МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Чернігівська політехніка»

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

МОДУЛЬ 1

Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи
і практичних завдань
з дисципліни «Вища математика»
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальностями 133 «Галузеве машинобудування»
274 «Автомобільний транспорт»

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри АТ та ГМ,
протокол № 3 від 16.03. 2023р.

Чернігів 2023

Лінійна алгебра. МОДУЛЬ 1. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи виконання РГР і практичних завдань з дисципліни «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 133 «Галузеве машинобудування», 274 «Автомобільний транспорт» / Укл.: Корнієнко С.П., Мурашковська В.П. – Чернігів: НУ «Чернігівська політехніка», 2023. – 37 с.

Укладачі: Корнієнко Світлана Петрівна, кандидат технічних наук, доцент
Мурашковська Віра Петрівна, старший викладач

Відповідальний за випуск: Кальченко Віталій Іванович, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, професор, доктор технічних наук

Рецензент: Венжега Володимир Іванович – доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування

Зміст

Вступ

Ці методичні вказівки укладені у відповідності до Навчальної програми з дисципліни «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 133 «Галузеве машинобудування», 274 «Автомобільний транспорт».

В методичних вказівках до виконання РГР і практичних завдань з дисципліни «Вища математика» модуль 1 розглянуто розділи „Системи лінійних рівнянь”, “Визначники. Матриці”, які відповідають змістовому модулю 1 з дисципліни “Вища математика” для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 133 «Галузеве машинобудування», 274 «Автомобільний транспорт» денної та заочної форм навчання.

Основне завдання цих методичних вказівок – надати студентам теоретичну та практичну допомогу в самостійній роботі по вивченню розділів „Системи лінійних рівнянь”, “Визначники. Матриці” з дисципліни «Вища математика» модуль 1.

Методичні вказівки містять тести з лінійної алгебри і питання для самоконтролю.

Кількість завдань, які наведені, дає можливість викладачу вибрати задачі для модульної контрольної або самостійної роботи. Методичні вказівки, крім того, містять завдання для розрахунково-графічної роботи. Дана робота може бути корисною як доповнення до літератури, яка вже використовується на заняттях, для самостійного виконання студентами розрахунково-графічних робіт та при вивченні інших навчальних дисциплін.

Після вивчення розділу «Лінійна алгебра» студент повинен вміти:

1) виконувати лінійні операції над матрицями, множення матриць;
2) обчислити обернену матрицю;
3) обчислити визначник та ранг матриці різними методами;
4) розв’язати систему лінійних рівнянь методом Крамера, методом Гауса, методом оберненої матриці;
5) дослідити систему за теоремою Кронекера-Капеллі.

Методичні вказівки можуть бути використані під час аудиторних занять, як довідковий матеріал та в якості задачника при проведенні самостійних та модульно-тестових робіт.

I

Матриці та дії з ними

1. Знайти матрицю A+3B- C, якщо

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & -2\end{bmatrix};\qquad B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix};\qquad C=\begin{bmatrix}9 & 2\\ -2 & 4\end{bmatrix},$$

записати $(A+3B-C)^{T}$.

2. Знайти матрицю X, якщо X+2A=E, де E- одинична матриця,

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & 6\end{bmatrix}.$$

3. Знайти матрицю X^{T}, якщо $X=A^{2}+A-6E$, де E-одинична матриця,

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & -1\end{bmatrix}$$

4. Знайти матриці $2A+5B;\ -3B-2A,$ якщо

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

5. Знайти матрицю X, якщо $X=2A^{2}+3A-5E,$ де E-одинична матриця,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Відповідь: $X=\begin{bmatrix}18 & 15 & 16\\ 19 & 26 & 15\\ 30 & 19 & 18\end{bmatrix}.$

6. Обчислити:

а) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$;

ж) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$; з) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$; з) $\begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{bmatrix}$.

7. Знайти всі матриці 2-го порядку, квадрати яких дорівнюють нульовій матриці $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Відповідь: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, де a,b,c- довільні числа, які задовольняють умові $a^2 + bc = 0$.

