МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Чернігівська політехніка»

Лінійний векторний простір

Методичні вказівки та завдання

до самостійної роботи

з дисципліни «Вища математика»

для студентів інженерних спеціальностей

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри АТ та ГМ,
протокол № 13 від 14.06. 2021р.

Чернігів - 2021

Лінійний векторний простір. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» для студентів інженерних спеціальностей./Укл.: В.П. Мурашковська, Л.А. Руновська – Чернігів: НУ «Чернігівська політехніка», 2021- 46с.

Укладачі: Мурашковська Вірв Петрівна, ст. викл.

Руновська Людмила Анатоліївна, ст. викл.

Відповідальний за випуск: Кальченко Віталій Іванович, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, професор, доктор технічних наук

Рецензент: Венжега Володимир Іванович – доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування

ЗМІСТ

Вступ

Ці методичні вказівки укладені у відповідності до Навчальної програми з вищої математики для інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Поняття лінійного простору і лінійних перетворень широко застосовується як в прикладній математиці, так і в різних інженерних дисциплінах. Вони є зручним апаратом для розв'язання задач у різних галузях науки і техніки.

Мета даного видання – допомогти студентам краще оволодіти математичним апаратом, який застосовується в лінійних перетвореннях, виробити у студентів уміння, навички обчислювати різні задачі з теми «Лінійний простір».

Основне завдання цих методичних вказівок – надати студентам теоретичну та практичну допомогу в самостійній роботі по вивченню розділу «Лінійний простір» з дисципліни «Вища математика». Методичні вказівки містять теоретичний матеріал, необхідний для самостійного виконання студентами індивідуальних домашніх завдань. Наведені приклади розв'язання основних стандартних задач.

В розділі «Завдання для розрахункової роботи» наведено 30 варіантів індивідуальних завдань. Завдання охоплюють в цілому матеріал розділу, який в тому чи іншому обсязі вивчається студентами.

Методичні вказівки можуть бути використані під час аудиторних занять, як довідковий матеріал та в якості задачника при проведенні самостійних та модульно-тестових робіт.

ТЕМА 1. ЛІНІЙНИЙ ВЕКТОРНИЙ ПРОСТІР

Дати визначення лінійного векторного простору.

Лінійним векторним простором називається множина V елементів довільної природи, в якій визначені операції додавання елементів і множення елементів на дійне число, яка є замкнена відносно цих операцій. Операції додавання елементів і множення елементів на дійне число задовольняють аксіомам: для будь - яких $x \in V$, $y \in V$, $\alpha \in R$, $\beta \in R$, де R – множина дійсних чисел справедливі рівності:

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Існує нульовий елемент $0 \in V$, який має властивість :
   $0 + x = x + 0 = x$ для будь-якого $x \in V$.
4. Для будь-якого $x \in V$ існує протилежний елемент $-x$, такий, що
   $x + (-x) = -x + x = 0$.
5. $1 \cdot x = x$.
6. $\alpha (\beta x) = (\alpha \beta) x$.
7. $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$.
8. $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$.

Що називається лінійною комбінацією векторів?

Нехай $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ - вектори (елементи) векторного лінійного простору, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – числа. Вектор $\overline{y} = \alpha_1 \overline{x_1} + \alpha_2 \overline{x_2} + \ldots + \alpha_n \overline{x_n}$ називається лінійною комбінацією векторів $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$.

Яка система векторів є лінійно незалежною (відповідно лінійно залежною)?

Система векторів $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ називається лінійно залежною, якщо існують числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, які не всі рівні нулю, такі, що $\alpha_1 \overline{x_1} + \alpha_2 \overline{x_2} + \ldots + \alpha_n \overline{x_n} = 0$.

Якщо остання рівність виконується тільки в тому випадку, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то система векторів $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ називається лінійно незалежною.

Сформулювати визначення n-вимірного векторного простору.

Лінійний простір V називається n-вимірним, якщо в ньому існують n лінійно незалежних векторів, а будь-які n + 1 вектори є лінійно залежними. Число n називається у цьому випадку, розмірністю лінійного простору V.

Що називається базисом n-вимірного лінійного простору ?

Базисом n-вимірного лінійного простору V_n називається будь-яка впорядкована система n лінійно незалежних векторів цього простору.

Дати означення координат вектор $\overline{x}$ ***в базисі*** $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$.

Теорема. Якщо $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ - базис лінійного n-вимірного простору V_n, то будь-який вектор $\overline{x}$ цього простору можна представити як лінійну комбінацію векторів $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$, тобто

$\overline{x} = \alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \ldots + \alpha_n \overline{e_n}$.

Остання рівність називається розкладом вектора $\overline{x}$ по базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$.

Коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ цього розкладу визначаються однозначно і називаються координатами вектора $\overline{x}$ в базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$.

Що називається рангом системи векторів?

Розглянемо систему m векторів

$$\overline{a_1} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$$
$$\overline{a_2} = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$\overline{a_m} = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{n\,m})$$

лінійного n-вимірного простору, координати яких задані в одному і тому же базисі. Цій системі векторів поставимо у відповідність матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2m} \\ . \ . \ . & . \ . \ . \ . \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nm} \end{pmatrix},$$

в i-му стовбці якої записані координати вектора $\overline{a_i}$. Матриця A називається матрицею даної системи векторів в даному базисі, а ранг цієї матриці – рангом системи векторів $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m}$.

Сформулювати теорему, яка дозволяє зробити висновок про лінійну незалежність векторів, заданих своїми координатами.

Теорема. Для того, щоб m векторів n-вимірного лінійного простору були лінійно незалежними, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці цієї системи дорівнював m.

Наслідок 1. Система n векторів n-вимірного лінійного простору лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли матриця цієї системи векторів є невиродженою.

Наслідок 2. Якщо ранг матриці системи m векторів лінійного простору дорівнює r, то максимальне число лінійно незалежних векторів цієї системи дорівнює r.

Зауваження. Максимальне число лінійно незалежних рядків будь-якої матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних стовпців, тобто дорівнює рангу цієї матриці.

Яка матриця називається матрицею переходу від одного базису до іншого базису n- вимірного простору V_n ?

В лінійному n-вимірному просторі V_n зафіксуємо два базиси

$$\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n} \qquad (1)$$

$$\overline{e_1}', \overline{e_2}', \dots, \overline{e_n}' \qquad (2)$$

Кожний вектор системи (2) можна розкласти по базису (1):

$$\begin{aligned} \overline{e_1}' &= t_{11}\overline{e_1} + t_{21}\overline{e_2} + \dots + t_{n1}\overline{e_n} \\ \overline{e_2}' &= t_{12}\overline{e_1} + t_{22}\overline{e_2} + \dots + t_{n1}\overline{e_n} \\ &. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \overline{e_n}' &= t_{1n}\overline{e_1} + t_{2n}\overline{e_2} + \dots + t_{nn}\overline{e_n}. \end{aligned}$$

Матриця $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \dots t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} \dots t_{2n} \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ t_{n1} & t_{n2} \dots t_{nn} \end{pmatrix}$

називається матрицею переходу від базису (1) до базису (2).

Легко бачити, що матриця T^{-1}, яка обернена до матриці T, є матрицею переходу від базису (2) до базису (1).

Сформулювати теорему, яка встановлює зв'язок між координатами вектора в різних базисах.

Теорема. Якщо $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координати вектора $\bar{x}$ в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$; а $x_1', x_2', \dots, x_n'$ - координати того ж вектора в базисі $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \dots, \bar{e}_n'$, то

$$X = T X', \qquad (3)$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

T – матриця переходу від базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ до базису $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \dots, \bar{e}_n'$.

Зауваження. Формули (3) виражають старі координати $x_1, x_2, \dots, x_n$ вектора $\bar{x}$ через його нові координати. Для того, щоб отримати формули, які виражають нові координати через старі, достатньо помножити рівність (3) на матрицу T^{-1}; після простих перетворень отримаємо: $X' = T^{-1} X$.

Приклади задач

Приклад 1. З'ясувати, чи є лінійним векторним простором множина R^2 всіх геометричних векторів, кінці яких лежать в першій чверті системи координат.

Розв'язок. Перевіримо виконання операцій додавання і множення на число.

В результаті додавання двох векторів ми отримаємо вектор, кінець якого теж лежить в першій чверті. При множенні вектора на число $\alpha < 0$ ми отримаємо вектор, кінець якого буде лежати в третій чверті. Тому дана множина не є замкненою відносно операції множення на число. Таким чином, заданий векторний простір не є лінійним.

