

2. Знайти скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, які задані своїми координатами:

а) $\overline{a}(3;4;7)$, $\overline{b}(2;-5;2)$;

відповідь: $\overline{a}\overline{b} = 0$;

б) $\overline{a}(7;-3;9)$, $\overline{b}(5;1;2)$;

відповідь: $\overline{a}\overline{b} = 50$;

в) $\overline{a}(6;-2;1)$, $\overline{b}(2;8;-3)$;

відповідь: $\overline{a}\overline{b} = -7$.

3. Знайти скалярний добуток векторів, якщо:

а) $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 9$, $\left(\overline{a},\overline{b}\right) = \frac{\pi}{6}$;

відповідь: $\overline{a}\overline{b} = 9\sqrt{3}$;

б) $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, $\left(\overline{a},\overline{b}\right) = \frac{\pi}{3}$;

відповідь: $\overline{a}\overline{b} = 6$;

в) $|\overline{a}| = 6$, $|\overline{b}| = \sqrt{2}$, $\left(\overline{a},\overline{b}\right) = \frac{3\pi}{4}$;

відповідь: $\overline{a}\overline{b} = -6$.

4. Знайти векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, які задані своїми координатами:

а) $\overline{a}(3;6;-2)$, $\overline{b}(1;-2;2)$;

відповідь: $\overline{a} \times \overline{b} = \left(\overline{8;-8;-12}\right)$;

б) $\overline{a}(7;0;5)$, $\overline{b}(-8;6;4)$;

відповідь: $\overline{a} \times \overline{b} = \left(\overline{-30;-68;42}\right)$;

в) $\overline{a}(2;-11;3)$, $\overline{b}(0;-3;-4)$;

відповідь: $\overline{a} \times \overline{b} = \left(\overline{53;8;-6}\right)$.

5. Обчислити мішаний добуток векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$, які задані своїми координатами:

а) $\bar{a}(1;2;1)$, $\bar{b}(1;2;-2)$, $\bar{c}(-5;-4;3)$;

відповідь: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=18$;

б) $\bar{a}(-4;-3;9)$, $\bar{b}(3;1;2)$, $\bar{c}(-8;6;-4)$;

відповідь: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=310$;

в) $\bar{a}(9;0;-4)$, $\bar{b}(-6;4;5)$, $\bar{c}(1;2;3)$;

відповідь: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=82$.

6. Знайти координати точки M, яка ділить відрізок AB у відношенні λ:

а) $A(-2;4;-1)$, $B(3;-3;3)$, $\lambda=\frac{3}{2}$;

відповідь: $M\left(1;-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$;

б) $A(3;7;2)$, $B(-4;-2;-5)$, $\lambda=\frac{4}{3}$;

відповідь: $M\left(-1;\frac{13}{7};-2\right)$;

в) $A(3;4;1)$, $B(5;-2;6)$, $\lambda=\frac{2}{3}$;

відповідь: $M\left(\frac{19}{5};\frac{8}{5};3\right)$.

7. Знайти роботу сили $\bar{F}$ прикладеної в точці A, коли точка прикладання сили $\bar{F}$ рухається прямолінійно і переміщується в точку B:

а) $\bar{F}(4;11;-6)$, $A(3;5;1)$, $B(4;-2;-3)$;

відповідь: 49;

б) $\bar{F}(-9;5;7)$, $A(1;6;-3)$, $B(4;-3;5)$;

відповідь: 16;

в) $\bar{F}(4;7;-3)$, $A(5;-4;2)$, $B(8;5;-4)$;

відповідь: 93.

ІІ РІВЕНЬ

1. Знайти координати і довжину вектора $\bar{a}$, якщо:

а) $\bar{a}=2\overline{AC}-3\overline{BA}+\overline{CB}$, якщо $A(2;-4;3)$, $B(-3;-2;4)$, $C(2;0;1)$;

відповідь: $\bar{a}(-20;12;2)$, $|\bar{a}|=2\sqrt{137}$;

б) $\bar{a}=-\overline{AC}+2\overline{AB}-4\overline{BC}$, якщо $A(5;-6;3)$, $B(0;-3;1)$, $C(1;4;-2)$;

відповідь: $\bar{a}(-10;-32;13)$, $|\bar{a}|=\sqrt{1293}$;

в) $\overline{a}=3\overline{CA}-\frac{1}{2}\overline{AB}+\overline{CB}$, якщо $A(-1;-3;-2)$, $B(2;0;1)$, $C(4;-5;-7)$;

відповідь: $\overline{a}\left(-\frac{37}{2};\frac{19}{2};\frac{43}{2}\right)$, $|\overline{a}|=\frac{1}{2}\sqrt{3579}$.

2. Знайти косинус кута між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:

а) $\overline{a}(2;-4;4)$, $\overline{b}(-3;2;6)$;

відповідь: $\cos\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\frac{5}{21}$;

б) $\overline{a}\left(\sqrt{2};1;-1\right)$, $\overline{b}(1;0;0)$;

відповідь: $\cos\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

в) $\overline{a}\left(1;3;\sqrt{6}\right)$, $\overline{b}(1;1;0)$;

відповідь: $\cos\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах, якщо:

а) $\overline{a}=3\overline{i}+4\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}-2\overline{j}+7\overline{k}$;

відповідь: $S_{паралелограма}=2\sqrt{371}$ (квадратних одиниць);

б) $\overline{a}=2\overline{i}-6\overline{j}+4\overline{k}$, $\overline{b}=-\overline{i}+3\overline{j}+2\overline{k}$;

відповідь: $S_{паралелограма}=8\sqrt{10}$ (квадратних одиниць);

в) $\overline{a}=5\overline{i}-6\overline{k}$, $\overline{b}=-7\overline{j}+2\overline{k}$;

відповідь: $S_{паралелограма}=\sqrt{3089}$ (квадратних одиниць).