8. Знайти всі матриці 2-го порядку, квадрати яких дорівнюють одиничній матриці $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Відповідь: $\pm E$; $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, де a,b,c- довільні числа, які задовольняють умові $a^2 + bc = 1$.

9. Знайти A^n, якщо

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in$ **R;** **б)** $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{bmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$.

10. Знайти ранг матриці A, якщо

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & -6 \\ -3 & 1 & -4 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; **б)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Відповідь: а) $\mathrm{rang}(A) = 2$; б) $\mathrm{rang}(A) = 2$.

II

Обчислення визначників

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; **г)** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; **д)** $\begin{vmatrix} 14999 & 13010 \\ 15000 & 13011 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 15325 & 15323 & 37527 \\ 23735 & 23735 & 17417 \\ 23737 & 23737 & 17418 \end{vmatrix}$; **ж)** $\begin{vmatrix} 13 & 12 & 11 \\ 24 & 25 & 22 \\ 35 & 34 & 33 \end{vmatrix}$; **з)** $\begin{vmatrix} 132 & 135 & 137 \\ 243 & 244 & 246 \\ 354 & 355 & 357 \end{vmatrix}$.

Відповідь: а) 32; б) -36; в) 0; г) 87; д) 1989; е) -22198; ж) 0; з) 144.

2. Розв’язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} x^2 & 3x \\ 3 & x \end{vmatrix}=0$**;** **б)** $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}=0$**;** **в)** $\begin{vmatrix} 1 & 7 & x \\ 8 & x & 8 \\ x & 2 & x \end{vmatrix}=0$**;** **г)** $\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 3 & 4 & x \end{vmatrix}=0$**.**

Відповідь: а) 0, ± 3; б) 1, 2, -3; в) -4, 1, 4; г) 2, -1$\pm\sqrt{8}$.

3. Обчислити визначники четвертого порядку:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$**;** **б)** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$**;** **в)** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$**;** **г)** $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$**.**

Відповідь: а) 16; б) 90; в)18a + 15b + 12c - 19d; г) 2a - 8b + c + 5d.

4. Обчислити визначники, привівши їх до трикутного виду:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$**;** **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$**.**

Відповідь: а) 54; б) 52.

5. Обчислити det(5A), якщо матриця А має вид:

а) А=$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$**;** **б) А=** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$**.**

Відповідь: а) -150; б) -500.

6. Знайти всі λ, при яких det(A-λE) = 0, якщо матриця А має вид:

а) А=$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$**;** **б)** А= $\begin{bmatrix} 6 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$**;** **в)** А= $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$**;**

г) A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$**;** **д)** A= $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$**.**

Відповідь: а) {3, 6, 9}; б) {0, 2, 3}; в) {1, 2}; г) {0, 1, 3}; д) {1, 7}.

III

Обернена матриця. Матричні рівняння

1. З'ясувати, для яких матриць існує обернена. Знайти обернену матрицю і зробити перевірку.

а) $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; г) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$;

д) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; е) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; ж) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$; з) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

Відповідь:

а) не існує; б) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -3 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$; в) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$; г) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$;

д) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$; е)-ж) не існує; з) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$.

2. Знайти обернену матрицю методом Гауса.

а) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -13 \end{bmatrix}$; г) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Відповідь: а) $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{24}\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24}\end{bmatrix}$; б) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{bmatrix}$;

в) $A^{-1}=\begin{bmatrix}-13 & 11 & -3\\ \frac{39}{2} & -16 & \frac{9}{2}\\ \frac{5}{2} & -2 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$; г) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

3. Розв’язати матричні рівняння:

а) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{bmatrix}$; б) $X\cdot\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{bmatrix}\cdot X\cdot\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{bmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$.

4. Розв’язати матричні рівняння:

а) $\begin{bmatrix}1 & 3 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{bmatrix}$; б) $X\cdot\begin{bmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 3 & 0\\ -5 & 9 & 0\\ -2 & 15 & 0\end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ -2 & -5 & 0\end{bmatrix}\cdot X\cdot\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ -3 & 4 & -3\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Відповідь : а) $\begin{bmatrix}6 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$; в) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-172 & -97 & -83\\ 69 & 39 & 33\\ -21 & -12 & -9\end{bmatrix}$.