Приклад 2. В базисі $B = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ задані вектори $\overline{e_1}' = \bar{i} + \bar{j}$, $\overline{e_2}' = \bar{j} + \bar{k}$, $\overline{e_3}' = \bar{i} + \bar{k}$, $\bar{x} = -\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$. Довести, що система $B' = (\overline{e_1}', \overline{e_2}', \overline{e_3}')$ – базис і знайти координати вектора $\bar{x}$ в базисі B'.

Розв'язок. Випишемо координати векторів $\overline{e_1}'$, $\overline{e_2}'$, $\overline{e_3}'$, $\bar{x}$ в заданому базисі $B = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ у вигляді матриць - стовпців:

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Впевнимося, що вектори $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ утворюють базис. Складемо матрицю A із координат цих векторів і знайдемо її ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ranq } A = 3.$$

Ранг матриці дорівнює числу векторів, отже, ці вектори лінійно незалежні і утворюють базис. Матриця A є матрицею переходу $T_{B \to B'}$ від базису B до базису B' або матрицею лінійного перетворення:

$$T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо розклад вектора $\bar{x}$ по базису B' у векторній і матричній формах:

$$\bar{x} = \alpha\, \overline{e_1}' + \beta\, \overline{e_2}' + \gamma\, \overline{e_3}',$$

$$X = T_{B \to B'} \cdot X',$$

де $X' = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ - матриця-стовбець координат вектора $\overline{x}$ в базисі B'.

Знаходимо шукану матрицю X' за допомогою оберненого перетворення: $X' = (T_{B \to B'})^{-1} \cdot X$ – формула перетворення координат при перетворенні базису

$$X' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

тобто $\overline{x} = 2\vec{e}\,'_2 - \vec{e}\,'_3$.

ТЕМА 2. ЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Що називається лінійним перетворенням?

Якщо вказане правило, за яким кожному вектору $\overline{x}$ лінійного простору V ставиться у відповідність єдиний вектор $\overline{y}$ цього простору, то говорять, що в ньому задано перетворення (відображення, оператор) f і пишуть $f : V \to V$.

Говорять також, що перетворення f переводить вектор x у вектор $\overline{y}$ і пишуть $\overline{y} = f(\overline{x})$.

Перетворення f лінійного простору V називається лінійним перетворенням (лінійним оператором), якщо для будь-яких векторів цього простору $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x}$ і будь-якого дійсного числа λ виконуються умови:

$$f(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = f(\overline{x_1}) + f(\overline{x_2}).$$

$$f(\lambda\overline{x}) = \lambda f(\overline{x}).$$

Сформулювати визначення матриці лінійного перетворення.

Нехай f – лінійне перетворення n-вимірного лінійного простору, яке переводить базисні вектори $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ у вектори $\overline{e_1}', \overline{e_2}', \ldots, \overline{e_n}'$. Кожен з останніх векторів розкладемо по базису:

$$\overline{e_1}' = a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + \ldots + a_{n1}\overline{e_n}$$

$$\overline{e_2}' = a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + \ldots + a_{n1}\overline{e_n}$$

. . . .

$$\overline{e_n}' = a_{1n}\overline{e_1} + a_{2n}\overline{e_2} + \ldots + a_{nn}\overline{e_n}.$$

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix},$$

в якій i-ий стовпець складається із координат вектора $\overline{e}_i$ (i = 1, 2, …, n), називається матрицею лінійного перетворення f в базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$.

Матриця повороту.

Одним з прикладів лінійного перетворення є поворот на заданий кут. Перетворення, що полягає в повороті всіх векторів площини навколо початку координат на кут φ в додатному напрямку :

$$f\ i = \cos\varphi \cdot i + \sin\varphi \cdot j$$

$$f\ j = -\sin\varphi \cdot i + \cos\varphi \cdot j$$

Де $f\ i$ і $f\ j$ образи базисних векторів

Отже матриця повороту : $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Приклади задач

Приклад 1. Задано два лінійних перетворення:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ x_2' = x_1 + 4x_2 - x_3 \\ x_3' = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1'' = x_1' + 4x_2' + 3x_3' \\ x_2'' = 5x_1' - x_2' - x_3' \\ x_3'' = 3x_1' + 6x_2' + 7x_3' \end{cases}$$

Знайти лінійне перетворення, яке виражає вектор $\overline{x}''$ через вектор $\overline{x}$.

Розв'язок. Запишемо матриці лінійних перетворень:

$$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$X'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

В матричній формі лінійні перетворення запишуться так:

$$X' = A \ X, \quad X'' = B \cdot X'.$$

Підставимо в другу рівність вираз X' із першого, отримаємо

$$X'' = B \cdot A \cdot X.$$

Матриця $C = B \cdot A$ буде матрицею шуканого лінійного перетворення

$$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, шукане перетворення таке:

$$\begin{cases} x_1'' = 15x_1 + \qquad 7x_3 \\ x_2'' = \ 6x_1 - \ 4x_2 + 24x_3 \\ x_3'' = 33 \ x_1 - 14 \ x_2 + 23 \ x_3 \end{cases}.$$

Приклад 2. Знайти матрицю переходу (матрицю лінійного перетворення) $T_{B\to B'}$, якщо базис $B' = (\bar{i}', \bar{j}')$ отримано дзеркальним відображенням відносно вектора $\bar{i}$ базису $B = (\bar{i}', \bar{j}')$.

Розв'язок. Знайдемо координати векторів $\bar{i}'$ і $\bar{j}'$ в базисі $B = (\bar{i}, \bar{j})$, (див. рисунок 1): $\bar{i}' = \bar{i}$, $\bar{j}' = -\bar{j}$ або

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

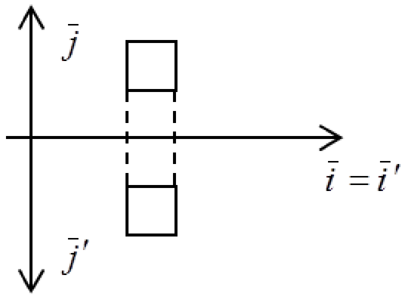

Рисунок 1

ТЕМА 3. . ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ І ВЛАСНІ ВЕКТОРИ ЛІНІЙНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

Що називається характеристичним рівнянням лінійного перетворення?

Характеристичним рівнянням лінійного перетворення називається рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

де A – матриця цього перетворення в деякому базисі.

Чи залежіть характеристичне рівняння від вибору базису ?

Теорема. Якщо лінійне перетворення f в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ має матрицю A і в базисі $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$ - матрицю B, то

$$\det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E),$$

де λ - будь-яке дійсне число, E – одинична матриця порядку n.

З цієї теореми слідує, що характеристичний многочлен $\det(A - \lambda E)$ лінійного перетворення f залишається незмінним при переході до нового базису, незважаючи на те, що матриця лінійного перетворення змінюється. Таким чином, характеристичне рівняння не залежить від вибору базису.

Що називається характеристичними числами лінійного перетворення?

Характеристичними числами лінійного перетворення f називаються корені характеристичного рівняння цього лінійного перетворення.

Дати означення власного вектора лінійного перетворення.

Ненульовий вектор $\overline{x}$ лінійного простору називається власним вектором лінійного перетворення f цього простору, якщо існує число k, таке, що $f(\overline{x}) = k\,\overline{x}$,

Причому k – дійсне число для дійсного простору і k - комплексне число у випадку комплексного простору.

Що називається власним значенням перетворення(оператора)?

Число k із останньої рівності $f(\overline{x}) = k\,\overline{x}$, називається власним значенням оператора f.

Вказати основні властивості власних векторів та власних значень.

1. Власний вектор лінійного перетворення має єдине значення k.
2. Якщо $\overline{x}$ - власний вектор лінійного перетворення f із власним числом k і λ - будь-яке відмінне від нуля число, то $\lambda\overline{x}$ – також власний вектор перетворення f з власним значенням k.
3. Якщо $\overline{x}$ і $\overline{y}$ - лінійно незалежні власні вектори лінійного перетворення f з одним і тим ж власним значенням k, то $\overline{x} + \overline{y}$ - також власний вектор цього перетворення з власним значенням k.
4. Якщо $\overline{x}$ і $\overline{y}$ - власні вектори лінійного перетворення f з власними числами k і m, причому $k \neq m$, то $\overline{x}$ і $\overline{y}$ лінійно незалежні.