4. Знайти площу трикутника з вершинами в точках:

а) $A(1;1;3)$, $B(3;-1;6)$, $C(5;1;-3)$;

відповідь: $S_{\triangle ABC}=14$ (квадратних одиниць);

б) $A(3;-4;5)$, $B(5;-3;7)$, $C(6;-8;7)$;

відповідь: $S_{\triangle ABC}=7{,}5$ (квадратних одиниць);

в) $A(2;2;2)$, $B(4;0;3)$, $C(0;1;0)$;

відповідь: $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{65}}{2}$ (квадратних одиниць).

5. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ як на ребрах, якщо:

а) $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$;

відповідь: $V_{паралелепіпеда} = 13$ (кубічних одиниць);

б) $\overline{a} = 4\overline{i} - 5\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = -2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{c} = 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$;

відповідь: $V_{паралелепіпеда} = 76$ (кубічних одиниць);

в) $\overline{a} = 2\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$;

відповідь: $V_{паралелепіпеда} = 12$ (кубічних одиниць).

6. З'ясувати, чи є вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ лінійно-залежними, або лінійно-незалежними:

а) $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = 4\overline{i} + 5\overline{j} + 6\overline{k}$, $\overline{c} = 7\overline{i} + 8\overline{j} + 9\overline{k}$;

відповідь: лінійно-залежні;

б) $\overline{a} = \overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 6\overline{k}$, $\overline{c} = 8\overline{i} + 9\overline{j} + 7\overline{k}$;

відповідь: лінійно-незалежні;

в) $\overline{a} = \overline{i} + 7\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = 8\overline{i} + \overline{j} + 8\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$;

відповідь: лінійно-залежні.

7. Три сили $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ прикладені в точці A. Знайти величину моменту рівнодійної цих сил відносно точки B.

а) $\overline{F}_1(3;-5;4)$, $\overline{F}_2(5;6;-3)$, $\overline{F}_3(-7;-1;8)$, $A(-3;5;9)$, $B(5;6;-3)$;

відповідь: $\sqrt{1306}$;

б) $\overline{F}_1(7;-5;2)$, $\overline{F}_2(3;4;-8)$, $\overline{F}_3(-2;-4;3)$, $A(-3;2;0)$, $B(6;4;-3)$;

відповідь: $\sqrt{4171}$;

в) $\overline{F}_1(7;-6;2)$, $\overline{F}_2(-6;2;-1)$, $\overline{F}_3(1;6;4)$, $A(3;-6;1)$, $B(6;-2;7)$;

відповідь: $\sqrt{77}$.

III РІВЕНЬ

1. Знайти висоти паралелограма побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах, і яка проведена до сторони $\overline{b}$, до сторони $\overline{a}$, якщо:

а) $\overline{a} = 4\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 3\overline{k}$;

відповідь: $h_a = \sqrt{\dfrac{433}{26}}$, $h_b = \dfrac{\sqrt{433}}{7}$;

б) $\overline{a} = 5\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = 5\overline{i} + 2\overline{k}$;

відповідь: $h_a=\sqrt{\dfrac{141}{38}}$, $h_b=\sqrt{\dfrac{141}{29}}$;

в) $\bar{a}=4\bar{i}-6\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}$;

відповідь: $h_a=\sqrt{\dfrac{1469}{53}}$, $h_b=\sqrt{\dfrac{1469}{30}}$.

2. Обчислити площу повної поверхні трикутної піраміди $ABCS$, знайти висоту піраміди опущену з вершини S, якщо:

а) $A(1;3;1)$, $B(-1;4;6)$, $C(-2;-3;4)$, $S(3;4;-4)$;

відповідь: $S_{повна}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1395}+9\sqrt{11}+2\sqrt{29}+2\sqrt{1502}\right)$, $h=\dfrac{30}{\sqrt{1395}}$;

б) $A(3;4;2)$, $B(-2;3;-5)$, $C(4;-3;6)$, $S(6;-5;3)$;

відповідь: $S_{повна}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{4274}+\sqrt{1106}+16\sqrt{26}+40\sqrt{2}\right)$, $h=\dfrac{240}{\sqrt{4274}}$;

в) $A(-5;-4;-3)$, $B(7;3;-1)$, $C(6;-2;0)$, $S(3;2;-7)$;

відповідь: $S_{повна}=\dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{366}+10\sqrt{78}+8\sqrt{93}+3\sqrt{158}\right)$, $h=\dfrac{44\sqrt{366}}{183}$.

3. При якому значенні m вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ортогональні, якщо:

а) $\bar{a}=m\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{b}=3\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k}$;

відповідь: $m=1$;

б) $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+m\bar{k}$, $\bar{b}=m\bar{i}-3\bar{j}+2\bar{k}$;

відповідь: $m=2$;

в) $\bar{a}=m\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}+10\bar{j}+m\bar{k}$.

відповідь: $m=5$;

4. Знайти координати вектора $\bar{b}$ колінеарного вектору $\bar{a}$, за умови, що $\bar{b}\cdot\bar{a}=c$, $c-const$:

а) $\bar{a}(1;-2;2)$, $\bar{a}\cdot\bar{b}=-18$;

відповідь: $\bar{b}(-2;4;-4)$;

б) $\bar{a}(2;1;-1)$, $\bar{a}\cdot\bar{b}=3$;

відповідь: $\bar{b}\left(1;\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$;

в) $\bar{a}(3;-4;1)$, $\bar{a}\cdot\bar{b}=-\dfrac{26}{2}$;

відповідь: $\bar{b}\left(-\frac{3}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$.

5. При якому значенні α вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарні:

а) $\bar{a}(2;1;-1)$, $\bar{b}(4;-2;1)$, $\bar{c}(\alpha;-3;-2)$;

відповідь: $\alpha = 34$;

б) $\bar{a}(3;-1;4)$, $\bar{b}(2;\alpha;-5)$, $\bar{c}(1;0;2)$;

відповідь: $\alpha = -4,5$;

в) $\bar{a}(4;-2;\alpha)$, $\bar{b}(-5;1;3)$, $\bar{c}(2;4;-3)$;

відповідь: $\alpha = -\frac{21}{11}$.

