

Олександр Тадєєв

кандидат технічних наук, доцент кафедри геодезії та картографії

Національний університет водного господарства та природокористування (Рівне, Україна)

E-mail: o.a.tadeyev@nuwm.edu.ua, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4566-0160>, ResearcherID: B-6081-2019**ПЕРСПЕКТИВИ ОЦІНЮВАННЯ ТРИВИМІРНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ЗЕМЛІ
ЗА ДАНИМИ ГЛОБАЛЬНИХ НАВІГАЦІЙНИХ СУПУТНИКОВИХ СИСТЕМ**

Представлена в статті інформація є науково-методичного характеру. Пропонується метод оцінювання деформації Землі з позицій теорії перетворень образів ріманового простору в формі складних диффеоморфних многовидів. Зокрема, використано властивості дотичного евклідового простору, який параметризований декартовою системою координат. Такий вибір обґрунтовано її тотожністю з системою ITRS, у якій реалізується моніторинг координат методом GNSS. Розроблений метод забезпечує пряме використання координат у системі ITRS і моделювання деформації топографічної поверхні Землі у тривимірному просторі з метою оцінювання тензорів і пов'язаних з ними інваріантів деформації.

Ключові слова: GNSS; ITRS; деформація; метричний тензор; диффеоморфні многовиди; гомеоморфізм.

Рис.: 2. Бібл.: 22.

Актуальність теми дослідження. Дослідження деформації Землі посідає чільне місце серед завдань, які у рамках міждисциплінарної співпраці покликані вирішувати широке коло наук про Землю. Мету і зміст досліджень проблеми на геодезичній основі визначено резолюціями комісії 3 «Обертання Землі та геодинаміка» Міжнародної асоціації геодезії IAG (International Association of Geodesy). Акцентовано на необхідності розроблення методів моделювання та аналізу деформацій на теоретичному рівні з їх практичним втіленням у вивчення генезису та інтерпретацію геодинамічних явищ різних масштабів. Як основне джерело вихідних даних для вирішення проблеми рекомендовано використовувати результати моніторингу координат методом GNSS (Global Navigation Satellite System) [1].

Постановка проблеми. Впровадження у геодезичну практику супутникових навігаційних технологій, котрі реалізовані в мережах станцій GNSS, забезпечує безперервний моніторинг їх координат у системі ITRS (International Terrestrial Reference System). Накопичення просторово-часового спектра й точності таких даних спроможне збільшити ефективність вирішення задач сучасної геодинаміки. Однак їх масове застосування для потреб деформаційного аналізу посвідчило необхідність переосмислення традиційних теоретичних підходів і розроблення новітніх методів вирішення задач. Найбільшою мірою це стосується розроблення методів оцінювання тривимірних деформацій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Найпростіше вирішення проблеми шляхом прямого використання координат у системі ITRS досягається методом скінченних елементів у рамках тривимірного симплекса (тетраедра) на основі лінійної моделі деформації. Метод і раніше використовувався у дослідницькій практиці, якщо вдавалось сумістити пункти класичних планових і висотних геодезичних мереж. За такого підходу оцінюється тривимірний тензор Ейлера-Лагранжа першого роду. Інваріанти деформації, які є наслідком тензора, забезпечують інтерпретацію явища щодо барицентру симплекса [2; 3], але не до геодезичної референцної чи, тим більше, топографічної поверхні, на якій проводяться безпосередні виміри методом GNSS. Така особливість методу має очевидний позитив хіба що при оцінюванні локальних лінійних деформацій земної кори в умовах значного пересіченого рельєфу.

Оригінальний за змістом напрямок досліджень започатковано у дослідженнях [4]. Запропонований метод ґрунтується на гіпотезі сферичності Землі й використовує вхідними даними координати GNSS-станцій у локальній сферичній системі λ, φ, r . Автори свідомо

нехтують вертикальними рухами Землі й визначають компоненти двовимірного тензора деформації, який належить до частини відповідної локальної сферичної поверхні Землі. На таких умовах тензор є носієм виключно горизонтальної складової деформації. Третя координата r фіксує вектор обертання локальної поверхні навколо умовного полюсу. Його пов'язують із жорсткими обертаннями Землі навколо вектора Ейлера. Метод використано при оцінюванні локальних та регіональних деформацій, наприклад, у дослідженнях [5; 6]. Варто виокремити наступний важливий аспект застосування методу. Беручи до уваги поєднання закладеної у нього гіпотези сферичності Землі з тектонічною теорією взаємних переміщень літосферних плит, використанням методу досягається аналіз деформаційних процесів у межах літосферних плит у тектонічних кінематичних моделях Землі типу GSRM (Global Strain Rate Model) [7]. Автори вважають, що метод забезпечує оцінювання тривимірного тензора, однак з погляду класичної теорії він не виражає просторових деформацій.

Просторові координати GNSS-станцій у системі ITRS отримано вимірами безпосередньо на топографічній поверхні. Вони забезпечують її описування як криволінійної поверхні, вбудованої у тривимірний простір. Це викликало закономірну потребу розроблення методів вирішення проблеми, які спроможні оцінити відповідні тривимірні тензори й пов'язані з ними інваріанти, віднесені до топографічної поверхні.