Як знайти власні значення лінійного перетворення?

Теорема. В комплексному лінійному просторі всі корені характеристичного рівняння і тільки вони є власними значеннями лінійних перетворень.

Зауваження. Власні значення лінійного перетворення дійсного простору будуть тільки дійсними коренями характеристичного рівняння.

Дайте визначення характеристичного рівняння матриці, власних значень матриці, власних векторів матриці.

Кожному лінійному перетворенню n-вимірного простору відповідає матриця порядку n в даному базисі; навпаки, кожній матриці порядку n відповідає лінійне перетворення n-вимірного простору.

Характеристичним рівнянням матриці називається характеристичне рівняння відповідного їй лінійного перетворення.
Власним значенням матриці називається власне значення відповідного їй лінійного перетворення.
Власним вектором матриці називається власний вектор відповідного їй лінійного перетворення.

Приклади задач

Приклад 1. Знайти власні значення і власні вектори лінійного перетворення, заданого в деякому базисі матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо характеристичне рівняння даної матриці А:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & 3 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$(5 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda^2 (\lambda - 4) - 4 (\lambda - 4) = 0.$$

$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4) = 0$. Корені цього рівняння $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ є власними значеннями лінійного перетворення.
Для знаходження власних векторів використовуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - (1+\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Ця система має множину ненульових розв'язків , так як ранг її менше 3.
Вважаючи $\lambda = \lambda_1 = 4$, отримаємо систему рівнянь для знаходження першого власного вектора $\bar{r}_1(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

Ясно, що визначник основної матриці цієї системи дорівнює нулю. Тим не менш, визначник $\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, тому перше рівняння системи можна відкинути:

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язуємо отриману систему:

$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} t : -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} t : \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} t =$
$= 18\,t : -4\,t : 2\,t = 9\,t : -2\,t : t.$

Власний вектор $\bar{r}_1 = t\,(9, -2, 1),\ t \neq 0.$

Припускаючи $\lambda = \lambda_2 = 2$, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} t : -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} t : \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} t = 12\,t : -6t : 0 =$
$= 2\,t : -t : 0.$ $\quad \bar{r}_2 = t\,(2, -1, 0),\ t \neq 0.$

Припускаючи $\lambda = \lambda_3 = -2$, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} t : -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} t : \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} t = 0 : 2\,t : -4t = 0 : t : -2t$

$\overline{\tau}_3 = t\,(0, 1, -2),\ \ t \neq 0.$

Власні вектори лінійно незалежні, тобто, вони можуть бути прийняті за базис.

Приклад 2. Знайти власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо характеристичне рівняння матриці A:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -\lambda & 3 \\ -1 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо визначник за першим рядком:

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -\lambda \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$-\lambda\,(\lambda^2 + 9) - 2\,(2\lambda + 3) + 6 - \lambda = 0$

$-\lambda^3 - 14\,\lambda = 0$

$\lambda\,(\lambda^2 + 14) = 0$

$\lambda_1 = 0\lambda^2 = -14 \qquad \lambda_{2,3} = \pm\,\sqrt{-14}\,.$

Корені даного рівняння $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm\,\sqrt{-14}$ є власними значеннями лінійних перетворень. Для знаходження власних векторів використовуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -\lambda\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - \lambda\, x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

Ця система має множину ненульових розв'язків , так як її ранг менше 3. Припускаючи $\lambda = \lambda_1 = 0$, отримаємо систему рівнянь для знаходження першого власного вектора $\overline{\tau}_1\ (x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{cases} \quad 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 \quad + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \quad 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 \quad + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} t : -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} t : \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} t = -6\,t : -2\,t : 4\,t =$$

$= 3\,t : -t : 2\,t.$ $\qquad\qquad$ $\overline{\tau}_1 = t\,(3, -1, 2),\ \ t \neq 0.$

Припускаючи $\lambda = \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{-14}$, отримаємо системy рівнянь :

$$\begin{cases} \mp\sqrt{-14}\,x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 \mp \sqrt{-14}\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 \pm \sqrt{-14}\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mp\sqrt{-14}\,x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 \pm \sqrt{-14}\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \mp\sqrt{-14} & 2 & 1 \\ 1 & 3 & \pm\sqrt{-14} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & \pm\sqrt{-14} \end{vmatrix} t : -\begin{vmatrix} \mp\sqrt{-14} & 1 \\ 1 & \pm\sqrt{-14} \end{vmatrix} t : \begin{vmatrix} \mp\sqrt{-14} & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} t =$$

$= (-3 \cdot \pm 2\sqrt{-14}\,)\ t : -\,(14 - 1)\ t : (-2 \mp 3\sqrt{-14}\,)\ t =$

$= (3 \mp 2\sqrt{-14}\,)\ t : 13\ t : (2 \pm 3\sqrt{-14}\,)\ t.$

$\overline{\tau}_{2,3} = t\,(3 \mp 2\sqrt{-14},\ \ 13,\ \ 2 \pm 3\sqrt{-14}\,),\ \ t \neq 0.$

Приклад 3. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо характеристичне рівняння заданої матриці A :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо визначник по третьому рядку:

$$(1 - \lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(1 - \lambda)\,((2 - \lambda)^2 - 1) = 0$
$(1 - \lambda)\,(2 - \lambda - 1)\,(2 - \lambda + 1) = 0$
$(1 - \lambda)^2\,(3 - \lambda) = 0$
$\lambda_{1,2} = 1 \qquad \lambda_3 = 3$

Корені даного рівняння $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 3$ є власними значеннями матриці А.
Для знаходження її власних векторів використовуємо систему:

$$\begin{cases} (2-\lambda)\,x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + (2-\lambda)\,x_2 - x_3 = 0 \\ (1-\lambda)\,x_3 = 0 \end{cases}$$

Ця система має множину ненульових розв'язків , так як ранг її менше 3.
Припускаючи $\lambda = \lambda_{1,2} = 1$, отримаємо систему рівнянь :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} t : -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} t : \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} t = -t : -t : 0.$$

Власний вектор $\overline{\tau}_{1,2} = t\ (1, 1, 0)$, $t \neq 0$.

Припускаючи $\lambda = \lambda_3 = 3$, отримаємо систему рівнянь :

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} t : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} t : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} t = 2\,t : -2\,t : 0.$$

Власний вектор $\overline{\tau}_3 = t\ (1, -1, 0)$, $t \neq 0$.

Тема 4. *КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ*

Що називається квадратичною формою двох змінних?

Квадратичною формою двох змінних x і y називається однорідний многочлен 2-го степеня відносно цих змінних:

$$F(x, y) = a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2.$$

Якщо $a_{12} = a_{21}$, квадратичну форму двох змінних можна записати у вигляді:

$F(x, y) = a_{11} x^2 + a_{12} xy + a_{21} xy + a_{22} y^2$.

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ називаються коефіцієнтами квадратичної форми.

Дати означення матриці квадратичної форми двох змінних.

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

називається матрицею квадратичної форми ($a_{21} = a_{12}$).

Яка квадратична форма називається канонічною ?

Говорять, що квадратична форма має канонічний вигляд, якщо вона містить тільки члени з квадратичними змінними тобто, якщо $a_{12} = a_{21} = 0$.

Як звести квадратичну форму до канонічного вигляду ?

Будь-яка квадратична форма деяким не виродженим лінійним перетворенням може бути зведена до канонічного вигляду.

Якщо існує лінійне перетворення C, яке приводить дійсну квадратичну форму F (x, y) до канонічного вигляду

$$\varphi(x_1, y_1) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2,$$

то λ_1, λ_2 – характеристичні числа матриці A квадратичної форми F (x, y).

Методи зведення квадратичної форми до канонічного вигляду застосовуються для розв’язування задач на зведення до канонічного виду рівнянь криви х 2-го порядку. Квадратична форма є частиною загального рівняння кривої 2-го порядку:

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{12} xy + a_{13} x + a_{23} y + a_{33} = 0.$$

В аналітичній геометрії цю задачу необхідно було б розв’язувати з використанням формул повороту системи координат на кут α і підбором кута таким чином, що б $a_{12} = 0$. Ця частина роботи трудомістка і значно спрощується при застосуванні матриць.

При визначенні типу кривої доцільно пам’ятати , що:

1) якщо λ_1 і λ_2 одного знаку, то крива - еліпс;

2) якщо λ_1 і λ_2 протилежних знаків, то крива – гіпербола;
3) якщо $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ або якщо $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, то крива – парабола.

