Навчально-методичне видання

Д. Б. Мехед, Ю. М. Ткач, В. М. Базилевич

СПЕЦІАЛЬНІ ГЛАВИ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

В авторській редакції

Відповідальний за випуск – *Лук'яненко В.В.*

Підписано до друку 15.01.2019 р.
Формат 60х 84/16. Папір офсетний. Друк числовий.
Гарнітура Times New Roman. Обл.-вид. арк. 5,73.
Ум. друк. арк. 7,21. Тираж 300 прим.
Зам. № 561.

Віддруковано з оригінал-макету замовника

Видавець - ФОП Лук'яненко В.В. ТПК «Орхідея»

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 3020 від 02.11.2007 р.*

*16600, Чернігівська обл., м. Ніжин, вул. Небесної сотні, 13 а.
Тел.: 068 815 06 60
E-mail: holdingvv@ gmail.com*

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Д. Б. Мехед, Ю. М. Ткач, В. М. Базилевич

СПЕЦІАЛЬНІ ГЛАВИ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Ніжин
2018

УДК 510.6

Б17

Рекомендовано до друку вченою радою Чернігівського національного технологічного університету (протокол № 7 від 2 липня 2018 року).

Рецензенти:

Рецензенти:
С. В. Казмірчук, д-р техн. наук, доцент;
С. В. Зайцев, д-р техн. наук, доцент.

Б17 Спеціальні глави математики. : навч. посіб. для студ. спец. 125 «Кібербезпека» / Д. Б. Мехед, Ю. М. Ткач, В. М. Базилевич. – Ніжин: ФОП Лук'яненкоВ.В. ТПК «Орхідея», 2018. – 124 с. : іл.

ISBN 978-617-7609-21-5

У навчальному посібнику висвітлені основні відомості з таких розділів вищої математики, як теорія множин, дискретна математика, алгебра, алгебра логіки та теорія графів. За змістом наведені навчальні матеріали відповідають програмі дисципліни «Спеціальні глави математики» для студентів технічних спеціально-стей. Виклад теоретичного матеріалу супроводжується великою кількістю задач та прикладів, з розв'язками та поясненнями, а також контрольними питаннями.

Посібник призначений для студентів спеціальності 125 «Кібербезпека» та інших технічних спеціальностей.

УДК 510.6

ISBN 978-617-7609-21-5

32. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под ред. Свешникова А. А. Москва: Наука, 1970.

33. Свешников А. Г. Тихонов А. Н. Теория функций комплексного переменного / А.Г. Свешников, А. Н. ТИхонов. - Москва: Наука, 1979. – 284 с.

34. Справочное пособие по математическому анализу. Ч. I. Введение в анализ, производные, интегралы / Ляшко И. И. и др. Киев: Высшая школа, 1978.

17. Збірник завдань з вищої математики. Частина 3. / уклад.: Владіміров В. М., Пучков О. А., Шмигевський М. В. Київ: Політехніка, 2002.

18. Ильин В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, З. Г. Позняк. - Москва: Наука, 1978. – 89 с.

19. Ильин В. А. Основы математического анализа / В. А. Ильин, З. Г. Позняк. - Москва: Наука, 1979. Том І.

20. Кальницкий Л. А. Специальный курс высшей математики для втузов: учебное пособие / Л. А. Кальницкий, Д. А. Добротин, В. Р. Жевержеев. - Москва: Высшая школа, 1976. – 240 с.

21. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике / И. А. Каплан. - Ч. 1-5. Харьков: Издательство Харьковского университета, 1967-1972.

22. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций / А. И. Маркушевич. - Москва: Наука, 1978. - 416 с.

23. Мартыненко В. С. Операционное исчисление / В. С. Мартыненко. - Киев: Издательство Киевского университета, 1965. - 190 с.

24. Сборник задач по высшей математике / под ред. Овчинникова П. Ф. Киев: Высшая школа, 1991.

25. Сборник задач по курсу высшей математики / Г. И. Кручкович и др.; под редакцией Г. И. Кручковича. Москва: Высш. шк., 1973.

26. Сборник задач по математике (для ВТУЗов). Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. Ефимова А. В., Демидовича Б. П. Москва: Наука, 1986.

27. Сборник задач по математике (для ВТУЗов). Специальные курсы / под ред. Ефимова А. В., Демидовича Б. П. Москва: Наука, 1984.

28. Сборник задач по математике (для ВТУЗов). Специальные курсы / под ред. Ефимова А. В., Демидовича Б. П. Москва: Наука, 1984.

29. Сборник задач по математике (для ВТУЗов). Специальные разделы математического анализа / под редакцией Ефимова А.В., Демидовича Б. П. Москва: Наука, 1986.

30. Сборник задач по математике (для ВТУЗов). Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика / под ред. Ефимова А.В. Москва: Наука, 1990.

31. Сборник задач по математике (для ВТУЗов). Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения / под ред. А. В. Ефимова. Москва: Наука, 1990.

Зміст

Рекомендована та використана література

1. Араманович И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – Москва: Наука, 1969. – 256 с.

2. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. – Москва: Наука, 1974. – 360 с.

3. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. - Москва, Наука, 1976. – 198 с.

4. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман .- Москва: Наука, 1985. – 248 с.

5. Бугров Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. - Москва: Наука, 1981.

6. Бугров Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. - Москва: Наука, 1981. – 250 с.

7. Будак Б. М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак., А.А. Самарский, А. Н. Тихогов. - Москва: Наука, 1972. – 186 с.

8. Вентцель В. С. Теория вероятностей / В. С. Вентцель. - Москва: Наука, 1969. – 205 с.

9. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / В. С. Вентцель., Л. А. Овчаров. - Москва: Наука, 1988. – 58 с.

10. Вища математика: збірник задач: навчальний посібник / за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. Київ: А.СК., 2001.

11. Гмурман В. В. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. В. Гмурман. - Москва: Высшая школа, 1975. – 186 с.

12. Дубовик В. П. Вища математика: навчальний посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. - Київ: А.С.К., 2001. – 128 с.

13. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. - Москва: Наука, 1975. – 146 с.

14. Задачи и упражнения по математическому анализу / под ред. Демидовича Б. П. Москва: Наука, 1970.

15. Збірник завдань з вищої математики. Частина 1 / уклад.: Владіміров В. М., Пучков О. А., Шмигевський М. В. Київ: Політехніка, 2002.

16. Збірник завдань з вищої математики. Частина 2 / уклад.: Владіміров В. М., Пучков О. А., Шмигевський М. В. Київ: Політехніка, 2002.

11. Який граф називають зваженим?

12. Який граф називають ейлеревим?

13. Який граф називають гамільтоновим?

РОЗДІЛ І. МНОЖИНИ, ФУНКЦІЇ, ВІДНОШЕННЯ

Множини й операції над ними

1. Основні поняття теорії множин

Визначення. **Множиною М** називається об'єднання в єдине ціле визначених різноманітних однотипних об'єктів, *a*, які називаються **елементами** множини.

$$a \in M.$$

Множини можна задавати, вказавши яку-небудь властивість, яка задовольняє всім елементам множини.

Зауваження. Взагалі кажучи, поняття множини вважається первинним (вихідним), і не означується. Наведене вище визначення є уточненням поняття множини.

Множина, усі елементи якої є числами, називається числовою. У подальшому ми будемо передусім розглядати саме такі множини. Множина, елементами якої є інші множини, називається *класом*.

Множина, яка містить скінчене число елементів, називається скіченою. При підрахунку кількості елементів множини враховуються тільки різні (неповторювані) елементи.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою й позначається символом $\varnothing$.

Множина може бути задана переліком усіх її елементів, породжуючою процедурою або описанням характеристичної властивості (предикатом), якій мають задовольняти всі її елементи. Причому в останньому випадку характеристична властивість має бути сформульована достатньо коректно, для того щоб множина була визначена однозначно. Додамо, що більшість числових множин можуть бути задані всіма трьома вказаними способами (наприклад, множина парних однозначних чисел).

<u>Приклад 1.</u> Множини, задані різними способами.

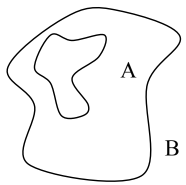
а) $M_1 = \{1; 2; 3; 4\}$;

б) $M_2 = \{x | x \in Z, -4 < x < 9\}$;

в) $M_3 = \{x | x = 2n+1, n \in N\}$.

Потужністю скінченої множини *M* називається кількість її елементів. Позначається $|M|$. Якщо $|A| = |B|$, то множини А і В називаються рівнопотужними.

<u>Визначення.</u> Якщо всі елементи множини А є також елементами множини В, то кажуть, що множина А **належить (міститься)** множині В (рисунок 1).



A $\subset$ B

Рис. 1. Множина А належить множині В

<u>Визначення.</u> Якщо А $\subseteq$ В, то множина А називається **підмножиною** множини В (також говорять, що В покриває А). Якщо при цьому А $\neq$ В, то множина А називається **власною** підмножиною множини В і позначається А $\subset$ В.

<u>Зауваження.</u> Не треба вважати рівносильними відношення належності $(\in)$ і входження однієї множини в іншу $(\subset)$. Можна навести такий приклад. Нехай А – множина всіх студентів певної групи, а В – множина всіх навчальних груп цього ЗВО. Тут $A \in B$, але $A \not\subset B$, оскільки елементи цих множин різні за своєю сутністю. Цей приклад показує також, що елементами множин можуть бути інші множини.

зв’язкам, а класи складаються з вершин, що відповідають атомам того самого елемента.

Нехай дано розбиття графа на класи (однаково, за якою ознакою). Кожній вершині можна співвіднести *мітку*, яка вказує, до якого саме класу вона належить. Така вершина називається *поміченою.* Мітки є елементами заданої множини. Іноді вони чітко вказують на властивості, що визначають класи: наприклад, ступені, ранги вершин, і їх відстані від кореня можна мітити відповідними числами. Однак часто абстрагуються від конкретного характеру відмінностей між вершинами, і тоді мітки вказують тільки на сам факт подібності вершин або їх відмінності. Співвіднесення таких міток вершинам називають *розфарбуванням* їх в різні кольори. Аналогічним чином говорять про розфарбовування ребер графа і взагалі про розфарбовування елементів довільної множини.

Контрольні питання

1. Що таке граф? З яких елементів він складається?

2. Які вершини називають інцедентними ребрам?

3. Які вершини називають суміжними?

4. Які вершини називають ізольованими?

5. Який граф називають плоским, а який – просторовим?

6. Які вершини графа називають зв’язаними?

7. Що називають циклом у графі?

8. Який граф називають деревом, а який – лісом?

9. Який граф називають орієнтованим, або орграфом?

10. Які числа називають вхідним степенем та вихідним степенем для вершини у орграфі?

Визначення. Вершина орієнтованого графа називається *початковою,* якщо в неї не входить жодне ребро, і *кінцевої*, якщо з неї не виходить жодне ребро.

У будь-якому ациклічному графі є хоча б одна початкова і хоча б одна кінцева вершина. *Максимальним рангом* $R(v_0)$ вершини орієнтованого графа називається максимальна з довжин шляхів цього графа з кінцем у вершині v_0. Ранг вершини дорівнює нулю тільки тоді, коли вершина є початковою. Якщо ж через вершину проходить якийсь цикл, то $R(v_0) = +\infty$.

Нехай вершини кінцевого орієнтованого графа пронумеровані від 1 до n. Нумерація вершин називається *правильною на ребрі* $e(v_i, v_j)$, якщо $i < j$ і правильною на графі G, якщо вона правильна на всіх його ребрах. Правильна нумерація вершин графа можлива тільки в тому випадку, якщо він ациклічний.

Поняття довжини шляхів, протяжності й відстані між вершинами визначаються для орієнтованого графа так само, як для неорієнтованого графа.

3. Графи з поміченими вершинами та ребрами

Нерідко доводиться мати справу з відмінностями між вершинами графу. Тоді їх розбивають на класи. Кожен клас складається з вершин, що мають загальну властивість. Прикладом таких властивостей можуть бути наступні з уже описаних раніше властивостей: мати даний ступінь, мати дану відстань від кореня, мати даний ранг і так далі. В інших випадках розбиття визначається властивостями об'єктів, що описуються за допомогою графа. Наприклад, структурна формула хімічної сполуки – це граф, в якому вершини відповідають атомам, ребра – валентним

Парадокс Рассела. Задання множин характеристичним предикатом може привести до суперечності. Розглянемо множину всіх множин, які не містять себе як елемент: $Y = \{X \mid X \notin X\}$. Якщо така множина існує, то виникає питання належності її самій собі. З одного боку, якщо $Y \in Y$, то $Y \notin Y$. З іншого боку, якщо $Y \notin Y$, то $Y \in Y$. Цю суперечність можна вирішити різними способами, які в результаті дають відповідь, що Y не є множиною.

Для трьох множин A, B, C справедливі такі співвідношення:

$$A \subseteq A; \quad A \not\subset A;$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C;$$

$$A \subseteq B \wedge B \subset C \to A \subset C.$$

Зв'язок між включенням і рівністю множин встановлюється таким співвідношенням:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Тут знак $\wedge$ означає **кон'юнкцію** (логічне "і").

Необхідно зауважити, що Г. Кантор запропонував використовувати поняття «універсальної множини» (*універсум*), як протилежного поняттю пустої множини $\varnothing$. На думку Г. Кантора, універсальна множина U містить усі можливі множини, і при цьому вона сама міститься в множині своїх підмножин як елемент. У подальшому зміст і сенс поняття універсальної множини будуть розкриті більш докладно.

2. Операції над множинами і їхні властивості

Визначення. Об'єднанням множин A і B називається множиною C, елементи якої належать хоча б одній із множин A або B (рис. 2).

Позначається C = A $\cup$ B.

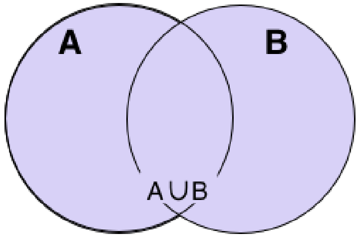


Рис.2 Об'єднання множин

Геометричне зображення множин у вигляді області на площині називають **діаграмою Ейлера – Вейна**.

<u>Визначення.</u> Перетином множин A і B називається множина C, елементи якої належать кожній із множин A і B (Рис. 3).

Позначається C = A ∩ B.

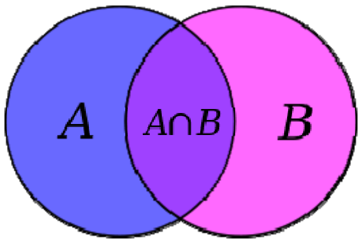


Рис. 3. Перетин множин A і B

Для множин A, B і C справедливі такі властивості:

A ∩ A = A ∪ A = A;   A ∪ B = B ∪ A;   A ∩ B = B ∩ A;

(A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C);   (A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C);

A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C);   A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C);

<u>Визначення.</u> Шлях із вершин та ребер – це така послідовність ребер та вершин графа $L = (v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_k, v_{k+1})$, у якій вершина v_i є початком i – го ребра, а вершина v_{i+1} – його кінцем. Вершина v_0 називається початком шляху L, вершина v_{k+1} – його кінцем, кількість ребер k – довжиною шляху.

Шлях, що складається з однієї вершини, має нульову довжину. Кожному шляху L ненульової довжини взаємно однозначно відповідає послідовність $\tilde{L} = (e_1, \ldots, e_k)$ ребер цього шляху. Його називають *шляхом із ребер*. Таке поняття шляху – аналог відповідного поняття для неорієнтованого графа. Насамкінець, для графа, що не містить кратних ребер, можна вказати взаємно однозначну відповідність із послідовністю $\hat{L} = (v_1, \ldots, v_{k+1})$ вершин шляху. Залежно від ситуації зручніше використовувати той чи інший спосіб визначення шляху.

<u>Визначення.</u> Шлях $L = (v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_k, v_{k+1})$ називається *орієнтованим циклом*, якщо складається більше ніж з одного елементу, і його початок збігається з його кінцем.

Початок циклу зазвичай не фіксується, інакше кажучи, всі шляхи, що отримуються один від одного циклічними зсувами, – це той самий цикл.

Начало циклу зазвичай не фіксується, іншими словами, всі шляхи, які виходять один з одного, називаються циклічними здвигами – це той самий цикл. Визначення простого орієнтованого циклу аналогічно відповідному визначенню для неорієнтованого циклу – це цикл, в якому кожна вершина інцидентна рівно двом його ребрах. Будь-який граф, що містить цикли, можна «скоротити» до простого. Граф, що не містить циклів, називається *ациклічним.*

ному або двом, оскільки у відповідному дереві кожна вершина є кінцевою.

<u>Теорема 16.2.</u> Центрами дерева є вершини максимального типу й тільки вони.

З цієї теореми прямо випливає, що дерево має або один, або два центри. Діаметральні ланцюги в деревах проходять через центр дерева, або, якщо їх два, через обидва центри. У першому випадку довжина діаметральної ланцюга дорівнює $2k-2$, у другому – $2k-1$, де k – максимальний тип дерева.

<u>Визначення.</u> *Цикломатичним числом* скінченного неорієнтованого графа G називається число, яке дорівнює $\gamma(G)=n_G+n_E-n_V$. Тут n_G – кількість зв'язних компонентів графа, n_E – кількість ребер, n_V – кількість вершин.

Цикломатичне число дерева дорівнює нулю. Цикломатичні числа інших скінченних графів позитивні.

2. <u>Орієнтовані графи</u>

Поняття орієнтованого графа (орграфа) було визначено раніше. Тепер розглянемо детальніше, як виглядає в такому графі шляхів та циклів.

Нехай дано орієнтований граф $G(V,E)$. Кожне ребро має початок $v_m \in V$ та кінець $v_n \in V$; також кажуть, що це ребро виходить із вершини v_m та входить у вершину v_n.

Дамо визначення шляху в орієнтованому графі. Зазначимо, що це поняття можна визначати різними способами, ми наводимо тільки один.

$$A \cup (A \cap B) = A; \qquad A \cap (A \cup B) = A;$$

$$A \cup \varnothing = A; \qquad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

<u>Визначення.</u> Різницею множин B і A називається множина, яка містить елементи множини B, які не належать множині A (рис. 4).

Позначається: C = B \ A.

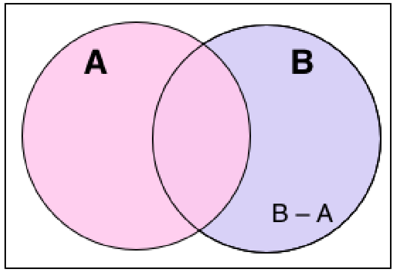


Рис. 4. Різниця множин A і B.

<u>Визначення.</u> Симетричною різницею множин A і B називається множина C, елементи якої належать в точності одній із множин A або B (Рис. 5).

Позначається: A Δ B.

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

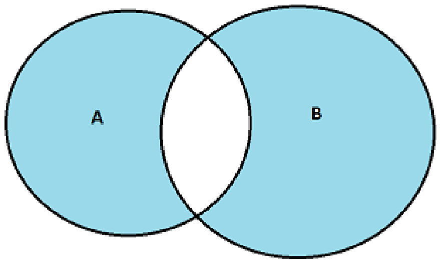


Рис. 5. Симетрична різниця множин A і B.

<u>Визначення.</u> C_E називається **доповненням** множини A відносно множини E, якщо $A \subseteq E$ і $C_E = E \setminus A$ (Рис. 6).

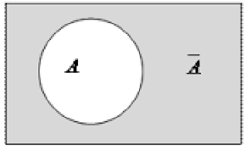


Рис. 6. Доповнення множини A відносно множини E.

Для множин A, B і C справедливі такі співвідношення:

$A \setminus B \subseteq A$; $A \setminus A = \varnothing$; $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

$A \Delta B = B \Delta A$; $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$; $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$; $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;

$A \cup C_E A = E$; $A \cap C_E A = \varnothing$; $C_E E = \varnothing$; $C_E \varnothing = E$;
$C_E C_E A = A$;

$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$; $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

v_m до v_n. Орієнтоване таким чином дерево називається *орієнтованим деревом із коренем*.

У ньому всі ребра мають напрямок від кореня (рисунок 15).

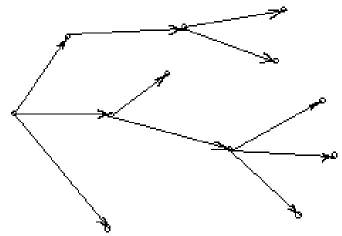


Рисунок 15. Напрямок від кореня

Якщо ж змінити направлення всіх ребер орієнтованого дерева на протилежні (до кореня), то отримаємо орієнтований граф, який називається *мережею збірки*. У загальному випадку, такий граф теж є орієнтованим деревом. У кожну вершину орієнтованого дерева, за винятком кореня, входить тільки одне ребро. Інакше кажучи, ця вершина є кінцем тільки одного ребра. Звідси прямо випливає, що в скінченному дереві число вершин на один перевищує число ребер.

<u>Зауваження.</u> Будь-яке дерево можна орієнтувати, вибравши як корінь будь-яку його вершину.

Нехай дано скінченне дерево G. Назвемо його кінцеві вершини вершинами типу 1. Відзначимо, що якщо дерево має більше двох вершин, то серед них є некінцевим.

Далі видалимо з дерева все вершини типу 1 та інцидентні їм ребра. Залишиться зв'язний граф G', який також є деревом. Дерево G' також має кінцеві вершини, які будемо називати вершинами типу 2 у дереві. Аналогічним чином визначаються вершини типу 3 і так далі.

Легко бачити, що в скінченному дереві є лише вершини кінцевого числа типів, причому число вершин максимального типу дорівнює од-

Деякі класи графів та їх частин

1. Дерева

Визначення. Зв'язаний неорієнтований граф без циклів називається *неорієнтованим деревом або просто деревом.*

Згідно з визначення дерево не може містити ні петель, ні кратних ребер.

Визначення. Незв'язаний неорієнтований граф без циклів називається *лісом*; зв'язні компоненти лісу є деревами.

Очевидно, що будь-яка частина дерева або лісу також не має циклів. У такому графі будь-який ланцюг є простим – інакше він містив би цикл.

Теорема 16.1. Будь-які дві вершини дерева зв'язані тільки одним ланцюгом. Навпаки, якщо дві будь-які вершини графа можна зв'язати тільки одним ланцюгом, то він є деревом.

Визначення. Вершина v_0 називається *кінцевою* або *висячою* вершиною графа, якщо її ступінь дорівнює одиниці. Ребро, інцидентне кінцевий вершині, також називається *кінцевим.*

Якщо скінченне дерево складається більш ніж з однієї вершини, воно має хоча б дві кінцеві вершини і хоча б одне кінцеве ребро.

