МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЧЕРНІГІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи

з дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр» галузі знань 07 «Управління та адміністрування» спеціальності 071 - Облік і оподаткування, 072 - Фінанси, банківська справа та страхування, галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки» спеціальності 051 - Економіка

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри
бухгалтерського обліку, оподаткування та аудиту
Протокол №9
від 17 січня 2022 р.

Чернігів ЧНТУ 2022

Вища математика. Лінійна алгебра. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр» галузі знань 07 «Управління та адміністрування» спеціальності 071 - Облік і оподаткування, 072 - Фінанси, банківська справа та страхування, галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки» спеціальності 051 - Економіка/ Укл.: М.Є. Юрченко – Чернігів: НУЧП, 2022. – 56 с.

Укладач: Юрченко Марина Євгенівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Відповідальний за випуск: Клименко Тетяна Вікторівна, кандидат економічних наук, доцент.

Рецензент: Гоголь Тетяна Анатоліївна, доктор економічних наук, професор кафедри бухгалтерського обліку, оподаткування та аудиту Національного університету «Чернігівська політехніка».

Зміст

ВСТУП

Предметом вивчення дисципліни «Вища математика» є загальні математичні властивості та закономірності. «Вища математика» є вихідною дисципліною природничо-наукової та фундаментальної підготовки бакалавра. Викладання вищої математики ґрунтується на курсі елементарної математики, що вивчається в шкільному курсі. Передує вивченню наступних навчальних дисциплін, які використовують апарат вищої математики.

Методичні вказівки охоплюють матеріал з лінійної алгебри відповідно до програми підготовки бакалаврів галузі знань 07 «Управління та адміністрування» спеціальності 071 Облік і оподаткування, 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», Галузь знань 05 «Соціальні та поведінкові науки», Спеціальність 051 « Економіка»: матриці та визначники; системи лінійних алгебричних рівнянь; векторна алгебра та лінійні простори.

Методичні вказівки містять довідковий матеріал, приклади розв'язаних задач, які достатньо розкривають відповідні теоретичні питання, сприяють розвитку практичних навичок, задачі для самостійної роботи в аудиторії та індивідуальні практичні домашні завдання.

1. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Мета навчальної дисципліни «Вища математика» - оволодіння комплексом знать з основ математичного апарату відповідно до майбутньої професійної діяльності. У підсумку здобувач повинен знати:
основні поняття, факти та теореми лінійної алгебри;
основні поняття, факти та теореми аналітичної геометрії;
сфери застосування матриць та визначників;
сфери застосування векторів, їх добутків, кривих II порядку;
основні поняття теорії границь;
застосування похідних до дослідження функцій;
теореми інтегрального числення функції однієї та багатьох змінних;
застосування рядів до наближених обчислень.
Крім того здобувач буде вміти застосовувати основні поняття, твердження та теореми до розв'язку задач; наводити приклади, які демонструють суттєвість теоретичних понять чи фактів, або спростовують хибні ствердження; застосовувати математичні вміння та навички в спеціальних дисциплінах.

2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

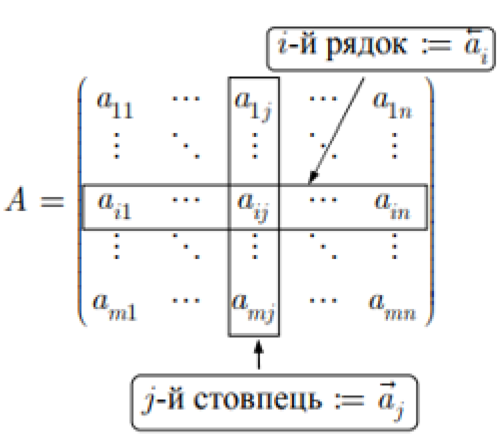
Тема 1. Матриці та операції над ними. Визначники. Поняття матриці. Види матриць. Операції над матрицями: транспонування матриці, додавання двох матриць, множення матриці на число, множення двох матриць. Властивості операцій над матрицями. Визначники квадратних матриць (другого та третього порядків, загальний випадок). Властивості визначників. Мінори та алгебраїчні доповнення. Розклад визначників за елементами рядків та стовпців. Методи обчислення визначників. Ранг матриці.

Основні питання для обговорення

1. *Поняття матриці.*
2. *Види матриць.*
3. *Операції над матрицями: транспонування матриці, додавання двох матриць, множення матриці на число, множення двох матриць.*
4. *Властивості операцій над матрицями.*
5. *Визначники квадратних матриць (другого та третього порядків, загальний випадок).*
6. *Властивості визначників.*
7. *Мінори та алгебраїчні доповнення.*
8. *Розклад визначників за елементами рядків та стовпців.*
9. *Методи обчислення визначників.*
10. *Що називається визначником другого порядку?*
11. *Намалювати правіло Саррюса.*
12. *Сформулювати теорему про розклад визначника.*

Методичні вказівки до теми

Матриця. Матрицею A розміром $m \times n$ називають прямокутну таблицю дійсних чисел (елементів матриці) $a_{ij}, i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n$, розташованих у m рядках та n стовбцях і позначають $A_{m\times n} = \ a_{ij}\ _{m\times n}$



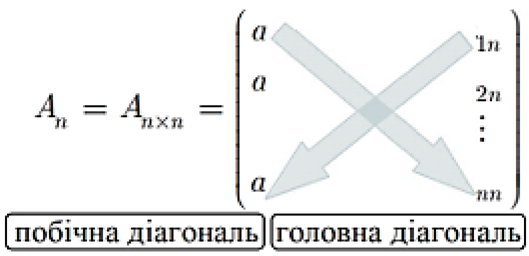
Визначення. Матриця розміру $m \times 1$ називається матрицею-стовпцем або вектором-стовпцем.

$$a = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{matrix}$$

Визначення. Матриця розміру $1 \times n$ називається матрицею-рядком або вектором-рядком.

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Визначення. Квадратною матрицею називається матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців (розміру $n \times n$), число n називається порядком матриці.



Визначення. Нульовою матрицею називається матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю.

$$O_{m\times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ стовпців}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}\right\} m \text{ рядків}$$

Визначення. Діагональною матрицею називається квадратна матриця, всі елементи якої, що знаходяться не на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

$$A = \begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Визначення. Одиничною матрицею називається діагональна матрица, діагональні елементи якої дорівнюють 1.

$$E = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Визначення. Верхньо трикутною матрицею називається матриця, всі елементи якої нижче головної діагоналі дорівнюють нулю.

$$D = \begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Визначення. *Нижньо трикутною* матрицею називається матриця, всі елементи якої вище головної діагоналі дорівнюють нулю.

$$R = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{matrix}$$

Визначення. *Ступінчастою* матрицею називається матриця, яка задовольняє наступним умовам: якщо матриця містить нульовий рядок, то всі рядки, розміщені під ним, також нульові; якщо перший ненульовий елемент деякого рядка розташовано в стовпчику з номером i, і наступний рядок не нульовий, то перший ненульовий елемент наступного рядка має знаходитись в стовпці з номером більшим, ніж i.

Визначення. Якщо в матриці А рядки записати стовпцями із збереженням їх порядку, то одержану матрицю називають *транспонованою* і позначають A^T , а вказана операція перетворення матриці А *називається транспонуванням матриці А.*

$$D = \begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix} \qquad D^T = \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{matrix}$$

Матриці широко використовуються в плануванні виробництва та транспортних перевезень. Вони дозволяють розробляти різні варіанти плана, полегшують дослідження залежності між різними економічними показниками.

Приклад.

Мале підприємство виробляє 4 види продукції – A, B, C та D, використовуючи на кожну з них різну кількість двох матеріалів та праці (кількості робочих годин). Конкретна інформація вказана у таблиці.

Вироби	**A**	**B**	**C**	**D**
Одиниць матеріалу *X*	**250**	**300**	**170**	**200**
Одиниць матеріалу *Y*	**160**	**230**	**75**	**0**
Кількість робочих годин	**80**	**85**	**120**	**100**

У цій ситуації є 12 дійсних чисел, які можна впорядкувати і записати у вигляді матриці

$$F = \begin{matrix} 250 & 300 & 170 & 200 \\ 160 & 230 & 75 & 0 \\ 80 & 85 & 120 & 100 \end{matrix}$$

розміру 3×4. Кожен рядок та кожен стовпець цієї матриці має певний зміст. Наприклад, елементи другого рядка вказують кількість витраченого матеріалу Y на виробництво продукції A, B, C та D; елементи другого стовпця матриці вказують кількість витрачених матеріалів X, Y та робочих годин на виробництво продукції B.

Найпростішими діями з матрицями називають *множення матриці на число, їх додавання та віднімання, множення матриць.*

Визначення. *Добутком* матриці A на число k називається матриця, елементи якої дорівнюють добуткам елементів матриці A та числа k:

$$kA = \begin{matrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & ka_{14} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & ka_{24} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & ka_{34} \end{matrix}$$

Додавати та віднімати можна лише матриці однакового розміру.

Визначення. *Алгебраїчною сумою матриць* A та B однакового розміру $m \times n$ називається матриця C розміру $m \times n$, елементи якої c_{ij} дорівнюють відповідній алгебраїчній сумі елементів a_{ij} та b_{ij} матриць A та B, тобто

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm$$

$$\pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Для знаходження добутку АВ матриць А та В необхідно, щоб кількість стовпців матриці А (першого множника) дорівнювала кількості рядків матриці В (другого множника).

Визначення. *Добутком* АВ матриці А розміру $m \times n$ і матриці В розміром $n \times p$ називається матриця С розміром $m \times p$, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумі добутків елементів і - го рядка матриці А на відповідні елементи j - го стовпця матриці В, тобто кожен елемент матриці С знаходять за формулою:

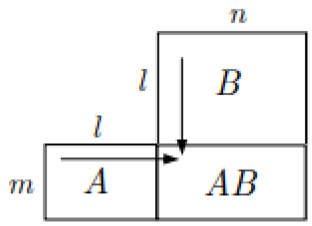
$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Або

$$\begin{pmatrix} - & \overleftarrow{a}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \overleftarrow{a}_i & - \\ & \vdots & \\ - & \overleftarrow{a}_m & - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_j & \cdots & \vec{b}_n \\ | & & | & & | \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \cdots & \overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_j & \cdots & \overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overleftarrow{a}_i \cdot \vec{b}_1 & \cdots & \overleftarrow{a}_i \cdot \vec{b}_j & \cdots & \overleftarrow{a}_i \cdot \vec{b}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overleftarrow{a}_m \cdot \vec{b}_1 & \cdots & \overleftarrow{a}_m \cdot \vec{b}_j & \cdots & \overleftarrow{a}_m \cdot \vec{b}_n \end{pmatrix}$$

Схема Фалька множення матриць



Зауваження. Добуток матриць взагалі не має властивості комутативності, тобто AB≠BA. Якщо добуток двох матриць має властивість AB = BA, тоді кажуть, що *матриці комутують.*

Особливості множення матриць.