Як звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду ?
Рівняння кривої другого порядку має вигляд:

$$a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{13}\, x + a_{23}\, y + a_{33} = 0.$$

Крок1.Записуємо квадратичну форму:

$$a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{12}\, xy$$

Крок2.Записуємо матрицю квадратичної форми:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Крок3.Знаходимо власні числа і відповідні їм нормовані власні вектори матриці
Крок4.Записуємо матрицю перетворення, стовпчиками якої є координати власних векторів і саме перетворення координат.
Крок5. Переходимо до нових координат. Виділивши повні квадрати і перенісши систему координат дістанемо канонічне рівняння даної кривої.

Приклади задач

Приклад 1. Методом власних векторів звести до канонічного виду рівняння кривої другого порядку $17\, x^2 + 12\, xy + 8\, y^2 = 20$.

Розв'язок. Квадратична форма $17\, x^2 + 12\, xy + 8\, y^2$ повністю визначається матрицею $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. Знайдемо власні значення матриці A. Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$(17 - \lambda)(8 - \lambda) - 36 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 20.$

Квадратична форма $17\, x^2 + 12\, xy + 8\, y^2$ перетворюється до канонічного вигляду $\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2$, тобто $5 (x')^2 + 20 (y')^2$, а дане рівняння кривої до вигляду: $5 (x')^2 + 20 (y')^2 = 20$ або $\dfrac{(x')^2}{4} + \dfrac{(y')^2}{1} = 1.$

Дана крива – еліпс.

Приклад 2. Визначити тип кривої другого порядку
$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$, записати її канонічне рівняння і знайти канонічну систему координат.

Розв'язок . Запишемо матрицю квадратичної форми
$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Знайдемо власні значення матриці A:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3 - \lambda)^2 - 25 = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0,$$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 8$ – власні числа. Так як λ_1 і λ_2 відмінні від нуля і різних знаків, то крива – гіпербола.
Знайдемо власні вектори матриці A.
Нехай $\lambda = \lambda_1 = -2$.

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow \bar{\tau}_1 = \bar{i} - \bar{j}.$$

$$|\bar{\tau}_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \bar{e}_2 = \bar{\tau}_1^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{i} - \bar{j}).$$

Нехай $\lambda = \lambda_2 = 8$.

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \bar{\tau}_2 = \bar{i} + \bar{j}.$$

$$|\bar{\tau}_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \bar{e}_1 = \bar{\tau}_1^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{i} + \bar{j}).$$

Виконуючи перетворення

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

матрицею якого є матриця

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

отримаємо

$$8(x')^2 - 2(y')^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x' - \frac{12}{\sqrt{2}}y' - 13 = 0.$$

Виділимо повні квадрати по кожній новій змінній:

$$8\,(x')^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}\,x' = 8\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4$$

$$-2\,(y')^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}\,y' = -2\left(y' + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 9.$$

Рівняння кривої приймає вигляд:

$$8\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(y' + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8.$$

Зробимо заміну змінних, яка відповідає зсуву по кожній із координатних осей:

$$x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y'' = y' + \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Отримаємо рівняння кривої:

$$8\,(x'')^2 - 2\,(y'')^2 = 8 \qquad \text{або} \qquad \frac{(x'')^2}{1} - \frac{(y'')^2}{4} = 1.$$

Це і є отримане рівняння гіперболи.

Отримане перетворення координат має вигляд:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x' - y'),\ \text{де}\ x' = x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y' = y'' - \frac{3}{\sqrt{2}},\ \text{т.б.}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' + \frac{1}{\sqrt{2}} - y'' + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x'' - y'') + 2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x' + y') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' + \frac{1}{\sqrt{2}} + y'' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + y'') - 1,$$

а канонічна система координат:

$$0'\,(2, -1),\ \ \bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{j},\ \ \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{j}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1.

1. З'ясувати, чи є лінійно незалежною така система елементів лінійного простору $\boldsymbol{M}_{22}(\boldsymbol{R})$ матриць розмірності 2х2 з дійсними елементами :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Завдання 2. З'ясувати, чи є лінійно залежними вектори :

а) $\overline{\boldsymbol{a}} = 2i + j, \overline{\boldsymbol{b}} = 3j - 4\bar{k}$;

б) $\overline{\boldsymbol{a}} = i - 4j + 2k, \overline{\boldsymbol{b}} = 3i - 2j + \bar{k}; \overline{\boldsymbol{c}} = 4i - 6j + 3k$;

в) $\overline{\boldsymbol{a}}(2;4;6;-1)$, $\overline{\boldsymbol{b}}(1;-1;3;2)$, $\overline{\boldsymbol{c}}(1;0;2;-1)$ **,** $\overline{\boldsymbol{d}}(2;1;4;0)$.

Завдання 3. Показати, що у лінійному просторі квадратних матриць другого порядку елементи

$$\left\{\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$$

утворюють базис і знайти координати елемента $x = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ у цьому базисі.

Завдання 4. Дано два лінійних оператора . Засобами матричного числення знайти перетворення які виражають $\overline{x}'' = (x_1'', x_2'', x_3'')$ через $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, якщо :

а) $\begin{cases} x_1' = 5x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' = -x_1 + 2x_3 \\ x_3' = 2x_1 - 4x_2 + x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 4x_1' - x_3' \\ x_2'' = 2x_1'' - x_2' + 3x_3' \\ x_3'' = x_2' \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2 \\ x_3' = -x_1 + 3x_2 - x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -5x_1' + 3x_3' \\ x_2'' = x_1' - 4x_2' + 2x_3' \\ x_3'' = 2x_1' - x_2' + x_3'. \end{cases}$

Завдання 5. Дані вектори $\bar{a} = -2e_1 + e_3$, $\bar{b} = e_1 + 3e_2 - e_3$, $\bar{c} = 4e_2 + e_3$, де $(\boldsymbol{e_1 e_2 e_3})$ базис .

Довести, що вектори a,b,c утворюють базис. Знайти координати вектора : $\overline{\boldsymbol{x}} = -5e_1 - 5e_2 + 5e_3$ в базисі $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.

Завдання 6. Знайти всі значення λ , при яких вектор **d** є лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$, якщо :

а) $\boldsymbol{a_1} = (2,-1,3), \boldsymbol{a_2} = (3,1,4)$, $\boldsymbol{a_3} = (1,-1,2)$, $\boldsymbol{d} = (8, \lambda, 12)$;

б) $\boldsymbol{a_1} = (3,1,-2), \boldsymbol{a_2} = (2,1,0)$, $\boldsymbol{a_3} = (1,-3,5)$, $\boldsymbol{d} = (\lambda, 10, 11)$.

Завдання 7. Дані два базиси $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\}$ і $\{\boldsymbol{e_1'}, \boldsymbol{e_2'}\}$. Знайти координати вектора **x** в базисі $\{\boldsymbol{e_1'}, \boldsymbol{e_2'}\}$, якщо :

а) $\boldsymbol{e_1'} = \boldsymbol{e_1} + 3\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2'} = \boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e_1} - 5\boldsymbol{e_2}$;

б) $\boldsymbol{e_1'} = \boldsymbol{2e_1} + 3\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2'} = \boldsymbol{e_1} + 4\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{e_1} + 7\boldsymbol{e_2}$;

Завдання 8. Чи буде лінійним оператор $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, якщо відомо , що для будь-якого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^2}$ $f(x) = 2i - 4j$?

Завдання 9. Знайти в ортонормованому базисі **i,j,k** матрицю лінійного оператора **f:**

$\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, який переводить будь-який вектор **x** у вектор $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$**.**

$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$, якщо $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

Завдання 10. Дано матрицю **A**= $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ лінійного оператора f в базисі $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$. Знайти $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, якщо $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2} + 3\boldsymbol{e_3}$.

Завдання 11. Знайти власні вектори лінійного оператора f, якщо:

а) $\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 + e_2; \\ f(e_2) = 7e_1 - 4e_2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 3e_3; \\ f(e_2) = e_2 + e_3; \\ f(e_3) = 3e_1 + e_2 + e_3; \end{cases}$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Завдання 1.