Нехай у дереві G відзначена деяка вершина v_0. Цю вершину називають *коренем* дерева, а саме дерево – *деревом із коренем*. У такому дереві можна природним чином орієнтувати ребра. Будь-яку вершину v_m ребра (v_m, v_n) можна з'єднати з коренем єдиним простим ланцюгом. Якщо цей ланцюг не містить ребер (v_m, v_n), то вводиться орієнтація від v_n до v_m; якщо ланцюг містить дане ребро, то вводиться орієнтація від

Приклад 2. З огляду на визначення рівності множин і операцій над множинами довести тотожність і перевірити її за допомогою діаграм Ейлера – Вейна

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

Використовуючи наведені вище співвідношення, матимемо, що

$$A \setminus (A \cap B) = (A \setminus A) \cup (A \setminus B) = \varnothing \cup (A \setminus B) = A \setminus B,$$

що і потрібно було довести.

Для ілюстрації отриманого результату побудуємо діаграми Ейлера – Вейна (Рис. 7):

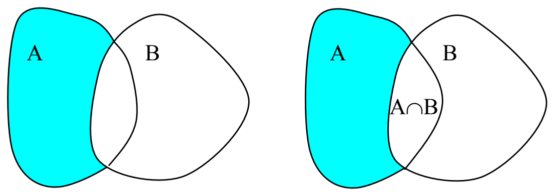


Рис. 7. Діаграми Ейлера – Вейна

Приклад 3. Використовуючи визначення рівності множин і операцій над множинами, довести тотожність:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Якщо деякий елемент $x \in A \setminus (B \cup C)$, то це означає, що цей елемент належить множині A, але не належить множинам B і C.

Множина A \ B являє собою сукупність елементів множини A, які не належать множині B.

Множина A \ C являє собою сукупність елементів множини A, які не належать множині C.

Множина (A \ B) ∩ (A \ C) являє собою сукупність елементів, які належать множині A, але не належать множинам B і C.

Таким чином, тотожність можна вважати доведеною.

3. Вектори і прямі добутки

Вектором (кортежем) у лінійній алгебрі й дискретній математиці називають упорядкований набір елементів. Елементи, які визначають вектор, називаються координатами або компонентами. Координати нумеруються зліва направо, а їх кількість називаються довжиною або розмірністю вектора. На відміну від елементів множини, координати вектора можуть збігатися. Координати вектора записують у круглих діжках, наприклад $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Іноді дужки або коми опускаються. Часто вектори довжиною 2 називаються упорядкованими парами, довжини 3 – трійками і т. д.

Визначення. Два вектори рівні, якщо вони мають рівну довжину і їх відповідні координати рівні. Інакше кажучи, вектори $(a_1, ..., a_n)$ і $(в_1, ..., в_m)$ рівні, якщо $n = m$ і $a_1 = в_1, ..., a_n = в_m$.

Визначення. Прямим добутком множин A і B (позначається $A \times B$) називається множина всіх упорядкованих пар $(a; в)$, таких, що $a \in A, в \in B$. У випадку, якщо A=B, то обидві координати належать множині A, такий добуток позначається A^2. Аналогічно, прямим добутком множин $A_1, A_2, ..., A_n$ називається множина всіх векторів $(a_1, a_2, ..., a_n)$ довжини *n*, таких, що $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$.

ліття наведено на рисунку 14 а. Потрібно обійти місто, пройшовши через кожен міст рівно один раз, і повернутися у вихідну точку.

Можна уявити описану задачу в такий спосіб. Є зв'язний неорієнтований граф із чотирма вершинами і сім'ю ребрами. Потрібно з'ясувати, чи існує простий цикл, що дозволяє обійти цей граф за маршрутом, що включає в себе по одному разу кожне ребро графа.

Саме рішення цієї задачі привело Л. Ейлера до доведення наведеної вище теореми. До речі, згідно з нею ця задача нерозв'язна, оскільки степені всіх вершин графа непарні.

Теорема 15.2. *Для того щоб зв'язний граф G володів Ейлеровим ланцюгом, необхідно і достатньо, щоб він мав рівно дві вершини непарного ступеня.*

По суті, теореми 15.1 і 15.2 описують умови, за яких можна побудувати геометричну фігуру «не відриваючи олівця від паперу», однією суцільною лінією. Тільки в першому випадку початок і кінець цієї лінії будуть збігатися, а в другому випадку вони будуть різні.

Визначення. Цикл (ланцюг) у графі *G* називається *Гамільтоновим*, якщо він проходить через кожну вершину графа *G* рівно один раз.

Граф G називається *повним*, якщо кожна його вершина є суміжною з рештою вершин. У повному графі завжди існують гамільтонові цикли.

Також необхідною умовою існування Гамільтонова циклу є зв'язність графа.

з'єднані ребром, радіус дорівнює одиниці, а будь-яка вершина є центром.

Нехай G – скінченний, зв'язний граф, кількість ребер якого дорівнює k. З міркувань, викладених при вивченні комбінаторики, можна зробити очевидний висновок. Кількість послідовностей ребер цього графа скінченна і рівна $k!$.

Визначення. *Протяжністю* $g(v_m, v_n)$ називається максимальна з довжин простих ланцюгів, що зв'язують ці вершини.

4. Ейлерові графи

Визначення. Ланцюг (цикл) в графі *G* називається *Ейлеровим*, якщо він проходить по одному разу через кожне ребро графа *G*.

Теорема 15.1. *Для того щоб зв'язний граф G володів Ейлеровим циклом, необхідно та достатньо, щоб степені його вершин були парними.*

а) б)

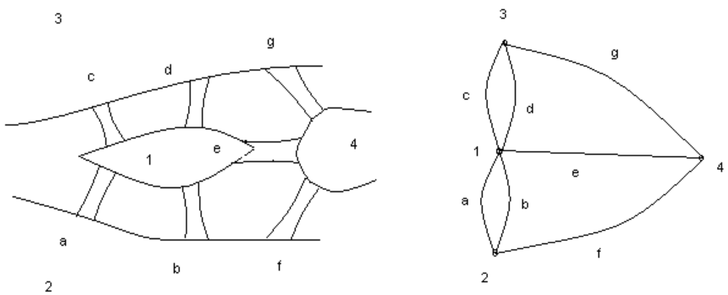


Рисунок 14. Ейлеровий цикл

Задача, яка привела до появи поняття Ейлерового циклу, широко відома в історії математики. Це так звана задача про кенігсберзькі мости. Розташування семи мостів у місті Кенігсберзі на початку XVIII сто-

Приклад 4. Множина $R \times R = R^2$ – це множина всіх упорядкованих пар дійсних чисел, геометричною інтерпретацією якої є декартова система координат.

Координатне представлення точок площини було вперше запропоноване Рене Декартом і історично вважається першим прикладом прямого добутку. Тому досить часто прямий добуток множин називають декартовим добутком.

Приклад 5. Дано множини $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ і $B = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$. Тоді $A \times B$ є множиною, яка позначає клітини шахової дошки.

Взагалі скінченна множина, елементами якої є які-небудь символи (букви, цифри, знаки пунктуації, знаки операцій і т. ін.), називається *алфавітом*. Будь-які елементи множини A^n в цьому випадку є *словами* довжини *n* в алфавіті А. Наприклад, десяткове ціле число – це слово в алфавіті цифр.

Визначення. Проекцією вектора $a(a_1, a_2, ..., a_n)$ на деяку вісь називається його компонента (координата) з відповідним порядковим номером (позначається пр$_i$*a)*. Наприклад, проекція точки площини на 1-у вісь є її абсциса (перша координата).

Теорема 1.1. Потужність добутку скінчених множин $A_1, A_2, ..., A_n$ дорівнює добутку потужностей цих множин: $|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times ... \times |A_n|$.

Наслідок. $|A^n| = |A|^n$.

Ця проста теорема і її наслідок широко використовуються в комбінаториці.

Співвідношення і функції

1. Співвідношення

Визначення. *Співвідношенням* між множинами А і В називається деяка підмножина G їх декартового добутку: $G \subseteq A \times B$.

Якщо $(a;b) \in G$, то говорять, що b відповідає a при заданому співвідношенні G. При цьому множина всіх значень a називається областю визначення співвідношення $D(G)$, а множина відповідних значень b називається областю значень співвідношення $E(G)$.

За даним визначенням, кожен елемент $b \in B$, який відповідає елементу $a \in A$ називається *образом* a при співвідношенні G, і навпаки, елемент $a \in A$ називається *прообразом* елемента $b \in B$ при заданому співвідношенні.

Співвідношення називається *цілком визначеним*, якщо $D(G) = A$, тобто коли кожен елемент множини A має хоча б один образ у множині B; інакше співвідношення називається *частковим*.

Співвідношення G називається *сюр'єктивним*, якщо $E(G) = B$, тобто якщо кожному елементу множини B відповідає хоча б один прообраз з множини A.

Співвідношення G називається *функціональним,* якщо будь-якому елементу множини A відповідає єдиний елемент множини B.

Співвідношення називається *ін'єктивним*, якщо воно є функціональним , і при цьому кожен елемент множини B має не більше одного прообразу.

Співвідношення G називається *взаємнооднозначним (бієктивним),* якщо будь-якому елементу з множини A ставиться у відповідність єдиний елемент із множини B, і навпаки. Можна також зазначити, що

якої пари різних вершин v_m і v_n виконується $d(v_m, v_n) > 0$, оскільки ланцюг, що їх зв'язує, складається хоча б з одного ребра. Взагалі, відстань d задовольняє аксіомам метрики:

1) $d(v_m, v_n) \geq 0$, причому $d(v_m, v_n) = 0$ тільки тоді, коли $v_m = v_n$;

2) $d(v_m, v_n) = d(v_n, v_m)$.

Також для відстані d виконується нерівність трикутника: для будь-яких трьох вершин v_m, v_n, v_p виконується нерівність: $d(v_m, v_n) + d(v_n, v_p) \geq d(v_m, v_p)$.

Це дозволяє, для спрощення суджень, вимірювати відстань між вершинами за кількістю ребер простого ланцюга, що їх з'єднує (тим більше, що геометричні характеристики ребер ми не враховуємо).

Визначення. *Діаметром* скінченного графа G називається найбільша з відстаней між парою його вершин: $d(G) = \max\limits_{v_m, v_n \in G} d(v_m, v_n)$.

Найкоротші прості ланцюги, що зв'язують дві вершини графа з максимальною відстанню між ними, називаються *діаметральними простими ланцюгами*.

Нехай v_0 – розглянута вершина цього графа, а v – довільна вершина графу. *Максимальним віддаленням* у графі G від фіксованої вершини v_0 називається величина $r(v_0) = \max d(v, v_0)$.

Визначення. Вершина v_0 називається *центром графа* G, якщо максимальне віддалення від неї до решти вершин графа набирає мінімальне значення: $r(v_0) = \min\limits_{v \in G} r(v, v_0)$.

Максимальне видалення від центра графа називається його *радіусом* і позначається $r(G)$, а будь-який найкоротший ланцюг від центра до найбільш віддаленої від нього вершини – *радіальним ланцюгом*.

Зауваження. Граф може мати більше одного центра. Наприклад, в повному неорієнтованому графі, в якому дві будь-які різні вершини ються та такі, що вершини однієї підмножини V_i пов'язані між собою і не пов'язані з вершинами іншої підмножини V_j. Це, у свою чергу, означає, що граф може бути розкладений у пряму суму підграфів: $G = \cup G_i$.

Визначення. Граф називається **зв'язним**, якщо всі його вершини пов'язані між собою.

Тому всі підграфи зв'язного графу G зв'язні й називаються зв'язковими компонентами графа G.

3. Відстань. Діаметр, радіус та центр графа. Протяжність

Нехай $G(V,E)$ – зв'язний неорієнтований граф, v_m, v_n – будь-які дві його вершини. Тоді існує простий ланцюг, що їх зв'язує $M(e_1,\dots,e_k)$. Якщо кількість цих ребер k не мінімальна з можливих, існує ланцюг $M'(e'_1,\dots,e'_l)$, при цьому $l < k$.

Штрихи у позначенні використовуються, тому що не обов'язково ребра під однаковими індексами будуть збігатися.

Якщо ж і l не мінімальне, то знайдеться ланцюг M'', що зв'язує ці вершини з ще меншою кількістю ребер і так далі. Однак цей процес не є нескінченним, його можна повторити не більше, ніж k разів. Тоді існує ланцюг $\widetilde{M}(\widetilde{e}_1,\dots,\widetilde{e}_p)$, що зв'язує вершини v_m та v_n з мінімальною кількістю ребер p.

Визначення. Мінімальна довжина простого ланцюга з початком у вершині v_m і кінцем у вершині v_n називається *відстанню* між цими вершинами. Позначається: $d(v_m, v_n)$.

Відстань $d(v,v)$ між будь-якою вершиною і нею самою дорівнює 0. Йому відповідає нульовий маршрут, який не містить ребер. Для будь-

співвідношення є взаємнооднозначним, якщо воно є повністю визначеним, сюр'єктивним, функціональним, і при цьому кожен елемент із множини B має єдиний прообраз.

Приклад 1.

а) Англо-український словник встановлює співвідношення між множинами англійської та української мов. Це співвідношення не є функціональним, тому що майже кожному слову української мови відповідає декілька англійських перекладів; воно також не є цілком визначеним співвідношенням, тому що завжди існують англійські слова, які не включені до цього словника. Таким чином, це часткове співвідношення.

б) Співвідношення між аргументами функції $y = x^2$ і значеннями цієї функції є функціональним. Проте воно не є взаємнооднозначним, тому що кожному значенню функції $y_0 \neq 0$ відповідають два прообрази $x_1 = \sqrt{y_0}$ і $x_2 = -\sqrt{y_0}$.

в) Співвідношення між розставленими на шахівниці фігурами й адресами комірок, які вони займають, є взаємнооднозначним.

г) Співвідношення між телефонними номерами мобільного оператора й десятизначними номерами, на перший погляд, є взаємнооднозначним. Проте воно, наприклад, не є сюр'єктивним, оскільки існують десятизначні числа, які не відповідають ніяким абонентам.

2. Взаємнооднозначні відповідності й потужності множин

Якщо між двома скінченними множинами A і B існує взаємнооднозначна відповідність, то ці множини рівнопотужні. Цей очевидний факт дозволяє, по-перше, встановити рівність потужностей цих множин, не обчислюючи їх. По-друге, є можливість обчислити потужність множини, встановивши однозначну відповідність із множиною, потужність якої нам відома, або її легко обчислити.

Теорема 2.1. Якщо потужність скінченої множини A дорівнює n, то число всіх підмножин A дорівнює 2^n, тобто $2^{|A|} = 2^n$.

Множина всіх підмножин множини М називається *булеаном* і позначається 2^M. Для скінчених множин виконується рівність: $\left|2^M\right| = 2^{|M|}$.

<u>Визначення.</u> Множини A і B називаються равнопотужними, якщо між їхніми елементами можна встановити взаємнооднозначну відповідність.

Таке твердження легко доводиться для скінченних множин. Для нескінчених множин воно визначає поняття рівнопотужності.

<u>Визначення.</u> Множина A називається зліченою, якщо вона рівнопотужна множині натуральних чисел N: $|A| = |N|$.

Таким чином, можна сказати, що нескінчена множина є зліченою, якщо для її елементів можна встановити нумерацію за допомогою натуральних чисел.

Властивості злічених множин:

1. Будь-яка нескінчена підмножина множини натуральних чисел є зліченною.
2. Множина $N^k, k \in N$ є зліченною.
3. Множина раціональних чисел R є зліченною (наслідок із попередньої властивості).
4. Об'єднання скінченної кількості зліченних множин є зліченним.
5. Об'єднання скінченної кількості скінченних множин є зліченним.
6. Об'єднання зліченного числа зліченних множин є зліченним.

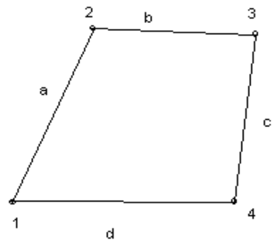


Рисунок 13. Приклад циклу графа

Ділянка ланцюга або циклу є ланцюгом; відповідно, ділянка простого ланцюга або простого циклу є простим ланцюгом.

2. <u>Зв'язні компоненти графів</u>

<u>Визначення.</u> Вершини v_m та v_n називаються зв'язаними, якщо існує маршрут M з початком v_m та кінцем v_n. Навпаки, маршрут M з початком v_m та кінцем v_n називається зв'язним цим вершин.

Очевидно, що при існуванні маршруту M повинен також існувати маршрут M^{-1}з початком v_n і кінцем v_m, в якому ребра йдуть у протилежному порядку. Можна показати, що будь-які дві зв'язані маршрутом M вершини можна зв'язати маршрутом M^*, що є простим ланцюгом, що складається з ділянок маршруту M.

Якщо вершина v_m пов'язана з якоюсь вершиною v_m маршрутом M, то вона, природно, пов'язана з собою маршрутом, що складається з маршрутів M і M^{-1}. Більш того, прийнято вважати, що ізольована вершина також зв'язана сама з собою, тобто відношення зв'язності, що задане на множині вершин цього графа V рефлексивно. Воно також симетричне і транзитивне, а тому є відношенням еквівалентності. Тоді воно породжує розбиття множини V на підмножини такі, що не перетина-

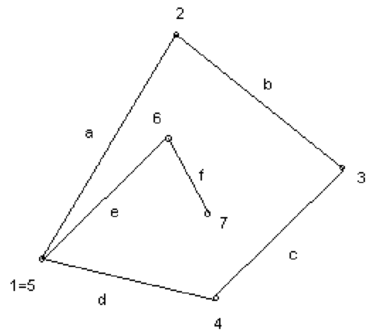


Рисунок 12. Приклад маршруту графа

Розглянемо випадок, коли $v_1 = v_{k+1}$, тобто початок та кінець маршруту збігаються. Зазначимо, що в цьому випадку маршрут може бути тільки кінцевим.

Визначення. Незамкнений маршрут (шлях) називається *ланцюгом*. Ланцюг, у якому всі вершини попарно різні, називаються *простим ланцюгом*.

У простому ланцюзі вершина маршруту інцидентна не більш ніж двом його ребрам.

Визначення. Замкнений маршрут (шлях) називається *циклічним маршрутом або циклом (контуром)*. Цикл, у якому всі вершини попарно різні, називається *простим циклом*.

Інакше кажучи, простий цикл – це циклічний маршрут, у якому будь-які два сусідніх ребра мають одну інцидентну вершину. Послідовності $M_1(abcd)$, $M_2(bcda)$, $M_3(cdab)$ та $M_4(dabc)$ представляють той же самий цикл (рисунок 13). Часто вважають, що можна змінювати порядок ребер циклу на протилежний, тобто, наприклад, послідовність $M_5(dcba)$ є тим самим циклом.

За допомогою цих тверджень можна визначити, чи є ця множина зліченною чи ні. Проте не будь-яка нескінчена множина є зліченною, існують множини більшої потужності.

Теорема 2.2 (теорема Кантора). Множина всіх дійсних чисел із відрізку $[0;1]$ не є зліченною.

Доведення. Припустимо, що множина $M = \{x | x \in [0;1], x \in R\}$ є зліченною і всі її елементи можна занумерувати. Оскільки будь-яке дійсне число можна представити у вигляді нескінченного десяткового дробу (періодичного або не періодичного), то запишемо таким чином числа цієї множини. Розмістимо їх у порядку заданої нумерації:

$$\begin{array}{l} 0,a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\ldots \\ 0,a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\ldots \\ 0,a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\ldots \\ 0,\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ 1,000\ \ldots \end{array}$$

Тепер розглянемо будь-який нескінчений десятковий дріб вигляду $0,b_{11}b_{12}b_{13}\ldots$, організований таким чином: $b_{11} \neq a_{11}, b_{12} \neq a_{22}, b_{13} \neq a_{33}$ і так далі. Очевидно, що цей дріб не входить у досліджувану послідовність, оскільки від першого числа він відрізняється першою цифрою після коми, від другого – другою цифрою і так далі. Таким чином, ми отримали число з заданого інтервалу, яке не занумероване, а отже, множина M не є зліченною. Її потужність називається *континуум*, а множини такої потужності називаються *континуальними*. Наведений метод доведення називається *діагональним методом Кантора*.

Наслідок 1. Множина дійсних чисел R континуальна.

Наслідок 2. Множина всіх підмножин зліченної множини континуальна.

Як показано в теорії множин (за допомогою метода, аналогічного наведеному вище), для множини будь-якої потужності множина всіх її підмножин (булеан) має більш високу потужність. Тому не існує множини максимальної потужності. Наприклад, множина-універсум U, описана Кантором, має містити всі можливі множини, проте вона сама міститься в множині своїх підмножин як елемент (парадокс Кантора). Виходить, що множина U не є множиною максимальної потужності.

3. Відображення і функції

Функцією називається будь-яка функціональна відповідність між двома множинами. Якщо функція f встановлює відповідність між множинами А і В, то говорять, що функція f має вигляд $A \to B$ (позначається $f : A \to B$). Кожному елементу a з області визначення функція ставить у відповідність елемент b з області значень. Цей запис традиційно виглядає таким чином $f(a) = b$. Елемент a називається *аргументом* функції, елемент b – її *значенням*.

Цілком визначена функція $f : A \to B$ називається *відображенням* А в В; образ множини А при відображенні позначається $f(A)$. Якщо при цьому $f(A) = B$, тобто відповідність є сюр'єктивною, то говорять що має місце відображення А на В.

Якщо $f(A)$ складається з єдиного елемента, то f називається функцією-константою.

Відображення типу $A \to A$ називається перетворенням множини А.

Приклад 2.

а) Функція $f(x) = 2^x, x \in N$ є відображенням множини натуральних чисел в себе (ін'єктивна функція). Ця ж функція при всіх $x \in Z$ є відображенням множини цілих чисел у множину раціональних чисел.

Маршрути, ланцюги та цикли

1. Основні визначення

Нехай *G(V, E)* – неорієнтований граф. Розглянемо скінченну послідовність ребер $M(e_1,\dots,e_k)$ таку, що будь-які два сусідніх ребра e_i, e_{i+1} мають одну спільну інцидентну вершину v_{i+1}. Цю послідовність називають *маршрутом графа*.

Визначення. *Маршрутом (шляхом)* для графа *G(V, E)* називається послідовність $v_1e_1v_2e_2v_3...e_kv_{k+1}$. Маршрут називається *замкнутим*, якщо його початкова та кінцева точки збігаються. Кількість ребер (дуг) маршруту (шляху) графа називається *довжиною маршруту* (шляху).

Будь-який відрізок скінченного та нескінченного маршруту M виду $M'(e_m,\dots,e_n)$, де $1 \le m, n \le k+1$ також є маршрутом та називається ділянкою маршруту M.