- множення матриць не комутативне;
- добуток ненульових матриць може бути нульовою матрицею.

Приклад.

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5\cdot 3 + 7\cdot 2 - 4\cdot 1 & 5\cdot 1 + 7\cdot 2 - 4\cdot 0 & 5\cdot 2 + 7\cdot 0 - 4\cdot 2 \\ 2\cdot 3 + 5\cdot 2 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 5\cdot 2 + 1\cdot 0 & 2\cdot 2 + 5\cdot 0 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 25 & 19 & 2 \\ 17 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Властивості добутку матриць:

1) *Добуток матриць не комутативний:*

$$AB \neq BA.$$

2) *Якщо*

$$AB = BA$$

то матриці A і B називаються комутативними.

3) *Добуток діагональних матриць є діагональна матриця*
4) *Добуток одиничної матриці E на матрицю A дорівнює матриці A:*

$$EA = A$$

5) *Добуток квадратних матриць асоціативний, тобто:*

$$AB\ \ C = A(BC)$$

Визначення. *Елементарні перетворення матриці* — це такі перетворення матриці, в результаті яких зберігається еквівалентність матриці.

Елементарними перетвореннями рядків (стовпців) називають:

1) *перестановку місцями будь-яких двох рядків матриці;*
2) *множення на ненульову константу будь-якого рядка матриці;*
3) *додавання до будь-якого рядка матриці іншого рядка, помноженого на ненульове число.*

Визначення. Матриці А та В називають *еквівалентними* матрицями, якщо від матриці А до матриці В перейшли за допомоги елементарних перетворень над рядками; позначають А ~ В. (Аналогічно визначаються перетворення стовбців).

Приклад. Використовуючи елементарні перетворення рядків, перетворити матрицю А в верхню трикутну матрицю, де

$$A = \begin{matrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 10 \end{matrix}$$

Розв'язок: поміняємо перший та другий рядок місцями

$$A = \begin{matrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 10 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 10 \end{matrix}$$

до 2-го рядка додати 1-ший, помножений на - 4; до третього рядка додати перший

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 4+\ \ -4\ \ \cdot 1 & 2+\ \ -4\ \ \cdot 3 & 0+\ \ -4\ \ \cdot 2 \\ -1+1 & 3+3 & 10+2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & -8 \\ 0 & 6 & 12 \end{matrix}$$

2-ий рядок поділити на -2, третій рядок ділимо на 6

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -10/(-2) & -8/(-2) \\ 0 & 6/6 & 12/6 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

поміняємо другий та третій рядок місцями

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{matrix}$$

до 3-тього рядка додамо 2-ий, помножений на -5

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5+(-5)\cdot 1 & 4+(-5)\cdot 2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{matrix}$$

Визначення. *Визначником* n *–*го порядку квадратної числової матриці А порядку n називають число, яке знаходять з елементів матриці А за певним правилом і позначають

$$|\mathrm{A}| \text{ або } \Delta(\mathrm{A}), \text{ або } \det(A)$$

Правило знаходження визначника 2 порядку. Визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та допоміжної діагоналей, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$$

Зауваження. *Знак (+) вказує, що добуток елементів головної діагоналі треба брати зі своїм знаком, знак (–) означає, що добуток елементів неголовної діагоналі треба брати з протилежним знаком.*

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - (-3)\cdot 4 = 10 + 12 = 22$$

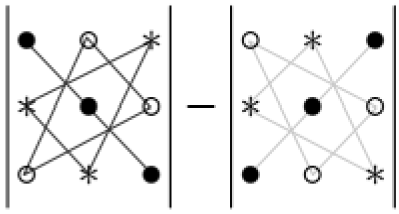
Правило знаходження визначника 3-го порядку.

Визначник третього порядку знаходять за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} -$$

$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}$$

Кожен доданок у правій частині формули має 3 множники з різних рядків та стовпців. Три перших доданка із знаком (+) є добутками елементів головної діагоналі і елементів вершин трикутників з основами паралельними головній діагоналі (дивись схему а) малюнка). Три останні доданки у правій частині (2) мають від'ємний знак. Вони є добутками елементів неголовної діагоналі та елементів вершин три кутників із основами паралельними неголовній діагоналі (мал., b).



a) **b)**

Ця схема обчислення визначника третього порядку називається ***правилом Саріуса.***

Приклад.

Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 0 + (-3)\cdot 3\cdot(-5) + 1\cdot 6\cdot 0 -$$
$$-(-5)\cdot 4\cdot 0 - 1\cdot(-3)\cdot 0 - 3\cdot 6\cdot 2 = 9$$

Для обчислення визначників порядку $\boldsymbol{n} > \mathbf{3}$ використовують алгебраїчні доповнення та вказане нижче правило:

Визначення. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} визначника n −го по рядку називається визначник (n – 1) порядку, який одержуємо з визначника |A| шляхом викреслювання i −го рядка та j −го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij} .

Визначення. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} елемента a_{ij} визначника називають мінор цього елемента, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Приклад. Знайти мінори матриці

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 0\cdot 0 = 3$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4\cdot 3 - 0\cdot 2 = -12$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\cdot 0 - 1\cdot 2 = -2$$

$$M_{21} = \begin{matrix} 7 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix} = 7 \cdot 3 - 1 \cdot 0 = 21$$

$$M_{22} = \begin{matrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} = 5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 13$$

$$M_{23} = \begin{matrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{matrix} = 5 \cdot 0 - 7 \cdot 2 = -14$$

$$M_{31} = \begin{matrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 7 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

$$M_{32} = \begin{matrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{matrix} = 5 \cdot 0 - 1 \cdot (-4) = 4$$

$$M_{33} = \begin{matrix} 5 & 7 \\ -4 & 1 \end{matrix} = 5 \cdot 1 - 7 \cdot (-4) = 33$$

Приклад. Знайти мінори матриці

$$D = \begin{matrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{matrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^{2} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1^{3} \begin{matrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{matrix} = -(-4 \cdot 3 - 0 \cdot 2) = 12$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = -1^{4} \begin{matrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix} = -4 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -1^{3} \begin{matrix} 7 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix} = -\ 7 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \ = -21$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = -1^{4} \begin{matrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} = 5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 13$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -1^{5} \begin{matrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{matrix} = -(5 \cdot 0 - 7 \cdot 2) = 14$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = -1^{4} \begin{matrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 7 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -\left(5 \cdot 0 - 1 \cdot (-4)\right) = -4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 7 \cdot (-4) = 33$$

Правило: Визначник матриці дорівнює сумі добутку елементів рядка визначника на їх алгебраїчне доповнення:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} - \text{розклад по } i - \text{му рядку}$$

Правило: Визначник матриці дорівнює сумі добутку елементів стовпця визначника на їх алгебраїчне доповнення:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} - \text{розклад по } j - \text{му стовпцю}$$

При розкладі визначника матриці зазвичай вибирають той рядок/стовпчик, в якому максимальна кількість нульових елементів.

Приклад. Знайти визначник матриці А

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок. Обчислимо визначник матриці, розклавши його по першому стовпцю:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + 2 \cdot (4 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 2 + 4 = 6$$

Властивості визначника матриці

1) Визначник одиничної матриці дорівнює одиниці: $\det(E) = 1$;
2) Визначник матриці з двома рівними рядками (стовпцями) дорівнює нулю;
3) Визначник матриці з двома пропорційними рядками (стовпцями) дорівнює нулю;
4) Визначник матриці, що містить нульовий рядок (стовпчик), дорівнює нулю;

5) Визначник матриці дорівнює нулю, якщо два (або декілька) рядка (стовпця) матриці лінійно залежні;
6) При транспонуванні значення визначника матриці не змінюється: $\det A = \det A^T$;
7) Визначник матриці не змінюється, якщо до будь-якого його рядка (стовпця) додати інший рядок (стовпчик), помножений на деяке число;
8) Визначник матриці не змінюється, якщо до будь-якого його рядка (стовпця) додати лінійну комбінацію інших рядків (стовпців);
9) Якщо поміняти місцями два рядки (стовпця) матриці, то визначник матриці змінить знак;
10) Визначник верхньої (нижньої) трикутної матриці дорівнює добутку його діагональних елементів;
11) Загальний множник в рядку (стовпчику) можна винести за знак визначника.

Обчислення визначника методом Ґауса (за допомогою елементарних перетворень)

Елементарні перетворення матриці.

Визначення. *Елементарними перетвореннями матриці* називають:
1) переставляння стовпців (рядків);
2) множення стовпця (рядка) на число,
відмінне від нуля;
3) додавання до стовпця (рядка) іншого стовпця (рядка), помноженого на деяке число.

Визначення. Матриці A та B називають *еквівалентними*, якщо одна з них одержана з іншої кінченною кількістю елементарних перетворень, і позначають $A \sim B$

Дія елементарних перетворень матриці на її визначник:
1) переставлення стовпців (рядків) змінює знак визначника;
2) помноження стовпця (рядка) на число відмінне від нуля, помножує визначник на це число;
3) додавання до стовпця (рядка) іншого стовпця (рядка), помноженого на деяке число не змінює визначника;
4) Визначник верхньої (нижньої) трикутної матриці дорівнює добуткові діагональних елементів;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

5) Визначник одиничної матриці дорівнює 1.

Крок методу *Ґауса.*

$$\det A = \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \left| \overleftarrow{a}_s \leftarrow \overleftarrow{a}_s + \left(-\frac{a_{s1}}{a_{11}}\right)\overleftarrow{a}_1, s = \overline{2,n} \right| =$$

$$= \left|\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} a_{11} & \cdots \\ \hline 0 & \Delta_{n-1} \end{array}\right|$$

Крок методу повторюється для визначника Δ_{n-1}і так далі.

Визначення. Матриця A^{-1} називається *оберненою матрицею* до матриці А, якщо виконуються рівності

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Важливо. Не всяка матриця має обернену.

В алгебрі матриць доведено, що матриця А має обернену матрицю A^{-1} при виконанні двох умов:

1) матриця А квадратна;
2) визначник |А| матриці А не дорівнює нулю.

Обернену матрицю A^{-1} до матриці А можна знаходити двома способами:

1) за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{A} \begin{matrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{n2} \\ .. & .. & .. \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nm} \end{matrix}$$

A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці А, (алгебраїчні доповнення до i –го рядка розташовані у i –му стовпці (i = 1, 2, …, n).