6. Показати, що вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють базис, знайти координати вектора $\bar{d}$ в новому базисі $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, записати розклад вектора $\bar{d}$ за базисними векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

а) $\bar{a}(1;3;5)$, $\bar{b}(0;4;5)$, $\bar{c}(7;-8;4)$, $\bar{d}(2;-1;3)$;

відповідь: $\bar{d} = -\frac{1}{3}\bar{a} + \frac{2}{3}\bar{b} + \frac{1}{3}\bar{c}$;

б) $\bar{a}(1;2;5)$, $\bar{b}(-1;6;3)$, $\bar{c}(0;0;2)$, $\bar{d}(1;0;4)$;

відповідь: $\bar{d} = \frac{3}{4}\bar{a} - \frac{1}{4}\bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}$;

в) $\bar{a}(2;2;-1)$, $\bar{b}(0;4;8)$, $\bar{c}(-1;-1;3)$, $\bar{d}(1;1;2)$;

відповідь: $\bar{d} = 1\bar{a} + 0\bar{b} + 1\bar{c}$.

7. Обчислити проекцію вектора на вектор:

а) $Пр_{\bar{c}}\left(\bar{a}+\bar{b}\right)$, якщо $\bar{a} = 7\bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = -2\bar{i} + 4\bar{j} - 7\bar{k}$, $\bar{c} = 4\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$;

відповідь: $Пр_{\bar{c}}\left(\bar{a}+\bar{b}\right) = 4$;

б) $Пр_{\bar{b}+\bar{c}}\bar{a}$, якщо $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j} + 8\bar{k}$, $\bar{b} = 4\bar{i} - 9\bar{j} + 8\bar{k}$, $\bar{c} = 7\bar{i} + \bar{j} - 6\bar{k}$;

відповідь: $Пр_{\bar{b}+\bar{c}}\bar{a} = \frac{4\sqrt{21}}{7}$;

в) $Пр_{\bar{b}}\left(\bar{c}-\bar{a}\right)$, якщо $\bar{a} = 10\bar{i} + 2\bar{j} - 11\bar{k}$, $\bar{b} = -2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{c} = 2\bar{i} + 10\bar{j} + 11\bar{k}$;

відповідь: $Пр_{\bar{b}}\left(\bar{c}-\bar{a}\right) = -\frac{20}{3}$.

17 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. **За координатами точок A,B,C для заданих векторів знайти:**
   a) **координати вектора *a,* довжину вектора *a;***
   b) **скалярний добуток векторів *a* і *b;***
   c) **векторний добуток векторів *a* і *b;***
   d) **проекцію вектора *c* на вектор *d*;**
   e) **координати точки M, яка ділить відрізок *l* у відношенні *α : β.***

1. A(4,6,3), B(-5,2,6), C(4,-4,-3), $a = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{AB}, c = \overrightarrow{CB}, d = \overrightarrow{AC}$, $l = AB, \alpha = 5, \beta = 4$.

2. A(4,3,-2), B(-3,-1,4), C(2,2,1), $a = -5\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}, b = \overrightarrow{AB}, c = \overrightarrow{AC}, d = \overrightarrow{CB}$, $l = BC, \alpha = 2, \beta = 3$.

3. A(-2,-2,4), B(1,3,-2), C(1,4,2), $a = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA}, b = \overrightarrow{BC}, c = \overrightarrow{BC}, d = \overrightarrow{AC}$, $l = BA, \alpha = 2, \beta = 1$.

4. A(2,4,3), B(3,1,-4), C(-1,2,2), $a = 2\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{BA}, c = b, d = \overrightarrow{AC}$, *l*=BA, α=1, β=4.

5. A(2,4,5), B(1,-2,3), C(-1,-2,4), $a = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{BC}, c = b, d = \overrightarrow{AB}$, *l*=AB, α=2, β=3.

6. A(-1,-2,4), B(-1,3,5), C(1,4,2), $a = 3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{BC}, b = \overrightarrow{AB}, c = b, d = \overrightarrow{AC}$, *l*=AC, α=1, β=7.

7. A(1,3,2), B(-2,4,-1), C(1,3,-2), $a = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{CB}, b = \overrightarrow{AC}, c = b, d = \overrightarrow{AB}$, *l*=AB, α=2, β=4.

8. A(2,-4,3), B(-3,-2,4), C(0,0,-2), $a = 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{CB}, b = c = \overrightarrow{AB}, d = \overrightarrow{CB}$, *l*=AC, α=2, β=1.

9. A(3,4,-4), B(-2,1,2), C(2,-3,1), $a = 5\overrightarrow{CB} + 4\overrightarrow{AC}, b = c = \overrightarrow{BA}, d = \overrightarrow{AC}$, *l*=BA, α=2, β=5.

10. A(0, 2, 5), B(2,-3,4), C(3,2,-5), $a = -3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CB}, b = c = \overrightarrow{AC}, d = \overrightarrow{AB}$, *l*=AC, α=3, β=2.

11. A(-2,-3,-4), B(2,-4,0), C(1,4,5), $a = 4\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{BC}, b = c = \overrightarrow{AB}, d = \overrightarrow{BC}$, *l*=AB, α=4, β=2.

12. A(-2,-3,-2), B(1,4,2), C(1,-3,3), $a = 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BC}, b = c = \overrightarrow{AB}, d = \overrightarrow{AC}$, *l*=BC, α=3, β=1.

13. A(5,6,1), B(-2,4,-1), C(3,-3,3), $a = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}, b = c = \overrightarrow{AC}, d = \overrightarrow{AB}$, *l*=BC, α=3, β=2.

14 A(10,6,3), B(-2,4,5), C(3,-4,-6), $a = 5\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}, b = c = \overrightarrow{BA}, d = \overrightarrow{AC}$, *l*=CB, α=1, β=5.