Зауважимо, що те саме ребро може зустрічатися не один раз. Вершина v_1, інцидентна першому ребру маршруту e_1 і не інцидентна наступному ребру, називається *початком маршруту*. Причому, якщо ці ребра кратні, то необхідно вказати, яка саме з двох інцидентних їм вершин є початком маршруту. Аналогічно визначається кінець маршруту. Вершини, інцидентні ребрам маршруту, за винятком першої та останньої, називаються *проміжними.* Оскільки одній вершині може бути інцидентне кілька ребер, початок і кінець маршруту можуть бути водночас проміжними точками. Такий, наприклад, маршрут *abcdef* на рисунку 12, де вершина 1 є початком маршруту і разом з тим проміжною точкою.

а) б)

Рисунок 11. Різні типи ребер графа

Отже, граф вважається повністю заданим, якщо нумерація його вершин зафіксована. Графи, що відрізняються тільки нумерацією вершин, називаються *ізоморфними.*

Визначення. Графи $G_1(V_1, E_1)$ та $G_2(V_2, E_2)$ називаються *ізоморфними*, якщо існує взаємно однозначне відображення $\varphi\colon V_1 \to V_2$, що зберігає суміжність.

Перенумерація вершин графа задається рядком $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ нових номерів вершин, що розташовані у вихідному порядку. Нова матриця суміжності виходить із вихідної матриці переміщенням кожного елемента ε_{ij} в $\alpha_i - ю$ рядок, в $\alpha_j - й$ стовбець. Тому, щоб дізнатися, чи становлять дві таблиці суміжності ізоморфні графи, можна, наприклад, перевести всі можливі однакові перестановки рядків і стовпців першої матриці. Якщо одна з таких перестановок дасть матрицю, що тотожно збігається з другою матрицею, то представлені ними графи ізоморфні. Однак ця процедура може виявитись дуже трудомісткою, оскільки всього можливо виконати $n!$ перестановок.

б) Функція $f(x)=|x|,\ x\in Z_{\setminus 0}$ є відображенням множини цілих чисел (крім 0) на множину натуральних чисел. У цьому випадку відповідність не є взаємнооднозначною.

в) Функція $f(x)=x^3,\ x\in R$ є взаємнооднозначним відображенням множини дійсних чисел на себе.

г) Функція $f(x)=\sqrt{x}$ не повністю визначена, якщо її тип $N\to N$, але повністю визначена, якщо її тип $N\to R$ або $R_+\to R$.

Визначення. Функція типу $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\to B$ називається $n-$місною функцією. У цьому випадку прийнято вважати, що функція має n аргументів: $f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=b$, де $a_1\in A_1, a_2\in A_2,\ldots,a_n\in A_n, b\in B$.

Наприклад, додавання, множення, віднімання і ділення є двомісними функціями на множині дійсний чисел R, тобто є функціями типу $R^2\to R$.

Визначення. Нехай задана відповідність $G\subseteq A\times B$. Якщо відповідність $H\subseteq B\times A$ така, що $(b,a)\in H$, тільки тоді, коли $(a,b)\in G$, то H називають оберненою до G і позначають G^{-1}.

Визначення. Якщо відповідність обернена до функції $f: A\to B$ є функціональною, то воно називається функцією, оберненою до f.

Очевидно, що при зворотній відповідності образи і прообрази міняються місцями, тому для існування зворотної функції f^{-1} потрібно, щоб кожен елемент з області значення f мав би єдиний прообраз. Це означає, що для функції $f: A\to B$ зворотна функція f^{-1} існує тільки тоді, коли f є бієктивною відповідністю між своєю областю визначення і областю значень.

Приклад 3. Функція $\sin x$ має тип $R\to R$. Відрізок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ вона взаємнооднозначно відображає на відрізок $[-1;1]$. Тому для неї на відрізку $[-1;1]$ існує обернена функція. Як відомо, це $\arcsin x$.

Визначення. Нехай дано функції $f: A \to B$ і $g: B \to C$. Функція $h: A \to C$ називається композицією функцій f і g (позначається $f \circ g$), називається композицією функцій якщо має місце рівність: $h(x) = g(f(x))$, де $x \in A$.

Композиція функцій f і g являє собою послідовне застосування цих функцій; g застосовується до результату f. Часто говорять, що функція h отримана підстановкою f в g.

Для багатомісних функцій $f: A^m \to B, g: B^n \to C$ можливі різні варіанти підстановок f в g, які дають функції різних типів. Особливий інтерес становить випадок, коли задано безліч функцій типу: $f_1: A^{n_1} \to A, ..., f_m: A^{n_m} \to A$. У цьому випадку можливі, по-перше, будь-які підстановки функцій одна в іншу, а по-друге, будь-які перейменування аргументів. Функція, отримана з цих функцій $f_1, ..., f_m$ деякою підстановкою їх одна в іншу і перейменуванням аргументів, називається їх суперпозицією.

Наприклад, у математичному аналізі вводиться поняття елементарної функції, що є суперпозицією фіксованого (який залежить від значення аргументу) числа арифметичних операцій, а також елементарних функцій ($x^n, \sin x, e^x$ і т. і.).

А. Н. Колмогоровим і В. І. Арнольдом доведено, що будь-яка безперервна функція змінних може бути подана у вигляді суперпозиції неперервних функцій двох змінних.

Зауваження. Поняття функції широко використовується в математичному аналізі, більш того, є в ньому базовим поняттям. Загалом підхід до розуміння терміна «функція» в Матаналізі дещо вужчий, ніж у дискретній математиці. Перневажно в ньому розглядаються так звані обчислювані функції. Функція називається обчислюваною, якщо задана процедура, що дозволяє при будь-якому заданому значенню аргументу знайти значення функції.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1

Очевидно, що вся інформація про орієнтований граф, що породжує деяку матрицю суміжності, міститься у верхньому (щодо головної діагоналі) її трикутнику.

Орієнтований граф із симетричною матрицею суміжності канонічно відповідає неорієнтованому графу, що має ту саму таблицю суміжності (але не навпаки).

2. Ідентифікація графів, заданих своїми представленнями

Отже, граф може бути представлений різними способами. Він може бути заданий рисунком, матрицею інцидентності, списком ребер або матрицею суміжності. Вид креслення залежить від форми ліній і взаємного розташування вершин. Іноді, навіть для пари достатньо простих графів, незрозуміло, чи однакові вони (див. рисунок 11 «а» і «б»). Вид матриць, також як списків ребер, залежить від нумерації вершин і ребер графа. У зв’язку з цим виникає дуже істотне питання про те, як визначати рівність графів.

Очевидно, за списком ребер можна побудувати його таблицю інцидентности. Дійсно, кожен рядок цього списку відповідає рядку матриці з тим же номером; аналогічно можна виконати зворотну процедуру.

Ще одним способом представлення графа є побудова для нього матриці суміжності. Це квадратна матриця $C = \|\varepsilon_{ij}\|$, у якій кількість рядків та стовбців дорівнює кількості вершин графа. Для неорієнтованого графа $G = (V, E)$ ця матриця визначається таким чином. Якщо вершини v_i та v_j є суміжними, тобто якщо виконується $(v_i, v_j) \in E$, то $\varepsilon_{ij} = 1$. Інакше $\varepsilon_{ij} = 0$. Для графа з прикладу 1 таблиця суміжності має вигляд:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	1	0	0
2	1	0	0	1	0	1	0
3	1	0	0	1	1	0	0
4	0	1	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	0	0	1
6	0	1	0	1	0	0	1
7	0	0	0	0	1	1	0

Матриця суміжності неорієнтованого графа обов’язково симетрична. Розмірність матриці вказує на кількість вершин, а число ребер дорівнює половині одиниць, наявних у матриці.

Матриця суміжності орієнтованого графа відрізняється тільки тим, що $\varepsilon_{ij} = 1$ тільки у тому випадку, коли у пари суміжних вершин v_i та v_j вершина v_i є початком, а вершина v_j – кінцем ребра. Для графа з прикладу 2 матриця суміжності має такий вигляд:

Відношення та їхні властивості.

1. Основні поняття й визначення

Визначення. Підмножиною $R \subseteq A^n$ називається $n-$місне ($n-$мірне) відношення на множині А. Кажуть, що елементи $a_1, ..., a_n$ перебувають у відношенні R, якщо $(a_1, ..., a_n) \in R$.

Одномісне (одномірне) відношення – це просто деяка підмножина А. Такі відношення називають ознаками. Говорять, що a має ознаку R, якщо $a \in R$ і $R \subseteq A$. Властивості одномісних відношень – це властивості підмножин А, тому для випадку $n = 1$ термін «відношення» вживається рідко.

Найбільш часто зустрічаються і добре вивченими є двомісні або бінарні відношення. Якщо a і b перебувають у відношенні R, це зазвичай записується у вигляді aRb.

Приклад 1. Бінарні відношення на множині N.

а) Відношення “$\le$” виконується для пар $(7;9), (7;7)$ і не виконується для пари $(9;7)$.

б) Відношення «мати спільний дільник, що не дорівнює одиниці» виконується для пар $(3;6), (4;10)$ і не виконується для пар $(6;5), (11;3)$.

в) Відношення «бути дільником» виконується для пар $(2;6), (5;5)$ і не виконується для пар $(4;2), (6;1)$.

Приклад 2. Бінарні відношення на множині точок координатної площини.

а) Відношення «бути рівновіддаленими від початку координат» виконуватися для пар точок $(1;-4)$ і $(-4;1)$, але не виконаються для пари точок $(3;0)$ і $(-2;6)$.

б) Відношення «належати колу, центр якого знаходиться в початку координат», виконується для першої пари точок з попереднього прикладу і не виконується для другої пари.

Нехай дано відношення R на множині А. Для будь-якої підмножини $A_1 \subseteq A$ визначається відношення R_1, яке називається *звуженням* R на A_1, воно виходить з відношення R видаленням всіх пар, що містять елементи, які не належать A_1. Інакше кажучи, $R_1 = R \cap A_1^2$.

Саме відношення R і його звуження R_1 – це різні відношення, з різними областями визначення. Однак, за замовчуванням, для усунення суперечностей ця різниця не враховується. Наприклад, цілком можна говорити про відношення «бути дільником», не уточнюючи, чи задано воно на множині N або на якій-небудь її підмножині.

Для завдання бінарних відношень можна використовувати будь-які способи завдання множин (наприклад, список пар, для яких це відношення виконується). Відношення на зліченних множинах зазвичай задаються списком або матрицею. Матриця бінарного відношення на кінцевій множині $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – це квадратна матриця C порядку n, в якій кожен елемент c_{ij} визначається таким чином:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо для відповідної пари відношення виконується,} \\ 0, \text{ в протилежному випадку.} \end{cases}$$

<u>Приклад 3.</u> Для скінченної множини $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ матриці відношення з прикладу 1 (а – б).

а)

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1

Ще простіше задавати граф за допомогою таблиці ребер. Вона складається з двох стовбців; у лівих містяться назви ребер, а в правих – інцидентні їм вершини (для орієнтованих графів обов'язково спочатку вказується початок ребра, потім – кінець). Нижче наведені таблиці ребер для графів з прикладів 1 і 2.

Для прикладу 1:

Ребра	Вершини
a	1, 2
b	1, 3
c	2, 4
d	1, 5
e	2, 6
f	3, 4
g	3, 5
g	4, 6
i	5, 7
j	6, 8

Для прикладу 2:

Ребра	Вершини
a	1, 2
b	1, 3
c	2, 4
d	3, 5
e	3, 6
f	3, 7
g	7, 7

Для орієнтованого графу матриця інцидентності складається інакше. Це матриця $B = \|\varepsilon_{ij}\|$ розмірності $m \times n$.

Якщо вершина v_j – початок ребра e_i, то $\varepsilon_{ij} = 1$. Якщо вершина v_j – кінець ребра e_i, то $\varepsilon_{ij} = -1$. Якщо вершині v_j інцидентна петля e_i, то $\varepsilon_{ij} = \mu$, де μ – будь-яке число, крім чисел $0, \pm 1$ (зазвичай беруть 2). У будь-якому протилежному випадку - $\varepsilon_{ij} = 0$.

Приклад 2. Побудувати матрицю інцидентності для графа, який зображено на рисунку 10.

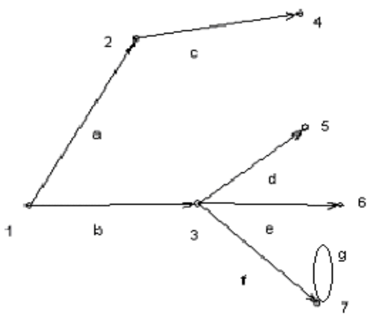


Рисунок 10. Орінтований граф

Побудувати матрицю інцидентності у вигляді таблиці:

	1	2	3	4	5	6	7
a	-1	1	0	0	0	0	0
b	-1	0	1	0	0	0	0
c	0	-1	0	1	0	0	0
d	0	0	-1	0	1	0	0
e	0	0	-1	0	0	1	0
f	0	0	-1	0	0	0	1
g	0	0	0	0	0	0	2

б)

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1
5	0	0	0	0	1	0
6	0	1	1	1	0	1

Оскільки відношення на множині А задаються підмножинами A^2, для відношень можна визначити ті ж операції, що і для множин. Наприклад, відношення “≤” є об’єднанням відношень “<” і “=”.

Визначення. Відношення R^{-1} називається оберненим до відношенню R, якщо $bR^{-1}a$ тільки тоді, коли aRb.

Безпосередньо з визначення випливає, що $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$. Наприклад, для відношення “≤” оберненим є відношення “≥”.

2. Властивості відношень

Визначення. Відношення R називається *рефлексивним*, якщо для будь-якого елемента $a \in A$ має місце aRa.

Головна діагональ матриці рефлексивного відношення містить тільки одиниці.

Визначення. Відношення R називається *антирефлексивним*, якщо ні для якого елемента $a \in A$ не виконується aRa.

Головна діагональ матриці рефлексивного ставлення містить тільки нулі.

Наприклад, відношення “≤” і “ мати спільний дільник ” є рефлексивними. Відношення “<” і “мати сина” є антирефлексивними. Відношення «бути симетричним щодо осі абсцис» не є ні рефлексивним, ні антирефлексивним: точка площині симетрична сама собі, якщо лежить на цій осі, і не симетрична собі, якщо не лежить на ній.

Визначення. Відношення R називається симетричним, якщо для будь-якої пари $(a,b)\in M^2$ з відношення aRb випливає bRa. Іншими словами, відношення R є симетричним тільки тоді, коли для будь-якої пари $(a,b)\in M^2$ воно виконується в обидві сторони (або зовсім не виконується).

Матриця симетричного відношення симетрична щодо головної діагоналі: $c_{ij}=c_{ji}$ для будь-яких i,j.

Визначення. Відношення R називається антисиметричних, якщо з відношень aRb і bRa випливає, що $a=b$.

Відношення «бути симетричним щодо осі абсцис» є симетричним: якщо перша точка симетрична другий щодо цієї осі, то і друга точка симетрична першій. Відношення “$\le$” є антисиметричним. Дійсно, якщо $a\le b$ і $b\le a$, це означає, що $a=b$.

Неважко переконатися в тому, що відношення R симетричне тільки тоді, коли $R=R^{-1}$.

Визначення. Відношення R називається *транзитивним*, якщо для будь-яких a,b,c з відношень aRb і bRc випливає aRc.

Відношення «бути рівним», «жити в одному місті», «бути паралельним» є транзитивними. Відношення «перетинатися», «бути сином» не є транзитивними.

Зауваження. На відміну від відношень рефлексивності й симетричності, для відношення транзитивності не формулюється протилежне поняття (антитранзитивності).

Визначення. *Транзитивним замиканням* $\hat{R}$ відношення R називається відношення, яке визначається таким чином: якщо в множині M

графа, оскільки за способом її задання неможливо відрізними початок та кінець кожного ребра.

Приклад 1. Скласти матрицю інцидентності неорієнтованого графа, зображеного на рисунку 9.

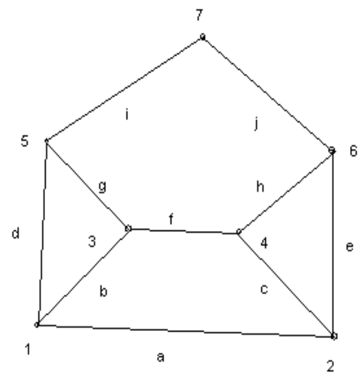
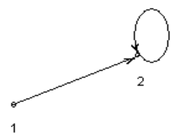


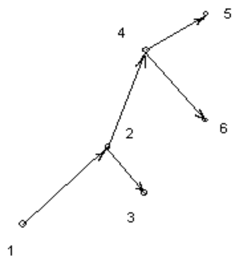
Рисунок 9. Орієтований граф

Побудувати матрицю інцидентності у вигляді таблиці.

	1	2	3	4	5	6	7
a	1	1	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	0	1	0	1	0	0	0
d	1	0	0	0	1	0	0
e	0	1	0	0	0	1	0
f	0	0	1	1	0	0	0
g	0	0	1	0	1	0	0
h	0	0	0	1	0	1	0
i	0	0	0	0	1	0	1
j	0	0	0	0	0	1	1



7.4



7.5

Рисунок 7. Орінтовані графи

Зазначимо, що кожному неорієнтованому графу можна поставити у відповідність орієнтований граф з тією ж самою множиною вершин, у якому кожне ребро замінено двома протилежними ребрами, інцидентний тим же вершинам. Така відповідність називається *канонічною*.

1. Матриця інцидентності та список ребер. Матриця суміжності графа

Зазвичай розглядаються скінченні графи, тобто скінченні безлічі їх елементів – вершин і ребер. Тому в подальшому скінченність графа не буде обумовлюватися, тим більше, що найважливіші поняття і результати, наведені нижче, відносяться до довільних графів.

Задати граф – означає, описати множину його вершин й ребер та задати між ними відношення інцидентності. Коли граф $G(V,E)$ – скінченний, для описання його вершин та ребер достатньо їх пронумерувати. Нехай $v_1,\ldots,v_n$ – вершини графа, а $e_1,\ldots,e_m$ – його ребра. Відношення інцидентност можна визначити матрицею $A=\|\varepsilon_{ij}\|$ розмірності $m\times n$. Стовбці цієї матриці будуть відповідати вершинам графа, а строки – його ребрам. Якщо ребро e_i інцидентно вершині v_j, то $\varepsilon_{ij}=1$, інакше – $\varepsilon_{ij}=0$. Така матриця називається *матрицею інцидентності неорієнтованого*

існує ланцюг з n елементів $a=a_1,a_2,...,a_n=b$, в якій між кожними двома сусідніми елементами виконується відношення $R\,(aRa_2,a_2Ra_3,...,a_{n-1}Rb)$, то кажуть, що існує транзитивне замикання $a\hat{R}b$.

Зауваження. Замикання є дуже загальним математичним поняттям. Спрощено кажучи, замкнутість означає, що багаторазове повторення допустимих кроків не виводить за певні межі. Наприклад, безліч натуральних чисел замкнуто щодо операції додавання, однак відкрито (тобто незамкнутого) щодо операції ділення.

Якщо відношення R транзитивне, то, очевидно, $\hat{R}=R$ (і навпаки). Наприклад, відношення «бути дільником» транзитивно для будь-якого ланцюга елементів і саме є транзитивним замиканням цього відношення.

Якщо відношення R не транзитивним, то $R\subseteq\hat{R}$.

Наприклад, транзитивним замиканням відношення «бути сином» є відношення «бути прямим нащадком», що включає в себе поняття «бути сином», «бути онуком», «бути правнуком» і так далі.

Основні види відношень

Зі змісту попередньої теми та розглянутих у ній прикладів видно, що поняття «відношення» слід розуміти досить широко. У цій темі ми спробуємо ввести певну класифікацію відношень і розглянути найбільш значущі з погляду математики види відношень, а саме відношення еквівалентності й порядку.

1. Відношення еквівалентності

Визначення. Відношення називається відношенням еквівалентності (або просто еквівалентністю), якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Приклад 1.

а) Відношення рівності на будь-якій множині є відношенням еквівалентності. Рівність – це мінімальне відношення еквівалентності в тому сенсі, що у разі видалення будь-якої пари з цього відношення (тобто будь-якої одиниці на головній діагоналі матриці E) воно перестає бути рефлексивним і, отже, вже не є еквівалентністю.

б) Твердження виду $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ або $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, що складаються з формул, з'єднаних знаком рівності, задають бінарне відношення на множині формул, що описують суперпозиції елементарних функцій. Це відношення зазвичай називається відношенням рівносильності й визначається таким чином: дві формули рівносильні, якщо вони задають ту ж саму функцію. Рівносильність у цьому випадку, хоча і позначена знаком "=", означає не те ж саме, що відношення рівності, оскільки воно може виконуватися для різних формул. Втім, можна вважати, що знак рівності в таких відношеннях відноситься не до самих формул, а до функцій, які ними описуються. Воно називається графічною рівністю. До речі, щоб у подібних ситуаціях уникнути різночитань, часто для визначення відношення рівносильності використовують знак "$\equiv$".

в) Розглянемо безліч трикутників на координатної площині, вважаючи, що трикутник заданий, якщо дані координати його вершин. Два трикутника будемо вважати рівними (конгруентними), якщо при накладенні вони збігаються, тобто переведені один в одного за допомогою деякого переміщення. Рівність є відношенням еквівалентності на множині трикутників.

г) Відношення «мати той самий залишок при діленні на натуральне число b» на множині натуральних чисел є відношенням еквівалентності.

Примітка 2. Граф можна визначити так само, як сукупність двох множин V та X, між елементами яких встановлено відношення інцидентності, при якому кожний елемент $e \in E$ інцидентний рівно двом елементам $v_1, v_2 \in V$.

Визначення. Якщо $x = \{v, w\}$ – ребро графа, то вершини v, w називаються кінцями ребра x.

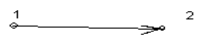
Визначення. Якщо пари в наборі E є впорядкованими, то граф називається орієнтованим, або *орграфом*.

Якщо пишуть $x = (v, w)$ – дуга орграфу, то вершина v – початок, а вершина w – кінець дуги x.

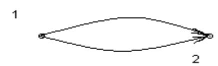
Визначення. Вершини v, w графа G = (V, E) називаються *суміжними*, якщо $\{v,w\} \in$E. Два ребра називаються *суміжними*, якщо вони мають спільну вершину.

Визначення. *Степенем* вершини графа називається кількість ребер, яким ця вершина належить. Вершина називається *висячею*, якщо її степень рівний одиниці та *ізольованною*, якщо її степень рівний нулю.