2) з використанням означення оберненої матриці та елементарних перетворень матриць.

Властивості оберненої матриці.

1) Якщо квадратна матриця A невироджена, то для неї існує обернена матриця.
2) Якщо обернена матриця існує, то вона єдина.
3) Матриці A та A^{-1} взаємообернені й переставні.
4) $A^{-1}\;{}^{-1} = A$
5) $A^{-1}\;{}^{k} = \; A^{k}\;{}^{-1}, k = 1,2, \ldots$
6) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
7) $A^{-1}\;{}^{T} = \; A^{T}\;{}^{-1}$
8) $detA^{-1} = \frac{1}{\det A}$
9) Якщо

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$
$$\det A \neq 0$$

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{matrix}$$

Розв'язання. Матриця А має три рядки та три стовпця, тому вона квадратна порядку 3. Її визначник

$$\det\ A \ = \begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{matrix} = -19 \neq 0$$

Отже, матриця А має обернену A^{-1}, яку знайдемо за формулою У даному випадку алгебраїчними доповненнями до елементів матриці А будуть:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^{2} \begin{matrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{matrix} = 6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = \ -1 \ ^{3} \begin{matrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{matrix} = -23$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \ -1 \ ^{4} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{matrix} = -7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^{3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Таким чином, отримали

$$A^{-1} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 6 & -7 & -2 \\ -23 & 11 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці

Нехай задана матриця А розміру $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виберемо в ній довільно k рядків та k стовпців. Елементи, що знаходяться на перетині виділених рядків та стовпців, утворюють квадратну матрицю k −го порядку, визначник якої називають мінором k −го порядку матриці А.

Обираючи різними способами k −рядків та k стовпців, одержимо деяку кількість мінорів k −го порядку.

Матриця має мінори будь-якого порядку: від першого (елементи матриці мінори 1-го порядку) до найменшого із чисел m та n.

Розглянемо в матриці A ті її мінори різних порядків, які відмінні від нуля і нехай їх найбільший порядок $= r$.

Визначення. Рангом матриці називають найбільший порядок її мінорів, відмінних від нуля.

Ранг матриці позначають $r(\mathrm{A})$ або $r(\mathrm{A})$ або просто r. Ранг матриці можна знаходити методом обвідних мінорів або простіше – методом елементарних перетворень.

Визначення. Елементарними перетвореннями матриці називають такі перетворення:

1) *перестановка рядків (стовпців) матриці;*
2) *множення всіх елементів рядка (стовпця) на число* $\lambda \neq 0$*;*
3) *додавання до елементів рядка(стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число.*

Всі ці перетворення не змінюють ранг матриці, але з їх допомогою матрицю зводять до матриці, у якої нижче головної діагоналі всі елементи нулі.

Тоді ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

Властивості рангу матриці

1) Ранг матриці дорівнює найбільшій кількості лінійно незалежних рядків (стовпців) матриці.
2) Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.
3) Транспонування матриці, елементарні перетворення матриці та видалення нульових рядків (стовпців) матриці не міняють її рангу.
4) Ранги еквівалентних матриць рівні.

Обчислення рангу матриці

Алгоритм зведення матриці до східчастого вигляду (прямий хід методу Ґауса).

1) Якщо матриця нульова, то зупиняються — матриця вже має східчастий вигляд.
2) Знаходять перший зліва стовпець з лідером; переставляючи рядки, переміщують рядок, який містить цей лідер нагору.
3) Додаючи до всіх рядків, які розташовані нижче, цей рядок, помножений на відповідні коефіцієнти, дістають під лідером нулі.
4) Повторюють кроки 1–3 для решти рядків.
   Процес припиняється якщо рядки вичерпано або решта рядків нульові.

Алгоритм перетворення матриці до зведеного східчастого вигляду (метод Ґауса — Йордана).

1) Зводять матрицю до східчастого вигляду (прямий хід методу Ґауса).
2) Відкидають нульові рядки (це вже не є елементарним перетворенням).
3) Ділячи останній рядок на його лідера, одержують 1.
4) Додаючи до решти рядків новий останній рядок, помножений на відповідні коефіцієнти, дістають нулі над 1.

5) Повторюють кроки 1–4 для решти рядків.
Процес припиняється, якщо рядки вичерпано.

Приклад. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Зробимо такі перетворення, щоб нижче головної діагоналі були нулі:

$$A = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Звідси випливає, що $\boldsymbol{rang}$**(A) = 2.**

Матриці в економіці.

Приклад. (Модель міжгалузевого планування потреб та пропозицій). Таблицею задані показники взаємних потреб та пропозицій між різними галузями промисловості.

Галузеві пропозиції	Галузві потреби			Потреби інших галузей	Кількість пропозицій
	1	2	3		
1	20	48	18	14	100
2	30	12	54	24	120
3	30	36	36	72	180
Витрати праці	20	24	72		

a) Визначити матрицю потреб - пропозицій A.
b) Припустимо, що через три роки потреби інших галузей зростуть до 24, 33 та 75 показників для галузей 1, 2, 3, відповідно. Скільки продукції повинна виробити кожна галузь, щоб задовольнити ці потреби?

Розв'язання.

а) Елементи шуканої матриці А дорівнюють відношенню потреб i −тої галузі до загальної кількості пропозицій цієї галузі. Тому для знаходження елементів i −го стовпця (i = 1, 2, 3) матриці А треба поділити потреби i −тої галузі, вказані у таблиці, на загальну кількість пропозицій цієї галузі. Таким чином, ми одержуємо матрицю потреб-пропозицій вигляду

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} \frac{20}{100} & \frac{48}{120} & \frac{18}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{12}{120} & \frac{54}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{36}{120} & \frac{36}{180} \end{matrix} = \begin{matrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{matrix}$$

b) Нехай E −одинична матриця третього порядку. Позначимо:

$$D = \begin{matrix} 24 \\ 33 \\ 75 \end{matrix}$$

X – матриця нових пропозицій, що відповідають новим потребам:

$$B = E - A = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} - \begin{matrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{matrix} = \begin{matrix} 0{,}8 & -0{,}4 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & -0{,}3 & 0{,}8 \end{matrix}$$

Тоді

$$X = B^{-1} \cdot D$$

Для обчислення майбутніх пропозицій залишилось знайти B^{-1}. Матриця B квадратна третього порядку, її визначник

$$\det B = \begin{matrix} 0{,}8 & -0{,}4 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & -0{,}3 & 0{,}8 \end{matrix} = 0{,}336$$

Для знаходження матриці B^{-1}, яка існує, знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці B: B_{11} = 0,63; B_{12} = 0,33; B_{13} = 0,36; B_{21} = 0,35; B_{22} = 0,61; B_{23} = 0,36; B_{31} = 0,21; B_{32} = 0,27; B_{33} = 0,6.
Отже, обернена матриця B^{-1} має вигляд

$$B^{-1} = \frac{1}{0{,}336} \begin{matrix} 0{,}63 & 0{,}35 & 0{,}21 \\ 0{,}33 & 0{,}61 & 0{,}27 \\ 0{,}36 & 0{,}36 & 0{,}6 \end{matrix}$$

Підставимо D та знайдену B^{-1} у формулу $X = B^{-1} \cdot D$, одержуємо

$$X = \frac{1}{0{,}336} \begin{matrix} 0{,}63 & 0{,}35 & 0{,}21 \\ 0{,}33 & 0{,}61 & 0{,}27 \\ 0{,}36 & 0{,}36 & 0{,}6 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 24 \\ 33 \\ 75 \end{matrix} = \begin{matrix} 126{,}25 \\ 143{,}75 \\ 195 \end{matrix}$$

Таким чином, через три роки першій галузі треба виробити 126,25 одиниць продукції, другій галузі потрібно виробити 143,75 одиниць продукції, а третій галузі треба виробити 195 одиниць продукції.

Тема 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, їх розв'язки. Метод Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Обернена матриця. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь. Методи Гаусса і Жордана–Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь. Означення та обчислення рангу матриці. Критерії сумісності та визначеності системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Задачі економічного змісту, які приводять до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Основні питання для обговорення

1) *Що називається системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими?*
2) *Яка система лінійних рівнянь називається сумісною (несумісною) визначеною (невизначеною)? В чому полягає метод Крамера?*
3) *В якому випадку застосовуються формули Крамера?*
4) *Поясніть матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь?*
5) *Яка матриця називається оберненою до даної?*
6) *Сформулюйте алгоритм знаходження оберненої матриці?*
7) *Що називається рангом матриці? Як знаходиться ранг?*
8) *За яких умов однорідна система лінійних рівнянь має єдиний нульовий розв'язок, безліч розв'язків?*
9) *Поясніть алгоритм методу Ґауса розв'язування систем лінійних рівнянь?*

Методичні вказівки до теми

Визначення. *Система алгебраїчних рівнянь називається лінійною* (СЛАР), якщо вона може бути записана у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

де $x_1,\ x_2, \dots, x_n$ - невідомі,

a_{ij} – дійсні числа, які називаються коефіцієнтами системи; $b_1.\ b_2, \dots, b_n$ – вільні члени.

Якщо всі $b_1.\ b_2, \dots, b_n$ дорівнюють нулю систему називається однорідною. Якщо хоча б один вільний член $b_1.\ b_2, \dots, b_n$ не дорівнює нулю, тоді система алгебраїчних рівнянь називається неоднорідною.

Визначення. Розв'язком системи називається множина дійсних чисел

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

підстановка яких у систему замість невідомих

$$x_1,\ x_2, \dots, x_n$$

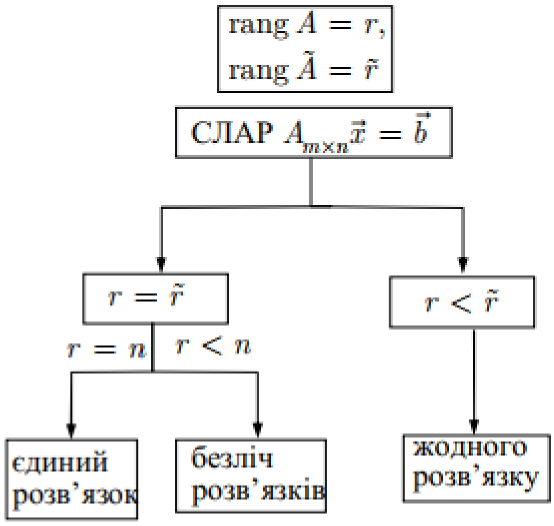
перетворює кожне рівняння у тотожність.

Визначення. Система називається *сумісною,* якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною, якщо вона не має жодного розв'язку.