З`ясувати чи будуть лінійно залежними вектори які задані в деякому базисі:

1. а) $\overline{m}$(2;1;-1), $\overline{n}$(-3;5;0), $\overline{p}$(1;-5;4)

б) $\overline{a}$(1;-1;3;2), $\overline{b}$(2;-4;3;1), $\overline{c}$(-5;2;4;1), $\overline{d}$(3;2;-7;-2)

2. а) $\overline{m}$(4;3;-1), $\overline{n}$(2;-3;5), $\overline{p}$(0;1;3)

б) $\overline{a}$(1;-1;4;3), $\overline{b}$(-2;4;-1;-2), $\overline{c}$(1;0;2;3), $\overline{d}$(3;-4;3;5)

3. а) $\overline{m}$(1;-3;1), $\overline{n}$(-2;1;0), $\overline{p}$(2;-2;1)

б) $\overline{a}$(1;0;2;-1), $\overline{b}$(-2;2;1;0), $\overline{c}$(-1;1;3;2), $\overline{d}$(-3;3;2;0)

4. а) $\overline{m}$(3;2;-1), $\overline{n}$(-1;1;2), $\overline{p}$(5;-2;2)

б) $\overline{a}$(1;2;-2;3), $\overline{b}$(0;1;4;-2), $\overline{c}$(-2;3;1;0), $\overline{d}$(3;-1;-3;3)

5. а) $\overline{m}$(1;2;-3), $\overline{n}$(-3;2;0), $\overline{p}$(1;-2;5)

б) $\overline{a}$(2;-3;4;1), $\overline{b}$(1;0;3;-1), $\overline{c}$(3;1;0;-1), $\overline{d}$(4;2;1;2)

6. а) $\overline{m}$(2;3;-1), $\overline{n}$(-1;2;5), $\overline{p}$(6;2;3)

б) $\overline{a}$(1;3;0;-1), $\overline{b}$(2;1;3;-2), $\overline{c}$(2;-2;1;0), $\overline{d}$(3;2;4;1)

7. а) $\overline{m}$(1;-4;3), $\overline{n}$(5;-4;3), $\overline{p}$(2;1;4)

б) $\overline{a}$(2;-4;1;2), $\overline{b}$(0;1;2;4), $\overline{c}$(1;4;3;-2), $\overline{d}$(2;1;-1;0)

8. а) $\overline{m}$(2;3;1), $\overline{n}$(-1;0;2), $\overline{p}$(2;4;3)

б) $\overline{a}$(2;1;0;-2), $\overline{b}$(3;2;1;1), $\overline{c}$(4;3;2;5), $\overline{d}$(0;-1;4;2)

9. а) $\overline{m}$(-1;2;5), $\overline{n}$(4;3;6), $\overline{p}$(2;1;5)

б) $\overline{a}$(1;4;-1;0), $\overline{b}$(2;-1;4;2), $\overline{c}$(0;-2;1;3), $\overline{d}$(1;-5;5;2)

10. а) $\bar{m}(1;3;-2)$, $\bar{n}(2;-4;6)$, $\bar{p}(7;3;-1)$

б) $\bar{a}(1;4;3;-2)$, $\bar{b}(0;-1;2;3)$, $\bar{c}(4;1;-1;2)$, $\bar{d}(-1;-7;2;0)$

11. а) $\bar{m}(-2;3;4)$, $\bar{n}(1;7;3)$, $\bar{p}(3;2;5)$

б) $\bar{a}(3;-1;2;1)$, $\bar{b}(0;-1;3;2)$, $\bar{c}(1;2;-4;5)$, $\bar{d}(1;3;-7;3)$

12. а) $\bar{m}(4;1;-2)$, $\bar{n}(2;1;3)$, $\bar{p}(2;7;1)$

б) $\bar{a}(2;-1;0;3)$, $\bar{b}(3;0;4;1)$, $\bar{c}(3;1;-1;4)$, $\bar{d}(6;1;3;5)$

13. а) $\bar{m}(4;3;-1)$, $\bar{n}(1;2;1)$, $\bar{p}(3;5;0)$

б) $\bar{a}(2;4;0;-1)$, $\bar{b}(-1;1;2;3)$, $\bar{c}(3;4;2;5)$, $\bar{d}(0;-1;2;3)$

14. а) $\bar{m}(2;-1;3)$, $\bar{n}(6;4;2)$, $\bar{p}(1;0;-2)$

б) $\bar{a}(2;4;1;0)$, $\bar{b}(1;0;3;2)$, $\bar{c}(3;2;1;0)$, $\bar{d}(4;2;1;6)$

15. а) $\bar{m}(3;5;6)$, $\bar{n}(4;1;-1)$, $\bar{p}(1;-4;-7)$

б) $\bar{a}(1;0;2;3)$, $\bar{b}(2;1;3;5)$, $\bar{c}(3;2;-1;0)$, $\bar{d}(1;1;-4;-5)$

16. а) $\bar{m}(4;2;3)$, $\bar{n}(3;2;1)$, $\bar{p}(6;1;3)$

б) $\bar{a}(7;0;-1;2)$, $\bar{b}(4;2;1;0)$, $\bar{c}(1;3;-1;5)$, $\bar{d}(-3;1;-2;5)$

17. а) $\bar{m}(-5;1;0)$, $\bar{n}(2;-1;1)$, $\bar{p}(-1;1;2)$

б) $\bar{a}(3;2;0;-1)$, $\bar{b}(1;2;-3;4)$, $\bar{c}(2;0;-3;-5)$, $\bar{d}(1;2;-1;4)$

18. а) $\bar{m}(3;2;4)$, $\bar{n}(4;-1;2)$, $\bar{p}(-1;-2;5)$

б) $\bar{a}(0;-1;4;3)$, $\bar{b}(-2;1;2;2)$, $\bar{c}(-4;3;0;1)$, $\bar{d}(2;5;1;0)$

19. а) $\bar{m}(3;-2;1)$, $\bar{n}(1;-3;4)$, $\bar{p}(4;5;3)$

б) $\bar{a}(-1;4;0;1)$, $\bar{b}(2;-3;1;-1)$, $\bar{c}(3;-7;1;-2)$, $\bar{d}(0;3;1;4)$

20. а) $\bar{m}(4;-4;1)$, $\bar{n}(2;-1;1)$, $\bar{p}(-3;2;1)$

б) $\bar{a}(4;1;-1;2)$, $\bar{b}(2;-2;1;0)$, $\bar{c}(2;4;-5;1)$, $\bar{d}(0;-1;1;2)$

21. а) $\overline{\boldsymbol{m}}(3;2;-1)$, $\overline{\boldsymbol{n}}(0;2;4)$, $\overline{\boldsymbol{p}}(3;0;-5)$

б) $\overline{\boldsymbol{a}}(2;0;-1;4)$, $\overline{\boldsymbol{b}}(3;2;1;-4)$, $\overline{\boldsymbol{c}}(2;4;0;5)$, $\overline{\boldsymbol{d}}(0;4;1;1)$

22. а) $\overline{\boldsymbol{m}}(5;1;4)$, $\overline{\boldsymbol{n}}(2;-1;3)$, $\overline{\boldsymbol{p}}(0;-4;3)$

б) $\overline{\boldsymbol{a}}(4;3;1;0)$, $\overline{\boldsymbol{b}}(1;4;2;5)$, $\overline{\boldsymbol{c}}(0;-1;3;2)$, $\overline{\boldsymbol{d}}(3;-1;-1;-5)$

23. а) $\overline{\boldsymbol{m}}(3;-1;2)$, $\overline{\boldsymbol{n}}(1;4;-5)$, $\overline{\boldsymbol{p}}(0;2;-3)$

б) $\overline{\boldsymbol{a}}(-1;0;2;3)$, $\overline{\boldsymbol{b}}(2;5;4;3)$, $\overline{\boldsymbol{c}}(0;1;4;-3)$, $\overline{\boldsymbol{d}}(2;-2;1;0)$

24. а) $\overline{\boldsymbol{m}}(-4;3;1)$, $\overline{\boldsymbol{n}}(2;0;5)$, $\overline{\boldsymbol{p}}(4;2;0)$

б) $\overline{\boldsymbol{a}}(2;1;-1;0)$, $\overline{\boldsymbol{b}}(4;3;1;3)$, $\overline{\boldsymbol{c}}(0;1;4;2)$, $\overline{\boldsymbol{d}}(2;2;2;3)$

25. а) $\overline{\boldsymbol{m}}(3;-2;1)$, $\overline{\boldsymbol{n}}(5;2;3)$, $\overline{\boldsymbol{p}}(1;-1;0)$