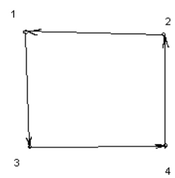
На рисунку 6.5 всі вершини, крім вершини 1, є висячими. На рисунку 6.3 вершина 4 є ізольованою. Якщо граф складається тільки з таких вершин, то його називаються *порожнім*. У деяких випадках порожнім називають граф, що не має жодної вершини.



7.1



7.2

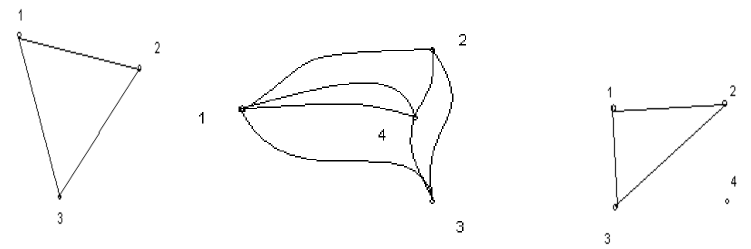


7.3

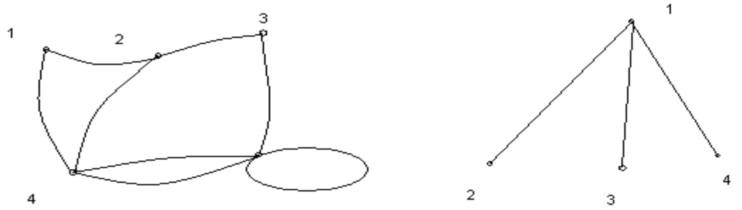
Якщо у наборі Е ні одна пара не трапляється більше одного разу, то мультиграф називається *графом*.

Нижче, на рисунку 8.1 зображено граф, на рисунку 8.2 – мультиграф, на рисунку 8.4 – псевдограф.

Графу відповідає геометрична конфігурація. Вершини позначаються точками (кружечками), а ребра – лініями, які з’єднують відповідні вершини. На рисунку 6 зображені деякі неорієнтовані графи.



8.1 8.2 8.3



8.4 8.5

Рисунок 8. Неорієнтовні графи

<u>Примітка 1.</u> Слово «лінія», яке ми використовуємо, має на увазі неістотність того, яка конкретно лінія використовується для з’єднання двох вершин графа, тобто її геометричні характеристики не мають значення

д) Відношення «бути дільником» не є на множині N відношенням еквівалентності. Воно має властивості рефлексивності й транзитивності, але є антисиметричним (див. нижче).

Нехай на множині M задано відношення еквівалентності R. Здійснимо наступну побудову. Виберемо елемент $a_1 \in M$ і утворюємо клас C_1 (підмножина M), що складається з елемента a_1 і всіх елементів, еквівалентних йому в межах цього відношення. Потім виберемо елемент $a_2 \in M, a_2 \notin C_1$ і утворюємо клас C_2, що складається з a_2 і еквівалентних йому елементів. Продовжуючи ці дії, отримаємо систему класів $C_1, C_2, \ldots$ (можливо, нескінченну) таку, що будь-який елемент з множини M входить хоча б в один клас, тобто $\bigcup_{i=1} C_i = M$.

Ця система має такі властивості:

1) вона утворює *розбиття* множини M, тобто класи попарно не перетинаються;

2) будь-які два елементи з одного класу еквівалентні;

3) будь-які два елементи з різних класів не еквівалентні.

Усі ці властивості прямо випливають з визначення відношення еквівалентності. Дійсно, якби, наприклад, класи C_1 і C_2 перетинались, то вони мали б хоча б один загальний елемент. Цей елемент був би, очевидно, еквівалентний a_1 і a_2. Тоді, в силу транзитивності відношення R виконувалося б $a_1 R a_2$. Однак, за способом побудови класів, це не можливо. Аналогічно можна довести інші дві властивості.

Побудоване розбиття, тобто система класів – підмножин множини M, називається *системою класів еквівалентності* щодо R. Потужність цієї системи називається *індексом розбиття*. З іншого боку, будь-яке розбиття множини M на класи саме визначає певне відношення еквівалентності, а саме відношення «входити в один клас цього розбиття».

<u>Приклад 2.</u>

а) Усі класи еквівалентності щодо рівності E складаються з одного елемента.

б) Формули, що описують ту ж саму елементарну функцію, перебувають в одному класі еквівалентності щодо рівносильності (. У цьому випадку рахунковими є саме безліч формул, безліч класів еквівалентності (тобто індекс розбиття) і кожен клас еквівалентності.

в) Розбиття множини трикутників щодо рівності має континуальний індекс, причому кожен клас має також потужність континуум.

2. <u>Відношення порядку</u>

<u>Визначення 1.</u> Відношення R називається *відношенням нестрогого порядку*, якщо воно є рефлексивним, антисиметричним і транзитивним.

<u>Визначення 2.</u> Відношення R називається *відношенням строгого порядку*, якщо воно є антирефлексивне, антисиметричне і транзитивним.

Обидва типи відношень разом називаються відношеннями порядку. Елементи a,b можна порівняти з точністю до порядку R, якщо виконується одне з двох відношень aRb або bRa. Множина M, на якій задано відношення порядку, називається повністю упорядкованою, якщо будь-які два її елемента можна порівняти. Інакше множина називається частково упорядкованою.

<u>Приклад 3.</u>

а) Відношення “≤” і “≥” є відношеннями нестрогого порядку, відношення “<” і “>” – відношеннями строгого порядку (на всіх основних числових множинах). Обидва відношення повністю впорядковують множини N і R.

РОЗДІЛ IV. ТЕОРІЯ ГРАФІВ

<u>Графи: основні поняття та операції</u>

Теорію графів почали розробляти для розв’язання окремих задач про геометричну конфігурацію, що складалась з точок та ліній. У подальшому з’ясувалось, що поняття графа можна застосовувати не тільки під час дослідження геометричних конфігурацій.

1. <u>Графи, їх вершини, ребра та дуги. Зображення графів</u>

<u>Визначення.</u> Якщо на площині задати скінченну множину V точок та скінченний набір ліній E, які з’єднують деякі пари з точок V, то отримана сукупність точок та ліній буде називатись *графом G = (V, E)*.

При цьому елементи множини V називаються *вершинами* графа, а елементи множини E – *ребрами*.

<u>Визначення.</u> Якщо вершина v є кінцем ребра x, то кажуть, що v та x *інцидентні*.

У множині V можуть бути однакові елементи, ребра, що з’єднують різні елементи множини *E,* їх називають *петлями* (на рисунку 8.4 при вершині 5 мається петля). Однакові пари в множині E називаються *кратними* (або паралельними) ребрами. Кількість однакових пар *(v, w)* у E називається *кратністю* ребра (v, w). Наприклад, на рисунку 8.1 усі ребра мають кратність 1, а на рисунку 8.2 є два ребра, які з’єднують ті самі вершини 1 та 4, отже, їх кратність рівна двом.

Множина V та набір E визначають граф з кратними ребрами – *псевдограф*.

Псевдограф без петель називається *мультиграфом*.

39. *Екстенсіональна площина аналізу атрибутивних суджень.*

40. *Розподіленість термінів атрибутивного судження.*

41. *Види логічних відношень між атрибутивними судженнями.*

42. *Використання мови логіки предикатів для тлумачення атрибутивних суджень.*

43. *Типологія суджень із відношеннями.*

44. *Тлумачення суджень з відношеннями мовою логіки предикатів.*

45. *Змістовний та формальний аспекти трактування суджень існування.*

46. *Поділ суджень на категоричні та некатегоричні.*

47. *Поняття «модальність».*

48. *Види суджень за об'єктивною та логічною модальністю.*

49. *Роль питання в пізнанні.*

50. *Типологія питань.*

51. *Види відповідей.*

52. *Співвідношення граматичного та логічного сполучників.*

53. *Використання мови логіки висловлювань для тлумачення складних суджень.*

54. *Характеристика логічних відношень між складними судженнями.*

б) Визначимо відношення "$\le$" і "<" на множині R^n таким чином:

1) $(a_1,...,a_n) \le (b_1,...,b_n)$, якщо $a_1 \le b_1,...,a_n \le b_n$;

2) $(a_1,...,a_n) < (b_1,...,b_n)$, якщо $(a_1,...,a_n) \le (b_1,...,b_n)$ і при цьому хоча б для однієї $i-oї$ координати виконується $a_i < b_i$.

Тоді, наприклад, $(1, 2, 3) < (1, 2, 4)$, але $(1, 2, 3)$ і $(1, -2, 4)$ не можна порівнювати. Таким чином, ці відношення частково упорядковують R^n.

в) На системі підмножин множини M відношення включення "$\subseteq$" задає нестрогий частковий порядок, а відношення строгого включення "$\subset$" задає строгий частковий порядок. Наприклад, $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$, а $\{1, 2\}$ і $\{1, 3, 4\}$ не можна порівнювати.

г) Відношення підпорядкованості у трудовому колективі створює строгий частковий порядок. У ньому, наприклад, непорівнянні є співробітники різних структурних підрозділів (відділів і т. ін.).

д) В алфавіті української мови порядок букв зафіксовано, тобто він завжди однаковий. Тоді цей список визначає повне впорядкування букв, яке називається відношенням передування, позначається $a_i \prec a_j$ (a_i передує a_j). На підставі відношення передування букв побудовано відношення передування слів, яке визначається приблизно так само, як проводиться порівняння двох десяткових дробів. Це відношення задає повне впорядкування слів в українському алфавіті, яке називається словниковим упорядкуванням.

<u>Приклад 4.</u>

а) Найбільш відомим прикладом лексикографічного впорядкування слів є впорядкування слів у словниках. наприклад, $ліс \prec літо$ (так як $c \prec m$), тому слово ліс розташоване у словнику раніше слова літо.

б) Якщо розглядати числа в позиційних системах числення (наприклад, у десятковій системі) як слова в алфавіті цифр, то їх лексикографічне впорядкування збігається зі звичайним, якщо всі порівнювані числа мають однакову кількість розрядів. У загальному ж випадку ці два види впорядкування можуть не збігатися. Наприклад, $10 < 1073$ і $20 < 1073$, але $10 \prec 1073$, а $20 \succ 1073$. Для того щоб вони збігалися, потрібно зрівняти число розрядів у всіх порівнюваних числах, приписуючи зліва нулі. У цьому прикладі в такому випадку отримаємо $0020 \prec 1073$. Таке вирівнювання відбувається автоматично при записі цілих чисел у комп'ютерних обчисленнях.

в) Лексикографічне упорядкування цифрових уявлень дат вигляду 19.07.2004 (дев'ятнадцяте липня дві тисячі четвертого року) не збігається з природним упорядкуванням дат від більш ранніх до більш пізніх. Наприклад, дата 19.07.2004 «лексикографічно» старше вісімнадцятого числа будь-якого року. Щоб зростання дат збігалося з лексикографічним упорядкуванням, звичайне уявлення треба «перевернути», тобто записати у вигляді 2004.07.19. Так зазвичай роблять при поданні дат у пам'яті комп'ютера.

Контрольні питання

1. Як визначається множина?

2. Чи можуть повторюватися елементи множини?

3. Які існують способи завдання множин?

4. Чому дорівнює потужність множини?

5. Чим характеризується невласна підмножина?

6. Яка множина є власною?

7. Чи є множина невласною підмножиною самої себе?

8. Коли дві множини є рівними?

9. Які теоретико-множинні операції є базисними?

10. Як визначається пріоритет операцій алгебри Кантора?

16. За якою формулою встановлюється зв'язок еквівалентності з інверсією, кон'юнкцією, диз'юнкцією?

17. Як визначається фізичний зміст таких функцій кон'юнкція, диз'юнкція, інверсія в термінах логічних операторів?

18. Перелічити основні логічні примітиви, які використовуються при синтезі логічних схем.

19. Які існують класи булевих функцій?

20. Як визначається клас функцій, що зберігають нуль?

21. Які функції зберігають константу одиниця?

22. Що таке двоїста функція?

23. Як визначається властивість самодвоїстості?

24. Які двійкові набори є протилежними?

25. Що таке поліном?

26. Що таке поліном Жегалкіна?

27. Як формулюється теорема Жегалкіна?

28 Як визначається поліном першого ступеня?

29. Що таке лінійна функція?

30. Як формулюється властивість монотонності булевої функції?

31. Як визначається клас монотонних функцій?

32. Як виконується перевірка самодвоїстості функції за допомогою таблиці істинності?

33. Як одержати функцію, двоїсту стосовно даної?

34. Які існують найуживаніші дефініції судження?

35. Логічна структура судження.

36. Співвідношення понять: «судження», «речення» та «висловлювання».

37. Типологія атрибутивних суджень за кількістю і якістю.

38. Логічні та дескриптивні терміни в атрибутивному судженні.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

…………………..

Контрольні питання

1. Які змінні є булевими?

2. Як визначається булева функція?

3. Скільки двійкових наборів містить булева функція від n-змінних?

4. Які існують основні логічні операції? Як вони позначаються?

5. Як задаються логічні функції за допомогою таблиць істинності?

6. На яких двійкових наборах кон'юнкція обертається на нуль?

7. На яких двійкових наборах диз'юнкція дорівнює одиниці?

8. Чому дорівнює сума за модулем два n змінних $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$*?*

9. Як установлюється пріоритет логічних операцій?

10. Як формулюються закони булевої алгебри?

11. В якому алфавіті визначається алгебра логіки?

12. Чому дорівнює: $\bar{\bar{a}}$, $\overline{ab}$, $\overline{a \vee b}$ *?*

13. Скільки рядків містить таблиця істинності функції f(a,b,c)?

14. Скільки рядків містить таблиця істинності функції f(a,b,c,d)?

15. За якою формулою визначається зв'язок суми за модулем два з інверсією, кон'юнкцією, диз'юнкцією?

11. Чи є поняття потужності множин і його кардинального числа ідентичними?

12. Як формулюються закони й тотожності алгебри множин?

13. Як ілюструються теоретико-множинні операції за допомогою діаграм Ейлера?

14. Яка множина називається булеаном?

15. Яка формула використовується для обчислення потужності булеана?

16. Чи можуть повторюватися елементи вектора?

17. Як визначається довжина вектора?

18. Як визначається декартів добуток двох множин?

19. Як визначається декартів добуток n множин?

20. Що є елементами декартового добутку двох множин?

21. Що є об'єктами декартового добутку n множин?

22. Як визначається вектор?

23. Як визначається довжина (розмірність) вектора?

24. Чому дорівнює потужність декартового добутку n множин?

25. Чи є декартів добуток множин комутативним?

26. Що являє собою декартовий степінь?

27. Що називається n-місним відношенням?

28. Які відношення називаються сумісними?

29. Які існують операції над відношеннями?

30. Що являє собою реляційна алгебра?

31. Для чого призначена алгебра відношень?

32. Для яких операцій над відношеннями умова сумісності є обов'язковою?

33. Для яких операцій над відношеннями умова сумісності не є обов'язковою?

34. Які існують спеціальні операції над відношеннями?

35. З яких елементів складаються відношення?

36. Як визначається об'єднання відношень?

37. Як визначається перетинання відношень?

38. Як визначається різниця відношень?

39. Що являє собою розширений декартів добуток відношень?

40. Як визначається конкатенація векторів?

41. Чому дорівнює потужність розширеного декартового добутку відношень?

42. Як визначається операція вибору?

43. Як визначається проекція відношення за доменом?

44. Як визначається проекція відношення за декількома доменами?

45. Як визначається операція з'єднання?

46. Чому дорівнює ступінь розширеного декартового добутку відношень?

47. Яке відношення називається бінарним?

48. Якими способами можна задати бінарне відношення?

49. Як визначається матриця суміжності?

50. Чим визначається розмір матриці суміжності?

51. Що являє собою граф бінарного відношення?

52. Які властивості мають бінарні відношення?

53. Як визначається властивість рефлексивності?

54. Чим характеризується матриця суміжності рефлексивного бінарного відношення?

55. Які характерні ознаки має граф рефлексивного відношення?

56. Як визначається властивість симетричності?

а) У відділі працюють 10 співробітників. Потрібно відібрати трьох із них для того, щоб направити у відрядження. Скількома способами можна це зробити?

Оскільки має значення тільки те, які саме співробітники відібрані, то йдеться про поєднання без повторень по 3 елементи з 10. Отримуємо: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$.

б) У квітковому магазині є в продажу 5 різних видів квітів. Покупцеві потрібно скласти букет з 7 кольорів. Скількома способами можна це зробити?

Будемо вважати різними ті букети, які відрізняються один від одного за підбором кольорів. Оскільки квіти в букеті можуть повторюватися, то йдеться про поєднання з повтореннями по 7 елементів з 5. Тоді отримаємо $\bar{C}_5^7 = C_{11}^7 = \frac{11!}{4! \cdot 7!} = 330$.

Одним із найбільш відомих прикладів використання комбінаторних формул є так званий біном Ньютона. У загальному вигляді формула бінома (двочлена) Ньютона має такий вигляд:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

З окремими випадками застосування цієї формули (для випадків $n = 2$ і $n = 3$) стикаються ще в школі при вивченні формул скороченого множення:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; \ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 .$$

На практиці для зручності застосування бінома Ньютона застосовують так званий трикутник Паскаля, який містить числові коефіцієнти полінома в правій частині формули:

4. Сполучення. Біном Ньютона

Передусім відзначимо одну істотну відмінність перестановок від розміщень. Якщо в розміщених вектори розрізняються і за складом елементів, і за їх розташуванням (порядком) у наборі, то в перестановках вектори розрізняються тільки за розташуванням елементів. Природно розглянути випадок, коли вектори, навпаки, будуть відрізнятися тільки за складом елементів.

Визначення. Будь-які різні вектори довжини k, складені з елементів елементного множини X, розрізняються між собою за набором елементів, але не за їх розташуванням у наборі, називаються сполученнями по k елементів з n.

Якщо всі елементи, що утворюють об'єднання, різні, то їх називають *комбінацією без повторень*. Визначення всіх сполучень без повторень C_n^k. Формула для обчислення $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Якщо деякі (або всі) елементи, що утворюють комбінацію, можуть повторюватися, то їх називають комбінаціями з повтореннями. Визначення всіх комбінацій із повтореннями $\overline{C}_n^k$. Формула для обчислення $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

Зауваження 1. Сполучення є окремим випадком розміщень. Різниця між комбінаціями й розміщеннями з визначення неочевидна, але на конкретних прикладах її легко бачити. Так, наприклад, вектори і є різними розміщеннями, але означають те саме поєднання.

Зауваження 2. Для комбінацій без повторень обов'язково вимога $k \le n$, причому в разі рівності отримаємо природний результат $C_n^n = 1$. Але для комбінацій із повтореннями це вимога необов'язкова, як буде видно з наведеного нижче прикладу.

Приклад 6.

РОЗДІЛ ІІ. ВВЕДЕННЯ В ЗАГАЛЬНУ АЛГЕБРУ

Елементи загальної алгебри

1. Властивості бінарних алгебраїчних операцій

Визначення. На множині А визначено алгебраїчна операція, якщо кожним двом елементам цієї множини, узятим у певному порядку, однозначним чином поставлений у відповідність деякий третій елемент із цієї ж множини.

Прикладами алгебраїчних операцій можуть служити такі операції як додавання і віднімання цілих чисел, додавання і віднімання векторів, матриць, множення квадратних матриць, векторне множення векторів і ін.

Відзначимо, що скалярний добуток векторів не може вважатися алгебраїчній операцією, тому що результатом скалярного добутку буде число, а числа не належать до множини векторів, до якого відносяться співмножники.

Зауваження. Взагалі кажучи, операція, задана таким чином, називається бінарною, оскільки в ній беруть участь два елементи. Але також можна говорити про унарні операції, в яких бере участь тільки один елемент даної множини, і у відповідність йому однозначним чином поставлено у відповідність другий елемент цієї множини. Такі, наприклад, операції отримання кореня квадратного або знаходження модуля числа.

Аналогічно можна визначити тринарну та інші операції на цій множині, залежно від кількості елементів, що беруть участь. Загалом, $n-арною$ операцією на множині M будемо називати функцію типу $\varphi : M^n \to M$.

Визначення. Операція α, що відображає будь-який елемент множини в себе, називається *тотожною операцією*.

Тотожною операцією на множині R, наприклад, є множення на одиницю.

Для того щоб описані нижче співвідношення виглядали б більш звично, будемо результат застосування бінарної операції φ елементам a,b записувати не у функціональному вигляді $\varphi(a,b)$, а у вигляді $a\varphi b$, прийнятому для запису арифметичних операцій.

Визначення. Операція φ називається *комутативною*, якщо для будь-яких елементів a,b виконується: $a\varphi b = b\varphi a$.

Операції додавання і множення чисел комутативні, а віднімання і ділення є некомутативними. Також некомутативними операціями є множення матриць (як відомо з курсу лінійної алгебри).

Визначення. Операція φ називається *асоціативною*, якщо для будь-яких елементів a,b,c виконується: $(a\varphi b)\varphi c = a\varphi(b\varphi c)$.

Виконання умови асоціативності означає, що дужки у виразі $a\varphi b\varphi c$ можна не розставляти. Додавання і множення чисел асоціативні, що і дозволяє не ставити дужки у виразах типу $a+b+c$ і abc. Як приклад неасоціативної операції можна навести піднесення до степеня:

$$(a^b)^c \neq a^{(b^c)}.$$

Запис a^{b^c} є допустимою, але служить скороченням запису виразу $a^{(b^c)}$, а не $(a^b)^c$ (скорочений запис якого – a^{bc}). Важливим прикладом асоціативної операції є композиція відображень.

Визначення. Операція φ називається *дистрибутивною зліва* щодо операції ψ, якщо для будь-яких a,b,c виконується:

$$a\varphi(b\psi c) = (a\varphi b)\psi(a\varphi c),$$

3. Перестановки

Визначення. Будь-вектор довжини n, складений з елементів n–елементного множини X, в якому всі елементи різні, називається *перестановкою без повторень* з *n елементів.* Число всіх перестановок без повторень з n елементів позначається P_n і дорівнює $n!$.

З визначення і формули видно, що перестановки без повторень є окремим випадком розміщень без повторень, за умови $k = n$.

Приклад 4. Скількома різними способами можна розставити на полиці 10 різних книг?

Тут, на відміну від прикладу 2, значення має тільки порядок розставляються книг. Тому йдеться про перестановки з 10 елементів. Отримуємо: $P_{10} = 10! = 3628800$.

Розглянемо випадок, коли елементи множини X повторюються по декілька разів. Для визначеності нехай 1-й елемент повторюється k_1 раз, 2-й елемент – k_2 раз і так далі. Тоді вектори довжини n, утворені з елементів цієї множини називаються перестановками з *n елементів з повтореннями.* Число таких перестановок позначається $\overline{P_n}$ і дорівнює $\frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!}$.