15. A(3,2,4), B(-2,1,3), C(2,-2,-1), $a = 4\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{BA}, c = \overrightarrow{AC}, d = \overrightarrow{BC}$, l=AC, α=2, β=4.

16. A(-2,3,-4), B(3,-1,2), C(4,2,4), $a = 7\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{CB}, b = c = \overrightarrow{AB}, d = \overrightarrow{CB}$, l=AB, α=2, β=5.

17. A(4,5,3), B(-4,2,3), C(5,-6,-2), $a = 9\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}, b = c = \overrightarrow{AC}, d = \overrightarrow{AB}$, l=BC, α=5, β=1.

18. A(2,4,6), B(-3,5,1), C(4,-5,-4), $a = -6\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}, b = c = \overrightarrow{CA}, d = \overrightarrow{BA}$, l=BC, α=1, β=3.

19. A(-4,-2,-5), B(3,7,2), C(4,6,-3), $a = 9\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}, b = c = \overrightarrow{AC}, d = \overrightarrow{BC}$, l=BA, α=4, β=3.

20 A(5,4,4), B(-5,2,3), C(4,2,-5), $a = 11\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{BC}, c = \overrightarrow{AB}, d = \overrightarrow{AC}$, l=BC, α=3, β=1.

21. A(3,4,6), B(-4,6,4), C(5,-2,-3), $a = -7\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA}, b = \overrightarrow{BA}, c = \overrightarrow{CA}, d = \overrightarrow{BC}$, l=BA, α=5, β=3.

22. A(-5,-2,-6), B(3,4,5), C(2,-5,4), $a = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}, b = c = \overrightarrow{AB}, d = \overrightarrow{BC}$, l=AC, α=3, β=4.

23. A(3,4,1), B(5,-2,6), C(4,2,-7), $a = -7\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AB}, b = c = \overrightarrow{BC}, d = \overrightarrow{AC}$, l=AB, α=2, β=3.

24. A(4,3,2), B(-4,-3,5), C(6,4,-3), $a = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}, b = c = \overrightarrow{BA}, d = \overrightarrow{AC}$, l=BC, α=2, β=5.

25. A(-5,4,3), B(4,5,2), C(2,7,-4), $a = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}, b = c = \overrightarrow{CA}, d = \overrightarrow{AB}$, l=BC, α=3, β=4.

26. A(6,4,5), B(-7,1,8), C(2,-2,-7), $a = 5\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{AB}, c = \overrightarrow{CB}, d = \overrightarrow{AC}$, l=AB, α=3, β=2.

27. A(6,5,-4), B(-5,-2,2), C(3,3,2), $a = 6\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}, b = c = \overrightarrow{AC}, d = \overrightarrow{CB}$, l=BC, α=1, β=5.

28. A(-3,-5,6), B(3,5,-4), C(2,6,4), $a = 4\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BA}, b = \overrightarrow{CB}, c = \overrightarrow{BA}, d = \overrightarrow{AC}$, l=BA, α=4, β=2.

29. A(3,5,4), B(4,2,-3), C(-2,4,7), $a = 3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{AB}, c = \overrightarrow{BA}, d = \overrightarrow{AC}$, l=BA, α=2, β=5.

30. A(4,6,7), B(2,-4,1), C(-3,-4,2), $a = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}, b = c = \overrightarrow{BC}, d = \overrightarrow{AB}$, l=AB, α=3, β=4.

2. **Довести, що вектори *a, b, c* утворюють базис, знайти координати вектора *d* в цьому базисі, записати розклад вектора *d* за новими базисними векторами.**

1. a=(5, 4, 1), b=(-3, 5, 2), c=(2, -1, 3), d=(7, 23, 4).
2. a=(2, -1, 4), b=(-3, 0, 2), c=(4, 5, -3), d=(0, 11, -14).
3. a=(-1, 1, 2), b=(2, -3, -5), c=(-6, 3, -1), d=(28, -19, -7).
4. a=(1, 3, 4), b=(-2, 5, 0), c=(3, -2, -4), d=(13, -5, -4).
5. a=(1, -1, 1), b=(-5, -3 1), c=(2, -1, 0), d=(-15, -10 5).
6. a=(3, 1, 2), b=(-7, -2, -4), c=(-4, 0, 3), d=(16, 6, 15).
7. a=(-3, 0, 1), b=(2, 7, -3), c=(-4, 3, 5), d=(-16, 33, 13).
8. a=(5, 1, 2), b=(-2, 1, -3), c=(4, -3, 5), d=(15, -15, 24).
9. a=(0, 2, -3), b=(4, -3, -2), c=(-5, -4, 0), d=(-19, -5, -4).
10. a=(3, -1, 2), b=(-2, 3, 1), c=(4, -5, -3), d=(-3, 2, -3).
11. a=(5, 3, 1), b=(-1, 2, -3), c=(3, -4, 2), d=(-9, 34, -20).
12. a=(3, 1, -3), b=(-2, 4, 1), c=(1, -2, 5), d=(1, 12, -20).
13. a=(6, 1, -3), b=(-3, 2, 1), c=(-1, -3, 4), d=(15, 6, -17).
14. a=(4, 2, 3), b=(-3, 1, -8), c=(2, -4, 5), d=(12, 14, -31).
15. a=(-2, 1, 3), b=(3, -6, 2), c=(-5, -3, -1), d=(31, -6, 22).
16. a=(1, 3, 6), b=(-3, 4, -5), c=(1, -7, 2), d=(-2, 17, 5).
17. a=(7, 2, 1), b=(5, 1, -2), c=(-3, 4, 5), d=(26, 11, 1).
18. a=(3, 5, 4), b=(-2, 7, -5), c=(6, -2, 1), d=(6, -9, 22).
19. a=(5, 3, 2), b=(2, -5, 1), c=(-7, 4, -3), d=(36, 1, 15).
20. a=(11, 1, 2), b=(-3, 3, 4), c=(-4, -2, 7), d=(-5, 11, -15).
21. a=(9, 5, 3), b=(-3, 2, 1), c=(4, -7, 4), d=(-10, -13, 8).
22. a=(7, 2, 1), b=(3, -5, 6), c=(-4, 3, -4), d=(-1, 18, -16).
23. a=(1, 2, 3), b=(-5, 3, -1), c=(-6, 4, 5), d=(-4, 11, 20).
24. a=(-2, 5, 1), b=(3, 2, -7), c=(4, -3, 2), d=(-4, 22, -13).
25. a=(3, 1, 2), b=(-4, 3, -1), c=(2, 3, 4), d=(14, 14, 20).
26. a=(3, -1, 2), b=(-2, 4, 1), c=(4, -5, -1), d=(-5, 11, 1).
27. a=(4, 5, 1), b=(1, 3, 1), c=(-3, -6, 7), d=(19, 33, 0).
28. a=(1, -3, 1), b=(-2, -4, 3), c=(0, -2, 3), d=(-8, -10, 13).
29. a=(5, 7, -2), b=(-3, 1, 3), c=(1, -4, 6), d=(14, 9, -1).
30. a=(-1, 4, 3), b=(3, 2, -4), c=(-2, -7, 1), d=(6, 20, -3).