5. З’ясувати, при яких значеннях α існує матриця, обернена до даної:

а) $A=\begin{bmatrix}\alpha & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix}4 & \alpha\\ \alpha & 9\end{bmatrix}$; в) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ \alpha & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$; г) $A=\begin{bmatrix}1 & \alpha & 1\\ \alpha & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

Відповідь: а) $\alpha \neq 1$; б) $\alpha \neq \pm 6$; в) $\alpha \neq 1$ г) $\alpha \neq 0$; $\alpha \neq 1$.

IV

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

4.1. Неоднорідні системи

1. Розв'язати системи за формулами Крамера.

1) $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=3\\ 2x_1+4x_2-3x_3=2\\ 3x_1-x_2-3x_3=-7\end{cases}$ Відповідь: (-4;1;-2).

2) $\begin{cases} 5x_1+3x_2+2x_3=4\\ 2x_1+6x_2 \qquad =0\\ x_1-x_2 \qquad =1\end{cases}$ Відповідь: $(\frac{3}{4};-\frac{1}{4};\frac{1}{2})$.

3) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-8x_3=-1\\ 5x_1+5x_2+4x_3=3\\ x_1 \qquad +7x_3=2\end{cases}$ Відповідь: $(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3})$.

4) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2\\ 3x_1+x_2+2x_3=3\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\end{cases}$ Відповідь: $(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3})$.

5) $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=-2\\ 2x_1-x_2 \qquad =-1\\ x_1 \qquad +x_3=-2\end{cases}$ Відповідь: (1; 3; -3).

2. Розв'язати системи за допомогою оберненої матриці (матричним методом).

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ Відповідь: $(-\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{3}{5})$.

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ Відповідь: $(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{3}{4})$.

3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$ Відповідь: $(2;3;-2)$.

4) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ \quad x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$ Відповідь: $(1;-1;2)$.

5) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 11 \\ 5x_2 + 6x_3 = 28 \\ x_1 + 2x_3 = 7 \end{cases}$ Відповідь: $(1;2;3)$.

3. Розв'язати системи методом Гауса.

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -10 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$ Відповідь: $(0;0;-2)$.

2) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 + -7x_3 = 12 \end{cases}$ Відповідь: $(3;2;1)$.

3) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$ Відповідь: $(-1;3;2)$.

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 \qquad = 3 \end{cases}$ Відповідь: (1;2;3).

5) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$ Відповідь: $(2+2m; \frac{4-m}{5}; \frac{11+16m}{5}; m),\ m \in R.$

6) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ Відповідь: $(\frac{1-14m+2n}{11}; \frac{2-6m-7n}{11}; m; n),$ $m, n \in R.$

7) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$ Відповідь: система несумісна.

8) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ -7x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$ Відповідь:(5-5m;-13+12m+n;m;n), m,n $\in$ **R**.

4. Дослідити системи на сумісність, якщо сумісні, розв'язати довільним методом.

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 9x_2 - 11x_3 = 1 \end{cases}$ Відповідь: $\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{8}{5}x_3 \\ x_2 = 1 + \frac{7}{5}x_3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 21 \\ 2x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21 \end{cases}$ Відповідь: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{9 - x_3}{4} \\ x_2 = \dfrac{3x_3 + 3}{2} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \qquad = 2 \end{cases}$ Відповідь: $\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 5 \end{cases}$ Відповідь: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5}(9 - 7x_3) \\ x_2 = \dfrac{1}{5}(1 + 2x_3) \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 3 \end{cases}$ Відповідь : $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3$

6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$ Відповідь: $\begin{cases} x_1 = -17x_3 + 29x_4 + 5 \\ x_2 = 10x_3 - 17x_4 - 2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 \qquad = 1 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 7 \\ 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = 3 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3_3x = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \qquad = 1 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8 \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} \quad 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 13x_3 - 8 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 = -5 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 \quad - x_3 + 2x_4 = -4 \\ 4x_1 \quad - x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$

Відповідь: системи 7-16 несумісні.

4.2. Однорідні системи

1. Розв’язати однорідні системи рівнянь.

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ \quad 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$ Відповідь: (0,0,0,0).