Визначення. Сумісна система називається *визначеною,* якщо вона має єдиний розв'язок, і невизначеною, якщо вона має більше, ніж один розв'язок.

Визначення. *Дві системи лінійних рівнянь, що мають однакові розв'язки, називаються еквівалентними.*

Теорема Кронекера — Капеллі. СЛАР сумісна тоді й лише тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангові розширеної матриці системи. Якщо ранг основної матриці системи дорівнює рангові розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, то система має ***єдиний*** розв'язок. Якщо ранг основної матриці системи дорівнює рангові розширеної матриці, але менший за кількість невідомих, то система має ***безліч*** розв'язків.



Розв'язати систему означає:
1) з'ясувати, чи є система сумісною або несумісною;
2) якщо система сумісна, то знайти множину її розв'язків.

СЛАР з матрицею $n \times n$

1) $\det A \neq 0 -$ система має єдиний розв'язок;
2) $\det A = 0 -$ система не має жодного розв'язоку або має безліч;

Основна матриця системи

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Стовпець невідомих

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Стовпець вільних членів

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Розширена матриця системи

$$\tilde{A} = \left(A \mid \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Матричний вигляд СЛАР

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Векторний вигляд СЛАР

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Методи розв'язання СЛАР

Елементарними перетвореннями СЛАР **називають:**

1) переставляння рівнянь;
2) множення обох частин якого-небудь рівняння на число, відмінне від нуля;
3) додавання до рівняння іншого рівняння, помноженого на деяке число;

Елементарні перетворення СЛАР приводять до відповідних елементарних перетворень рядків матриці та розширеної матриці системи. СЛАР, одержані одна з одної елементарними перетвореннями, називають ***еквівалентними***.
Еквівалентні СЛАР ***рівносильні***

Метод Крамера

ПРАВИЛО. Якщо основний визначник $\Delta(A)$ неоднорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (визначник складений із коефіцієнтів, що стоять біля невідомих) не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta(A)}, k = 1,2, \ldots, n$$

де Δ_k - допоміжний визначник, який одержується з основного визначника Δ шляхом заміни його k-го стовпчика стовпчиком вільних членів системи.

Приклад. Розв'язати за правилом Крамера систему рівнянь

$$\begin{array}{llll} x_1 & -2x_2 & +5x_3 & = -2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & = -8 \\ 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & = -13 \end{array}$$

Розв'язок. Задана неоднорідна система 3 лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими. Основний визначник цієї системи

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 31 \neq 0$$

Тому, згідно з правилом Крамера, задана система має єдиний розв'язок, який знайдемо за формулами

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta(A)}, k = 1,2,3$$

Спочатку знайдемо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -8 & -3 & 4 \\ -13 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -93$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & 13 & -3 \end{vmatrix} = 62$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -8 \\ 4 & 1 & -13 \end{vmatrix} = 31$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta(A)} = \frac{-93}{31} = -3,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta(A)} = \frac{62}{31} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta(A)} = \frac{31}{31} = 1,$$

Отже, розв'язком цієї системи буде (–3; 2; 1).

Зауваження. Методом Крамера можна розв'язувати системи лінійних рівнянь, які задовольняють трьом умовам:

1) Система повинна бути неоднорідною;
2) Кількість рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих;
3) Визначник $\Delta(A)$ не повинен дорівнювати нулю.

Матричний метод (для невироджених матриць A)

Якщо матриця A квадратна порядку n і її визначник $\Delta(A)$ не дорівнює нулю, тоді існує обернена до А матриця A^{-1} , тому можна рівність

$$AX = B$$

помножити на A^{-1} зліва. Одержимо

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

За означенням оберненої матриці маємо:

$$A^{-1}A = E$$

Тому маємо

$$EX = A^{-1}B$$

Але множення матриці - стовпця Х на матрицю Е не змінює Х, тобто

$$EX = X$$

Таким чином, одержуємо формулу:

$$X = A^{-1}B$$

за якою і знаходять розв'язок системи рівнянь матричним методом. Отже, матричний метод можна застосовувати у випадку, коли квадратна матриця А має не рівний нулю визначник.

Для розв'язування неоднорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими матричним методом доцільно здійснювати такий порядок дій:

1) Записати основну матрицю системи А і знайти її визначник $\Delta(\text{A})$. Якщо $\Delta(\text{A}) = 0$, то система розв'язку не має;
2) Якщо $\Delta(\text{A}) \neq 0$, знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці А;
3) Помножити обернену матрицю A^{-1} на матрицю - стовпець вільних членів системи.

Одержаний при цьому стовпець згідно з формулою $\text{X} = \text{A}^{-1}\text{B}$ і буде розв'язком системи.

Приклад. Знайти розв'язок заданої системи матричним методом

$$\begin{array}{cccc} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & +0x_2 & -x_3 & = -1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = 2 \end{array}$$

Розв'язок. Основною матрицею заданої системи буде матриця

$$A = \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Для визначення оберненої матриці A^{-1} знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

За формулою $X = A^{-1}B$ знаходимо розв'язок заданої системи:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Метод *Ґауса*

Суть метода ***Ґауса*** *полягає в тому,* що шляхом елементарних перетворень систему треба привести до трикутного вигляду, коли усі елементи головної діагоналі основної матриці системи дорівнюють 1, а елементи основної матриці, що знаходяться нижче її головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Такий вигляд системи дозволяє знайти невідомі.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & -4x_2 & +3x_3 & = 1 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = 3 \\ 3x_1 & -x_2 & +x_3 & = 2 \end{array}$$

Розв'язок. Спочатку поміняємо місцями перше та друге рівняння, щоб елемент a_{11} основної матриці дорівнював 1. Одержимо:

$$\begin{array}{llll} x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = 3 \\ 2x_1 & -4x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 3x_1 & -x_2 & +5x_3 & = 2 \end{array}$$

Тепер перше рівняння помножимо на (–2) і додамо до другого (щоб одержати a_{21}= 0), а потім помножимо перше рівняння на (–3) і додамо до третього рівняння (щоб одержати a_{31} = 0). Тоді будемо мати систему

$$\begin{array}{llll} x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = 3 \\ 0x_1 & +0x_2 & -5x_3 & = -5 \\ 0x_1 & +5x_2 & -7x_3 & = -7 \end{array}$$

Тепер друге рівняння поділимо на (–5), третє рівняння поділимо на 5 і поміняємо їх місцями. Одержимо систему трикутного вигляду:

$$\begin{array}{llll} x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = 3 \\ 0x_1 & +x_2 & -\frac{7}{5}x_3 & = -\frac{7}{5} \\ 0x_1 & +0x_2 & +x_3 & = 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{lcc} x_1 & = & 3-4\cdot 1+2\cdot 0 \\ x_2 & = & \frac{7}{5}\cdot 1-\frac{7}{5} \\ x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcr} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 1 \end{array}$$

Отже, система має єдиний розв'язок (–1, 0, 1).

Заувоженная. Елементарні перетворення доцільно виконувати не з усією системою, а з її розширеною матрицею. Розв'язання прикладу у такий спосіб виглядає так:

$$\begin{array}{cccc} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Метод *Ґауса-Жордана*

Записують розширену матрицю системи

$$\left(\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right)$$

Зводять розширену матрицю до східчастого вигляду (прямий хід методу Ґауса).

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c} \alpha_{1,k_1} & \dots & \dots & & & & & & & & & \beta_1 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{2,k_2} & \dots & & & & & & & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & & & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & \alpha_{r,k_r} & \dots & \dots & & \beta_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & & 0 & & \beta_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 & & \beta_m \end{array}\right)$$

Досліджують систему на сумісність (теорема Кронекера — Капеллі).

Якщо хоча б один з вільних членів $\beta_i, i = r+1, m$ від нуля, то система несумісна. Якщо $\beta_i = 0, i = r+1, m$, то система сумісна.

У разі сумісності, перетворюють східчасту матрицю до зведеного східчастого вигляду

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & \dots & \dots & 0 & & & & 0 & & \delta_1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & & & 0 & & \delta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 & \dots \; \dots & \delta_r \end{array}\right)$$

Знаходять розв'язки одержаної системи. Можливі 2 випадки:

1) кількість змінних дорівнює рангові матриці системи $n = r$;

$$\begin{cases} x_1 = \delta_1, \\ x_2 = \delta_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_r = \delta_r \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_r \end{pmatrix}$$

2) кількість змінних n більше кількості рівнянь $n > r$. Змінні, які відповідають лідерам рядків називають *базисними*, а решту змінних - *вільними*.

Надають вільним змінним довільних значень

$$C_1, \dots, C_{n-r}$$

і виражають через них базисні змінні.

Нехай

$y_1, y_2, \dots, y_r -$ базисні змінні;

$y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_n -$ вільні змінні

$$\begin{cases} y_1 = \delta_1 - \gamma_{1,r+1}C_1 - \dots - \gamma_{1,n}C_{n-r}, \\ y_2 = \delta_2 - \gamma_{2,r+1}C_1 - \dots - \gamma_{2,n}C_{n-r}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_r = \delta_r - \gamma_{r,r+1}C_1 - \dots - \gamma_{r,n}C_{n-r}, \\ y_{r+j} = C_j, j = \overline{1, n-r}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} \delta_1 - \sum\limits_{j=1}^{n-r} \gamma_{1,r+j}C_j \\ \dots \\ \delta_r - \sum\limits_{j=1}^{n-r} \gamma_{r,r+j}C_j \\ C_1 \\ \dots \\ C_{n-r} \end{pmatrix}$$

Застосування систем лінійних алгебраїчних рівнянь для розв'язання економічних задач.

Приклад. Кондитерська фабрика спеціалізується на випуску трьох видів виробів: тістечок, рулетів та кексів. Водоночас на виробництві використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми затрат сировини на кожну одиницю виробів та об'єм затрат сировини на 1 день задані таблицею. Знайти щоденний об'єм випуску кожного виду кондитерських виробів.