3. **Для заданих векторів c_1 *і* c_2, побудованих за допомогою векторів *a* і *b* знайти:**

a) **координати векторів c_1 *і* c_2;**
b) **записати розклади векторів c_1 *і* c_2 за базисними векторами *i, j, k;***
c) **довжини векторів c_1 *і* c_2;**

d) **за допомогою скалярного добутку визначити чи ортогональні вектори c_1 і c_2;**
e) **за допомогою векторного добутку визначити чи колінеарні вектори c_1 і c_2.**
f) **знайти проекцію вектора c_1 на вектор c_2 і навпаки.**

1. a=(1, -2, 3), b=(3, 0, -1), c_1=2a+4b, c_2=3b-a.
2. a=(1, 0, 1), b=(-2, 3, 5), c_1=a+2b, c_2=3a-b.
3. a=(-2, 4, 1), b=(1, -2, 7), c_1=5a+3b, c_2=2a-b.
4. a=(1, 2, -3), b=(2, -1, -1), c_1=4a+3b, c_2=8a-b.
5. a=(3, 5, 4), b=(5, 9, 7), c_1=-2a+b, c_2=3a-2b.
6. a=(1, 4, -2), b=(1, 1, -1), c_1=a+b, c_2=4a+2b.
7. a=(1, -2, 5), b=(3, -1, 0), c_1=4a-2b, c_2=b-2a.
8. a=(3, 4, -1), b=(2, -1, 1), c_1=6a-3b, c_2=b-2a.
9. a=(-2, -3, -2), b=(1, 0, 5), c_1=3a+9b, c_2=-a-3b.
10. a=(-1, 4, 2), b=(3, -2, 6), c_1=2a-b, c_2=3b-6a.
11. a=(5, 0, -1), b=(7, 2, 3), c_1=2a-b, c_2=3b-6a.
12. a=(0, 3, -2), b=(1, -2, 1), c_1=5a-2b, c_2=3a+5b.
13. a=(-2, 7, -1), b=(-3, 5, 2), c_1=2a+3b, c_2=3a+2b.
14. a=(3, 7, 0), b=(1, -3, 4), c_1=4a+2b, c_2=b-2a.
15. a=(-1, 2, -1), b=(2, -7, 1), c_1=6a-2b, c_2=b-3a.
16. a=(7, 9, -2), b=(5, 4, 3), c_1=4a-b, c_2=4b-a.
17. a=(5, 0, -2), b=(6, 4, 3), c_1=5a-3b, c_2=6b-10a.
18. a=(8, 3, -1), b=(4, 1, 3), c_1=2a-b, c_2=2b-4a.
19. a=(3, -1, 6), b=(5, 7, 10), c_1=4a-2b, c_2=b-2a.
20. a=(1, -2, 4), b=(7, 3, 5), c_1=6a-3b, c_2=b-2a.
21. a=(3, 7, 0), b=(4, 6, -1), c_1=3a+2b, c_2=5a-7b.
22. a=(2, -1, 4), b=(3, -7, -6), c_1=2a-3b, c_2=3a-2b.
23. a=(5, -1, -2), b=(6, 0, 7), c_1=3a-2b, c_2=4b-6a.
24. a=(-9, 5, 3), b=(7, 1, -2), c_1=2a-b, c_2=3a+5b.
25. a=(4, 2, 3), b=(0, -1, 3), c_1=4b-3a, c_2=4a-3b.
26. a=(2, -1, 6), b=(-1, 3, 8), c_1=5a-2b, c_2=2a-5b.
27. a=(5, 0, 8), b=(-3, 1, 7), c_1=3a-4b, c_2=12b-9a.
28. a=(-1, 3, 4), b=(2, -1, 0), c_1=6a-2b, c_2=b-3a.
29. a=(4, 2, -7), b=(5, 0, -3), c_1=a-3b, c_2=6b-2a.
30. a=(2, 0, -5), b=(1, -3, 4), c_1=2a-5b, c_2=5a-2b.