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$ Відповідь $:(8m-7n; 5n-6m; m; n)$, $m,n \in \mathbf{R}$.

3) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$ Відповідь $:(14m;\ 21m;\ m; m), m \in R$.

4) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ Відповідь $:(-8m; 7m; -2m), m \in R$.

5) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ Відповідь: (0,0,0).

6) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ Відповідь: (2m;16m;11m), $m \in \mathbf{R}$.

7) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$ Відповідь: $(m, \frac{3}{2}n - \frac{1}{2}m, n), m, n \in R$.

8) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ Відповідь: (4m;–5m;–7m); $m \in \mathbf{R}$.

V

Додаткові завдання

1. Розв’язати системи рівнянь.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$ Відповідь: (1,1,-1,0).

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ Відповідь: (m; -1-m; -1+m; 2-m), $m \in \mathbf{R}$.

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ Відповідь: (1,2,3,4).

4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 - 9x_2 + x_3 - 8x_4 = -3 \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 4 \end{cases}$ Відповідь: $(\frac{1}{2};-\frac{1}{4};\frac{3}{4};1)$.

2. Дослідити системи рівнянь та знайти розв’язок системи в залежності від параметру α.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = \alpha \end{cases}$

Відповідь: система має розв’язки при довільному α.

$$x_1 = \frac{-3+\alpha}{4};\quad x_2 = \frac{9-\alpha}{2};\quad x_3 = \frac{3-\alpha}{4}.$$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 15 \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 = \alpha \end{cases}$

Відповідь: система має розв’язки при $\alpha = 18;\ x_1 = -15 + 18x_3, x_2 = 9 - 7x_3$, де x_2,x_3-довільні числа.

3) $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 6 \end{cases}$

Відповідь: система не сумісна при α=-2. При $\alpha = 1;\ x_1 = 6 - x_2 - x_3$, де x_2,x_3-довільні числа.

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 + 5x_4 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \alpha x_4 = 9 \end{cases}$

Відповідь: система несумісна при $\alpha \neq 4$, при $\alpha = 4$, $x_1 = -3 - 2x_2 - x_4$; $x_3 = 4 - x_4$,де x_2, x_4 – довільні числа.

3. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = p \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = q \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = r \end{cases}$ Відповідь: $\begin{bmatrix} 11 & 6 & 8 \\ -4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$.

2) $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = p \\ 3x_1 - 4x_2 - 7x_3 = q \\ x_1 - x_2 + x_3 = r \end{cases}$ Відповідь: $\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 8 & 1 \\ 10 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$.

VI

Розрахунково-графічні завдання

7.1. Матриці і визначники

I

Обчислити визначник 4-го порядку розклавши його за елементами i-го рядка (j-го стовпця); зробивши нулі в n-му рядку (k-му стовпці); привівши його до трикутного виду.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ **j = 2; k = 4;**

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{vmatrix}$ **j = 1; n = 3;**

3. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ **j = 2; k = 1;**

4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ **i = 3; n = 1;**

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ **i = 1; n = 4;**

6. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ **i = 4; k = 3;**

7. $\begin{vmatrix} -7 & 3 & -2 & -4 \\ -5 & 2 & 0 & 2 \\ 12 & -5 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **j = 3; n = 1;**

8. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ **j = 4; k = 3;**

9. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **i = 2; k = 3;**

10. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ **i = 2; n = 3;**

11. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **j = 1; n = 3;**

12. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **j = 4; k = 1;**

13. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **i = 3; n = 3;**

14. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **i = 1; k = 2;**

15. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 2 & -9 & 3 & -8 \\ 1 & 6 & -4 & 8 \end{vmatrix}$ **j = 3; k = 2;**

16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \\ 9 & 9 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ **j = 2; n = 1;**

17. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 9 & 9 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ **j = 1; n = 3;**

18. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & -2 \\ 2 & -3 & 8 & -4 \\ 4 & 2 & 19 & 1 \\ 6 & -5 & 11 & -3 \end{vmatrix}$ **i = 2; k = 2;**

19. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 6 & -1 & 12 \end{vmatrix}$ **i = 3; k = 1;**

20. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 6 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ **i = 4; n = 1;**

21. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ **j = 1; k = 4;**

22. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ **j = 3; n = 2;**

23. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & 14 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ **i = 1; n = 3;**

24. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ **i = 3; k = 4;**

25. $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ 9 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ **i = 2; n = 2;**

26. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ **i = 3; n = 2;**

27. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 1 & -8 \\ 4 & 6 & -4 & 8 \end{vmatrix}$ **j = 3; n = 1;**

28. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 & 3 \\ 13 & 9 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ **j = 2; k = 3;**

29. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 4 & -4 \\ -6 & 16 & 1 & 1 \\ 7 & -16 & 4 & -4 \end{vmatrix}$ **j = 1; k = 4;**

30. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & -4 \\ 6 & 6 & -1 & 12 \end{vmatrix}$ **i = 3; n = 2;**

II

Для даних матриць A, B, C, D, E знайти всі можливі добутки; знайти A^{-1} і B^{-1} методом Гауса і за допомогою приєднаної матриці, зробити перевірку. Розв’язати матричні рівняння: $X \cdot A = B; B \cdot X = C$, де X – невідома матриця.

1. $A=\begin{bmatrix}2&1&2\\5&3&1\\1&2&3\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}7&-8&4\\0&4&5\\1&3&5\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}-1&2\\2&-3\\0&2\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}0\\-7\\1\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}1&1\\3&6\end{bmatrix}$;

2. $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\3&3&2\\1&2&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}5&1&6\\3&-1&0\\2&0&2\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}6&0\\-1&1\\-2&3\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}8\\-4\\0\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}-2&0\\-2&5\end{bmatrix}$;

3. $A=\begin{bmatrix}2&2&3\\3&1&2\\1&3&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1&2&6\\-1&2&4\\5&-1&1\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}4&1\\2&1\\-1&-2\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}-5\\1\\-1\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}$;

4. $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&1\\1&1&2\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}3&-5\\1&2\\0&-1\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}6&4\\5&-1\end{bmatrix}$;

5. $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&-5&1\\-2&-3&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1&1&2\\4&1&4\\2&-1&2\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}-1&1\\0&5\\3&-2\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}4\\-7\\0\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}2&7\\1&0\end{bmatrix}$;

6. $A=\begin{bmatrix}2&-3&1\\-3&4&-3\\-1&1&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\3&4&-2\\3&-2&4\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}-2&2\\1&7\\0&8\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}7\\-6\\1\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}3&4\\0&5\end{bmatrix}$;

7. .$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&3&2\\-2&-5&0\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&-1&3\\2&1&-2\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}3&0\\-2&4\\1&-1\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}3\\-3\\2\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}0&2\\-1&-3\end{bmatrix}$;

8. $A=\begin{bmatrix}4&2&3\\4&-5&1\\-2&-3&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}0&3&0\\-1&3&2\\1&-2&4\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}-4&1\\3&-2\\1&0\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}7\\-5\\-1\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}$;

9. $A=\begin{bmatrix}5&2&4\\3&-2&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-2&1&1\\-1&0&1\\5&-1&-3\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}5&-5\\6&0\\8&-1\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}11\\0\\-7\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}1&-1\\4&5\end{bmatrix}$;

10. $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\3&2&0\\2&3&-13\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1&4&-5\\4&-1&0\\6&1&3\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}3&-1\\2&7\\-3&5\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}-5\\3\\-4\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}1&0\\-3&3\end{bmatrix}$;

11. $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\-5&7&2\\3&-1&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&3&1\\3&1&-1\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}-2&6\\1&-2\\9&0\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}6\\8\\-3\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}-3&2\\0&-4\end{bmatrix}$;

12. $A=\begin{bmatrix}-4&2&10\\-4&3&7\\-3&1&7\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2&-5&3\\1&5&-3\\-4&0&4\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}6&2\\-5&-7\\-3&0\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}2\\-2\\9\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}3&1\\4&-1\end{bmatrix}$;

13. $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&1&7\\2&-2&2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}7&-3&0\\1&3&5\\-6&4&2\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}4&10\\-10&1\\0&4\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}13\\1\\-2\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}2&3\\2&-4\end{bmatrix}$;