б) $\overline{\boldsymbol{a}}(-1;1;0;2)$, $\overline{\boldsymbol{b}}(4;3;1;5)$, $\overline{\boldsymbol{c}}(3;0;1;4)$, $\overline{\boldsymbol{d}}(5;2;1;3)$

26. а) $\overline{\boldsymbol{m}}(3;2;-1)$, $\overline{\boldsymbol{n}}(4;2;1)$, $\overline{\boldsymbol{p}}(1;0;2)$

б) $\overline{\boldsymbol{a}}(1;0;-4;3)$, $\overline{\boldsymbol{b}}(-1;4;3;2)$, $\overline{\boldsymbol{c}}(2;-2;1;5)$, $\overline{\boldsymbol{d}}(0;6;7;9)$

27. а) $\overline{\boldsymbol{m}}(2;1;3)$, $\overline{\boldsymbol{n}}(3;2;5)$, $\overline{\boldsymbol{p}}(-2;0;1)$

б) $\overline{\boldsymbol{a}}(5;4;3;1)$, $\overline{\boldsymbol{b}}(2;4;3;0)$, $\overline{\boldsymbol{c}}(-2;3;1;5)$, $\overline{\boldsymbol{d}}(1;0;3;4)$

28. а) $\overline{\boldsymbol{m}}(4;3;1)$, $\overline{\boldsymbol{n}}(2;-3;0)$, $\overline{\boldsymbol{p}}(2;-2;4)$

б) $\overline{\boldsymbol{a}}(2;2;-1;0)$, $\overline{\boldsymbol{b}}(-2;3;1;4)$, $\overline{\boldsymbol{c}}(0;3;2;1)$, $\overline{\boldsymbol{d}}(1;2;-1;4)$

29. а) $\overline{\boldsymbol{m}}(1;-3;2)$, $\overline{\boldsymbol{n}}(0;2;4)$, $\overline{\boldsymbol{p}}(5;7;6)$

б) $\overline{\boldsymbol{a}}(-2;0;1;3)$, $\overline{\boldsymbol{b}}(4;3;2;1)$, $\overline{\boldsymbol{c}}(0;1;2;8)$, $\overline{\boldsymbol{d}}(5;1;2;0)$

30. а) $\overline{\boldsymbol{m}}(7;3;1)$, $\overline{\boldsymbol{n}}(4;0;2)$, $\overline{\boldsymbol{p}}(2;1;-1)$

б) $\overline{\boldsymbol{a}}(-5;0;1;2)$, $\overline{\boldsymbol{b}}(2;4;1;0)$, $\overline{\boldsymbol{c}}(2;3;4;1)$, $\overline{\boldsymbol{d}}(1;4;3;2)$

Завдання 2.

Знайти координати вектора **x** в базисі $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2; \boldsymbol{e}'_3\}$, якщо він заданий у базисі $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ такими розкладами:

1.
$e_1' = e_1 + e_2 - 3e_3$
$e_2' = 3e_1 - e_2$
$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$
$x = (1, 4, -8)$

2.
$e_1' = e_1 + e_2 - 3e_3$
$e_2' = 3e_1 - e_2$
$e_3' = e_1 + e_2 + e_3$
$x = (1, -4, 8)$

3.
$e_1' = e_1 + e_2 + 3e_3$
$e_2' = -2e_1 - e_2$
$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$
$x = (12, 3, -1)$

4.
$e_1' = e_1 + e_2 - 2e_3$
$e_2' = e_1 - 2e_2$
$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$
$x = (2, 6, -3)$

5.
$e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3$
$e_2' = -e_1 - e_2$
$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$
$x = (2, 4, 3)$

6.
$e_1' = e_1 + e_2 - e_3$
$e_2' = 2e_1 - e_2$
$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$
$x = (-3, 2, 4)$

7.
$e_1' = e_1 + e_2 + 8e_3$
$e_2' = 8e_1 - e_2$
$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$
$x = (-1, 7, 14)$

8.
$e_1' = e_1 + e_2 + 7e_3$
$e_2' = 7e_1 - e_2$
$e_3' = -e_1 + e_2 + e_2$
$x = (-12, 6, 1)$

9.
$e_1' = e_1 + e_2 + 7e_3$
$e_2' = 6e_1 - e_2$
$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$
$x = (1, 6, 12)$

10.
$e_1' = e_1 + e_2 + 6e_3$
$e_2' = 7e_1 - e_2$
$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$
$x = (10, 5, 1)$

11. $e_1' = e_1 + e_2 + 5e_3$

$e_2' = 5e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (1,4,8)$

12. $e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3$

$e_2' = 4e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (6,3,1)$

13. $e_1' = e_1 + e_2 + 3e_3$

$e_2' = 3e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (2,4,1)$

14. $e_1' = e_1 + e_2 + 4e_3$

$e_2' = 4e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (3,1,6)$

15. $e_1' = e_1 + e_2 + 6e_3$

$e_2' = 6e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (2,5,10)$

16. $e_1' = e_1 + e_2 + 4e_3$

$e_2' = 5e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (8,4,1)$

17. $e_1' = e_1 + e_2 + 3e_3$

$e_2' = e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (1,2,4)$

18. $e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3$

$e_2' = 2e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (6,-1,3)$

19. $e_1' = e_1 + e_2 + 10e_3$

$e_2' = 10e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (1,9,18)$

20. $e_1' = e_1 + e_2 + 9e_3$

$e_2' = -9e_1 + e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (10,10,7)$

21. $e_1' = e_1 + e_2 - 9e_3$

$e_2' = 9e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (3, -10, 10)$

22. $e_1' = e_1 + e_2 + 8e_3$

$e_2' = -8e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (9, 9, 2)$

23. $e_1' = e_1 + e_2 - 8e_3$

$e_2' = 8e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (1, -9, 9)$

24. $e_1' = e_1 + e_2 - 7e_3$

$e_2' = 7e_1 - e_2$

$e_3' = -e_2 + e_2 + e_3$

$x = (3, -8, 8)$

25. $e_1' = e_1 + e_2 + 6e_3$

$e_2' = -6e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (7, 7, 2)$

26. $e_1' = e_1 + e_2 - 6e_3$

$e_2' = 6e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (1, 7, -7)$

27. $e_1' = e_1 + e_2 + 5e_3$

$e_2' = -5e_1 - 5e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (6, 6, 2)$

28. $e_1' = e_1 + e_2 - 5e_3$

$e_2' = 5e_1 - e_1$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (1, -6, 6)$

29. $e_1' = e_1 + e_2 + 4e_3$

$e_2' = -4e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (5, -5, -4)$

30. $e_1' = e_1 + e_2 - 4e_3$

$e_2' = 4e_1 - e_2$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$

$x = (7, -5, 10)$

Завдання 3.

З'ясувати, які із заданих відображень $R^3 \to R^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі.

1. а) $f(x) = (5x_1 - 2x_2 + x_3;\ 2x_2 - 3x_3;\ 4x_2 - x_3);$

б) $g(x) = (x_1^2 - 4;\ x_1 + 2x_2;\ 3x_1 - 2x_2 + x_3);$

2. а) $f(x) = (x_1 + 4x_2;\ x_2 - 3x_3;\ 2x_2 - 4);$

б) $g(x) = (3x_1 - 2x_3 + x_2;\ x_2 + 5x_3;\ 3x_3 - x_1);$

3. а) $f(x) = (x_3^2 - 5x_2 + 2x_1;\ x_3 + 2x_1;\ x_1 - 4x_2);$

б) $g(x) = (2x_1 + x_3;\ 4x_2 + x_1;\ x_2 - 3x_1);$

4. а) $f(x) = (x_2 + 3x_3 + 2x_1;\ 4x_2 - x_3;\ x_2 - 3x_1);$

б) $g(x) = (2x_1 + x_2 - 4x_3;\ x_3 - 2x_1^4;\ 3x_2 + 4x_1 - 2x_3);$

5. а) $f(x) = (4x_1 + 2x_2 + 4;\ x_3 - 2x_1;\ 3x_1 - x_2);$

б) $g(x) = (3x_1 - 5x_2 + 2x_3;\ 4x_2 + 6x_3;\ x_2 - 5x_3 + x_1);$

6. а) $f(x) = (x_2 - 4x_3 - 2x_1;\ x_2 + x_1 - 4x_3;\ 2x_1 - x_2);$

б) $g(x) = (6x_1 + x_2 + 3x_3;\ 2x_1 - 4x_3^2;\ x_2 + 3x_1);$

7. а) $f(x) = (x_1^4 - 2x_3 + x_2;\ x_1 - 2x_3;\ 4x_1 - x_2);$

б) $g(x) = (x_2 + 5x_1;\ x_3 - 4x_1 + 3x_2;\ 2x_3 + 4x_1);$

8. а) $f(x) = (3x_2 + 6;\ x_1 - 4x_2 - 3x_3;\ 4x_1 - x_3);$

б) $g(x) = (2x_1 - 3x_2 + x_3;\ 3x_2 + x_1;\ 4x_2 - x_1);$

9. а) $f(x) = (x_1 - 2x_3^2 - x_2;\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3;\ x_1 - 3x_3);$