4. **Вершини трикутника знаходяться в точках A,B,C, знайти:**
a) **площу трикутника ABC;**
b) **косинус кута BAC;**

c) **висоти трикутника, проведені з кожної з вершин до протилежної сторони;**

d) **периметр трикутника ABC.**

1. A(1, -2, 3), B(0, -1, 2), C(3, -4, 5).

2. A(0, -3, 6), B(-12, -3, -3), C(-9, -3, -6).

3. A(3, 3, -1), B(5, 5, -2), C(4, 1, 1).

4. A(-1, 2, -3), B(3, 4, -6), C(1, 1, -1).

5. A(-4, -2, 0), B(-1, -2, 4), C(3, -2, 1).

6. A(5, 3, -1), B(5, 2, 0), C(6, 4, -1).

7. A(-3, -7, -5), B(0, -1, -2), C(2, 3, 0).

8. A(2, -4, 6), B(0, -2, 4), C(6, -8, 10).

9. A(0, 1, -2), B(3, 1, 2), C(4, 1, 1).

10. A(3, 3, -1), B(1, 5, -2), C(4, 1, 1).

11. A(2, 1, -1), B(6, -1, -4), C(4, 2, 1).

12. A(-1, -2, 1), B(-4, -2, 5), C(-8, -2, 2).

13. A(6, 2, -3), B(6, 3, -2), C(7, 3, -3).

14. A(0, 0, 4), B(-3, -6, 1), C(-5, -10, -1).

15. A(2, -8, -1), B(4, -6, 0), C(-2, -5, -1).

16. A(3, -6, 9), B(0, -3, 6), C(9, -12, 15).

17. A(0, 2, -4), B(8, 2, 2), C(6, 2, 4).

18. A(3, 3, -1), B(5, 1, -2), C(4, 1, 1).

19. A(-4, 3, 0), B(0, 1, 3), C(-2, 4, -2).

20. A(1, -1, 0), B(-2, -1, 4), C(8, -1, -1).

21. A(7, 0, 2), B(7, 1, 3), C(8, -1, 2).

22. A(2, 3, 2), B(-1, -3, -1), C(-3, -7, -3).

23. A(2, 2, 7), B(0, 0, 6), C(-2, 5, 7).

24. A(-1, 2, -3), B(0, 1, -2), C(-3, 4, -5).

25. A(0, 3, -6), B(9, 3, 6), C(12, 3, 3).

26. A(3, 3, -1), B(5, 1, -2), C(4, 1, -3).

27. A(-2, 1, 1), B(2, 3, -2), C(0, 0, 3).

28. A(1, 4, -1), B(-2, 4, -5), C(8, 4, 0).

29. A(0, 1, 0), B(0, 2, 1), C(1, 2, 0).

30. A(-4, 0, 4), B(-1, 6, 7), C(1, 10, 9).

5. **Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах *a* і *b*, як на сторонах:**

1. a=p+2q, b=3p-q; |p|=1, |q|=2, $(\widehat{pq})$=π/6.

2. a=3p+q, b=p-2q; |p|=4, |q|=1, $(\widehat{pq})$=π/4.

3. a=p-3q, b=p+2q; |p|=1/5, |q|=1, $(\widehat{pq})$=π/2.

4. a=3p-2q, b=p+5q; |p|=4, |q|=1/2, $(\widehat{pq})$=5π/6.

5. a=p-2q, b=2p+q; |p|=2, |q|=3, $(\widehat{pq})$=3π/4.

6. a=p+3q, b=p-2q; |p|=2, |q|=3, $(\widehat{pq})$=π/3.

7. a=2p-q, b=p+3q; |p|=3, |q|=2, $(\widehat{pq})$=π/2.

8. a=4p+q, b=p-q; |p|=7, |q|=2, $(\widehat{pq})$=π/4.

9. a=p-4q, b=3p+q; |p|=1, |q|=2, $(\widehat{pq})$=π/6.

10. a=p+4q, b=2p-q; |p|=7, |q|=2, $(\widehat{pq})$=π/3.

11. a=3p+2q, b=p-q; |p|=10, |q|=1, $(\widehat{pq})$=π/2.

12. a=4p-q, b=p+2q; |p|=5, |q|=4, $(\widehat{pq})$=π/4.

13. a=2p+3q, b=p-2q; |p|=6, |q|=7, $(\widehat{pq})$=π/3.

14. a=3p-q, b=p+2q; |p|=3, |q|=4, $(\widehat{pq})$=π/3.

15. a=2p+3q, b=p-2q; |p|=2, |q|=3, $(\widehat{pq})$=π/4.

16. a=2p-3q, b=3p+q; |p|=4, |q|=1, $(\widehat{pq})$=π/6.

17. a=5p+q, b=p-3q; |p|=1, |q|=2, $(\widehat{pq})$=π/3.

18. a=7p-2q, b=p+3q; |p|=1/2, |q|=2, $(\widehat{pq})$=π/2.

19. a=6p-q, b=p+q; |p|=3, |q|=4, $(\widehat{pq})$=π/4.

20. a=10p+q, b=3p-2q; |p|=4, |q|=1, $(\widehat{pq})$=π/6.

21. a=6p-q, b=p+2q; |p|=8, |q|=1/2, $(\widehat{pq})$=π/3.

22. a=3p+4q, b=q-p; |p|=2,5, |q|=2, $(\widehat{pq})$=π/2.

23. a=7p+q, b=p-3q; |p|=3, |q|=1, $(\widehat{pq})$=3π/4.

24. a=p+3q, b=3p-q; |p|=3, |q|=5, $(\widehat{pq})$=2π/3.

25. a=3p+q, b=p-3q; |p|=7, |q|=2, $(\widehat{pq})$=π/4.

26. a=5p-q, b=p+q; |p|=5, |q|=3, $(\widehat{pq})$=5π/6.

27. a=3p-4q, b=p+3q; |p|=2, |q|=3, $(\widehat{pq})$=π/4.

28. a=6p-q, b=5q+p; |p|=1/2, |q|=4, $(\widehat{pq})$=5π/6.

29. a=2p+3q, b=p-2q; |p|=2, |q|=1, $(\widehat{pq})$=π/3.

30. a=2p-3q, b=5p+q; |p|=2, |q|=3, $(\widehat{pq})$=π/2.