Поклавши в останній формулі $k_1 = \ldots = k_n = 1$, отримаємо формулу для перестановок без повторень.

Приклад 5. Скільки різних шестизначних чисел може бути записано за допомогою цифр 1, 2, 2, 2, 3, 3?

Є набір з шести цифр, в якому цифра 2 повторюється тричі, і цифра 3 – двічі. Отримані числа будуть являти собою перестановки з повтореннями з 6 елементів. отримуємо: $\frac{6!}{1!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{720}{1\cdot 6\cdot 2} = 60$.

розміщенням без повторень по k *елементів з* n. Число всіх розміщень без повторень по k елементів з n позначається A_n^k і дорівнює $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$.

Приклад 2. Придбано різних 12 книг. На полиці можна поставити в ряд рівно 6 книг. Скількома різними способами можна це зробити?

Будемо вважати різними не тільки ті випадки, коли беруться різні книги, але і коли вони по-різному розставлені на полиці (в різному порядку). Тоді йдеться про перестановки по 6 з 12. Отримуємо: $A_{12}^6 = 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 665280$.

Розглянемо істотно інший випадок, а саме коли елементи множини у векторах можуть повторюватися.

Визначення. Будь-який вектор довжини k, складений з елементів $n-$ елементної множини X, що складається з n елементів, в якому всі елементи різні, називається *розміщенням із повтореннями по* k *елементів з* n. Число всіх розміщень з повтореннями по k елементів з n позначається $\overline{A}_n^k$ і дорівнює n^k.

Приклад 3. Скільки різних комбінацій може вийти при одночасному киданні трьох гральних кісток?

Кожна гральна кістка являє собою кубик, на гранях якого нанесено від одного до 6 очок. При кожному киданні ми будемо отримувати набори виду $a_1a_2a_3$, де $1 \le a_i \le 6, i = 1,2,3$ – кількість очок, що випали на відповідній кістці. Йдеться про перестановки з повторенням 3 елементів з 6. Отримуємо: $\overline{A}_6^3 = 6^3 = 216$.

Зауваження. Очевидно, що розміщення без повторень є окремим випадком розміщень з повтореннями.

і *дистрибутивною справа* щодо операції ψ, якщо для будь-яких a,b,c виконується:

$$(a\psi b)\varphi c = (a\varphi c)\psi(b\varphi c).$$

Наявність властивості дистрибутивності дозволяє розкривати дужки. Наприклад, множення дистрибутивно щодо додавання (віднімання) справа і зліва:

$$(b+c)a = a(b+c) = ab + ac.$$

Піднесення до степеня дистрибутивно щодо множення справа: $(ab)^c = a^c b^c$, але не зліва: $a^{bc} \ne a^b a^c$. Додавання (і віднімання) чисел дистрибутивно щодо множення: $a + bc \ne (a+b)(a+c)$. Нижче буде показано, що операції перетину й об'єднання множин дистрибутивні відносно один одного і зліва, і справа.

2. Алгебраїчні структури

Визначення. Нехай дано деяка множина M, на якій задана сукупність операцій $\Omega = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$. Структура виду $A = (M;\Omega)$ називається *алгеброю*; множина M називається *множиною носієм*, сукупність операцій Ω – *сигнатурою, вектор «арностей» операцій* $(n_1, n_2, ..., n_m)$ називається *типом*.

Визначення. Множину $M' \subseteq M$ називають замкнутою щодо $n-арної$ операції φ на множині M, якщо значення функції φ на аргументах M' належать M' (тобто $\varphi(M') \subseteq M'$). Якщо множина M' замкнена щодо всіх операцій $\Omega = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$, то структура $A' = (M';\Omega)$ називається *підалгеброю* алгебри A.

Приклад 1.

а) Алгебра $R = (\mathbf{R};+,\cdot)$ називається *полем* дійсних чисел (визначення поняття поля буде дано нижче). Її тип - $(2,2)$. Це означає, що сигнатура цієї алгебри містить дві бінарні операції. Тут усі скінченні підмножини (крім множини $\{0\}$) не замкнуті щодо обох операцій і, отже, не можуть утворювати підалгебри. Але алгебра виду $Q = (\mathbf{Q};+,\cdot)$ **-** поле дійсних чисел – утворює підалгебру.

б) Нехай задано множина M. Множина всіх її підмножин – булеан, позначається як 2^M або $B(M)$. Алгебра $(B(M);\cup,\cap,\bar{\ })$ називається *булевою алгеброю* множин над множиною M. Її тип: $(2,2,1)$. Для будь-якого $M' \subseteq M$ буде подалгеброю $(B(M');\cup,\cap,\bar{\ })$.

в) Множина F одномісних функцій на R (тобто функцій $f: R \to R$ разом з унарною операцією диференціювання є алгеброю. Множина елементів n-арних функцій замкнуто щодо цієї операції (оскільки похідна будь-якої елементарної функції є також елементарна функція), тому утворює підалгебру цієї алгебри.

Визначення. *Замиканням* множини $M' \subseteq M$ щодо сигнатури Ω (позначається $[M']_\Omega$) називається множиною всіх елементів, які можна отримати з елементів цієї множини, застосовуючи операції із сигнатури Ω (включаючи самі елементи M').

Наприклад, в алгебрі цілих чисел $Z = (\mathbf{Z};+,\cdot)$ замиканням числа 2 є множина парних чисел.

Теорема 5.1. Непорожній перетин підалгебр утворює підалгебру.

3. Гомоморфізм та ізоморфізм

Алгебри з різними типами, очевидно, мають істотно різну будову. Якщо ж алгебри мають однаковий тип, то наявність у них подібності характеризується описаними нижче поняттями.

декартовий добуток цих множин $X_1 \times \ldots \times X_k$. Нагадаємо, що елементами цього добутку будуть вектори (кортежі) довжини k виду $(x_1,\ldots,x_n)$.

Теорема 13.2. Число елементів у декартовому добутку множин $X_1,\ldots,X_k$ дорівнює добутку потужностей цих множин:

$$|X_1 \times \ldots \times X_k| = |X_1| \times \ldots \times |X_k| = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Як і в попередньому випадку, сформулюємо цю теорему спрощеним чином для двох множин. якщо елемент x можна вибрати n способами, а елемент y – m способами, причому будь-який спосіб вибору елемента x відрізняється від будь-якого способу вибору елемента y, то вибір «x і y» (тобто, пари (x, y)) можна зробити mn способами. Це правило називається *правилом добутку*, або *множення*.

Обидва сформульованих правила правильні для будь-якого скінченного числа скінченних множин і, у відповідній формі, називаються узагальненими.

Приклад 1.

а) У деякій середній школі є три п'ятих класи, в яких навчаються відповідно 28, 31 і 26 учнів. Потрібно одного з них вибрати для участі в раді школи. Скількома способами можна зробити вибір?

За правилом суми отримуємо $28+31+26=85$.

б) У секції фігурного катання займаються 14 хлопців і 18 дівчат. Скількома різними способами з дітей, що займаються в секції, можна утворити спортивні пари.

За правилом добутку отримуємо $14 \cdot 18 = 252$.

2. Розміщення

Визначення. Будь-який вектор довжини k, складений із елементів $n-$ елементної множини X, в якому всі елементи різні, називається ці властивості повністю описуються правилами виведення. Множини, породжені таким формальним методом, називаються формальними.

Комбінаторика

У цій темі даються основні початкові дані з комбінаторики. Це спеціальний розділ математики, що досліджує різні комбінації елементів довільних множин. Формули комбінаторики широко використовуються теорії ймовірностей, у теорії обчислювальних машин, у деяких розділах економіки, у статистиці та інших прикладних дисциплінах.

1. Правила суми та добутку

Будемо надалі оперувати тільки з множинами, що містять скінченне число елементів. На нескінченні множини всі наведені нижче правила та формули не поширюються.

Теорема 13.1. Нехай дано непересічні скінченні множини $X_1,\dots,X_k$. Тоді потужність об'єднання цих множин дорівнює сумі потужностей цих множин:

$$|X_1 \cup \ldots \cup X_n| = |X_1| + \ldots + |X_2|.$$

Доказ цієї теореми очевидно. Але для нас становить інтерес інша інтерпретація цієї теореми, яку ми сформулюємо для двох множин.

Якщо певний елемент x можна вибрати n способами, а елемент y – m способами, причому будь-який спосіб вибору елемента x відрізняється від будь-якого способу вибору елемента y, то вибір «x або y» можна зробити $n+m$ способами. Це правило називається *правилом суми*.

Нехай дано непересічні скінченні множини $X_1,\dots,X_k$. Позначимо число елементів у цих множинах (їх потужності) $n_1,\dots,n_k$. Розглянемо

Визначення. Нехай дано дві алгебри $A=(M_1;\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ і $B=(M_2;\psi_1,\dots,\psi_n)$. *Гомоморфізмом* алгебри A в алгебру B називається функція $f: M_1 \to M_2$, така, що для всіх $a \in M_1$ виконується умова:

$$f(\varphi_i(a)) = \psi_i(f(a)) \text{ для будь-якого } i=1,\dots,n. \ (*)$$

Зміст цього визначення полягає в наступному. Незалежно від того, чи виконана спочатку операція φ_i в алгебрі A, а потім зроблено відображення f, або спочатку зроблено відображення f, а потом в алгебрі B виконана відповідна операція ψ_i, результат буде однаковий.

Зараз ми визначимо деякі види гомоморфізму, що володіють додатковими властивостями.

Визначення. Гомоморфізм, який є ін'єкцією, називається *мономорфізмом.*

Визначення. Гомоморфізм, який є сюр'єкцією, називається *епіморфізмом.*

Визначення. Гомоморфізм, який є біекцією, називається *ізоморфизмом*.

Таким чином, можна сказати, що ізоморфізм – це взаємно однозначний гомоморфізм.

Визначення. Якщо множини-носії двох даних алгебр рівні, то їх гомоморфізм називається ендоморфізмом, а ізоморфізм – автоморфізмом.

Теорема 5.2. Якщо $A=(M_1;\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ і $B=(M_2;\psi_1,\dots,\psi_n)$ – дві алгебри одного типу і $f: M_1 \to M_2$ – ізоморфізм, то $f^{-1}: B \to A$ – також ізоморфізм.

Приклад 2.

а) Нехай N – множина натуральних чисел, N_2 – множина натуральних парних чисел. Алгебри $(N;+)$ и $(N_2;+)$ ізоморфні; ізоморфізмом є відображення $f : n \to 2n$, причому $2(a+b) = 2a + 2b$. Оскільки $N_2 \subseteq N$, то даний ізоморфізм є ізоморфізм алгебри $(N;+)$ в себе.

б) Ізоморфізмом між алгебрами $(R_+;\cdot)$ і $(R;+)$ є, наприклад, відображення $a \to \lg a$.Тоді $\lg ab = \lg a + \lg b$.

в) Булеві алгебри, утворені двома різними множинами однакової потужності, ізоморфні: операції в них просто однакові (як було зазначено вище), а відображенням f може бути будь-якою взаємооднозначною відповідністю.

Теорема 5.3. Відношення ізоморфізму є відношенням еквівалентності на множині алгебр.

Поняття ізоморфізму є одним із найважливіших понять у математиці. Його сутність можна виразити таким чином. Якщо дві алгебри ізоморфні, то елементи й операції будь-якої з них можна перейменувати таким чином, що ці алгебри будуть збігатись. Це дозволяє, отримавши деяке еквівалентне співвідношення в цій алгебрі з поширенням його на будь-яку ізоморфну їй алгебру. Поширене в математиці висловлювання «з точністю до ізоморфізму» означає, що розглядаються тільки ті властивості об'єктів, які зберігаються при ізоморфізмі, тобто є загальними для всіх ізоморфних об'єктів. Зокрема, ізоморфізм зберігає комутативність, асоціативність і дистрибутивність.

Види алгебраїчних структур

1. Півгрупи.

Визначення. *Півгрупою* називається алгебра виду $(M;\varphi)$ з одною асоціативною бінарної операцією φ.

Здебільшого у ролі такої операції φ використовується множення. Тому результат її застосування до двох різних елементів записують у

4. Доведення в логіці предикатів

Метод доведення формул, що містять змінні, шляхом безпосередньої підстановки в них констант називається методом інтерпретацій, або методом моделей. Підстановка констант дає змогу інтерпретувати формулу як осмислене твердження про елементи конкретної множини. Тому такий метод, що з'ясовує істинність формули шляхом звернення її до можливого змісту, називається семантичним (смисловим). Метод інтерпретацій зручний для доказу істинності формул або їх нееквівалентності, оскільки і в тому, і в іншому випадку досить знайти одну відповідну підстановку. Він зручний також для дослідження істинності формул на кінцевих областях. Справа в тому, що якщо область $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ скінченна, то квантори переходять у кінцеві формули логіки висловлювань:

$$\forall x P(x) \sim P(a_1) \wedge \dots \wedge P(a_n),\ \exists x P(x) \sim P(a_1) \vee \dots \vee P(a_n).$$

Замінюючи все квантори за цими співвідношеннями, будь-яку формулу логіки предикатів можна перевести у формулу, що складається з предикатів, з'єднаних логічними операціями. Істинність такої формули на кінцевій області перевірятися кінцевим числом підстановок і обчислень. Методи міркувань, що використовують тільки до кінцевих множин і кінцевих об'єктів, називаються фінітними.

Для нескінченних же областей взагалі при доказуванні тотожної істинності формул метод інтерпретації пов'язаний із великими труднощами. Тому для побудови множини дійсних формул у логіці предикатів вибирається інший шлях. Ця множина отримується з якихось вихідних формул (аксіом) за допомогою формальних процедур – правил виведення. Використовуються лише формальні (а не змістовні), зовнішні властивості послідовності символів, що утворюють формули, причому

Аналогічно доводиться істинність співвідношення $\overline{\forall x P(x)} \sim \exists x \overline{P(x)}$

1) Велике значення мають такі властивості, які можуть бути доведені способом, розглянутим у прикладі 3.

2) Дистрибутивність квантора $\forall$ відносно кон'юнкції:

$$\forall x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \sim \forall x P_1(x) \wedge \forall x P_2(x) .$$

3) Дистрибутивність квантора $\exists$ відносно диз'юнкції:

$$\exists x(P_1(x) \vee P_2(x)) \sim \exists x P_1(x) \vee \exists x P_2(x) .$$

Якщо ж квантори $\forall$ і $\exists$ поміняти місцями, то вийдуть співвідно-шення, правильні тільки в одну сторону:

4) $\exists x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \to \exists x P_1(x) \wedge \exists x P_2(x)$;

5) $\forall x(P_1(x) \vee P_2(x)) \to \forall x P_1(x) \vee \forall x P_2(x)$.

У таких випадках кажуть, що ліва частина є більш сильним твердженням, ніж права, оскільки вона вимагає для свого виконання більш жорстких умов. Так, наприклад, у співвідношенні 3 в лівій частині потрібно, щоб обидва предикати були правдиві для того ж самого значення x, тоді як у правій частині вони можуть бути істинними при різних значеннях змінної. Приклад випадку, коли співвідношення 3 і 4 у зворотну сторону неправильні: $P_1(x)-$ «$x-$ парне число», $P_2(x)-$ «$x-$ непарне число».

Нехай $Y-$ деякий змінний вираз, що не містить змінної x. Тоді виконуються співвідношення:

6) $\forall x(P(x) \wedge Y) \sim \forall x P(x) \wedge Y$;

7) $\forall x(P(x) \vee Y) \sim \forall x P(x) \vee Y$;

8) $\exists x(P(x) \wedge Y) \sim \exists x P(x) \wedge Y$;

9) $\exists x(P(x) \vee Y) \sim \exists x P(x) \vee Y$.

Ці співвідношення означають, що формулу, яка містить змінну x, можна виносити за область дії квантора, що зв'язує цю змінну.

вигляді $a \cdot b$ або ab, а результат неодноразового застосування до одного елементу записують у вигляді a^2, a^3 і так далі. Такий запис називається *мультиплікативним*. Півгрупу часто позначають записом $P = (M;\circ)$.

Зауваження. Не треба розуміти зазначене вище в тому сенсі, що півгрупа завжди включає в себе саме арифметичну операцію множення. Термін «множення» тут є досить умовним. символ "$\circ$" застосовується саме для того, щоб вказати на це. Під символом "$\circ$" може розумітися і добуток матриць або векторів, і композиція будь-яких перетворень, і навіть додавання.

Взагалі, $ab \neq ba$ (як, наприклад, добуток матриць), тобто ця операція некомутативна. Якщо ж множення комутативно, то півгрупа називається комутативною, або абельовою півгрупою.

Якщо множина-носій півгрупи містить такий елемент e, що для будь-якого a виконується $ae = ea = a$, то цей елемент називається одиницею (нейтральним елементом), а така півгрупа називається моноїдом. Легко показати, що якщо півгрупа містить одиницю, то вона єдина. Дійсно, припустимо, існують дві одиниці e_1 і e_2. Тоді $e_1e_2 = e_1$ і $e_1e_2 = e_2$, отже $e_1 = e_2$.

Приклад 1.

а) Алгебра $(N_2;\cdot)$, де $N_2 -$ множина парних чисел є абелевою півгрупою. Однак, очевидно, вона не має одиниці.

б) Алгебра $(M;\cdot)$, де $M -$ множина квадратних матриць однакової розмірності утворює некомутативну півгрупу. Причому ця півгрупа є моноїдом, а роль одиниці в ній виконує одинична матриця E.

в) Алгебра $(N;\cdot)$ є комутативною півгрупою з одиницею.

Визначення. Якщо будь-який елемент півгрупи $P = (M;\circ)$ можна представити у вигляді добутку кінцевого числа елементів множини

$M_0 \subset M$, то множина M_0 називається породжуючою множиною або системою твірних півгрупи, а її елементи називаються твірними.

Визначення. Півгрупа, яка має тільки один твірний елемент, називається циклічною. Можна показати, що в циклічній півгрупі всі елементи є ступенями (в сенсі наявної операції) твірного елемента. Наприклад, циклічною півгрупою є півгрупа $(N;+)$, оскільки будь-яке натуральне число – це сума певної кількості одиниць.

Нехай півгрупа $P=(M;\circ)$ має скінченне число твірних $\{a_1,...,a_n\}$. Якщо в записі опустити визначення операції (як це зазвичай робиться для множення), то всі елементи півгрупи можна розглядати як слова в алфавіті $\{a_1,...,a_n\}$. Причому деякі різні слова можуть виявитися рівними, як елементи (рівні елементи $2^4=2\cdot 8=16\cdot 1$ записані різними словами). У комутативній півгрупі для двох будь-яких елементів виконується рівність $ab=ba$, що дозволяє встановлювати рівність елементів, у тому числі, записаних різними словами. Подібні рівності називаються *визначальними співвідношеннями*.

Визначення. Півгрупа, в якій немає визначальних співвідношень, і будь-які два різних слова позначають різні елементи групи, називається *вільною*.

Доведено, що кожну півгрупу можна отримати з деякої вільної півгрупи введенням деяких визначальних співвідношень. Елементи заданої таким чином півгрупи – це слова в алфавіті, які утворюють усі інші слова, у тому числі й рівні (тобто задають один елемент) у силу визначальних співвідношень. Вони дають змогу з будь-якого слова отримати будь-які еквівалентні йому слова. Відношення рівності слів є відношенням еквівалентності. До речі, набагато складніше з'ясувати для двох даних слів, чи можна отримати одне з іншого за допомогою

сто тотожно істинною, або загальнозначущою, або тавтологією. Наприклад, формула $\exists xP(x,y)\to\forall xP(x,y)$ тотожна для всіх множин, що складаються з одного елемента, а формула $\forall x(P(x)\vee\overline{P}(x))$ є тавтологією.

3. Якщо формула F нездійсненна в області M за будь-яких підстановках констант, то вона називається *тотожно хибною в області* M. Формула, тотожно помилкова в будь-яких множинах, називається просто тотожно помилковою або суперечливою. Формула $\forall x(P(x)\vee\overline{P}(x))$ є суперечливою.

Визначення. Формули називаються еквівалентними, якщо при будь-яких підстановках однакових констант вони набувають однакові значення. Зокрема, всі тотожно справжні (і всі тотожно помилкові) формули є еквівалентними.

Відзначимо, що якщо формули F_1 і F_2 еквівалентні відповідно до цього визначення, то формула $F_1\leftrightarrow F_2$ є тотожно істинною.

Зауваження. Дослідження формул логіки предикатів має величезне значення тому, що ці формули входять практично в будь-яку формальну теорію. У зв'язку з цим виникають дві проблеми: отримання істинних формул і перевірка наявних формул на істинність. Оскільки предикатні змінні загалом мають нескінченну безліч значень, то встановити істинність формул простим перебором значень на всіх наборах змінних, як це іноді робилося для логічних функцій, просто неможливо. У зв'язку з цим доводиться використовувати різні непрямі прийоми.

Приклад 3. Розглянемо співвідношення $\overline{\exists xP(x)}\sim\forall x\overline{P(x)}$. Нехай для деякого предиката P і області M ліва частина істинна. Тоді не існує такого $x_0\in M$, для якого $P(x_0)$ істинно. Отже, для будь-яких значень x $P(x)$ помилково, тобто $\overline{P(x)}$ і права частина істинна. Якщо ж ліва частина помилкова, то завжди існує $x_0\in M$, для якого $P(x_0)$ істинно і, отже, права частина помилкова.

істинно на будь-якій множині, що містить хоча б одне парне число і помилково на будь-якому множині непарних чисел.

б) Розглянемо двомісний предикат $x \geq y$ на множинах M з відношенням нестрогого порядку. Предикат $\forall x(x \geq y)$ є одномісний предикат від змінної y. Якщо M – множину невід'ємних чисел, то цей предикат правдивий в єдиній точці $y = 0$. Предикат $\forall x \forall y(x \geq y)$ (можна записати $\forall x, y$) висловлювання істинне на безлічі, що складається з одного елемента і помилкове для будь-якої іншої. Висловлювання $\exists x \forall y(x \geq y)$ стверджує, що в множині M є максимальний елемент (для будь-якого y існує такий x, що $x \geq y$). Воно істинно на будь-якій скінченній множині цілих чисел. Висловлювання $\forall y \exists x(x \geq y)$ стверджує, що для будь-якого елемента y є елемент x, не менший за нього. Воно істинно для будь-якої непорожньої множини з огляду на рефлексивність відношення $\geq$. Останні два висловлювання говорять про те, що перестановка кванторів змінює зміст висловлювання й умову його істинності.

3. Істинні формули й еквівалентні співвідношення

При логічній (істинній) інтерпретації формул логіки можливі три основні ситуації.

1. Якщо в області M для формули F існує така підстановка констант замість усіх змінних, що F стає істинним висловом, то ця формула називається виконуємою в області M. Якщо існує область M, в якій формула F виконуєма, то формула називається просто виконуємою. Приклад здійсненним формули – $\exists x P(x, y) \rightarrow \forall x P(x, y)$.