14. $A=\begin{bmatrix}-2&2&3\\1&0&1\\-4&2&5\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-1&7&8\\1&-3&4\\5&3&-2\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}1&-1\\5&7\\-8&1\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}4\\-3\\5\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}1&1\\-2&5\end{bmatrix}$;

15. $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&1\\2&4&-1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&-2&5\\3&9&4\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}2&-3\\2&0\\-5&1\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}1\\20\\-6\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}-1&3\\1&2\end{bmatrix}$;

16. $A=\begin{bmatrix}2&5&-1\\1&-1&1\\-3&4&0\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&2&6\\3&7&1\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}2&4\\-6&-2\\0&2\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}5\\-7\\0\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}-5&0\\4&2\end{bmatrix}$;

17. $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&2&1\\-1&0&3\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-2&6&0\\4&-3&2\\4&-4&1\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}3&0\\-2&1\\-7&5\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}15\\-1\\1\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}2&0\\-6&1\end{bmatrix}$;

18. $A=\begin{bmatrix}2&3&5\\0&1&4\\-7&4&-3\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}3&-1&4\\1&-1&5\\6&1&4\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}1&-9\\0&4\\-4&2\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}-4\\-7\\1\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}-2&2\\-1&3\end{bmatrix}$;

19. $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 8\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}11 & -2\\ 3 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}5\\ -4\\ 0\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}-7 & 1\\ -3 & 7\end{bmatrix}$;

20. $A=\begin{bmatrix}1 & -9 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 8 & 0 & 5\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}0 & 9\\ -5 & 6\\ 9 & -2\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}-1\\ 22\\ -4\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 10 & 1\end{bmatrix}$;

21. $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 4 & 8\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 4 & 0 & 11\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}4 & -5\\ -3 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}6\\ -3\\ 2\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 1 & 8\end{bmatrix}$;

22. $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 4 & 1 & -3\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}8 & 1 & 2\\ -4 & 5 & 1\\ -1 & 2 & -3\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}0 & -5\\ 2 & 7\\ -8 & 1\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}4\\ 3\\ -2\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}-1 & 9\\ 0 & 2\end{bmatrix}$;

23. $A=\begin{bmatrix}3 & 8 & -1\\ -1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}5 & 10 & 3\\ 4 & -7 & 1\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 3 & 1\\ -2 & 7\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}-5\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}9 & 0\\ -7 & 1\end{bmatrix}$;

24. $A=\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 7 & 5 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & -8 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 11\\ -8 & 2\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}8\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$;

25. $A=\begin{bmatrix}-2 & 6 & 2\\ 2 & -1 & 15\\ 4 & 0 & 8\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 4\\ -1 & 2 & -3\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -5 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}-1\\ 9\\ -5\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$;

26. $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ -8 & 1 & 3\\ 6 & -1 & 3\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 1\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & -3\\ -4 & 2\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}10\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}4 & 5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$;

27. $A=\begin{bmatrix}4&-2&4\\10&2&12\\1&2&2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2&7&-1\\3&3&-5\\1&2&1\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}3&6\\-2&5\\0&1\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}0\\-8\\9\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}3&2\\-3&1\end{bmatrix}$;

28. $A=\begin{bmatrix}1&-7&9\\2&2&3\\-3&5&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1&1&3\\2&-3&1\\3&2&-1\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}5&0\\-6&7\\-3&1\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}4\\-3\\-3\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}9&1\\-2&4\end{bmatrix}$;

29. $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\-3&-2&3\\5&4&2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}3&-8&4\\5&-5&2\\2&-9&3\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}2&0\\-3&8\\1&-2\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}-5\\-2\\7\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}-6&2\\1&-3\end{bmatrix}$;

30. $A=\begin{bmatrix}5&2&1\\1&4&3\\-3&2&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1&4&3\\-2&2&-3\\3&-3&5\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}5&0\\-1&1\\3&-4\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}-12\\8\\-1\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}3&-1\\-1&11\end{bmatrix}$;

7.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Дослідити систему рівнянь на сумісність. Якщо вона сумісна, розв'язати її за формулами Крамера, матричним методом, методом Гауса.