б) $g(x) = (3x_2 + 4x_3;\ 6x_1 + 3x_2 - x_3;\ 4x_2 - 2x_1 + x_3);$

10. а) $f(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3;\ \ x_2 - 3x_3^2;\ \ 3x_2 + x_1);$

б) $g(x) = (x_2 - x_3;\ \ 4x_1 - 7x_3;\ \ 5x_2 - 2x_1);$

11. а) $f(x) = (3x_1 - 4x_3 + x_2;\ \ x_2 - 2x_1^4 - 2x_3;\ \ 3x_3 - x_1);$

б) $g(x) = (x_2 + 3x_1;\ \ 2x_1 - x_3 + 2x_2;\ \ x_2 + 6x_1);$

12. а) $f(x) = (6x_3 + 2x_1 + x_2;\ \ x_1^3 + 10\,;\ \ x_2 - 3x_1);$

б) $g(x) = (2x_1 + x_3 - 2x_2;\ \ x_3 - 2x_1;\ \ 4x_3 - x_2 + x_1);$

13. а) $f(x) = (4x_1 - x_3;\ \ x_2 + x_3 - 3x_1;\ \ x_2 + 3x_1);$

б) $g(x) = (2x_2 + x_1 + 4x_3;\ \ 3x_1 - x_2^4 + 4;\ \ 2x_2 + x_3);$

14. а) $f(x) = (4x_1 - x_2 + 2x_3;\ \ x_3 + 4x_1 - x_2;\ \ 2x_1 - x_3);$

б) $g(x) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3;\ \ x_1^3 + 8;\ \ x_2 - 4x_1);$

15. а) $f(x) = (6x_1^4 + 3x_3 + 8;\ \ x_3 - 2x_1 + 4x_2;\ \ 3x_2 + 2x_1);$

б) $g(x) = (x_2 + 2x_1 + 3x_3;\ \ 3x_1 - x_3;\ \ 2x_1 - 4x_2);$

16. а) $f(x) = (4 + x_2^3 + 3x_1;\ \ 2x_1 - x_3 + 4x_2;\ \ x_2 + 5x_3);$

б) $g(x) = (2x_1 - 4x_2 - x_3;\ \ x_3 + 2x_1 - 4x_2;\ \ 3x_2 + x_1);$

17. а) $f(x) = (x_2 - x_1 + 4x_3;\ \ x_1^3 + 14;\ \ 2x_1 - 3x_2);$

б) $g(x) = (x_3 + 2x_3 - x_1;\ \ 7x_2 - 4x_3 + x_1;\ \ 4x_1 + x_3 + 2x_2);$

18. а) $f(x) = (x_2 + 4x_1 + 6x_3;\ \ 3x_1 - 2x_3;\ \ 3x_3 - x_2);$

б) $g(x) = (2x_1 + x_3 + 2x_2;\ \ 3x_2 - x_3;\ \ 4x_3^3 + 12);$

19. а) $f(x) = (x_1 - 3x_2 + 4x_3;\ \ 7x_2 - 4x_1^2;\ \ 6x_3 - x_1);$

б) $g(x) = (6x_1 + 3x_3 + x_2;\ \ x_3 + 2x_1 - 3x_2;\ \ 4x_2 - 5x_1);$

20. а) $f(x) = (3x_2 + 7 + 4x_3;\ \ 4x_1 - 7x_3^4;\ \ \ 2x_1 - x_3)$;

б) $g(x) = \ (7x_2 - 4x_1 - 3x_3;\ 7x_1 - 2x_3;\ \ \ 4x_2 - x_3)$;

21. а) $f(x) = (5x_1 + x_3;\ \ \ 6x_2^4 + 12;\ \ \ x_3 - 2x_1)$;

б) $g(x) = \ (4x_1 - 2x_3 + x_2;\ \ \ x_3 - 2x_2 - 3x_1;\ 2x_2 + 3x_1 - x_3)$;

22. а) $f(x) = (x_2 + 3x_1 - x_3;\ 2x_2 + 3x_1;\ 4x_1 - x_3)$;

б) $g(x) = \ (x_2 - 2x_1 + x_3;\ 5 - x_2 + 2x_1;\ 2x_3 + x_1)$;

23. а) $f(x) = (4x_2 + 3x_1;\ 3x_3 - x_2 - 4x_1;\ 2x_2 - x_3)$;

б) $g(x) = \ (x_1 + 2x_3^4 - x_2;\ 2x_2 - 3x_1;\ 3x_3 - x_1)$;

24. а) $f(x) = (x_2 - 3x_3 + x_1;\ 3x_2 - 4x_1^3 + 7;\ x_1 + 2x_3)$;

б) $g(x) = \ (2x_3 - x_1 - 4x_2;\ 3x_1 + x_2;\ 3x_1 + 2x_2)$;

25. а) $f(x) = (x_3 + 2x_1 + 3x_2;\ \ \ 4x_3 - 2x_1;\ \ \ x_2 - 3x_3)$;

б) $g(x) = \ (x_1 + 2x_3;\ \ x_2 - 6x_1^4;\ \ \ x_2 - 3x_1 + 3x_3)$;

26. а) $f(x) = (\ 6x_2 - x_1^2;\ x_3 + 8x_1 + 2x_2;\ 4x_1 - 3x_2)$;

б) $g(x) = (4x_1 + x_3 + 2x_2;\ \ \ x_3 - x_2;\ 9x_1 + x_3 - 2x_2)$;

27. а) $f(x) = (x_2 + 3x_3 - x_1;\ x_1 - 2x_2^3 - x_3;\ x_2 - 3x_1 + 4)$;

б) $g(x) = \ (2x_2 + 3x_1 + x_3;\ x_3 - 4x_1;\ 3x_1 - 2x_2)$;

28. а) $f(x) = (x_1 + 2x_2 + 4x_3;\ x_3 - 2x_2 + x_1; 3x_1 + x_2)$;

б) $g(x) = \ (3x_1 - 2x_3 + x_2;\ 3x_1 - 2x_2;\ 7x_1 - 3x_2 - x_3^2)$;

29. а) $f(x) = \left(2x_1 + 3x_2 - x_3;\ x_1^5 + 4;\ x_1 + 3x_3\right)$;

б) $g(x) = \ (2x_1 - 3x_2 + x_3;\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3;\ 2x_1 - x_3)$;

30. а) $f(x) = (8x_1 + 3x_2 + 3x_3;\ \ 2x_2 - x_1^2;\ \ \ 3x_1 - 2x_2 + 14);$

б) $g(x) = \ (x_2 - 3x_1 + x_3;\ \ 2x_1 - 3x_3;\ \ \ 4x_4 + x_1);$

Завдання 4.

Скласти матрицю лінійного перетворення, яке задається двома послідовними операціями ***а)*** і ***б)***. Знайти образ вектора $\bar{\boldsymbol{x}}$ при даному перетворенні.

1. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3}}$

б) відображення відносно осі ***oy***

$\bar{x} = 2j - 3i$;

2. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{4}}$

б) відображення відносно прямої ***y* = *x***

$\bar{x} = 3i + 4j$;

3. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha = (-\frac{\pi}{3})}$

б) відображення відносно осі ***ox***

$\bar{x} = i - 4j$;

4. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{6}}$

б) відображення відносно осі ***oy***

$\bar{x} = -5i + 4j$;

5. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha = (-\frac{\pi}{4})}$

б) відображення відносно прямої ***y* = −*x***

$\bar{x} = i - 4j$;

6. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = \frac{2\pi}{3}$

б) відображення відносно осі ***oy***

$\bar{x} = 5i - 4j$;

7. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\pi}{6}$

б) відображення відносно осі ***ox***

$\bar{x} = -4i + 3j$;

8. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = -\frac{2\pi}{3}$

б) відображення відносно осі ***oy***

$\bar{x} = -6i + 4j$;

9. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\pi}{2}$

б) відображення відносно прямої ***y* = *x***

$\bar{x} = -4i + 6j$;

10. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\pi}{2}$

б) відображення відносно осі ***ox***

$\bar{x} = -8i - 6j$;

11. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\pi}{4}$

б) відображення відносно осі ***oy***

$\bar{x} = -4i - 8j$;

12. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = -\frac{3\pi}{4}$

б) відображення відносно прямої $\boldsymbol{y} = \sqrt{3}\boldsymbol{x}$

$\bar{x} = 2j - 4i$;

13. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = \frac{3\pi}{4}$

б) відображення відносно осі $\boldsymbol{ox}$

$\bar{x} = 6i - 4j$;

14. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = \frac{5\pi}{4}$

б) відображення відносно прямої $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$

$\bar{x} = -4i - 5j$;

15. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = \frac{3\pi}{4}$

б) відображення відносно прямої $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}$

$\bar{x} = -2i - 4j$;

16. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = \frac{2\pi}{3}$

б) відображення відносно осі $\boldsymbol{ox}$

$\bar{x} = -4i + 6j$;

17. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = -\frac{5\pi}{4}$

б) відображення відносно прямої $\boldsymbol{y} = \sqrt{3}\boldsymbol{x}$

$\bar{x} = -4i - 6j$;

18. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha = -\frac{\pi}{4}}$

б) відображення відносно прямої $\boldsymbol{y = -x}$

$\bar{x} = 2i + 6j$;

19. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha = \frac{5\pi}{4}}$

б) відображення відносно прямої $\boldsymbol{y = x}$

$\bar{x} = 4j - 2i$;

20. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3}}$

б) відображення відносно осі ***oy***

$\bar{x} = 4i + 6j$;

21. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha = -\frac{2\pi}{3}}$

б) відображення відносно осі ***oy***

$\bar{x} = 2i - 4j$;

22. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3}}$

б) відображення відносно осі ***oy***

$\bar{x} = 2i + 4j$;

23. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha = \frac{3\pi}{4}}$

б) відображення відносно осі ***ox***

$\bar{x} = 4i + 6j$;

24. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\pi}{2}$

б) відображення відносно осі ***oy***

$\bar{x} = -5i + 4j$;

25. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = \frac{2\pi}{3}$

б) відображення відносно осі ***ox***

$\bar{x} = 2i - 4j$;

26. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = \frac{4\pi}{3}$

б) відображення відносно осі ***ox***

$\bar{x} = -4i - 6j$;

27. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = -\frac{4\pi}{3}$

б) відображення відносно прямої $\boldsymbol{y = x}$

$\bar{x} = 2i - 4j$;

28. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = \frac{4\pi}{3}$

б) відображення відносно прямої $\boldsymbol{y = -x}$

$\bar{x} = 2i + 6j$;

29. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = \frac{2\pi}{3}$

б) відображення відносно прямої $\boldsymbol{y = x}$

$\bar{x} = 2i + 6j$;

30. а) поворот на кут $\boldsymbol{\alpha} = \frac{3\pi}{4}$

б) відображення відносно осі ***oy***

$\bar{x} = 4i + 6j$.

Завдання 5.

Знайти власні вектори і власні значення:

а) матриці **A**;
б) лінійного оператора **f**;

1. а) **A** = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = e_1 + e_2$
$f(e_2) = 4e_1 + e_2$

2. а) **A** = $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 3e_1 + 4e_2$
$f(e_2) = e_1 + 3e_2$

3. а) **A** = $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 2e_1 + e_2$
$f(e_2) = 9e_1 + 2e_2$

4. а) **A** = $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 3e_1 + e_2$
$f(e_2) = e_1 + 3e_2$

5. а) **A** = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 4e_1 + 4e_2$
$f(e_2) = e_1 + 4e_2$

6. а) **A** = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = e_1 + 9e_2$
$f(e_2) = e_1 + e_2$

7. а) **A** = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 2e_1 + 9e_2$
$f(e_2) = e_1 + 2e_2$

8. а) **A** = $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = -3e_1 + 4e_2$
$f(e_2) = e_1 - 3e_2$

9. а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 2e_1 + 3e_2$, $f(e_2) = 5e_1 + 4e_2$

10. а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = e_1 + 4e_2$, $f(e_2) = 2e_1 + 3e_2$

11. а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = -2e_1 - 3e_2$, $f(e_2) = -e_1$

12. а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = -e_1 + 8e_2$, $f(e_2) = e_1 + e_2$

13. а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 4e_1 - e_2$, $f(e_2) = -e_1 + 4e_2$

14. а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 4e_1 + 2e_2$, $f(e_2) = 4e_1 + 6e_2$

15. а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = -e_1 - 2e_2$, $f(e_2) = 3e_1 + 4e_2$

16. а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = -5e_1 + 2e_2$, $f(e_2) = e_1 - 6e_2$

17. а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 2e_1 + 8e_2$, $f(e_2) = e_1 + 4e_2$

18. а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 6e_1 + 3e_2$, $f(e_2) = -8e_1 - 5e_2$

19. а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = e_1 + 4e_2$, $f(e_2) = e_1 + e_2$

20. а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 2e_1 + 3e_2$, $f(e_2) = 5e_1 + 4e_2$

21. a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = -2e_1 + e_2$, $f(e_2) = -3e_1 + 2e_2$

22. a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 2e_1 + e_2$, $f(e_2) = 6e_1 + 3e_2$

23. a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 2e_1 - e_2$, $f(e_2) = 4e_1 - 3e_2$

24. a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 8e_1 - 3e_2$, $f(e_2) = 2e_1 + e_2$

25. a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 3e_1 + 2e_2$, $f(e_2) = 6e_1 + 4e_2$

26. a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 4e_1 + 8e_2$, $f(e_2) = e_1 + 2e_2$

27. a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 5e_1 + 2e_2$, $f(e_2) = 2e_1 + 8e_2$

28. a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = e_1 - 4e_2$, $f(e_2) = -4e_1 + 7e_2$

29. a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = 4e_1 + e_2$

30. a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ б) $f(e_1) = 2e_1 + 5e_2$, $f(e_2) = 5e_1 + 2e_2$

Завдання 6.

Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Визначити її тип, побудувати.

1. $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0;$

2. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0;$

3. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y + 9 = 0;$

4. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0;$

5. $x^2 + 10xy + y^2 + 18x - 6y - 16 = 0;$

6. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0;$

7. $8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0;$

8. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0;$

9. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0;$

10. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0;$

11. $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 6y + 25 = 0;$

12. $x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0;$

13. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0;$

14. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0;$

15. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0;$

16. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0;$

17. $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0;$

18. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0;$

19. $4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0;$

20. $x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0;$

21. $x^2 + y^2 - 2xy - 10x - 6y + 25 = 0;$

22. $2x^2 + 5y^2 - 4xy + 8x - 2y + 9 = 0;$

23. $9x^2 + 16y^2 - 24xy - 8x + 19y + 4 = 0;$

24. $2x^2 + 5y^2 - 4xy + 8x - 2y + 9 = 0;$

25. $x^2 + y^2 - 6xy - 4x - 4y + 12 = 0;$

26. $x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0;$

27. $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0;$

28. $-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0;$

29. $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y - 7 = 0;$

30. $-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 4 = 0;$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Наука, 2000, ч. 1,2.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – Київ, "А.С.К.", 2005. – 648 с.
5. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Физматгиз, 1978.
7. Кагадій Л.П., Павленко А.В., Чуднов К.У. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Ч. 1,2: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ, НМетАУ. – 2004.
8. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
9. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Г.Й. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі. – К.: Либідь, 1994.
10. Маркович Е.С. Курс вищої математики з елементами теорії ймовірностей і математичної статистики: Навч. посібник для вузів. - 2-е вид., перероб. і доп.: Вища. шк., 1972. – 480 с.
11. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1985, т. 1, 2.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Підручник в 2-х томах, т. I. – М.: Інтеграл – Прес, 2002. – 416 с.
14. Рудавський Ю.К., Костробій П.П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – Львів, 1999.
15. Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах. – К.: "Либідь", 2001 р.
16. Шипачьов В.С. Основи вищої математики. – М.: Вища школа, 1989.