2. Якщо формула F здійсненна в області M за будь-яких підстановках констант, то вона називається *тотожно істинною в області* M. Формула, тотожно істинна в будь-яких множинах, називається про-

визначальних співвідношень. Дослідження цієї проблеми справило значний вплив на теорію алгоритмів.

2. Групи

Визначення 1. *Групою* називається півгрупа з одиницею, в якій для кожного елемента a існує елемент a^{-1}, який називається оберненим до елементу a і задовольняє умові $aa^{-1} = e$.

Якщо не використовувати у визначенні поняття півгрупи, то визначити поняття групи можна таким чином.

Визначення 2. Множина А з заданою на ній алгебраїчною операцією (наприклад, множення) називається *групою*, якщо виконуються такі умови:

1) для будь-яких трьох елементів *a, b, c* ∈ А виконується властивість асоціативності:

$$a(bc) = (ab)c\,;$$

2) в множині А існує такий елемент *e*, що для будь-якого елемента а з цього множини виконується рівність:

$$ae = ea = a\,;$$

3) для будь-якого елемента *a* існує елемент a^{-1} з цієї ж множини такий, що

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e\,.$$

Зауваження. Різні множини можуть утворювати групу відносно однієї операції й не бути групою відносно іншої операції.

Число елементів у множині-носії називається порядком групи. Група, в якій операція комутативна, називається *комутативною* або *абелевою*. Група, в якій усі елементи є степенями одного елемента, називається циклічною. Для абелевих груп часто застосовується адитивна форма запису: операція позначається, як складання, а одиниця позначається як 0.

Приклад 2.

а) Алгебра $(Z;+)$ є абелевою циклічною групою, в якій роль одиниці грає 0, а роль елемента, оберненого до елементу a грає $(-a)$.

б) Алгебра $(Q_{\setminus 0};\cdot)$, де $Q_{\setminus 0}$ – множина раціональних чисел без нуля, є абелевою групою. Оберненим до елементу a є $1/a$.

в) Множина невироджених квадратних матриць порядку n з визначником, відмінним від нуля з операцією множення є некомутативною групою.

г) Множина матриць однакового порядку $m\times n$ з операцією додавання утворює абелеву групу.

Зауваження. Знаходження елемента, оберненого до даного, є унарна операція. Тому тип будь-якої групи $(2,1)$. Іноді під час запису конкретної групи вказують у дужках, крім бінарної операції, ще й цю унарна операцію, або (частіше) нейтральний елемент групи. Наприклад, для групи з прикладу 2а відповідний запис має вигляд $(Z;+;0)$, а для групи з прикладу 2б - $(Q_{\setminus 0};\cdot;1)$.

3. Поля й кільця

Визначення. Множина R з двома визначеними на ній операціями алгебри, додавання і множення, називається *кільцем*, якщо щодо операції додавання воно є абелевою групою, а операція множення дистрибутивна, тобто для будь-яких елементів *a, b* і $c\in$ R справедливі рівності:

$$a(b+c)=ab+ac;\qquad (b+c)a=ba+ca;$$

Вислів «існує таке значення $x\in M$, що $P(x)$ істинно» позначається $\exists x\in M|P(x)$ або $\exists x\,P(x)$. Знак $\exists$ називається *квантором існування*. Перехід від предиката $P(x)$ до виразів виду $\forall x\,P(x)$ або $\exists x\,P(x)$ називається *зв'язуванням* змінної x, а також навішуванням квантора на змінну x (або на предикат $P(x)$). Змінна, на яку навішені квантор, називається зв'язаною, незв'язана змінна називається вільною.

Сенс пов'язаних і вільних змінних у предикатах принципово різний. Вільна змінна – це звичайна змінна, яка може набувати різних значень із множини M; вираз $P(x)$ – змінне висловлювання, залежне від значення x. Вираз $\forall xP(x)$ не залежить від змінної x і має цілком певне значення. Це, зокрема, означає, що перейменування пов'язаної змінної, тобто перехід від вираження $\exists x\,P(x)$ до виразу $\forall xP(x)$ і навпаки не змінює вислову. Змінні, які є, за суті, пов'язаними, зустрічаються не тільки в логіці. Наприклад, у виразах $\sum_{x=1}^{10} f(x)$ або $\int_a^b f(x)dx$ змінна x пов'язана: при фіксованій функції f перший вираз дорівнює певному числу, а друге стає функцією від меж інтегрування.

Навішувати квантори можна й на багатомісні предикати і взагалі на будь-які логічні вирази, які при цьому полягають у дужки. Вираз, на який навішується квантор $\forall$ або $\exists$, називається областю дії квантора. Всі входження змінної в цей вислів є причиною пов'язаними. Навішування квантора на багатомісний предикат зменшує в ньому кількість вільних змінних і перетворює його в предикат від меншої кількості змінних.

Приклад 2.

а) Нехай $P(x)$ – предикат «x – парне число». Тоді висловлювання $\forall xP(x)$ істинно на будь-якому множині парних чисел і помилково, якщо множина M містить хоча б одне непарне число. Висловлювання $\exists xP(x)$

цьому, крім функціональних позначень виду $P(x), P(x_1, x_2)$, для двомісних предикатів будемо користуватися визначеннями виду $x_1 P x_2$, які вживалися раніше для бінарних відносин.

Приклад 1.

а) Предикат $x_1 > x_2$ є двомісним предикатом, предметною областю якого можуть служити будь-яка безліч дійсних чисел. Висловлювання $6 > 5$ істинно, а висловлювання $3 > 10$ помилкове. Якщо замість однієї з змінних підставити число, то вийде одномісний предикат: $x_1 > 3, 5 > x_2$ і так далі.

б) Велика теорема Ферма (досі не доведена) стверджує, що для будь-якого натурального числа $n > 2$ не існує натуральних чисел x, y, z, які задовольняли б рівності $x^n + y^n = z^n$. Цій рівності можна поставити у відповідність предикат $P(x, y, z, n)$, істинний тільки тоді, коли воно виконується.

в) В описах обчислювальних процедур і, зокрема, у мовах програмування, часто зустрічаються вказівки типу «повторювати цикл доти, поки змінні x і y не стануть рівними, або припинити обчислення циклу після ста повторень». Якщо позначити через лічильник повторень, то описана тут умова набуде вигляду $(x = y) \vee (i > 100)$, а саме вказівка описується виразом: «повторювати, якщо $\overline{(x = y) \vee (i > 100)}$».

2. Квантори

Нехай $P(x)$ – предикат, визначений на множині M. Вислів «для всіх $x \in M$ $P(x)$ істинно» позначається $\forall x \in M\, P(x)$ або $\forall x \in M | P(x)$. Тут множина M входить у визначення, але коли воно зрозуміло з контексту, пишуть просто $\forall x\, P(x)$. Знак $\forall$ називається квантором спільності.

Якщо операція множення, визначена в кільці комутативна, то таке кільце називається *комутативним кільцем*.

З визначення випливає, що будь-яке кільце має дві бінарні й одну унарну (див. пункт 2) операцію, тому його тип - $(2,2,1)$.

Визначення. *Полем* називається комутативне кільце, в якому для будь-якого ненульового елемента $a \neq 0$ і будь-якого елемента b існує єдиний елемент такий, що $ax = b$.

Іншими словами, для будь-якої пари елементів $a \neq 0$ і b рівняння $ax = b$ має єдиний корінь.

Приклад 3.

а) Алгебра $(Z; +, \cdot)$ є кільцем і називається кільцем цілих чисел. Вона, однак, не є полем, оскільки, наприклад, рівняння $2x = 3$ в ній нерозв’язне.

б) Алгебра $(Q; +, \cdot)$ є полем і називається полем раціональних чисел.

4. Решітки

До цього часу нами розглядалися алгебри, тобто множини, на яких задані операції. Множини, на яких, крім операцій, задані відношення, називаються алгебраїчними системами. Таким чином, алгебри можна вважати окремим випадком алгебраїчних систем, у яких безліч алгебраїчних множин. Іншим окремим випадком алгебраїчних систем є моделі – множини, на яких задані тільки відношення.

Розглянемо тут лише один приклад алгебри, який найбільш часто зустрічається, – решітки.

Визначення. *Решіткою* називається множина M, із частково впорядкованим відношенням нестрогого порядку $\leq$, частково впорядкованим

кованим відношенням нестрогого порядку $\cap$ і $\cup$, таке що виконану-ються такі умови (аксіоми решітки):

1. $a \cup a = a, a \cap a = a$ (ідемподентність);

2. $a \cup b = b \cup a, a \cap b = b \cap a$ (комутативність);

3. $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c), (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$ (асоціативність);

4. $(a \cup b) \cap a = a, (a \cap b) \cup a = a$ (поглинання).

Решітка називається дистрибутивною, якщо виконуються дві такі умови $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ і $a \cup (b \cap c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$.

Визначення. Якщо в решітці існує елемент 0, такий що для будь-якого a виконується $0 \cap a = 0$, то він називається *нижньою межею (нулем)* решітки.

Визначення. Якщо в решітці існує елемент 1, такий що для будь-якого a виконується $1 \cup a = 1$, то він називається *верхньою межею (одиницею)* решітки.

Визначення. Решітка, що має верхню і нижню межі, називається *обмеженою.*

Теорема 6.1. Якщо нижня (верхня) межа решітки існує, то вона єдина.

Визначення. В обмеженій решітці елемент a^{-1} називається доповненням елемента a, якщо $a \cap a^{-1} = 0$ і $a \cup a^{-1} = 1$.

Приклад 4.

а) Будь-яку повністю впорядковану множину, наприклад, множину цілих чисел, можна перетворити в решітку, визначивши для будь-яких $a, b \in M$, наступне: $a \cup b = \max(a,b)$ і $a \cap b = \min(a,b)$.

б) Визначимо на множині натуральних чисел відношення часткового порядку таким чином: $a \le b$, якщо a є дільником b. Тоді $a \cup b$ є

Мова логіки предикатів

1. Предикати

Визначення. *Предикатом* $P(x_1,\dots,x_n)$ називається функція $P: M^n \to B$, де $M-$ довільна множина, а $B-$ означена раніше двійкова множина $\{0;1\}$.

Інакше кажучи, $n-$ місцевим предикатом, певним на множині M, називається двозначна функція від n аргументів із довільної множини M. Множина M називається предметною областю предиката, змінні $x_1,\dots,x_n$ – *предметними змінними.* Взагалі, можна визначити предикат як функцію $P: M_1 \times \dots M_n \to B$, тобто допустити, що змінні набувають значення з різних множин – у деяких випадках це виявляється зручним.

Для будь-яких M і n існує взаємно однозначна відповідність між місцевими відносинами і $n-$ місцевими предикатами на множині M, визначається таким чином. Кожному $n-$ місцевим відношенню R відповідає предикат P такий, що $P(x_1,\dots,x_n)=1$ тільки тоді, коли $(x_1,\dots,x_n) \in R$; будь-який предикат P визначає відношення R таке, що $(x_1,\dots,x_n) \in R$ тільки тоді, коли $P(x_1,\dots,x_n)=1$. При цьому R задає *область істинності* предиката. Будь-якій функції $f: M^n \to M$ можна поставити у відповідність $(n+1)-$ місцевий предикат P такий, що $P(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=1$ тільки тоді, коли $f(x_1,\dots,x_n)=x_{n+1}$. Оскільки функція повинна бути однозначною, то це відповідність вимагає, щоб для будь-якого $x'_{n+1} \ne x_{n+1}$ виконувалося $P(x_1,\dots,x_n,x'_{n+1})=0$. Тому зворотне відповідність (від предиката до функції) можливо тільки за умови виконання зазначеної умови.

Надалі, у випадках, які не викликають різночитання, будемо вживати однакові визначення для предикатів і відповідних їм відносин. При

1) Необхідність. Класи монотонних і лінійних функцій замкнуті і містять 0 і 1. Тому якщо Σ не містить немонотонність або нелінійних функцій, то їх не можна отримати за допомогою на-гою суперпозицій функцій із системи Σ і констант.

2) Достатність. Нехай Σ містить немонотонну і нелінійну функцію. Тоді за лемою 1 підстановкою констант із монотонною функції отримуємо заперечення, а потім за лемою 2 з нелінійної функції за допомогою заперечень і констант отримуємо диз'юнкцію і кон'юнкцію.

Приклад 5.

а) Система $\Sigma_6 = \{\otimes, \oplus\}$ функціонально повна у слабному сенсі, оскільки операція $\otimes$ нелінійна (як і сполучення), а операція $\oplus$ (додавання за $\mathrm{mod}\,2$) немонотонна.

б) У функціонально повної системи $\Sigma_3 = \{|\}$ єдина функція – штрих Шеффера – нелінійна й немонотонна.

Для формулювання необхідних і достатніх умов «Сильний» повноти (на відміну від слабкої) потрібно ввести визначення, що описують ще три замкнутих класу функцій.

Визначення. Функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається *зберігючою нуль*, якщо виконується $f(0, \ldots, 0) = 0$ і *зберігаючою одиницю*, якщо виконується $f(1, \ldots, 1) = 1$.

Обидва класи даних функцій є замкнутими, що перевіряється підстановкою констант у суперпозиції.

Теорема 11.6 (друга – основна – теорема про функціональну повноту). Для того щоб система функцій Σ була функціонально повною (в біль сенсі), необхідно і достатньо, щоб вона містила: 1) нелінійну функцію, 2) немонотонну функцію, 3) функцію, яка не є самодвоїстих, 4) функцію, не зберігає нуль, 5) функцію, не зберігає одиницю.

найменше спільне кратне цих чисел, а $a \cap b$ – їх найбільший спільний дільник.

Решітка, в якій перетин і об'єднання існують для будь-якої підмножини її елементів, називається *повною*. Скінченна решітка завжди повна.

Контрольні питання

1. Яке відношення називається відношенням порядку?

2. Які властивості має відношення порядку?

3. Яка множина називається впорядкованою?

4. Чим відрізняється лінійний порядок від часткового?

5. Чим відрізняється строгий порядок від нестрогого?

6. Як формулюється аксіома антисиметричності бінарного відношення?

7. Як визначається покриваємість елементів у частково впорядкованій множині?

8. Які елементи називаються порівнянними в частково впорядкованій множині?

9. Що таке верхня (нижня) грань?

10. Який елемент в упорядкованій множині називається найбільшим (найменшим)?

11. Яка множина називається ланцюгом?

12. Як визначається довжина ланцюга?

13. Як визначається властивість дистрибутивності структури?

14. Як формулюється критерій дистрибутивності структури?

15. Які структури використовуються в критерії дистрибутивності?

16. Що називається ізоморфізмом множин?

17. Чим характеризується ізоморфізм упорядкованих множин?

18. Чим визначається ізоморфізм алгебр?

$f(x_1,\ldots,x_n)$ існує така підстановка $n-1$ констант, що функція залишилася з однією змінною є запереченням.

Лема 2 (про нелінійні функції). Якщо функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ нелінійна, то за допомогою підстановки констант і використання заперечень з неї можна отримати диз'юнкцію чи кон'юнкцію.

Інакше кажучи, існує представлення диз'юнкції і кон'юнкції у вигляді суперпозиції констант, заперечень і нелінійної функції f.

Зауваження. При традиційних визначеннях змінних у виразах виду $f(x_1,\ldots,x_n)$, де змінні розташовані в природному порядку індексів, ці індекси відіграють двояку роль: вони називають змінні й нумерують їхня місця у функції. Ці ролі слід розрізняти.

Дві зазначені леми дозволяють отримати все булеві операції за допомогою немонотонності функцій, нелінійних функцій і констант. Це ще не повнота в повному сенсі слова, оскільки константи із самого початку передбачалися як дані. Однак таке припущення часто буває виправданим у різних додатках (насамперед у синтезі логічних схем). Тому є сенс ввести ослаблене визначення повноти.

Визначення. Система функцій Σ називається функціонально повною у слабкому сенсі, якщо будь-яка логічна функція може бути представлена формулою над системою $\Sigma \cup \{0,1\}$, тобто є суперпозицією констант і функцій із системи Σ.

Очевидно, що зі звичайної повноти системи слід її слабка повнота.

Теорема 11.5 (перша теорема про функціональну повноту). Для того, щоб система функцій Σ була функціонально повною в слабшому сенсі, необхідно і достатньо, щоб вона містила хоча б одну немонотонну функцію і хоча б одну нелінійну функцію.

Доведення:

Теорема 11.3. Будь-яка булева формула, що не містить заперечень, являє собою монотонну функцію, відмінну від константи; і навпаки, для будь-якої монотонною функції, відмінність від 0 і 1, знайдеться представлення її за допомогою булевої формули без заперечень.

З цієї теореми і того очевидного факту, що підстановка декількох формул без заперечень у формулу без заперечень знову дає формулу без заперечень, випливає наступна теорема.

Теорема 11.4. Множина всіх монотонних функцій є замкнутим класом.

Але оскільки будь-яка булева формула без заперечень є суперпозицією диз'юнкцій і кон'юнкція, з цієї теореми безпосередньо отримуємо наслідок.

Наслідок. Клас монотонних функцій є замиканням системи функцій $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$.

4. Теореми про функціональну повноту

Тепер перейдемо до розгляду основного питання, поставленого в межах цієї теми: які необхідні й достатні умови функціональної повноти для довільної системи функцій Σ? Спочатку було зазначено, що система Σ повна, якщо кон'юнкція, диз'юнкція і заперечення є суперпозиціями функцій із системи Σ. Тому будемо шукати властивості функцій, що дозволяють виразити через них булеві операції. Спочатку сформулюємо дві леми, що дозволяють вивести відповідні теореми.

Лема 1 (про немонотонність функцій). Якщо функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ немонотонна, то підстановкою констант з неї можна отримати заперечення.

Практично ця лема є твердженням, протилежним теоремі, оберненої до теореми 11.3. Сенс її полягає в тому, що для функції

РОЗДІЛ ІІІ. ВВЕДЕННЯ В АЛГЕБРУ ЛОГІКИ

Елементи математичної логіки

Математична логіка – різновид формальної логіки, тобто науки, яка вивчає умовиводи з погляду їх формального будови.

Визначення. *Висловлюванням* називається вислів, до якого можливо застосувати поняття істинно або хибно.

У математичній логіці не розглядається сам зміст висловлювань, визначається тільки її істинність або хибність, що прийнято позначати відповідно І чи Х.

Зрозуміло, що істинні й хибні висловлювання утворюють відповідні множини. За допомогою простих висловлювань можна складати більш складні, поєднуючи прості висловлювання союзами «і», «або».

Таким чином, операції з висловлюваннями можна описувати за допомогою математичного апарату.

Вводяться такі логічні операції (зв'язки) над висловлюваннями:

1) **Заперечення.** *Запереченням* (логічним «не») висловлювання Р називається висловлювання, яке істинно тільки тоді, коли висловлювання Р хибне.

Позначається $\neg$P або $\overline{P}$.

Відповідність між висловлюваннями визначається таблицями істинності. У нашому випадку ця таблиця має вигляд:

P	$\neg$P
І	Х
Х	І

2) **Кон'юнкція.** *Кон'юнкцією* (логічним «*і*») двох висловлювань P і Q називається висловлення, істинне тільки тоді, коли істинні обидва висловлювання.

Позначається P&Q або P∧Q.

P	Q	P&Q
I	I	I
I	X	X
X	I	X
X	X	X

3) **Диз'юнкція.** *Диз'юнкцією* (логічним «*або*») двох висловлювань P і Q називається висловлювання, хибне тільки тоді, коли обидва висловлювання хибні.

Позначається P∨Q.

P	Q	P∨Q
I	I	I
I	X	I
X	I	I
X	X	X

4) **Імплакація.** *Імплікацією* (логічним слідуванням) двох висловлень P і Q називається висловлення, істинне тільки тоді, коли висловлювання P істинно, а Q - хибне.

Позначається P⊃Q (або P⇒Q). Висловлення P називається посилкою імплікації, а висловлювання Q - наслідком.

Найважливішим прикладом замкнутого класу є клас монотонних функцій, який буде розглянуто далі.

Раніше розглядалася відношення часткового порядку ≤ на множині векторів однакової довжини. Нагадаємо, що для векторів $a=(a_1,\ldots,a_n)$ і $b=(b_1,\ldots,b_n)$ виконується $a\le b$, якщо для будь-якого $i=1,\ldots,n$ виконується $a_i\le b_i$. Тут скористаємося цим відношенням для довічних векторів.

<u>**Визначення.**</u> Функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ називається монотонною, якщо для будь-яких двох двійкових наборів довжини n з того, що $a\le b$ випливає $f(a)\le f(b)$.

<u>**Приклад 4.**</u>

а) Функція $f(x)=x$ монотонна.

б) Диз'юнкція і кон'юнкція будь-якого числа змінних є монотонними функціями.

в) Розглянемо дві функції від трьох змінних, заданих нижченаведеною таблицею.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Функція f_1, очевидно, не є монотонною, тому що, наприклад, $001<101$, а $f_1(001)=1>f_1(101)=0$. Монотонність функції f_2 легко встановити безпосередньою перевіркою.

<u>Теорема 11.2.</u> Для будь-якої логічної функції існує поліном Жегалкіна і притому єдиний.

Існування такого полінома, по суті, вже доведено, а для доведення його єдності досить показати існування взаємно однозначної відповідності між множиною всіх функцій змінних і множиною всіх поліномів Жегалкіна.

<u>Визначення.</u> Функція, у якій поліном Жегалкіна має вигляд $\Sigma\alpha_i x_i \oplus \beta$, де параметри α_i, β дорівнюють нулю або одиниці, називається *лінійною*.

Усі функції від однієї змінної лінійні. Також лінійними є функції еквівалентності й суми за модулем 2.

3. Замкнені класи. Монотонні функції

<u>Визначення.</u> Множина M логічних функцій називається замкнутим класом, якщо будь-яка суперпозиція функцій із множини M знову належить M.

Будь-яка система Σ логічних функцій породжує деякий замкнутий клас, а саме клас усіх функцій, які можна отримати як суперпозиції функцій Σ. Такий клас називається *замиканням* Σ і позначається $[\Sigma]$. Якщо множина M – функціонально повна система, то $[M] = P_2$.

<u>Приклад 3.</u>

а) Множина всіх диз'юнкцій, тобто функцій виду $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ є замкнутим класом.

б) Множина всіх лінійних функцій є замкнутим класом, оскільки підстановка формул виду $\Sigma\alpha_i x_i \oplus \beta$ після перетворень дає формулу такого ж виду.