6. **Для заданих векторів *a, b, c* знайти:**

a) **мішаний добуток векторів *a, b, c;***

b) **за допомогою мішаного добутку встановити чи компланарні вектори *a, b, c*;**

c) **з'ясувати якою трійкою (правою чи лівою) є вектори *a, b, c*;**

d) **знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах *a, b, c*, як на ребрах;**

e) **знайти висоту паралелепіпеда, проведену до площини основи векторів *a* і *b;***

f) **знайти площу повної поверхні паралелепіпеда.**

1. a=(2, 3, 1), b=(-1, 0, -1), c=(2, 2, 2).
2. a=(3, 2, 1), b=(2, 3, 4), c=(3, 1, -1).
3. a=(1, 5, 2), b=(-1, 1, -1), c=(1, 1, 1).
4. a=(1, -1, 3), b=(3, 2, 1), c=(2, 3, 4).
5. a=(3, 3, 1), b=(1, -2, 1), c=(1, 1, 1).
6. a=(3, 1, -1), b=(-2, -1, 0), c=(5, 2, -1).
7. a=(4, 3, 1), b=(1, -2, 1), c=(2, 2, 2).
8. a=(4, 3, 1), b=(6, 7, 4), c=(2, 0, -1).
9. a=(3, 2, 1), b=(1, -3, -7), c=(1, 2, 3).
10. a=(3, 7, 2), b=(-2, 0, -1), c=(2, 2, 1).
11. a=(1, -2, 6), b=(1, 0, 1), c=(2, -6, 17).
12. a=(6, 3, 4), b=(-1, -2, -1), c=(2, 1, 2).
13. a=(7, 3, 4), b=(-1, -2, -1), c=(4, 2, 4).
14. a=(2, 3, 2), b=(4, 7, 5), c=(2, 0, -1).
15. a=(5, 3, 4), b=(-1, 0, -1), c=(4, 2, 4).
16. a=(3, 10, 5), b=(-2, -2, -3), c=(2, 4, 3).
17. a=(-2, -4, -3), b=(4, 3, 1), c=(6, 7, 4).
18. a=(3, 1, -1), b=(1, 0, -1), c=(8, 3, -2).
19. a=(4, 2, 2), b=(-3, -3, -3), c=(2, 1, 2).
20. a=(4, 1, 2), b=(9, 2, 5), c=(1, 1, -1).
21. a=(5, 3, 4), b=(4, 3, 3), c=(9, 5, 8).
22. a=(3, 4, 2), b=(1, 1, 0), c=(8, 11, 6).
23. a=(4, -1, -6), b=(1, -3, -7), c=(2, -1, -4).
24. a=(3, 1, 0), b=(-5, -4, -5), c=(4, 2, 4).
25. a=(3, 0, 3), b=(8, 1, 6), c=(1, 1, -1).
26. a=(1, -1, 4), b=(1, 0, 3), c=(1, -3, 8).
27. a=(6, 3, 4), b=(-1, -2, -1), c=(2, 1, 2).
28. a=(4, 1, 1), b=(-9, -4, -9), c=(6, 2, 6).

29. a=(-3, 3, 3), b=(-4, 7, 6), c=(3, 0, -1).
30. a=(-7, 10, -5), b=(0, -2, -1), c=(-2, 4, -1).

7. Вершини піраміди знаходяться в точках A_1, A_2, A_3, A_4, знайти:
a) об’єм піраміди;
b) площу повної поверхні піраміди;
c) висоти піраміди.

1. A_1(1, 3, 6), A_2(2, 2, 1), A_3(-1, 0, 1), A_4(-4, 6, -3).
2. A_1(-4, 2, 6), A_2(2, -3, 0), A_3(-10, 5, 8), A_4(-5, 2, -4).
3. A_1(7, 2, 4), A_2(7, -1, -2), A_3(3, 3, 1), A_4(-4, 2, 1).
4. A_1(2, 1, 4), A_2(-1, 5, -2), A_3(-7, -3, 2), A_4(-6, -3, 6).
5. A_1(-1, -5, 2), A_2(-6, 0, -3), A_3(3, 6, -3), A_4(-10, 6, 7).
6. A_1(0, -1, -1), A_2(-2, 3, 5), A_3(1, -5, -9), A_4(-1, -6, 3).
7. A_1(5, 2, 0), A_2(2, 5, 0), A_3(1, 2, 4), A_4(-1, 1, 1).
8. A_1(2, -1, -2), A_2(1, 2, 1), A_3(5, 0, -6), A_4(-10, 9, -7).
9. A_1(-2, 0, -4), A_2(-1, 7, 1), A_3(4, -8, -4), A_4(1, -4, 6).
10. A_1(14, 4, 5), A_2(-5, -3, 2), A_3(-2, -6, -3), A_4(-2, 2, -1).
11. A_1(1, 2, 0), A_2(3, 0, -3), A_3(5, 2, 6), A_4(8, 4, -9).
12. A_1(2, -1, 2), A_2(1, 2, -1), A_3(3, 2, 1), A_4(-4, 2, 5).
13. A_1(1, 1, 2), A_2(-1, 1, 3), A_3(2, -2, 4), A_4(-1, 0, -2).
14. A_1(2, 3, 1), A_2(4, 1, -2), A_3(6, 3, 7), A_4(7, 5, -3).
15. A_1(1, 1, -1), A_2(2, 3, 1), A_3(3, 2, 1), A_4(5, 9, -8).
16. A_1(1, 5, -7), A_2(-3, 6, 3), A_3(-2, 7, 3), A_4(-4, 8, -12).
17. A_1(-3, 4, -7), A_2(1, 5, -4), A_3(-5, -2, 0), A_4(2, 5, 4).
18. A_1(-1, 2, -3), A_2(4, -1, 0), A_3(2, 1, -2), A_4(3, 4, 5).
19. A_1(4, -1, 3), A_2(-2, 1, 0), A_3(0, -5, 1), A_4(3, 2, -6).
20. A_1(1, -1, 1), A_2(-2, 0, 3), A_3(2, 1, -1), A_4(2, -2, -4).
21. A_1(1, 2, 0), A_2(1, -1, 2), A_3(0, 1, -1), A_4(-3, 0, 1).
22. A_1(1, 0, 2), A_2(1, 2, -1), A_3(2, -2, 1), A_4(2, 1, 0).
23. A_1(1, 2, -3), A_2(1, 0, 1), A_3(-2, -1, 6), A_4(0, -5, -4).
24. A_1(3, 10, -1), A_2(-2, 3, -5), A_3(-6, 0, -3), A_4(1, -1, 2).
25. A_1(-1, 2, 4), A_2(-1, -2, -4), A_3(3, 0, -1), A_4(7, -3, 1).
26. A_1(0, -3, 1), A_2(-4, 1, 2), A_3(2, -1, 5), A_4(3, 1, -4).
27. A_1(1, 3, 0), A_2(4, -1, 2), A_3(3, 0, 1), A_4(-4, 3, 5).
28. A_1(-2, -1, -1),A_2(0, 3, 2), A_3(3, 1, -4), A_4(-4, 7, 3).
29. A_1(-3, -5, 6), A_2(2, 1, -4), A_3(0, -3, -1), A_4(-5, 2, -8).
30. A_1(2, -4, -3), A_2(5, -6, 0), A_3(-1, 3, -3), A_4(-10, -8, 7).
31. A_1(1, -1, 2), A_2(2, 1, 2), A_3(1, 1, 4), A_4(6, -3, 8).