I

1. $\begin{cases}5x_1-x_2-x_3=0\\2x_1+4x_2-x_3=7\\x_1+2x_2+6x_3=23\end{cases}$

2. $\begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3=8\\4x_1+5x_2+x_3=-16\\-3x_1\qquad-4x_3=17\end{cases}$

3. $\begin{cases}2x_1+x_2\qquad=3\\4x_1+3x_2-3x_3=2\\-6x_1+5x_2+7x_3=52\end{cases}$

4. $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-2\\4x_1-3x_2+x_3=1\\2x_1+x_2-x_3=1\end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 9 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -9 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -7 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 21 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 7x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -9x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$

II

1. $\begin{cases} x_1 + \qquad 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 8x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ -4x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -9x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -6x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 7x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

30. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

III

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 7 \\ 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8 \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -2x_1 - 6x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 = 4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x_2 + 4x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 2 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -5 \\ -5x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 9x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -3 \\ 8x_1 + 9x_2 + 17x_3 = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 3 \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -1 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ -5x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 1 \\ -3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ -3x_1 \qquad + 9x_3 = -5 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 \qquad = 3 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ 6x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$

IV

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 \qquad + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 9x_2 + 20x_3 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 0 \\ -5x_1 + 7x_2 - 8x_3 = 0 \\ -9x_1 + 2x_2 - 17x_3 = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 - 12x_2 + 13x_3 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -8x_1 - 12x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ \quad 9x_2 - 10x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \\ -5x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ \quad 10x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 13x_3 = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_2 - 7x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ -4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 8x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -6x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 8x_1 + 7x_2 + 15x_3 = 0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 0 \\ -4x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

30. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -7x_1 - x_2 + 10x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$

VII
Тести з лінійної алгебри

***1*. Визначник змінює знак при:**
а) винесенні загального множника рядка за знак визначника;
б) транспонуванні;
в) перестановці двох рядків.

***2*. Визначник дорівнює нулю якщо:**
а) всі рядки різні;
б) є однакові рядки.
в) всі стовпчики різні

***3*. Відмінність мінору від алгебраїчного доповнення:**
а) немає відмінностей;
б) конкретним значенням;
в) наявністю знака.

***4*. Відмінність матриці від визначника:**
а) немає відмінностей;
б) тільки знаком;
в) матриця - таблиця, визначник - число.

***5*. Для якої матриці існує обернена до неї:**
а) прямокутної;
б) квадратної;
в) довільної.

***6.* Квадратна матриця називається невиродженою, якщо її визначник:**
а) дорівнює нулю;
б) відмінний від нуля;
в) величина визначника не має значення.

***7.* Система лінійних рівнянь називається несумісною, якщо вона має:**
а) безліч розв'язків;
б) не має розв'язків;
в) єдиний розв'язок.

***8.* Система сумісна і має єдиний розв'язок, якщо:**
а) її визначник відмінний від нуля;
б) її визначник дорівнює нулю;
в) величина визначника не має значень.

***9.* Система лінійних однорідних рівнянь має безліч розв'язків, якщо:**
а) її визначник відмінний від нуля;
б) її визначник дорівнює нулю;
в) величина визначника не має значення.

***10.* Якщо у системі лінійних однорідних рівнянь її визначник дорівнює нулю, то система має:**
а) безліч розв'язків;
б) не має розв'язків;
в) єдиний розв'язок.

***11.* За методом Гауса елементарні перетворення виконуються над:**
а) матрицею з коефіцієнтів при невідомих;
б) розширеною матрицею;
в) довільно складеною матрицею.

***12.* Однорідна система m рівнянь з n невідомими має:**
а) єдину систему функціональних рішень;
б) не має системи функціональних рішень;
в) має кілька систем функціональних рішень.

***13.* Система лінійних однорідних рівнянь має тривіальний розв'язок, якщо:**

а) її визначник відмінний від нуля;
б) її визначник дорівнює нулю;
в) величина визначника не має значення.

***14.* Як зміниться визначник матриці четвертого порядку, якщо кожен її елемент помножити на 2?**

а) збільшиться в 4 рази;
б) не зміниться;
в) збільшиться в 16 разів;
г) збільшиться у 8 разів;
д) збільшиться в 2 рази.