Вид сировини	Норми затрат на одну одиницю виробів			Затрати сировини за 1 день
	Тістечка	Рулети	Кекси	
S_1	5	3	4	3800
S_2	2	2	1	1500

S_3	3	3	2	2400

Розв'язання: Зрозуміло, що як невідомі виступає шукана кількість кожного виду кондитерських виробів. Тому позначимо x_1 - об'єм випуску тістечок, x_2– об'єм випуску рулетів, x_3 – об'єм випуску кексів. У відповідності до таблиці можна записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{matrix} x_1 & +3x_2 & +4x_3 = 3800 \\ 2\,x_1 & +2x_2 & +x_3 = 1500 \\ 3x_1 & +3x_2 & +2x_3 = 2400 \end{matrix}$$

Розв'яжемо систему, наприклад, методом Крамера:

$$\Delta(A) = \begin{matrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{matrix} = 2$$

$$\Delta_1 = \begin{matrix} 3800 & 3 & 4 \\ 1500 & 2 & 1 \\ 2400 & 3 & 2 \end{matrix} = 800$$

$$\Delta_2 = \begin{matrix} 5 & 3800 & 4 \\ 2 & 1500 & 1 \\ 3 & 2400 & 2 \end{matrix} = 400$$

$$\Delta_3 = \begin{matrix} 5 & 3 & 3800 \\ 2 & 2 & 1500 \\ 3 & 3 & 2400 \end{matrix} = 600$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta(A)} = \frac{800}{2} = 400,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta(A)} = \frac{400}{2} = 200,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta(A)} = \frac{600}{2} = 300,$$

Отже, кондитерська фабрика щоденно випускає 400 тістечок, 200 рулетів і 300 кексів.

В ***MS EXEL*** є три функції, призначені для роботи з матрицями і всі вони входять до категорії Математичні:

1) MMULT (МУМНОЖ) — обчислює добуток матриць;
2) MINVERSE (МОБР) — обчислює матрицю, обернену до заданої;
3) MDETERM (МОПРЕД) — обчислює визначник матриці.

Аргументами всіх цих функцій є діапазони, що містять елементи матриць, по одному в кожній клітинці. Результатом виконання перших двох функцій є не окреме значення, а діапазон значень. Тому вводити їх потрібно так :
виділити весь діапазон, де міститимуться результати, ввести формулу функції та натиснути клавіші

Ctrl+Shift+Enter

Операції множення матриці на число та додавання матриць у ***MS EXEL*** слід виконувати не за допомогою функцій, а із використанням формул. Якщо матриця множиться на число, то посилання на клітинку, де це число розміщене, має бути абсолютним, оскільки всі елементи матриці множитимуться на значення в тій самій клітинці. Під час додавання матриць слід використовувати відносні посилання.

Знаходження суми двох матриць у пакеті *MS EXEL*

1) Наприклад, маємо дві матриці з назвою А та В. Для додавання складаємо суму обох перших елементів відповідно, потім треба обрати стовпець і перетягнути масив до третього ряду, а потім вибрати ці 3 стовпці та перетягнути вліво до третього стовпця.

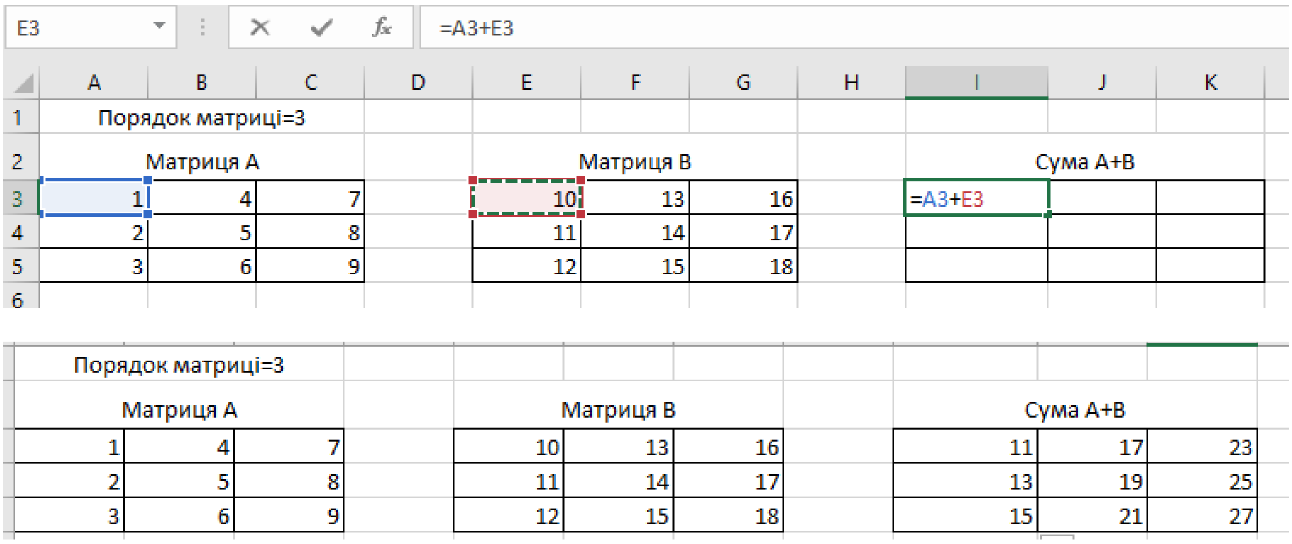


Рис. 1. Обчислення суми матриць.

Добуток двох матриць у пакеті *MS EXEL*

Функція **MMULT *(МУМНОЖ)*** повертає добуток матриці двох масивів. Результат – масив із такою самою кількістю рядків, як в аргументі «масив1», і з такою самою кількістю стовпців, як в аргументі «масив2». Кількість стовпців в аргументі «масив1» має збігатися з кількістю рядків у масиві 2, і обидва масиви мають містити лише числа. Масив 1 і масив 2 можуть бути надані як діапазони клітинок, масиви констант або посилання.

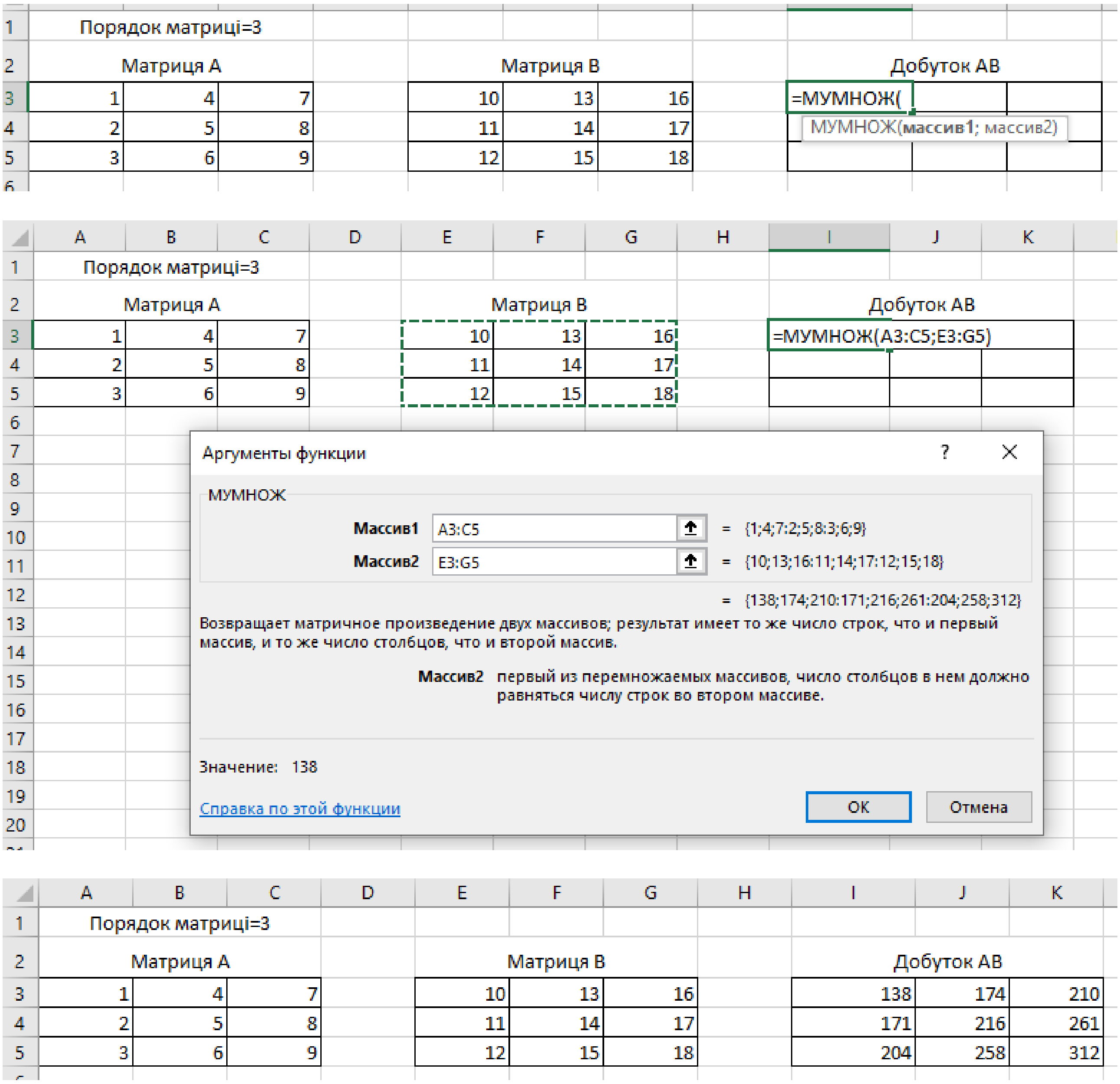


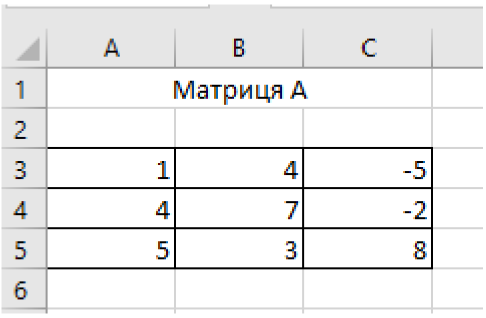
Рис. 2. Обчислення добутку матриць.

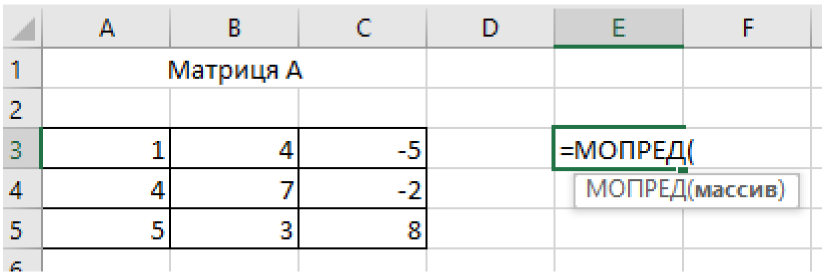
Знаходження значення визначника у пакеті *MS EXEL*

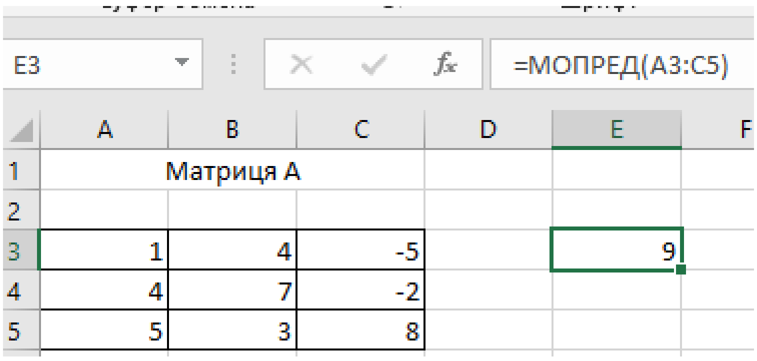
Зауваження. Визначник матриці - це величина, що характеризує квадратну матрицю і може бути обчислена тільки для квадратної матриці.