P	Q	P⇒Q
I	I	I
I	X	X
X	I	I
X	X	I

5) **Еквівалентність.** *Еквівалентністю* (логічною рівносильністю) двох висловлювань P і Q називається висловлення, істинне тільки тоді, коли істинності висловлювань збігаються.

Позначається P~Q або P⇔Q.

P	Q	P~Q
I	I	I
I	X	X
X	I	X
X	X	I

За допомогою цих основних таблиць істинності можна складати таблиці істинності складних формул.

<u>Зауваження.</u> Надалі ми познайомимося з принципово іншим, більш широким трактуванням тих понять, які ми визначили в цьому розділі. Ми будемо їх розглядати вже не як операції над висловлюваннями, а як деякі функції. Пояснимо на наступному прикладі. Запис xy можна розглядати як визначення бінарної операції множення змінних x і y, а з іншого боку, так само позначається функція двох змінних $f(x, y) = xy$.

<u>Приклад 1.</u> За допомогою таблиць істинності перевірити, чи є еквівалентними формули φ і ψ.

$$\varphi = \overline{p} \Rightarrow (p \wedge r)$$
$$\psi = \overline{p} \Rightarrow (\overline{p} \vee \overline{r})$$

Складемо таблиці істинності для кожної формули:

p	r	$\overline{p}$	(p∧r)	$\overline{p} \Rightarrow (p \wedge r)$
I	I	X	I	I
I	X	X	X	I
X	I	I	X	X
X	X	I	X	X

p	r	$\overline{p}$	$\overline{r}$	$(\overline{p} \vee \overline{r})$	$\overline{p} \Rightarrow (\overline{p} \vee \overline{r})$
I	I	X	X	X	I
I	X	X	I	I	I
X	I	I	X	I	I
X	X	I	I	I	I

Ці формули не є еквівалентними.

Приклад 2. За допомогою таблиць істинності перевірити, чи є еквівалентними формули φ і ψ.

$$\varphi = (p \Leftrightarrow q) \vee r$$
$$\psi = (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \vee r$$

Складемо таблиці істинності для заданих формул.

p	q	r	p⇔q	(p⇔q)∨r
I	I	I	I	I
I	I	X	I	I
I	X	I	X	I
I	X	X	X	X
X	I	I	X	I
X	I	X	X	X
X	X	I	I	I
X	X	X	I	I

1. $x \oplus y = y \oplus x$;

2. $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$;

3. $x \oplus x = 0$;

4. $x \oplus 0 = x$.

Крім того, виконуються співвідношення, раніше сформульовані булевої алгебри, що відносяться до кон'юнкції і констант. Заперечення й диз'юнкція виражаються таким чином:

5. $\overline{x} = x \oplus 1$;

6. $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$.

Якщо в довільній формулі алгебри Жегалкіна розкрити дужки і зробити всі спрощення за вищевказаними співвідношенням, то вийде формула, що має вигляд суми добутків, тобто поліном (многочлен) за модулем 2. Така формула називається поліномом Жегалкіна для цієї функції.

Від булевої формули завжди можна перейти до формули алгебри Жегалкіна, використовуючи рівності 5 і 6, а також прямий наслідок із рівності 6: якщо $x_1 x_2 = 0$, то $x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2$. Воно, зокрема, дає змогу заміновати знак диз'юнкції знаком ⊕ у випадках, коли вихідна формула являє собою ДДНФ.

Приклад 2. Скласти поліноми Жегалкіна для нижченаведених функцій:

а)

$$x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_3 = x_1\overline{x}_2 \oplus \overline{x}_1 x_3 = x_1(x_2 \oplus 1) \oplus (x_1 \oplus 1)x_3 = (x_1x_2 \oplus x_1) \oplus (x_1x_3 \oplus x_3) = x_1 \oplus x_3,$$

б)

$$x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 = x_1x_2 \oplus (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) = x_1x_2 \oplus (x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1.$$

Зауважимо, що якщо в отриманих поліномах Жегалкіна зробити зворотну заміну функцій, то отримаємо спрощені формули булевої алгебри.

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2},\ x_1 \wedge x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}.$$

З огляду на функціональну повноту систему Σ_0 слід вважати надмірною: вона зберігає властивість повноти і при видаленні з неї кон'юнкції або диз'юнкції. Однак легко бачити з наведеного прикладу, що хоча системи Σ_1 і Σ_2 не є надлишковими, проте формули в них виходять набагато довшими: заміна однієї операції на іншу вносить у формулу одразу три зайвих заперечення.

б) Системи $\Sigma_3 = \{|\}$ (штрих Шеффера) і $\Sigma_4 = \{\downarrow\}$ (стрілка Пірса) є функціонально повними:
$\bar{x} = x|x = x \downarrow x; x_1 \vee x_2 = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2); x_1 \wedge x_2 = (x_1|x_2)|(x_1|x_2)$.

Таким чином, система Σ_3 зводиться до системи Σ_1, а система Σ_4 – до системи Σ_2.

в) Система $\Sigma_5 = \{\otimes, \oplus, 1\}$ ($\otimes$ – множення по модулю 2, $\oplus$ – додавання за модулем 2) є функціонально повною. Оскільки $\bar{x} = x \oplus 1$, ця система зводиться до Σ_0.

На властивості цієї системи зупинимося докладніше.

2. <u>Алгебра Жегалкіна та лінійні функції</u>

<u>Визначення.</u> Алгебра над множиною логічних функцій з двома бінарними операціями $\otimes, \oplus$ називається *алгеброю Жегалкіна*.

<u>Зауваження.</u> Операція $\otimes$ цілком аналогічна операції кон'юнкції (логічного множення). Однак операція $\oplus$ має абсолютно інший математичний зміст, ніж диз'юнкція. Тому ніяк не можна вважати алгебру Жегалкіна іншою формою запису булевої алгебри.

В алгебрі Жегалкіна виконуються такі співвідношення (знак множення опущений):

p	q	r	p⇒q	q⇒p	(p⇒q)∨(q⇒p)	(p⇒q)∨(q⇒p)∨r
I	I	I	I	I	I	I
I	I	X	I	I	I	I
I	X	I	X	I	I	I
I	X	X	X	I	I	I
X	I	I	I	X	I	I
X	I	X	I	X	I	I
X	X	I	I	I	I	I
X	X	X	I	I	I	I

Зі складених таблиць видно, що дані формули не рівносильні.

<u>Основні рівності.</u>

Для будь-яких формул A, B і C справедливі такі рівносильності:

A & B ≡ B & A; A & A ≡ A; A & (B & C) ≡ (A & B) & C;

A ∨ B ≡ B ∨ A; A ∨ A ≡ A; A ∨ (B ∨ C) ≡ (A ∨ B) ∨ C;

A ∨ (B & C) ≡ (A ∨ B) & (A ∨ C); A & (B ∨ C) ≡ (A & B) ∨ (A & C);

A & (A ∨ B) ≡ A; A ∨ (A & B) ≡ A; ¬¬A ≡ A; ¬(A & B) ≡ ¬A ∨ ¬B;

A ≡ (A & B) ∨ (A & ¬B); A ≡ (A ∨ B) & (A ∨ ¬B);

<u>Булеві функції.</u>

<u>Визначення.</u> *Булевою функцією $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$* називається довільна *n*-місна функція, аргументи і значення якої належать множині {0, 1}.

Взагалі кажучи, між логічними висловлюваннями, логічними зв'язками і булевими функціями проглядається явна аналогія (докладніше вона розглядається в наступному розділі). Якщо логічні функції можуть приймати значення істини або хиби, то для булевої функції аналогами цих значень будуть значення 0 або 1.

Для булевих функцій також можна скласти таблиці значень, відповідно основним логічним операціям.

X_1	X_2	$\neg X_1$	$X_1\&X_2$	$X_1\vee X_2$	$X_1\Rightarrow X_2$	$X_1\Leftrightarrow X_2$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Логічні функції.

Нижче буде докладно розглядатися двоелементна множина і змінні, які набувають значення з цієї множини. Її елементи часто позначають 0 і 1, проте вони, взагалі кажучи, не є числами в звичайному сенсі (хоча і схожі на них за деякими властивостями). Найбільш поширена інтерпретація бінарних змінних – логічна: «так» - «ні», «істинно» - «хибно». У контексті, що містить одночасно виконувані й арифметичні величини, а також функції, ця інтерпретація зазвичай фіксується явно. Наприклад, в мовах програмування вводиться спеціальний тип змінної – логічна змінна, значення якої позначаються true і false. У цьому розділі логічна інтерпретація двійкових змінних не скрізь є обов'язковою, тому будемо вважати, що $B=\{0;1\}$, розглядаючи 0 і 1 як формальні символи, які не мають арифметичного сенсу.

кції на цих наборах. Цей спосіб універсальний, тобто застосовний для будь-яких функцій, однак занадто громіздкий. Формула – набагато більш компактний спосіб завдання функції, але вона задає функцію через інші функції. Тому для будь-якої системи функцій Σ виникає природне запитання: чи будь-яка логічна функція може бути представлена формулою в цій системі? У попередньому розділі було отримано позитивну відповідь для системи $\Sigma_0=\{\wedge,\vee,\bar{}\}$ (теорема 8.2). У цьому розділі буде показано, як вирішувати це питання для довільної системи Σ.

1. Функціонально повні системи

Визначення. Система функцій Σ називається *функціонально повною системою*, якщо будь-яка логічна функція може бути представлена формулою над системою Σ (є суперпозицією функцій цієї системи).

З теореми 8.2 випливає, що система $\Sigma_0=\{\wedge,\vee,\bar{}\}$ є функціонально повною. Так само функціонально повна будь-яка система Σ, через функції якої можна виразити кон'юнкцію, диз'юнкцію і заперечення. Дійсно, для будь-якої логічної функції f з такої системи слід скласти булеву формулу (а вона обов'язково існує відповідно до теореми 8.2) і потім виразити в ній кон'юнкцію, диз'юнкцію і заперечення через функції системи Σ. Аналогічно обґрунтовується більш загальне твердження.

Теорема 11.1. Якщо всі функції функціонально повної системи Σ^* можна представити формулами над системою Σ, то система Σ також функціонально повна.

Приклад 1.

а) Системи $\Sigma_1=\{\wedge,\bar{}\}$ і $\Sigma_2=\{\vee,\bar{}\}$ функціонально повні. Дійсно, за допомогою законів Де Моргана і подвійного заперечення можна висловити в кожній із цих систем функцію, відсутню до Σ_0 через інші дві:

множини . Якщо ж функція – елементарна кон'юнкція k змінних $(k < n)$, то M_f містить 2^{n-k} двійкових наборів. Це пояснюється тим, що в такому випадку $n-k$ змінних, що не входять у цю кон'юнкцію несуттєві для функції f. Тоді вони набувають 2^{n-k} значень, не змінюючи значення f. Множина M_f такої функції називається інтервалом.

Приклад 3. Розглянемо функцію $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2\bar{x}_4$ і знайдемо її інтервал.

Насамперед зауважимо, що дві змінних $-x_1,x_3-$ є несуттєвими. Це дозволяє одразу визначити кількість одиничних наборів, що містяться в множині M_f (інакше кажучи, його потужність). Оскільки в цьому випадку $n=2,k=2$, то отримаємо $|M_f| = 2^{4-2} = 4$.

Далі, очевидно, що $f=1$ тільки при значеннях $x_2=1,x_4=0$. При цьому змінні x_1,x_3 можуть набувати будь-які значення. Тепер перерахуємо всі одиничні набори для цієї функції: $0100, 0110, 1100, 1110$. Таким чином, $M_f = \{0100, 0110, 1100, 1110\}$.

У такому випадку говорять, що кон'юнкція $x_2\bar{x}_4$ (або, точніше, інтервал $M_{x_2\bar{x}_4}$) покриває множину M_f і всі його підмножини.

Подання деякої функції у вигляді ДНФ відповідає уявленню її одиничної множини у вигляді об'єднання інтервалів; у сукупності всі кон'юнкції ДНФ, що покривають усі одиничні множини функції f. Обернене також правильно: якщо всі елементи деякого інтервалу M_k належать M_f, то існує ДНФ цієї функції, яка містить кон'юнкцію k.

Повнота та замкненість

Раніше нами розглядалися два способи завдання логічних функцій – табличний і за допомогою формул. Таблиця задає функцію безпосередньо як відповідність між двійковими наборами і значеннями фун-

1. Функції алгебри логіки

Визначення. Алгебра, утворена множиною B разом з усіма можливими операціями на ній, називається *алгеброю логіки*.

Визначення. *Функцією алгебри логіки (логічною функцією)* називається $n-$арна операція на множині B.

Перший термін є більш точним, проте другий більш поширений, особливо в додатках алгебри логіки. Він і буде використовуватися в подальшому. Отже, логічна функція $f(x_1,...,x_n)$ – це функція, що набуває значення 0 або 1. Множину всіх логічних функцій будемо позначати P_2, множина всіх логічних функцій n змінних – $P_2(n)$.

Визначення. Алгебра, утворена $k-$елементною множиною разом з усіма операціями на ній, називається *алгеброю $k-$значної логіки*, а $n-$арна операція на елементній множині називається *$k-$значною логічною функцією*.

Множина всіх $k-$значних логічних функцій позначається P_k. Ми надалі будемо розглядати логічні функції тільки з P_2.

Будь-яка логічна функція n змінних може бути задана таблицею, у лівій частині якої перераховані всі набори значень змінних (яких усього 2^n), а в правій частині – значення функції на цих наборах значень. Нижче наведена таблиця, що задає деяку функцію трьох змінних.

Набори, на яких значення функції дорівнює 1, часто називають одиничними наборами функції f, а множина одиничних наборів називають одиничною множиною функції f. Аналогічно, набори, на яких значення функції дорівнює 0, називають нульовими наборами функції f. У наведеній таблиці три одиничних набори і п'ять нульових наборів.

Таблиця 1. Одиничні набори функції f

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Зауважимо, що набори в таблиці розташовані в певному порядку - лексикографічному, який збігається зі зростанням наборів. Цим упорядкуванням будемо користуватися надалі. При будь-якому фіксованому впорядкуванні наборів логічна функція n змінних повністю визначається вектор-стовпцем значень функції, тобто 2^n. Тому число різних функцій n змінних дорівнює числу різних двійкових векторів довжини 2^n.

__**Визначення.**__ Змінна x_i в функції $f(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)$ називається *несуттєвою (фіктивною),* якщо $f(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n) = f(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)$ при будь-яких значеннях інших змінних.

Інакше кажучи, змінна вважається несуттєвою, якщо зміна її значення в будь-якому наборі не змінює значення функції. У цьому випадку функція $f(x_1,...,x_n)$ по суті залежить від $n-1$ змінної, тобто є деякою функцію g від $n-1$ змінної. Кажуть, що функція g отримана з функції f видаленням фіктивною змінної або, навпаки, що функція f отримана з функції g додаванням фіктивної змінної. Наприклад, запис

лицями. Приклад наведено в таблиці нижче, містить дві функції трьох змінних f і g і результати операцій над ними:

x_1	x_2	x_3	f	g	$f \wedge g$	$f \vee g$	$\bar{f}$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	1

3. __ДНФ, інтервали та покриття__

Теоретико-множинна інтерпретація булевої алгебри пропонує дуже зручну мову для вивчення диз'юнктивних нормальних форм (ДНФ) і побудови методів їх спрощення. Розглянемо коротко основні поняття, пов'язані з ДНФ.

Введемо таке визначення: позначимо через M_f множину всіх одиничних наборів функції f. Тоді набір (вектор) α із множини B_n належить M_f тільки тоді, коли $f(\alpha)=1$. Множина M_f називається *одиничною множиною* функції f, а функція f – *характеристичною функцією* множини M_f. Легко показати, що відповідність між функціями, і їх одиничними множинами є ізоморфізмом.

Якщо функція $f(x_1,\dots,x_n)$ представлена елементарною кон'юнкцією всіх змінних, то множина M_f містить рівно один елемент

Оскільки компоненти (координати) векторів набувають значення 0 або 1, то вказані операції – це просто логічні операції над двійковими змінними, тому операції над векторами природно назвати покомпонентно логічними операціями над двійковими векторами.

Приклад 2. Дано вектори $a = 01011$ і $b = 11010$. Знайти $a \vee b, a \wedge b, \overline{a}$.

Розв'язання:

$a \vee b = 11011, a \vee b = 01010, \overline{a} = 00100$.

Зауважимо, що подібні операції (поряд з логічними операціями над змінними) входять у систему команд будь-якого сучасного комп'ютера.

Теорема 10.2. Якщо потужність множини U рівна n $(|U| = n)$, то булева алгебра $(\mathrm{B}(U); \cup, \cap, \bar{\ })$ ізоморфна булевій алгебрі $(B_n; \wedge, \vee, \bar{\ })$.

Ця проста за змістом теорема має величезне значення в математиці. Вона дозволяє замінити теоретико-множинні операції над системою підмножин цієї множини порозрядними логічними операціями над двійковими векторами.

Схожа за формулюванням, але значно відрізняється за змістом теорема, існує для множини всіх логічних функцій n змінних $f(x_1, \ldots, x_n)$. Позначимо цю множину $P_2(n)$. Вона замкнута щодо операцій $\wedge, \vee, \bar{\ }$ і, отже, утворює кінцеву булеву алгебру $(P_2(n); \wedge, \vee, \bar{\ })$, яка є підалгеброю булевої алгебри логічних функцій.

Теорема 10.3. Якщо потужність множини U рівна 2^n $(|U| = 2^n)$, то булева алгебра $(\mathrm{B}(U); \cup, \cap, \bar{\ })$ ізоморфна булевій алгебрі функцій $(P_2(n); \wedge, \vee, \bar{\ })$.

Теорема 10.3 вказує на тісний зв'язок між множинами і логічними функціями і дозволяє переходити від операцій над множинами до операцій над функціями і навпаки. Зокрема, вона дозволяє безпосередньо проводити операції над функціями, заданими не формулою, а таб-

$f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$ означає, що при будь-яких значеннях x_1, x_2 виконується $f = g$ незалежно від значення x_3.

Практичний сенс видалення фіктивних змінних очевидний, оскільки вони не впливають на значення функції і є з цієї точки зору зайвими. Однак іноді буває корисно вводити фіктивні змінні. Завдяки такому введенню можна будь-яку функцію n змінних зробити функцією будь-якого більшого числа змінних. Тому будь-яку кінцеву сукупність функцій можна вважати залежною від тієї ж самої множини змінних (яке є об'єднанням множин змінних всіх взятих функцій).

2. Приклади логічних функцій

Логічних функцій однієї змінної чотири; вони наведені в таблиці 2.

Таблиця 2. Логічні функції однієї змінної.

x	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Тут функції ψ_1 і ψ_4 – константи 0 і 1 відповідно, значення яких не залежать від значення змінної, і, отже, змінна x для них несуттєва. Значення функції ψ_2 збігаються зі значеннями змінної x. Нарешті, функція ψ_3, значення якої протилежні значенням змінної, є ні що інше, як *заперечення* x (функція НЕ). Різні способи визначення цієї функції: $\bar{x}, \neg x, x'$.

Логічних функцій двох змінних – шістнадцять; вони наведені в таблиці 3.

Таблиця 3. Логічні функції двох змінних

$x_1\ x_2$	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}	ψ_{16}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функції ψ_1 і ψ_{16}, як і в попередньому випадку є константами, тобто функціями з двома змінними. Відзначимо, що формально ці функції відрізняються від функцій ψ_1 і ψ_4 з попереднього прикладу, оскільки є бінарними операціями на множині B. Однак раніше було прийнято функції, що відрізняються тільки несуттєвими змінними, вважати рівними.

Серед представлених в таблиці 3 функцій відзначимо ті, які вже знайомі нам як логічні операції, вивчені раніше.

Функція $\psi_2(x_1,x_2)$ є *кон'юнкцією* змінних x_1 і x_2 (функцією І). Вона дорівнює 1 тільки тоді, коли обидві змінні рівні 1. Позначається: $x_1 \wedge x_2, x_1 \bullet x_2$, $x_1 \& x_2; x_1 \otimes x_2$. Її також називають *логічним множенням*, оскільки таблиця її дійсно збігається з таблицею звичайного множення для чисел 0 і 1. Тому, до речі, за аналогією зі звичайним множенням, знак операції між змінними часто опускають: x_1x_2.

Операцію $\otimes$ будемо називати множенням по модулю 2 (дивись нижче). Вона реалізує добуток залишків від ділення чисел 0 і 1 на число 2.

Функція $\psi_8(x_1,x_2)$ називається *диз'юнкцією* змінних x_1 і x_2 (функцією АБО). Вона дорівнює 1, якщо значення x_1 або x_2 рівні 1: $x_1 \vee x_2, x_1 + x_2$.

2. Булева алгебра і теорія множин

Раніше були описані булеві алгебри множин, тобто алгебри виду $B = (\mathrm{B}(U); \cup, \cap, ^{-})$, де $\mathrm{B}(U)$ – булеан множини U, тобто множина всіх його підмножин. Загальний термін «булева алгебра» для алгебр множин і логічних функцій не є випадковим.

Визначення. Будь-яка алгебра типу $(2,2,1)$ називається булевою алгеброю, якщо її операції задовольняють співвідношенням 1–10 (дивись попередній розділ).

В алгебрі множин елементами є підмножини фіксованої універсальної множини U. У цій алгебрі операція перетину відповідає кон'юнкції, операція об'єднання відповідає диз'юнкції, а операція доповнення відповідає запереченню. Саме множина U є одиницею, а порожня множина – нулем. Справедливість співвідношень 1–10 для цієї алгебри можна довести безпосередньо, розглядаючи в них змінні як множини, а знаки логічних функцій – як відповідні операції над множинами.

В одній із попередніх тем зазначалося взаємно однозначна відповідність між множиною $\mathrm{B}(U)$, де $U = \{a_1, \ldots, a_n\}$ і множиною B_n двійкових векторів довжини n. Кожній підмножині $M \subseteq U$ відповідає двійковий вектор $\Gamma(M) = \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, де $\alpha_i = 1$, якщо $a_i \in M$, і $\alpha_i = 0$, якщо $a_i \notin M$. Операції над векторами в булевій алгебрі $B = (B_n; \wedge, \vee, ^{-})$ визначаються таким чином.

Нехай дано два вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ із множини B_n. Тоді:

$$\alpha \vee \beta = (\alpha_1 \vee \beta_1, \ldots, \alpha_n \vee \beta_n),$$

$$\alpha \wedge \beta = (\alpha_1 \wedge \beta_1, \ldots, \alpha_n \wedge \beta_n),$$

$$\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n).$$

Якщо взяти заперечення обох частин рівності і підставити $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ замість змінних $x_1,\ldots,x_n$, то вийде $\bar{f}_1(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)=\bar{\bar{f}}_2(\bar{\bar{x}}_1,\ldots,\bar{\bar{x}}_n)=f_2(x_1,\ldots,x_2)$. Це означає, що функція f_2 двоїста до функції f_1, і, таким чином, відношення двоїстості є симетричним. З визначення двоїстості випливає, що для будь-якої функції двоїста їй функція визначається однозначно. Зокрема, може виявитися, що функція двоїста сама собі. У цьому випадку вона називається самодвоїстою.