***15.* Як зміниться визначник, якщо з його першого рядка відняти третій, який помножений на три?**

а) змінить свій знак;
б) не зміниться;
в) збільшиться в 3 рази;
г) стане рівним нулю;
д) інша відповідь.

***16.* Рішенням рівняння XA = B, де A, B - квадратні матриці одного і того ж порядку, причому A - невироджена матриця, є матриця X.**

а) $X = A^{-1} \cdot B$
б) $X = B \cdot A$
в) $X = A \cdot B$
г) $X = B \cdot A^{-1}$
д) $X = B^{-1} \cdot A$

***17.* Якому числу дорівнює алгебраїчне доповнення елемента a_{23} визначника**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

а) -14;
б) 32;
в) 14;
г) 8;
д) -32.

VIII
Питання для самоконтролю

1. Запишіть загальний вигляд системи ***m*** лінійних алгебраїчних рівнянь з ***n*** невідомими.
2. Дайте означення сумісної, несумісної, визначеної, невизначеної системи лінійних рівнянь.
3. Для яких систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовуються формули Крамера? Чи кожну визначену систему можна розв'язати за формулами Крамера?
4. Для яких систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовується матричний метод розв'язання?
5. У чому полягає метод Гауса? Чи кожну систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна розв'язати за методом Гауса?
6. Сформулюйте критерій сумісності системи лінійних рівнянь.
7. Чи може однорідна система лінійних рівнянь бути несумісною? Невизначеною?
8. У якому випадку однорідна система трьох лінійних рівнянь має єдиний розв'язок? Безліч розв'язків? За якими формулами знаходять розв'язок системи?
9. Запишіть співвідношення балансу, необхідні для збалансованого функціонування галузей.
10. У якому випадку матриця прямих витрат є продуктивною? Сформулюйте критерій продуктивності.
11. Що називають визначником другого порядку?
12. Що називають визначником третього порядку?
13. Дайте означення мінора та алгебраїчного доповнення.
14. Сформулюйте теорему про розклад визначника за елементами рядка (стовпця). Як застосовується ця теорема при обчисленні визначників вищих порядків?
15. Назвіть основні властивості визначників.
16. Чому дорівнює сума добутків елементів одного рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення елементів другого рядка (стовпця)?
17. Що називають матрицею?
18. Які існують дії над матрицями і як вони визначаються?
19. Дайте означення оберненої матриці.
20. Як обчислюється обернена матриця?
21. Чому дорівнює добуток матриці A та оберненої матриці A^{-1} ?

Рекомендована література

1. Барабаш О. В., Дзядик С. Ю., Жданова Ю. Д., Омецинська О. Б., Онищенко В. В., Шевченко С. М. Вища математика. Частина 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних. Київ : ДУТ, 2015. – 435 с.
2. Вища математика : базовий підручник для студентів ВНЗ / [Пономаренко В. С., Малярець Л. М., Бойко А. В. та ін.]; за ред. І. М. Коваль– Харків: Фоліо, 2014. – 667 с.
3. Городнов В. П. Вища математика (популярно, із прикладами) Харків : Вид-во НУА, 2005. 383с.
4. Дубовик В. П. , Юрик І. І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: Видавництво А. С. К., 2003. – 648 с.
5. Лавренчук В.П., Настасієв П.П., Мартинюк О.В., Кондур О.С. Вища математика. Загальний курс. Чернівці: Книги – XXI, 2010. 556с.
6. Лиман Ф. Вища математика : навч. посіб. у 2-х частинах / Ф. Лиман, В. Власенко, С. Петренко. – К.: Вид-во. «Університетська книга», 2018. – 614 с.
7. Рудницький В.Б., Діхтярук М.М., Рамський А.О. Курс вищої математики для студентів економічного і технологічного напрямків навчання. – Хмельницький, 2017. – 456 с
8. Турчанінова Л.І. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. / Л.І. Турчанінова, О.В. Доля. – К.: Вид-во «Ліра-К», 2018. – 348 с.
9. Соколенко О. І. Вища математика: Підручник. – К.: „Академія”, 2002. – 432 с.