

УДК 658.562.012

Добролюбова М.В, канд. техн. наук, доцент  
Клевцова М.О., здобувач

Національний технічний університет України «КПІ ім. І.Сікорського», [m.dobroliubova@kpi.ua](mailto:m.dobroliubova@kpi.ua)

## ОЦІНЮВАННЯ СТАБІЛЬНОСТІ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНОГО ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ ПРИ КОРЕЛЯЦІЇ ЙОГО ПОКАЗНИКІВ

Статистичні методи аналізу точності і стабільності характеристик технологічного процесу передбачають, як правило, контроль процесу за одним показником якості продукції. Найбільш широке застосування знайшли карти Шухарта [1]. У багатьох випадках якість продукції характеризується кількома показниками, які можуть бути корельовані. При цьому незалежний контроль за окремими показниками може призвести до помилкових рішень щодо розладу (або навпаки) технологічного процесу.

В зв'язку з цим викликає інтерес критерій Хотеллінга, який раніше не використовувався для цілей багатопараметричного контролю через складність і громіздкість обчислень при визначенні його значень.

При розгляді багатовимірної випадкової величини за вибіркою обсягом  $n$  і за відомої дисперсії генеральної сукупності використовується статистика

$$z^2 = n(\bar{x} - \mu_0)^2 \sigma^{-2}, \quad (1)$$

яку в матричній формі можна подати як

$$\mathbf{T}_H^2 = n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0), \quad (2)$$

де  $\boldsymbol{\Sigma}$  – коваріаційна матриця  $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & \rho_{1p}\sigma_1\sigma_p \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots & \rho_{2p}\sigma_2\sigma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1}\sigma_p\sigma_1 & \rho_{p2}\sigma_p\sigma_2 & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix}$ .

Вираз (2) є узагальненою характеристикою Хотеллінга ( $\mathbf{T}_H^2$  – статистика Хотеллінга), яку застосовують при оцінюванні якості багатопараметричного технологічного процесу за наявності кореляції його показників [2].

Застосування контрольних карт Хотеллінга передбачає розрахунок статистики (2) для кожної  $t$ -ї миттєвої вибірки ( $t = 1, \dots, m$ ). За нормального перебігу процесу має виконуватися умова  $T_t^2 < T_{kp}^2$ , де  $T_{kp}^2$  – границя критичної області. Якщо коваріаційна матриця  $\boldsymbol{\Sigma}$  відома, то статистика Хотеллінга має  $\chi^2$ -розподіл, і граничному значенню критичної області відповідає  $T_{kp}^2 = \chi_{(1-\alpha, p)}^2$ .

За відомої коваріаційної матриці матиме місце нецентральний F-розподіл Фішера, і границі критичної області визначатимуться відповідно до виразу:

$$T_{kp}^2 = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn - m - p + 1} F_{(1-\alpha), (mn-n-p+1)}.$$

В одновимірному випадку ( $p=1$ ) розподіл Хотеллінга збігається з розподілом Стьюдента.

Слід зазначити, що сам по собі критерій Хотеллінга дозволяє оцінити стан процесу в цілому, не виділяючи причину його розладу. Карта Хотеллінга не показує, з яким безпосередньо показником (або спільним впливом показників) пов'язане порушення процесу. В зв'язку з цим виникає питання про інтерпретацію результатів контролю. Для

перевірки гіпотези, що «відповідальним» за порушення процесу є  $j$ -й показник ( $T_t^2 > T_{кр}^2$ ), може бути використаний частинний критерій Хотеллінга [3].

Аналогічно перевіряються гіпотези і для інших параметрів. Якщо всі  $p$  гіпотез відкидають, це означає, що порушення процесу викликано спільною дією кількох показників.

Проведено порівняльне дослідження властивостей карт Шухарта і Хотеллінга і на конкретних числових прикладах показано, що карти Шухарта не «уловлюють» жодного з порушень процесу, відображених картою Хотеллінга.

Фактичні границі карти Хотеллінга описуються рівнянням еліпса, яке має вигляд:

$$\frac{1}{1-\rho^2} \left( \frac{(\bar{x}_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(\bar{x}_1 - \mu_1)(\bar{x}_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\bar{x}_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right) = \frac{1}{n} \chi_{(1-\alpha, 2)}^2, \quad (3)$$

Знаходження точок, що відповідають значенням середніх у досліджуваних підгрупах, в границях цього еліпса, свідчить про статистичну керованість технологічного процесу, тобто розсіювання значень обумовлено впливом випадкових величин. Точки, що відповідають досліджуваним підгрупам 3 і 8 (вибіркам з  $n = 5$  спостережень), знаходяться за границями еліпса (рис. 1), що свідчить про розлад технологічного процесу. Штриховою лінією показаний прямокутник, що відповідає границям карт Шухарта. Обидва вибірових середніх опиняються всередині контрольних границь карт Шухарта.

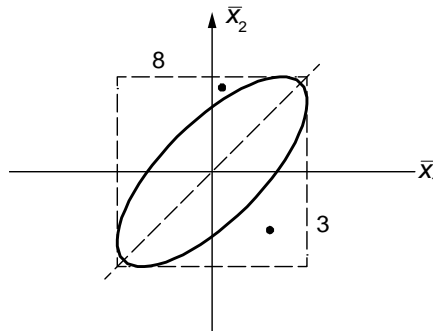


Рис.1 – Розсіювання вибірових середніх  $\bar{x}_i$  підгруп

Таким чином, за відомих (заданих) середньоквадратичних відхиленнях показників якості технологічного процесу можна, обчислюючи статистику Хотеллінга  $T_{нн}^2$ , виявляти розлад процесу в реальному масштабі часу.

У багатьох практичних задачах дисперсії і коваріації, як правило, невідомі і мають бути оцінені за вибіркою. Проведено дослідження і для випадку невідомого СКВ, тоді статистична керованість процесом оцінюється за певний період.

Таким чином, серед безлічі багатопараметричних методів використання критерію Хотеллінга дозволяє визначити хід технологічного процесу як поетапно, так і в цілому, виявити показник або поєднання показників, які суттєво впливають на статистичну керованість технологічного процесу.

При невеликих кореляціях, коли показники якості практично некорельовані, виявлення показника, який характеризує порушення процесу, можливо з використанням карт Шухарта.

#### Список посилань

1. Montgomery D. C. (2009) Introduction to Statistical Quality Control, 6th Ed. – John Wiley & Sons. – 734 P.
2. Клячкин В.Н. Многомерный статистический контроль технологического процесса. / В.Н. Клячкин. – М: Финансы и статистика, 2003. – 192с.
3. Смирнов Н.И. Курс теории вероятностей математической статистики для технических приложений. / Смирнов Н.И., Дунин-Барковский И.В.– М.: Наука, 1969. – 512 с.