8. **Сила F прикладена до точки A. Обчислити:**
a) **роботу сили F, якщо точка її прикладання рухається прямолінійно, в точку B;**
b) **модуль момента сили F відносно точки B.**

1. F=(5, -3, 9), A(3, 4, -6), B(2, 6, 5).
2. F=(-3, 1, -9), A(6, -3 5), B(9, 5, -7).
3. F=(2, 19, -4), A(5, 3, 4), B(6, -4, -1).
4. F=(-4, 5, -7), A(4, -2, 3), B(7, 0, -3).
5. F=(4, 11, -6), A(3, 5, 1), B(4, -2, -3).
6. F=(3, -5, 7), A(2, 3, -5), B(0, 4, 3).
7. F=(5, 4, 11), A(6, 1, -5), B(4, 2, -6).
8. F=(-9, 5, 7), A(1, 6, -3), B(4, -3, 5).
9. F=(6, 5, -7), A(7, -6, 4), B(4, 9, -6).
10. F=(-5, 4, 4), A(3, 7, -5), B(2, -4, 1).
11. F=(4, 7, -3), A(5, -4, 2), B(8, 5, -4).
12. F=(2, 2, 9), A(4, 2, -3), B(2, 4, 0).

Три сили P, Q, R прикладені в точці A. Обчислити:
a) **роботу рівнодійної цих сил, коли точка прикладання рухається прямолінійно в точку B;**
b) **величину моменту рівнодійної цих сил відносно точки B.**

13. P=(9, -3, 4), Q=(5, 6, -2), R=(-4, -2, 7), A(-5, 4, -2), B(4, 6, -5).
14. P=(5, -2, 3), Q=(4, 5, -3), R=(-1, -3, 6), A(7, 1, -5), B(2, -3, -6).
15. P=(3, -5, 4), Q=(5, 6, -3), R=(-7, -1, 8), A(-3, 5, 9), B(5, 6, -3).
16. P=(-10, 6, 5), Q=(4, -9, 7), R=(5, 3, -3), A(4, -5, 9), B(4, 7, -5).
17. P=(5, -3, 1), Q=(4, 2, -6), R=(-5, -3, 7), A(-5, 3, 7), B(3, 8, -5).
18. P=(-5, 8, 4), Q=(6, -7, 3), R=(3, 1, -5), A(2, -4, 7), B(0, 7, 4).
19. P=(7, -5, 2), Q=(3, 4, -8), R=(-2, -4, 3), A(-3, 2, 1), B(6, 4, -3).
20. P=(3, -4, 2), Q=(2, 3, -5), R=(-3, -2, 4), A(5, 3, 7), B(4, -1, -4).
21. P=(4, -2, -5), Q=(5, 1, -3), R=(-6, 2, 5), A(-3, 2, -6), B(4, 5, -3).
22. P=(7, 3, -4), Q=(9, -4, 2), R=(-6, 1, 4), A(-7, 2, 5), B(4, -2, 11).
23. P=(9, -4, 4), Q=(-4, 6, -3), R=(3, 4, 2), A(5, -4, 3), B(4, -5, 9).
24. P=(6, -4, 5), Q=(-4, 7, 8), R=(5, 1, -3), A(-5, -4, 2), B(7, -3, 6).
25. P=(5, 5, -6), Q=(7, -6, 6), R=(-4, 3, 4), A(-9, 4, 7), B(8, -1, 7).
26. P=(7, -6, 2), Q=(-6, 2, -1), R=(1, 6, 4), A(3, -6, 1), B(6, -2, 7).
27. P=(4, -2, 3), Q=(-2, 5, 6), R=(7, 3, -1), A(-3, -2, 5), B(9, -5, 4).
28. P=(7, 3, -4), Q=(3, -2, 2), R=(-5, 4, 3), A(-5, 0, 4), B(4, -3, 5).
29. P=(3, -2, 4), Q=(-4, 4, -3), R=(3, 4, 2), A(1, -4, 3), B(4, 0, -2).
30. P=(2, -1, -3), Q=(3, 2, -1), R=(-4, 1, 3), A(-1, 4, -2), B(2, 3, -1).

Рекомендована література

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
3. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1985. – 392 с.
4. *Дадаян А. А., Дударенко В. А.* Алгебра и геометрия. – Минск: Вышейш. шк., 1989. – 288 с.
5. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1988. – 224 с.
6. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.
7. *Овчинников П. Ф., Лисицын Б. М., Михайленко В. М.* Высшая математика. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1989. – 679 с.
8. *Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М.* Высшая математика. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 552 с.
9. *Федорчук В. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 329 с.
10. *Шкіль М. І., Колесник Т. В.* Вища математика. – К.: Вища шк. Головне вид-во, 1986. – 512 с.
11. *Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М.* Вища математика. – К.: Вища шк. Головне вид-во, 1985. – 391 с.
12. *Шестаков А. А., Малышева И. А., Полозков Д. П.* Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1987. – 320 с.
13. *Щипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1991. – 479 с.