Щоб обчислити визначник, використовується функція ***MDETERM (МОПРЕД (масив))***, де масив-діапазон комірок, в який внесено значення елементів матриці.

1) Ввести значення елементів матриці *A* (наприклад, діапазон A3:C5);







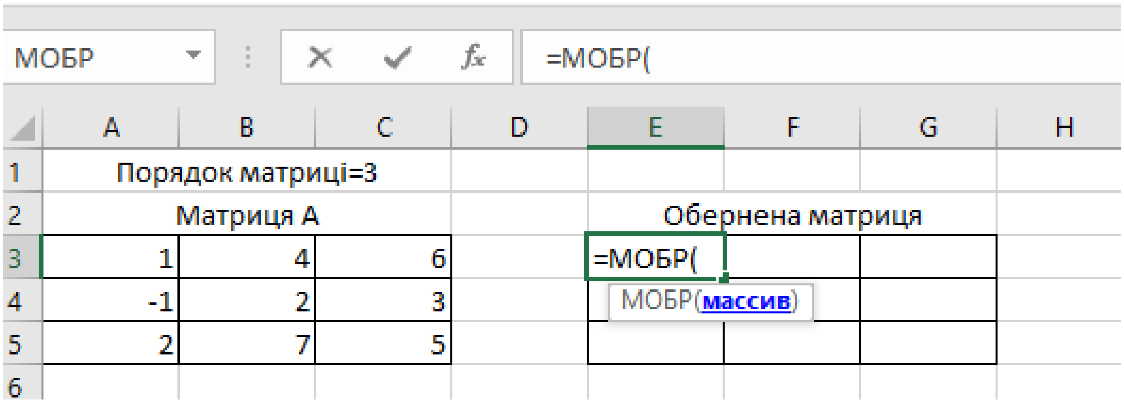
2) Виділити вільну комірку, в якій зберегатиметься визначник матриці (наприклад, комірка E3).
3) Ввести в комірку E3 формулу ***МОПРЕД (A3:C5)*** і натисніть клавішу ***ENTER.***
4) У комірці E3 з’явиться число, якому дорівнює визначник матриці.

Знаходження оберненої матриці у пакеті *MS EXEL*

Знаходження оберненой матриці у пакеті ***MS EXEL*** потребує оволодіння наступними операціями:

Обчислення **оберненої матриці в *MS EXEL*** можливо тільки в тому випадку, якщо первинна **матриця** є квадратної, тобто кількість рядків і стовпців в ній збігається. Крім того, її визначник не повинен дорівнювати нулю. Для обчислення застосовується функція масиву МОБР ().
Якщо елементи віхідної матриці розташовані в діапазоні A3:C5, то для отримання транспонованої матриці потрібно:

1) вилілити діапазон 3×3, який не перетинається з вихідним діапазоном (наприклад, E3:G5);
2) В Рядок формул ввести формулу =МОБР(A3:C5) і натиснути комбінацію клавіш ***CTRL+SHIFT+ENTER***, тобто потрібно ввести її як формулу масиву (формулу можна ввести прямо в клітинку, попередньо натиснувши клавішу ***F2).***



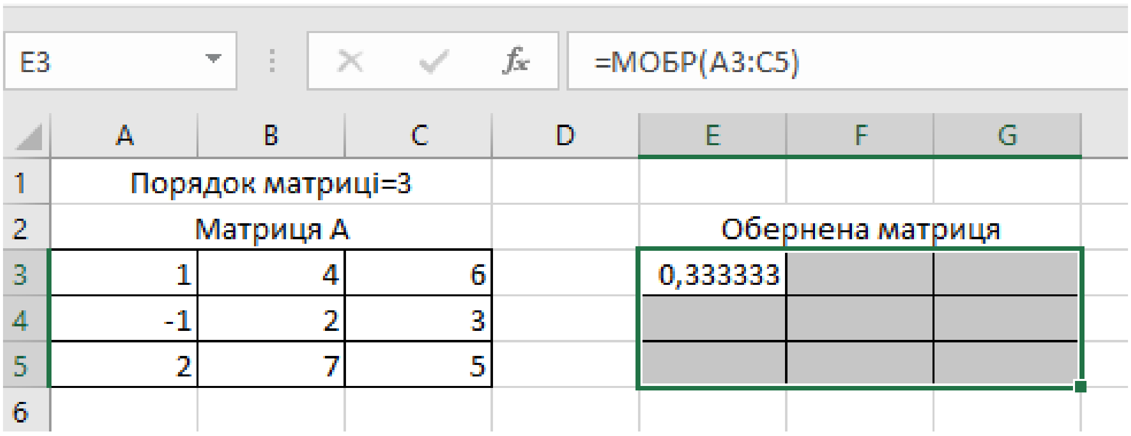


Рис. 3. Обчислення оберненої матриці.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Порядок матриці=3							
2	Матриця А				Обернена матриця			
3	1	4	6		0,333333	-0,66667	0	
4	-1	2	3		-0,33333	0,212121	0,272727	
5	2	7	5		0,333333	-0,0303	-0,18182	
6								

Рис. 4. Обчислення оберненої матриці.

Якщо матриця більшої розмірності, то перед введенням формули потрібно виділити відповідно більший діапазон комірок.

Масив може бути заданий не тільки як інтервал осередків, наприклад ***A3: C5*** , але і як масив констант, наприклад ***MINVERSE*** (***=МОБР ({1;4;6:-1;2;3:2;7;5}).***

Запис з використанням масиву констант дозволяє не вказувати елементи в окремих осередках, а розмістити їх в осередку разом з функцією. Масив в цьому випадку вказується по рядках: наприклад, спочатку перший рядок 1;4;6 потім через двокрапку записується наступний рядок -1;2;3, потім через двокрапку записується наступний рядок 2;7;5. Елементи відділяються крапкою з комою.

Посилання на масив також може бути вказана як посилання на іменований діапазон.

До деяких квадратних матриць неможливо знайти обернену (у яких визначник дорівнює 0).

В таких випадках функція ***МОБР ()*** повертає значення помилки # ***ЧИСЛО !.***

Якщо функція ***МОБР ()*** повернула значення помилки це означає, що або число рядків в масиві не дорівнює числу стовпців, або будь-яка з осередків у масиві пуста або містить текст. Тобто функція ***МОБР ()*** вільну позицію сприймає не як що містить 0 (як наприклад, це робить ***СУММ ()***), а як помилкове значення.

Розв'язування СЛАР за допомогою пакету *MS EXEL*

Розв'язання СЛАР за формулами Крамера потребує оволодіння наступними операціями в пакеті ***MS EXEL*** **:** введення масиву (матриці), знаходження значення визначника, ділення.

1) Для введеня формули масиву необхідно виділити відповідний діапазон для формули масиву (A3:C5).

$$\begin{array}{llll} x_1 & -2x_2 & +5x_3 & = -2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & = -8 \\ 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & = -13 \end{array}$$

2) Виділити вільну комірку, в якій зберегатиметься основний визначник матриці $\Delta(A)$ (наприклад, комірка B7).
3) Ввести в комірку B7 формулу **МОПРЕД (A3:C5)** і натисніть клавішу **ENTER.**
4) У комірці B7 з'явиться число, якому дорівнює основний визначник матриці $\Delta(A)$.
5) Аналогічно обчислюються допоміжні визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.
6) Знаходимо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta(A)} = \frac{-93}{31} = -3,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta(A)} = \frac{62}{31} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta(A)} = \frac{31}{31} = 1$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Матриця A			Матриця B						
2											
3	1	-2	5		-2						
4	2	-3	4		-8						
5	4	1	-3		-13						
6											
7	D(A)	31									
8	D1				D2			D3			
9	-2	-2	5		1	-2	5		1	-2	-2
10	-8	-3	4		2	-8	4		2	-3	-8
11	-13	1	-3		4	-13	-3		4	1	-13
12											
13	**D1**	**-93**			**D2**	**62**			**D3**	**31**	
14											
15	**X1**	**-3**									
16	**X2**	**2**									
17	**X3**	**1**									

Рис. 5. Розв'язання СЛАР за формулами Крамера

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Завдання 1.

Обчислити визначник Δ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

трьома способами:

1) Розкладом за елементами будь-якого рядка;
2) Розкладом за елементами 1-го стовпця з утворенням додаткових нулів;
3) Зведенням елементарними перетвореннями до трикутного вигляду.