Приклад 1. Якщо розглядати логічні функції, то, очевидно, диз'юнкція двоїста кон'юнкції і навпаки (безпосередньо випливає з правил Де Моргана). Заперечення є самодвоїстою функцією. Функція-константа $f_1=1$ двоїста функції $f_2=0$. Ще один класичний приклад самодвоїстих функції – функція $xy\vee yz\vee xz$.

Користуючись визначенням двоїстості, неважко довести таке твердження, яке називається принципом подвійності.

Теорема 10.1. Якщо у формулі F, для функції f, усі знаки функцій замінити відповідно на знаки двоїстих їм функцій, то отримана формула F^* являтиме собою функцію f^*, двоїсту функції f.

У булевій алгебрі принцип двоїстості має більш конкретний вид, який випливає з раніше наведених прикладів: якщо у формулі F, для функції , всі кон'юнкції замінити диз'юнкціями й навпаки, усі одиниці замінити нулями і навпаки, то отримаємо формулу F^*, яка являтиме собою функцію f^*, двоїсту функції f.

Якщо функції рівні, то двоїсті ним функції є рівними. Це дозволяє за допомогою принципу двоїстості отримувати нові еквівалентні співвідношення, переходячи від рівності $F_1=F_2$ за допомогою зазначених замін до рівності $F^*{}_1=F^*{}_2$. Прикладом можуть служити співвідношення $x(x\vee y)=x$ і $x(x\vee y)=x$, які можуть бути отримані одна з одної за вказаним принципом.

Функція $\psi_7(x_1,x_2)$ називається *нерівнозначністю* змінних x_1 і x_2. Вона дорівнює 1, коли значення аргументів різні, і дорівнює 0, коли значення аргументів однакові. Позначається: $x_1\oplus x_2, x_1\Delta x_2$.

Навести приклад такої функції більш складно. Для цього введемо таке поняття, яке широко використовується в теорії чисел.

Два цілих числа a і b називаються порівнянними за модулем $p, p\in N$, якщо при діленні на це число вони дають однакові залишки.

Позначається: $a\equiv b(\mathrm{mod}\, p)$. Наприклад, $7\equiv 10(\mathrm{mod}\, 3)$, $11\equiv 5(\mathrm{mod}\, 6)$. Таким чином, функцію ψ_7 можна розглядати як складання по модулю 2. Дійсно, сума залишків від ділення чисел 0 і 1 на число 2 рівна 1, а сума залишків від ділення чисел 0 і 0, або 1 і 1 на 2 рівна 0.

Функція $\psi_{14}(x_1,x_2)$ називається *імплікацією* або *логічним слідуванням*. Позначається: $x_1\Rightarrow x_2, x_1\to x_2, x_1\supset x_2$.

Функція $\psi_{10}(x_1,x_2)$ називається *еквівалентністю* або *рівнозначністю*. Вона дорівнює 1, якщо значення змінних однакові і 0, якщо вони різні. Позначається: $x_1\Leftrightarrow x_2, x_1\equiv x_2, x_1\sim x_2$.

Є ще дві функції двох змінних, що мають спеціальні назви. Функція $\psi_9(x_1,x_2)$ називається *стрілкою Пірса* і позначається $x_1\downarrow x_2$. Функція $\psi_{15}(x_1,x_2)$ називається *штрихом Шеффера* і позначається $x_1| \, x_2$. Решта функцій спеціальних назв не мають і, як можна показати, легко виражаються через перераховані вище функції.

У функціях ψ_4 і ψ_{13} змінна x_2 фіктивна. З таблиці 3 видно, що $\psi_4(x_1,x_2)=x_1$, а $\psi_{11}(x_1,x_2)=\bar{x}_1$. Аналогічно, у функціях ψ_6 і ψ_{11} змінна x_1 фіктивна: $\psi_6(x_1,x_2)=x_2$, а $\psi_{11}(x_1,x_2)=\bar{x}_2$.

Доведено, що зі збільшенням кількості змінних n частка функцій, що мають фіктивні змінні, зменшується і тяжіє до нуля.

3. Суперпозиції та формули

Раніше було введено визначення *суперпозиції* функцій, згідно з яким суперпозицією декількох функцій називалася нова функція, отримана за допомогою підстановок даних функцією один в одного і перейменування змінних. Вираз, що описує цю суперпозицію, називають *формулою*. Оскільки поняття суперпозиції є дуже важливим в алгебрі логіки, розглянемо його більш докладно.

Нехай дано множина (скінченна або нескінченна) вихідних функцій $\Sigma = \{f_1, ..., f_m\}$. Символи змінних $x_1, ..., x_m$, що містяться в цих функціях, будемо вважати *формулами глибини 0*.

Визначення. Говорять, що формула F має глибину $k+1$, якщо вона має вигляд $f_i(F_1, ..., F_n)$, де $f_i \in \Sigma$, а $F_1, ..., F_n$ – формули, максимальна з глибин яких дорівнює k. При цьому $F_1, ..., F_n$ називаються *підформулами* формули F, а f_i називається *зовнішньою*, або головною операцією формули F.

Відповідно, формули $F_1, ..., F_n$ також можуть мати підформули, які є в цьому випадку і підформулами формули F. Наприклад, вираз $f_1(x_1, x_2, x_3)$ в наших визначеннях – це формула глибини 1. Вираз $f_3(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, f_1(x_2, x_3))$ є формулою глибини 3, що містить одну підформулу глибини 2 і дві підформули глибини 1.

Надалі конкретні формули будемо записувати в більш звичному вигляді, за якого умовні знаки функцій стоять між аргументами (такий запис називають інфіксним). Наприклад, якщо f_1 є кон'юнкція, f_2 – диз'юнкція, а f_3 – імплікацією, то наведена вище формула набуде вигляду $x_1 \vee x_2 \Rightarrow (x_1 \wedge (x_2 \vee x_3))$ (*).

У результаті отримали диз'юнкцію елементарних кон'юнкцій, тобто ДНФ.

Доведено, що якщо з формули F_1 можна за допомогою еквівалентних перетворень отримати формулу F_2, то можна з формули (за допомогою тих же співвідношень) отримати формулу F_1. Інакше кажучи, будь-яке еквівалентне перетворення можна зупинити. Це дозволяє сформулювати наступну теорему.

Теорема 8.3. Для будь-яких двох еквівалентних формул F_1 і F_2 існує еквівалентне перетворення F_1 в F_2 і навпаки за допомогою співвідношень 1–10.

Аналогічно поняттю ДНФ визначається поняття кон'юнктивної нормальної форми (КНФ), тобто КНФ є кон'юнкція елементарних диз'юнкцій. Перехід від КНФ до ДНФ і назад завжди здійснимий (зазвичай, за допомогою формул Де Моргана).

Приклад 4. Звести формулу $x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{z}$ до КНФ.

Замінимо вихідну формулу її подвійним запереченням, а потім застосуємо співвідношення 8.

$$x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{z} = \overline{\overline{x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{z}}} = \overline{\overline{x\bar{y}}\,\overline{\bar{x}y}\,\overline{x\bar{z}}} = \overline{(\bar{x} \vee \bar{\bar{y}})(\bar{\bar{x}} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{\bar{z}})} = \overline{(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee z)} =$$

$$= \overline{(\bar{x}x \vee \bar{x}\bar{y} \vee xy \vee y\bar{y})(\bar{x} \vee z)} = \overline{(\bar{x}\bar{y} \vee xy)(\bar{x} \vee z)} = \overline{\bar{x}\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{x}y \vee xyz} = \overline{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz} =$$

$$= \overline{\bar{x}\bar{y}(1 \vee z) \vee xyz} = \overline{\bar{x}\bar{y} \vee xyz} = \overline{\bar{x}\bar{y}}\,\overline{xyz} = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Булеві алгебри і теорія множин

1. Двоїстість

Визначення. Функція $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ називається *двоїстою* до функції $f_2(x_1, \ldots, x_n)$, якщо $f_1(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}_2(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.

а) *Поглинання*: 1) $x \vee xy = x$ і 2) $x(x \vee y) = x$. Доведемо цю рівність докладно, використовуючи для доказу співвідношення 3, 7а і 7в.

$$x \vee xy = x \wedge 1 \vee xy = x \wedge (1 \vee y) = x \wedge 1 = x.$$

Далі будемо опускати докази рівностей, які можна отримати зі співвідношень 1–10 і вже доведених тотожностей.

б) *Склеювання*: $xy \vee x\bar{y} = x$.

в) *Узагальнене склеювання*: $xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z}$.

г) $x \vee \bar{x}y = x \vee y$.

Одним з головних видів спрощення формул є приведення їх до диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ).

Визначення. Елементарними кон'юнкціями називаються кон'юнкції змінних або їх заперечень, в яких кожна змінна зустрічається не більше одного разу. Диз'юнктивною нормальною формою називається формула, що має вигляд диз'юнкції елементарних кон'юнкцій.

Зауважимо, що ДДНФ є окремим випадком ДНФ.

Зведення формули до ДНФ виконується так. Спочатку за допомогою співвідношень 6 і 8 все заперечення «спускаються» до змінних. Потім розкриваються дужки. Після цього за допомогою співвідношень 5, 9 і 10 видаляються зайві кон'юнкції і повторення змінних у кон'юнкції. Нарешті, за допомогою співвідношень 7а – 7е видаляються зайві константи. При цьому необхідно пам'ятати, що ДНФ цієї формули може бути не єдиною.

Приклад 3. Звести до ДНФ формулу $xy \vee \bar{x}(y \vee xz)\overline{(x(\bar{y} \vee z) \vee yz)}$.

Розв'язання:

$$xy \vee \bar{x}(y \vee xz)\overline{(x(\bar{y} \vee z) \vee yz)} = xy \vee (\bar{x}y \vee \bar{x}xz)\overline{(x(\bar{y} \vee z)}\,\overline{yz} = xy \vee (\bar{x}y \vee 0 \wedge z)(\bar{x} \vee \overline{\bar{y} \vee z})(\bar{y} \vee \bar{z}) =$$

$$= xy \vee (\bar{x}y \vee 0)(\bar{x} \vee \bar{\bar{y}}\bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z}) = xy \vee \bar{x}y(\bar{x} \vee y\bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z}) = xy \vee \bar{x}y(\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{y}\bar{z} \vee y\bar{z}\bar{z}) =$$

$$= xy \vee \bar{x}y(\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee 0 \wedge \bar{z} \vee y\bar{z}) = xy \vee \bar{x}y(\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{z}) = xy \vee \bar{x}\bar{x}y\bar{y} \vee \bar{x}\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yy\bar{z} =$$

$$= xy \vee \bar{x} \wedge 0 \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} = xy \vee \bar{x}y\bar{z}.$$

Усі формули, побудовані таким чином, тобто містять тільки символи змінних, дужки і знаки функцій з множини Σ, називаються *формулами на множині* Σ.

Можливі й інші інтерпретації поняття глибини. Наприклад, вважається, що розстановка заперечень над змінними не збільшує глибини формули. У разі, коли множина Σ містить деяку асоціативну операцію f, можна вважати, що застосування цієї операції до формул з тієї ж зовнішньою операцією не збільшує глибини формули. Наприклад, формули $x_1 \wedge (x_2 \vee (x_3 \wedge x_4))$ і $x_2 \wedge (x_1 \wedge (x_2 \vee (x_3 \wedge x_4)))$ мають ту ж саму глибину 3.

Будь-яка формула, що виражає цю функцію як суперпозицію інших функцій, задає спосіб її обчислення (за умови, що відомо, як обчислювати вихідні функції). Цей спосіб визначається таким очевидним правилом: формулу можна обчислити, тільки якщо вже обчислені значення всіх її підформул. Застосуємо, наприклад, формулу (*) до набору $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$. Отримаємо: $x_1 \vee x_2 = 1; x_2 \vee x_3 = 0$. Далі отримаємо $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = 1$. Нарешті, $x_1 \vee x_2 \Rightarrow (x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)) = 1$.

Таким чином, формула ставить у відповідність кожному набору значень аргументів значення функції і, отже, може поряд з таблицею служити способом завдання й обчислення функції. Зокрема, за формулою, обчислюючи її на всіх 2^n наборах, можна відновити таблицю функції. Про формулу, яка задає функцію, говорять також, що вона *представляє* або *реалізує* функцію.

На відміну від табличного завдання представлення цієї функції формулою не єдине. Наприклад, якщо як вихідну множину функцій зафіксувати функції $\{\psi_2, \psi_8, \psi_3\}$ з попереднього пункту (тобто функції І, АБО, НЕ), то функцію ψ_{15} – штрих Шеффера – можна представити формулами $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ і $\overline{x_1 \wedge x_2}$. Функцію ψ_9 – стрілку Пірса – можна представити формулами $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$ і $\overline{x_1 \vee x_2}$.

Визначення. Формули, що представляють ту ж саму функцію, називаються еквівалентними або рівносильними.

Еквівалентність формул прийнято позначати знаком рівності, тому можна записати: $\psi_{15}(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \vee \bar{x} = \overline{x_1 \wedge x_2}$.

Існує стандартний метод для з'ясування еквівалентності двох формул. По кожній формулі записується таблиця функції, а потім дві отримані таблиці порівнюються. Таким способом у попередньому розділі ми встановлювали рівносильність висловлювань. Він досить громіздкий, оскільки вимагає $2 \cdot 2^n$ обчислень, якщо вважати, що обидві формули залежать від змінних. Більш простими методами, що дозволяють встановлювати еквівалентність цих формул, є еквівалентні перетворення, які будуть розглянуті в наступних розділах.

Булеві алгебри

У цій темі будуть розглянуті способи представлення логічних функцій у вигляді суперпозиції функцій І, АБО, НЕ.

1. Розклад функцій за змінними. Досконала диз'юнктивна нормальна форма

Введемо визначення: $x^1 = x, x^0 = \bar{x}$. Нехай α – параметр, що дорівнює 0 або 1. Тоді $x^\alpha = 1$, якщо $x = \alpha$, і $x^\alpha = 0$, якщо $x \neq \alpha$.

Теорема 8.1. Будь-яка логічна функція $f(x_1,...,x_n)$ може бути представлена в такому вигляді:

$$f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n) = \bigvee_{\alpha_1\cdots\alpha_m} x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\alpha_m} f(\alpha_1,\dots,\alpha_m,x_{m+1},\dots,x_n), \quad (1)$$

лентну їй. При цьому заміна всіх значень вихідної підформули не обов'язкова.

3. Еквівалентні перетворення

Приклад 2. Візьмемо співвідношення 8а і підставимо замість змінної x_1 вираз $\bar{x}_1 x_3$. Отримаємо: $\overline{\bar{x}_1 x_3 x_2} = \overline{\bar{x}_1 x_3} \vee \bar{x}_2$. Тут в обох частинах стоять формули, нееквівалентні вихідним формулам, але еквівалентні між собою. Якщо ж у правій частині нового співвідношення формулу $\overline{\bar{x}_1 x_3}$ замінити формулою $\bar{\bar{x}}_1 \vee \bar{x}_3$, еквівалентну їй в силу співвідношення 8а і потім замінити $\bar{\bar{x}}_1$ на x_1 (згідно з 6), то отримаємо $x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2$. Причому всі формули в отриманому ланцюгу перетворень є еквівалентними:

$$\overline{\bar{x}_1 x_3 x_2} \Rightarrow \overline{\bar{x}_1 x_3} \vee \bar{x}_2 \Rightarrow \bar{\bar{x}}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \Rightarrow x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2.$$

Такі перетворення, що використовують еквівалентні співвідношення і правило заміни, називають *еквівалентними перетвореннями*. Еквівалентні перетворення є потужним засобом доведення еквівалентності формул, як правило, більш ефективним, ніж їх обчислення на наборах значень змінних.

У булевій алгебрі прийнято опускати дужки в таких двох випадках: а) при послідовному виконанні декількох кон'юнкцій або диз'юнкцій; б) якщо вони є зовнішніми дужками в кон'юнкції. Обидві правила абсолютно аналогічні загальноприйнятим правилам опускання дужок для операції множення в арифметичних виразах.

Розглянемо кілька способів спрощення формул за допомогою еквівалентних перетворень, що дозволяють отримати формули, що містять меншу кількість символів.

7. Властивості констант: а) $x \vee 1 = 1$; б) $x \vee 0 = x$; в) $x \wedge 1 = x$; г) $x \wedge 0 = 0$; д) $\overline{0} = 1$; є) $\overline{1} = 0$.

8. Правила де Моргана: а) $\overline{x_1 x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$; б) $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x}_1 \overline{x}_2$. Дуже важливі співвідношення, які часто будуть використовуватися в подальшому. З їх допомогою (а також за допомогою співвідношення 6) диз'юнкція заміняється кон'юнкцією і навпаки.

9. Закон протиріччя: $x\overline{x} = 0$.

10. Закон «виключеного третього»: $x \vee \overline{x} = 1$.

Усі співвідношення 1 - 10 можна перевірити вказаним стандартним методом - обчисленням обох частин рівності на всіх наборах значень змінних. Важливо лише дотримуватися правила *підстановки формули замість змінної.* При підстановці формули F замість змінної x всі значення цієї змінної у вихідне співвідношення повинні бути одночасно замінені формулою F.

Правило підстановки дозволяє отримувати зі співвідношень 1–10 нові еквівалентні співвідношення. Зауважимо, що рівність $F_1 = F_2$ означає в цьому контексті, що формули F_1 і F_2 описують ту ж саму логічну функцію. Отже, якщо якась формула F містить F_1 як підформулу, то заміна її на F_2 не змінить значення формули F. Це твердження є правилом *заміни підформул*, яке дозволяє, використовуючи еквівалентні співвідношення, отримувати формули, еквівалентні цій. Практичне застосування описаних правил буде розглянуто нижче.

Зауваження. Є суттєва різниця між підстановкою і заміною. При підстановці змінна замінюється формулою; при цьому формула може бути будь-якою за умови, що проводиться одночасна заміна нею всіх значень змінної. При заміні підформул може бути замінена будь-яка підформула, однак, не на будь-яку іншу, а тільки на підформулу, еквіва-

де $m \le n$, а диз'юнкція береться за всіма 2^m наборами значень змінних $x_1, \ldots, x_m$.

Рівність (1) називається розкладом за змінними $x_1, \ldots, x_m$. Формула (1) досить громіздка на вигляд, проте її нескладно використовувати при невеликих значеннях m і n. Наприклад, при значеннях $n = 4$, $m = 2$ розклад (1) має вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge f(0,0,x_3,x_4) \vee \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge f(0,1,x_3,x_4) \vee x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge f(1,0,x_3,x_4) \,\&$$
$$\& \, x_1 \wedge x_2 \wedge f(1,1,x_3,x_4).$$

Практичний сенс такого розкладу очевидний: він дає змогу заміновати функцію декількох змінних суперпозицією скінченого числа функцій з меншою кількістю змінних. Особливо важливий окремий випадок $m = n$, коли розклад проводиться за всіма змінними. При цьому всі змінні в правій частині рівності (1) отримують фіксовані значення, і функції в кон'юнкції правої частини стають рівними 0 або 1, що дає:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=1} x_1^{\alpha_1} \wedge \ldots x_n^{\alpha_n}, \qquad (2)$$

де диз'юнкція береться за всіма наборами $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, на яких $f = 1$. Такий розклад називається досконалою диз'юнктивною нормальною формою *(ДДНФ)* функції f. ДДНФ містить рівно стільки кон'юнкцій, скільки одиниць в таблиці функції f; кожному одиничному набору $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ відповідає диз'юнкція всіх змінних, в яких x_i взято з запереченням, якщо $\alpha_1 = 0$ і без заперечення, якщо $\alpha_i = 1$. Таким чином, існує взаємно однозначна відповідність між таблицею функції f та її ДДНФ. Отже, для кожної логічної функції ДДНФ є єдиною (з точністю до порядку змінних і кон'юнкцій).

Приклад 1. Скласти ДДНФ для функції, заданої таблицею:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Оскільки ця таблиця (була наведена вище) містить три одиничних набори, ДДНФ буде кон'юнкція трьох диз'юнкцій. У свою чергу, кожна диз'юнкція включає три змінних – за кількістю їх у функції f.

Отримаємо: $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \vee x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$.

Нагадаємо, що, подібно до знаку множення, знак диз'юнкції $\wedge$ в логічних формулах часто опускають. Тоді отриманий вираз набуде більш компактного виду:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3.$$

Єдина функція, яка не має ДДНФ, – це константа $f = 0$.

Формули, що містять крім змінних і дужок, тільки знаки диз'юнкції, кон'юнкції і заперечення, будемо називати *булевими формулами*.

<u>Теорема 8.2.</u> Будь-яка логічна функція може бути представлена булевої функцією, тобто як суперпозиція диз'юнкції, кон'юнкції і заперечення.

2. <u>Булева алгебра функцій</u>

Вище ми позначили множину всіх логічних операцій на двоелементній множині $\{0,1\}$ як P_2.

<u>Визначення.</u> Булевою алгеброю логічних функцій називається алгебра виду $(P_2; \wedge, \vee, \bar{\ })$, основною множиною якої є всі множини логічних функцій, а операціями – диз'юнкція, кон'юнкція й заперечення.

<u>Зауваження.</u> На практиці ми маємо справу не із самими функціями, а з формулами, що їх представляють, тобто з алгеброю формул, яка значно ширше, оскільки кожну функцію представляє безліч формул. Щоб «синхронізувати» алгебру формул використовується наступний запис. Елементами алгебри формул оголошуються не власними формули, а класами еквівалентності формул, тобто класами формул, що представляють одну і ту ж функцію. Задана таким чином, алгебра формул називається алгеброю Лінденбаума – Тарського. Вона ізоморфна булевій алгебрі функцій.

Тепер розглянемо основні властивості булевих операцій (частково вже знайомі з розділу «Елементи математичної логіки»).

1. Асоціативність: а) $x_1(x_2x_3) = (x_1x_2)x_3$; б) $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$.

2. Комутативність: а) $x_1x_2 = x_2x_1$; б) $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$.

3. Дистрибутивність кон'юнкції щодо диз'юнкції: $x_1(x_2 \vee x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3$.

4. Дистрибутивність диз'юнкції відносно кон'юнкції:

$$x_1 \vee (x_2x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3).$$

5. Ідемпотентність: а) $xx = x$; б) $x \vee x = x$.

6. Подвійне заперечення: $\bar{\bar{x}} = x$.