№	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
1	*1*	*-2*	*3*	*4*	*2*	*1*	*-4*	*3*	*3*	*-4*	*-1*	*-2*	*4*	*3*	*2*	*-1*
2	*-5*	*1*	*-4*	*1*	*1*	*4*	*-1*	*5*	*-4*	*1*	*-8*	*-1*	*3*	*2*	*6*	*2*
3	*2*	*3*	*-3*	*4*	*2*	*1*	*-1*	*2*	*6*	*2*	*1*	*0*	*2*	*3*	*0*	*-5*
4	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*1*	*3*	*1*	*1*	*2*	*1*	*4*
5	*2*	*-1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*2*	*-1*	*3*	*-1*	*2*	*3*	*3*	*1*	*6*	*1*
6	*0*	*1*	*2*	*3*	*1*	*0*	*1*	*2*	*2*	*1*	*0*	*1*	*3*	*2*	*1*	*0*
7	*8*	*7*	*2*	*0*	*-8*	*2*	*7*	*10*	*4*	*4*	*4*	*5*	*0*	*4*	*-3*	*2*
8	*1*	*-3*	*4*	*-1*	*3*	*-2*	*5*	*4*	*2*	*1*	*1*	*5*	*1*	*4*	*-3*	*6*
9	*3*	*1*	*1*	*1*	*1*	*3*	*1*	*1*	*1*	*1*	*3*	*1*	*1*	*1*	*1*	*3*
10	*3*	*2*	*-1*	*-8*	*2*	*-2*	*-4*	*-2*	*3*	*-2*	*-5*	*-4*	*4*	*2*	*-2*	*-10*
11	*1*	*2*	*3*	*4*	*2*	*2*	*3*	*4*	*3*	*3*	*3*	*4*	*4*	*4*	*4*	*4*
12	*2*	*3*	*-4*	*5*	*3*	*-5*	*2*	*4*	*5*	*4*	*3*	*-2*	*-4*	*2*	*5*	*3*
13	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*3*	*4*	*1*	*3*	*6*	*10*	*1*	*3*	*10*	*20*
14	*1*	*2*	*3*	*4*	*2*	*3*	*4*	*1*	*3*	*4*	*1*	*2*	*4*	*1*	*2*	*3*
15	*1*	*2*	*3*	*4*	*-2*	*1*	*-4*	*3*	*3*	*-4*	*-1*	*2*	*4*	*3*	*-2*	*-1*
16	*2*	*3*	*-3*	*4*	*2*	*1*	*-1*	*2*	*6*	*2*	*1*	*0*	*2*	*3*	*0*	*-5*
17	*2*	*4*	*2*	*1*	*-10*	*-9*	*-7*	*5*	*0*	*10*	*0*	*-2*	*-4*	*3*	*-1*	*0*
18	*3*	*3*	*4*	*1*	*-1*	*-8*	*-7*	*2*	*0*	*5*	*14*	*-3*	*0*	*1*	*5*	*-1*
19	*8*	*-1*	*-1*	*3*	*5*	*-5*	*-1*	*-2*	*10*	*3*	*0*	*2*	*3*	*2*	*0*	*1*
20	*0*	*2*	*-2*	*1*	*5*	*5*	*1*	*0*	*9*	*4*	*5*	*7*	*3*	*1*	*2*	*3*
21	*2*	*-2*	*4*	*2*	*3*	*-1*	*4*	*1*	*2*	*4*	*-1*	*3*	*-4*	*1*	*2*	*-1*
22	*3*	*-1*	*5*	*4*	*6*	*-2*	*3*	*1*	*4*	*1*	*2*	*-3*	*-1*	*4*	*-3*	*2*
23	*8*	*2*	*4*	*1*	*0*	*-2*	*6*	*-1*	*2*	*1*	*-4*	*3*	*-4*	*5*	*-3*	*2*
24	*0*	*-3*	*6*	*2*	*-3*	*-1*	*5*	*4*	*4*	*2*	*-1*	*3*	*2*	*6*	*-2*	*1*
25	*-1*	*5*	*10*	*2*	*-2*	*1*	*6*	*3*	*4*	*-2*	*-1*	*3*	*-3*	*1*	*2*	*1*

Завдання 2. Задані матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{matrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{matrix} \boldsymbol{b_{11}} & \boldsymbol{b_{12}} & \boldsymbol{b_{13}} \\ \boldsymbol{b_{21}} & \boldsymbol{b_{22}} & \boldsymbol{b_{23}} \\ \boldsymbol{b_{31}} & \boldsymbol{b_{32}} & \boldsymbol{b_{33}} \end{matrix}$$

Знайти:

1) Матрицю $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA}$
2) Матрицю $\boldsymbol{A^{-1}}$ та $\boldsymbol{B^{-1}}$. Здійснити перевірку.

3) Матрицю $\boldsymbol{X}$ рівняння $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ або $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{A}$.

№	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{31}	b_{32}	b_{33}
1	*1*	*2*	*-1*	*2*	*-2*	*1*	*1*	*-4*	*3*	*1*	*-1*	*-1*	*4*	*1*	*-1*	*2*	*0*	*-3*
2	*2*	*-3*	*2*	*1*	*2*	*-1*	*-1*	*5*	*-1*	*3*	*-1*	*2*	*4*	*2*	*2*	*1*	*3*	*1*
3	*3*	*2*	*1*	*2*	*1*	*-2*	*1*	*1*	*2*	*1*	*3*	*2*	*3*	*-2*	*2*	*5*	*4*	*2*
4	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-3*	*-2*	*2*	*-4*	*1*	*1*	*1*	*2*	*3*	*3*	*-2*	*1*	*1*	*-3*
5	*2*	*3*	*1*	*1*	*2*	*-3*	*4*	*7*	*2*	*3*	*-2*	*-1*	*1*	*1*	*-2*	*4*	*-1*	*1*
6	*5*	*4*	*1*	*2*	*1*	*-2*	*1*	*2*	*3*	*2*	*-1*	*1*	*1*	*-3*	*2*	*3*	*-4*	*2*
7	*4*	*3*	*2*	*3*	*-1*	*3*	*1*	*4*	*-3*	*4*	*1*	*-3*	*5*	*2*	*-1*	*1*	*1*	*-3*
8	*4*	*5*	*-3*	*5*	*-4*	*4*	*2*	*1*	*-1*	*5*	*6*	*-2*	*4*	*3*	*-1*	*3*	*5*	*-3*
9	*5*	*-2*	*-1*	*6*	*-3*	*-2*	*4*	*-4*	*3*	*4*	*-4*	*-5*	*2*	*-1*	*-8*	*3*	*-3*	*-1*
10	*4*	*2*	*-2*	*2*	*3*	*-4*	*3*	*-4*	*5*	*3*	*-4*	*4*	*4*	*2*	*-1*	*5*	*2*	*3*
11	*2*	*1*	*4*	*3*	*2*	*1*	*1*	*3*	*3*	*3*	*1*	*-2*	*5*	*-3*	*2*	*4*	*-2*	*-3*
12	*2*	*5*	*-4*	*3*	*15*	*-9*	*5*	*5*	*-7*	*2*	*5*	*-4*	*3*	*15*	*-9*	*5*	*5*	*-2*
13	*1*	*1*	*2*	*2*	*-1*	*2*	*4*	*1*	*4*	*2*	*-1*	*-1*	*3*	*4*	*2*	*3*	*-2*	*4*
14	*3*	*2*	*5*	*2*	*3*	*1*	*2*	*1*	*3*	*1*	*2*	*4*	*5*	*1*	*7*	*3*	*-2*	*1*
15	*1*	*2*	*3*	*2*	*4*	*6*	*3*	*1*	*-1*	*2*	*-4*	*3*	*1*	*-2*	*4*	*3*	*-1*	*5*
16	*2*	*3*	*5*	*3*	*7*	*4*	*1*	*2*	*2*	*2*	*-1*	*1*	*3*	*2*	*2*	*1*	*-2*	*1*
17	*3*	*4*	*5*	*2*	*-3*	*2*	*1*	*7*	*4*	*3*	*-4*	*3*	*2*	*3*	*7*	*2*	*-2*	*-4*
18	*5*	*-2*	*3*	*3*	*-4*	*-5*	*2*	*-3*	*4*	*4*	*2*	*5*	*3*	*3*	*-2*	*5*	*-4*	*3*
19	*4*	*2*	*-2*	*2*	*3*	*-4*	*3*	*-4*	*5*	*3*	*-4*	*4*	*4*	*7*	*-1*	*5*	*2*	*3*
20	*1*	*3*	*-1*	*2*	*-1*	*-1*	*1*	*-3*	*1*	*1*	*3*	*-1*	*2*	*-1*	*-1*	*1*	*-5*	*1*
21	*1*	*1*	*2*	*3*	*-2*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*3*	*-2*	*-2*	*-2*	*1*	*1*
22	*2*	*3*	*1*	*1*	*-2*	*1*	*3*	*1*	*-1*	*2*	*4*	*1*	*1*	*-2*	*1*	*3*	*2*	*-1*
23	*2*	*2*	*1*	*3*	*2*	*2*	*1*	*3*	*-1*	*2*	*3*	*1*	*3*	*2*	*2*	*1*	*3*	*-1*
24	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*2*	*1*	*-1*	*-2*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*2*	*1*	*-1*	*-3*
25	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-2*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-2*	*1*	*1*	*1*	*-3*

Завдання 3.

$$
\begin{array}{lll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 = b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 = b_2 \\
a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 = b_3
\end{array}
$$

або у вектрній формі

$$
\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\
\boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\
\boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}}
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c}
\boldsymbol{x_1} \\
\boldsymbol{x_2} \\
\boldsymbol{x_3}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\boldsymbol{b_1} \\
\boldsymbol{b_2} \\
\boldsymbol{b_3}
\end{array}
$$

Дослідити на сумісність та знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

1) За допомогою формул Крамера;

2) Матричним методом (за допомогою оберненої матриці)
3) Методом Ґауса

№	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3
1	2	-1	3	1	3	2	3	-3	1	9	9	5
2	1	-1	2	-1	2	-3	2	-1	3	-1	3	2
3	3	2	1	2	3	1	2	1	3	5	1	11
4	2	1	1	1	3	-2	3	-2	1	2	1	7
5	3	1	2	2	-2	1	1	-4	3	9	3	1
6	3	-2	1	2	1	3	4	-3	6	-2	1	-8
7	2	2	1	3	-2	3	1	3	-2	2	11	-6
8	2	2	-1	3	1	-3	1	1	5	6	10	-8
9	1	1	2	2	-1	2	4	1	4	-1	-4	-2
10	1	1	I	2	-3	-1	1	1	-1	2	5	7
11	2	2	-1	3	-1	2	2	-1	3	-7	1	3
12	1	1	1	2	3	-1	1	-1	2	-2	1	-7
13	2	2	3	2	-3	-1	3	4	2	1	0	5
14	2	-2	3	2	1	5	3	-4	2	5	10	4
15	4	2	1	2	2	-3	3	3	-5	7	9	1
16	4	-2	-1	2	-3	2	3	-5	3	5	7	5
17	2	1	-2	3	1	2	-1	-1	2	7	5	-4
18	2	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	4
19	1	2	3	2	-1	-1	1	3	4	5	1	6
20	3	2	1	1	1	-1	4	-1	5	5	0	3
21	2	4	-5	3	3	-2	2	-1	-2	-7	-2	1
22	2	5	4	3	-2	-3	1	1	-2	1	2	-2
23	3	-1	2	2	3	-1	1	-2	3	0	6	-4
24	3	4	6	2	3	5	1	-2	-4	1	0	3
25	2	-4	5	3	-2	3	4	5	-2	3	4	7

Завдання 4. Знайти значення матричних виразів

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^T B - B^T A.$

2) $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 7 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$; $AB - BA.$

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

4) $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$.

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.

6) $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$; $A^T B - B^T A$.

7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$.

9) $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.

10) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $A^T B - B^T A$.

11) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

12) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$.

13) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.

14) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $A^T B - B^T A$.

15) $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

16) $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$.

17) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.

18) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $A^T B - B^T A$.

19) $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

20) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$.

21) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 9\\ 2 & 5 & -3\\ 0 & 3 & -4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}7 & -2 & 4\\ 2 & -3 & 3\\ 0 & 5 & -1\end{pmatrix}$; $AB-BA$.

22) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 3 & 1 & -2\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}8 & 0 & -2\\ 3 & 1 & -3\\ 0 & -2 & -4\end{pmatrix}$; A^TB-B^TA.

23) $A=\begin{pmatrix}7 & -2 & 3\\ 0 & 3 & -3\\ -1 & 6 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ 2 & 5 & 7\\ 7 & -2 & 1\end{pmatrix}$; $(AB)^T-B^TA^T$.

24) $A=\begin{pmatrix}-6 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 5\\ -1 & 3 & 7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -4\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$.

25) $A=\begin{pmatrix}7 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -5\\ 0 & 3 & -7\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$; $BA-AB$.

Завдання 5. Розв’язати матричне рівняння

1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

2) $3 \cdot X + \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

3) $3 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$.

4) $2 \cdot X + \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

5) $2 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

6) $X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

7) $2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - 3 \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

8) $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$.

9) $4 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$.

10) $4 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

11) $2 \cdot X + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$.

12) $X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

13) $2 \cdot X + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$14)\ 5 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$15)\ 3 \cdot X + 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$16)\ 3 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$17)\ 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$18)\ 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$19)\ 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$20)\ 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} - 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$21)\ 3 \cdot X + 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$22)\ 3 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}.$$

$$23)\ 5 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$24)\ \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} + 4 \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$25)\ 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 6. Розв’язати рівняння або нерівності з визначниками.

1) $\begin{vmatrix} 3x-1 & 1 \\ x+1 & x \end{vmatrix} = 0;$

2) $\begin{vmatrix} 1-x & 4 \\ 2-x & x \end{vmatrix} \le -4;$

3) $\begin{vmatrix} 2+3x & x+6 \\ 2 & x \end{vmatrix} > 0;$

4) $\begin{vmatrix} 2x^2-3 & x+2 \\ x & 1 \end{vmatrix} = 0;$

5) $\begin{vmatrix} x+1 & 4x \\ 2 & x-3 \end{vmatrix} \ge 8;$

6) $\begin{vmatrix} 2x-1 & x-2 \\ 3 & x \end{vmatrix} \le 12;$

7) $\begin{vmatrix} x+1 & 2x \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} < 12-2x;$

8) $\begin{vmatrix} x+3 & x \\ 9 & 2x-1 \end{vmatrix} < 3;$

9) $\begin{vmatrix} 2x+3 & x-1 \\ 4 & x \end{vmatrix} < 7;$

10) $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \le 16;$

11) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 9 \\ x & x+3 \end{vmatrix} > -3;$

12) $\begin{vmatrix} x+5 & x \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} \ge -2;$

13) $\begin{vmatrix} 2x-3 & x+1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} < x^2-16;$

14) $\begin{vmatrix} x-1 & 2x \\ x+2 & x+3 \end{vmatrix} \le -3;$

15) $\begin{vmatrix} 3x-2 & 4x \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} > -6;$

16) $\begin{vmatrix} x^2+1 & x+2 \\ 1-x & -2 \end{vmatrix} < -4;$

17) $\begin{vmatrix} x-x^2 & 3x \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \ge 13x;$

18) $\begin{vmatrix} x & 4 \\ x-2 & x+3 \end{vmatrix} \le 8-7x;$

19) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2x-3 & x^2+3 \end{vmatrix} < 69;$

20) $\begin{vmatrix} 1-x & 3x \\ 2 & 2x-1 \end{vmatrix} < -6;$

21) $\begin{vmatrix} x-2 & x+1 \\ 3 & x \end{vmatrix} < 3;$

22) $\begin{vmatrix} 2x & x+3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} < x^2-9;$

23) $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 4x^2 & 2x-1 \end{vmatrix} < 11x^2-40;$

24) $\begin{vmatrix} 5x+1 & 3x \\ 2-x & x \end{vmatrix} > 9x^2;$

Завдання 7. Розв’язати матричне рівняння

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

23) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

24) $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

Завдання 8. Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпців знайти ранг матриці.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -6 & -1 & 13 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 11 & 7 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 & 13 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 13 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ -6 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 8 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 & -13 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 10 & 4 & 14 \\ -14 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ 8 & 10 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ -9 & 2 & -6 & 1 \\ 10 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}$;

23) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

24) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$;

Завдання 9. Дослідити на сумісність та знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

1) За допомогою формул Крамера;
2) Матричним методом (за допомогою оберненої матриці);
3) Методом Ґауса.

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 = 13, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 15x_3 = -1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4, \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -14, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -8, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

$$9)\ \begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=6, \\ x_1+2x_2+x_3=7, \\ 5x_1+x_2+x_3=7. \end{cases}$$

$$10)\ \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=11, \\ 2x_1-x_2-3x_3=4, \\ 7x_1-2x_2+x_3=-3. \end{cases}$$

$$11)\ \begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=-15, \\ 2x_1+5x_2-x_3=24, \\ 5x_1-2x_2+x_3=-5. \end{cases}$$

$$12)\ \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=16, \\ 3x_1-5x_2-5x_3=-7, \\ -5x_1+2x_2+3x_3=-3. \end{cases}$$

$$13)\ \begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=10, \\ 2x_1+5x_2-x_3=-1, \\ 2x_1-2x_2+9x_3=-10. \end{cases}$$

$$14)\ \begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3=13, \\ 3x_1+2x_2+4x_3=-4, \\ 2x_1+x_2+5x_3=-1. \end{cases}$$

$$15)\ \begin{cases} 2x_1+2x_2+5x_3=-5, \\ -3x_1-x_2+2x_3=13, \\ x_1+2x_2+x_3=-6. \end{cases}$$

$$16)\ \begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=-3, \\ -2x_1+3x_2+2x_3=-2, \\ -2x_2+2x_3=-6. \end{cases}$$

$$17)\ \begin{cases} -2x_1-5x_2+x_3=12, \\ 2x_1+4x_2+3x_3=6, \\ 3x_1+x_2+x_3=5. \end{cases}$$

$$18)\ \begin{cases} 5x_1+x_2+x_3=7, \\ 3x_1-3x_2-x_3=5, \\ 2x_1+6x_2+3x_3=2. \end{cases}$$

$$19)\ \begin{cases} x_1+3x_2-3x_3=4, \\ 7x_1+3x_2-3x_3=10, \\ 4x_1-x_2+2x_3=0. \end{cases}$$

$$20)\ \begin{cases} 2x_1-x_2+8x_3=-20, \\ -x_1+3x_2-4x_3=5, \\ 3x_1-x_2+3x_3=-4. \end{cases}$$

$$21)\ \begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3=8, \\ 3x_1+x_2+3x_3=-8, \\ x_1+x_2+6x_3=-19. \end{cases}$$

$$22)\ \begin{cases} -3x_1+2x_2-3x_3=2, \\ -2x_1+x_2-3x_3=5, \\ 5x_1-x_2+3x_3=-2. \end{cases}$$

$$23)\ \begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=8, \\ 2x_1+x_2-2x_3=-3, \\ 3x_1-x_2+x_3=-8. \end{cases}$$

$$24)\ \begin{cases} 2x_1-7x_2+3x_3=-7, \\ 3x_1+5x_2+6x_3=2, \\ x_1-3x_2+2x_3=-4. \end{cases}$$

$$25)\ \begin{cases} -x_1-x_2+5x_3=-14, \\ 4x_1+2x_2+2_3=10, \\ 5x_1-3x_2+x_3=10. \end{cases}$$

Рекомендована література

Основна

1. Андрощук Л. В. Вища математика: навч. посібн. Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2005. 104 с.
2. Барковський В.В. Вища математика для економістів: навч посібн. Київ: Центр наукової літератури, 2019. 448 с.
3. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: навчальний посібник для студ. технічних і технологічних спец. вищих навч. закладів . К. : Книги України ЛТД, 2019. 577 с.
4. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі: навч. посіб.. К. : Книги України ЛТД, 2009. 400 с.
5. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі: навч. посіб..К. : Книги України ЛТД, 2019. 470 с.
6. Дьоміна Н. А. Вища математика : навчально-методичний посібник для самостійної роботи. Мелітополь: ФОП Силаєва О.В., 2021. 124 с.
7. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посібн. Харків : Веста, 2008. 200 с.
8. **Данілов В.Я. Вища математика для економістів: навч. посібн. Київ: Книжкове вид-во ВІКНУ, 2019. 93 с.**
9. Железняк Г. В., Вища математика: навч. посібн.. Київ: Книжкове вид-во Центр учбової літератури, 2019. 368 с.
10. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посібн. Київ : Центр учбової літератури, 2019. 594 с.
11. Ковтонюк І. Ю. Вища математика: навч. Посібн Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2005. 112 с.
12. Коновалюк В. С. Вища математика: навч. Посібн.. Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2015. 140 с.
13. Кравченко В. В. Вища математика: навч. посібн. Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2005. 144 с.
14. Турчанінова Л.І. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посібн.Київ :Книжкове вид-во Ліра-К, 2018. 348 с.
15. Paollo Aluffi. Algebra. Florida State University., 2019, 345 p.
16. Jim Fensom. Mathematics Student Book. Oxford University Course.-2017, 546 p.

Допоміжна

17. Практикум з вищої математики: навч. посібн. Херсон : Олді-плюс, 2018. 390 с.
18. Слюсаренко В. Г. Короткий курс вищої математики: навч. посібн. Київ : Магістр - XXI сторіччя, 2015. 160 с.

19. Теорія функцій комплексної змінної: навч. посібн.. Запоріжжя : ЗНТУ, 2020. 160 с.
20. Юрченко М.Є., Клименко Т.В. Розв’язок задачі організаційно-економічного управління градієнтним методом. *Економіка сьогодення: актуальні питання та іноваційні аспекти:* матеріали III Міжнародної наук.-практ. конф.,м. Запоріжжя, 25 липня 2020 р., 2020. С. 21-22.
21. *Iurchenko M, Yurchenko-Tytarenko A.* Assessnent of the insurance company with Laplace transform. *Scientific bulletin of Polissia. 2016. №6. P. 26-30.*

Інформаційні ресурси

22. Система дистанційного навчання НУ «Чернігівська політехніка». Курс: Вища математика.Режим доступу : https://eln.stu.cn.ua/course/view.php?id=4206
23. Офіційний сайт бібліотеки ім. В. Вернадського. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/
24. Офіційний сайт Наукової бібліотеки НУ «Чернігівська політехніка». – Режим доступу: http://library2.stu.cn.ua/