Перші результати досліджень у такому напрямі викладено у працях [8; 9; 10]. Основою досліджень стало диференціальне подання поверхонь у теорії пластин та оболонок механіки суцільного середовища. Розв'язки на цій основі можна досягнути засобами зовнішнього або внутрішнього моделювання деформацій, як це подано авторами праці [9]. Зовнішнє моделювання деформацій передбачає пряме використання координат у системі ITRS і моделювання деформації топографічної поверхні у тривимірному просторі з наступним оцінюванням тривимірних тензорів і пов'язаних з ними інваріантів, які віднесені до цієї поверхні. Унаслідок складних диференціальних формулювань, на думку авторів праці [9], такий підхід не знайшов практичного застосування. Натомість використано засоби внутрішнього моделювання. Їх суть зводиться до оцінювання деформації топографічної поверхні роздільно у горизонтальній і вертикальній складових. Оцінки горизонтальних деформацій одержано моделюванням змін метрики градуйованої поверхні з використанням тензора деформації Ейлера-Лагранжа першого роду. Оцінювання вертикальних деформацій досягається за посередництва пов'язаних інваріантів тензора обертання і тензора Ейлера-Лагранжа другого роду. Вирішення завдань деформаційного аналізу в геодинаміці на основі внутрішнього моделювання до цього часу широко застосовується в дослідній практиці. Деякі результати прикладних досліджень представлено, наприклад, у працях [11; 12; 13; 14; 15].

Однак залишається щонайменше сумнівною аргументація авторів обраного підходу щодо віднесення тензорів до топографічної поверхні. Достатньо розкрити зміст терміну «внутрішнє моделювання деформацій земної поверхні як градуйованої двовимірної криволінійної поверхні» [9]. Градуйоване описування будь-якої поверхні зумовлює необхідність її параметризації з наступним розділенням на скінченні елементи. З геометричної точки зору топографічна поверхня надзвичайно складна і не підлягає параметризації доступними методами навіть з використанням моделі у формі геоїда. З метою досягнення розв'язків, як це подано, наприклад, у працях [11; 16], як параметризовану поверхню автори використовували еліпсоїд. Градуйоване подання еліпсоїда досягається шляхом його розділення на трикутники [16] або чотирикутники [11]. Таким чином, обчислені на такій основі тензори з їх інваріантами потрібно відносити до барицентрів цих фігур на еліпсоїді, але не до топографічної поверхні.

Використовувані методи розв'язання проблеми мають ще одну властивість, яка гранично звужує їх потенційні можливості щодо адекватного оцінювання деформації – вони спроможні передати тільки лінійну складову деформації. Адже означені тензори – це лінеаризовані форми подання реальних полів деформації. Навіть якщо описувати поля зміщень тими чи іншими нелінійними функціями, вони однаково підлягатимуть лінеаризації і у підсумку тензор виражатиме лише лінійні закономірності деформації.

Виділення недосліджених частин загальної проблеми. Проведений аналіз показує, що використовувані теоретична основа й методи оцінювання деформацій в умовах земної кори мають недостатній ступінь відповідності потенційному інформаційному ресурсу GNSS-даних. Головні аргументації такого висновку наступні.

1. Усі дослідження ґрунтуються на математичній теорії пружності, використовують найпростішу модель лінійно-однорідної нескінченно малої деформації суцільного середовища й реалізуються методом скінченних елементів. Використовувана модель здатна передавати лише афінні перетворення координат вершин скінченних елементів, що зумовлює оцінювання виключно лінійної складової деформації. Нелінійні моделі деформації в дослідницькій практиці не використовуються.

2. Поділ території на скінченні елементи в умовах земної кори здебільшого реалізується формально. Це зумовлює ризики втрати адекватності лінійної моделі реальній деформації і ставить під сумнів достовірність результатів опрацювання даних.

3. Числові оцінки деформації відносяться до модельних поверхонь чи барицентрів скінченних елементів, але не до топографічної поверхні, на якій проявляються досліджувані процеси й доступний їх прямиий моніторинг методом GNSS.

4. Використовувані методи не забезпечують оцінювання тривимірних деформацій планетарного масштабу.

Мета дослідження. Констатовані аргументації стали мотивацією для пошуку узагальнюючого теоретичного підходу і розроблення методу вирішення проблеми оцінювання тривимірних деформацій, який не обтяжений переліченими недоліками.

Виклад основного матеріалу. Обґрунтування теоретичного підходу. Обґрунтуємо вирішення проблеми з точки зору теорії перетворення образів ріманового простору в формі складних диффеоморфних многовидів [17]. Диффеоморфні многовиди – це пара не-ізотропних многовидів однакової розмірності, які зазнають взаємно однозначного і неперервно диференційованого (гомеоморфного) перетворення. Нехай складний многовид – це тривимірний евклідовий простір E_3 , котрий дотичний до всякої точки ріманового простору в формі локальних ортонормованих координатних базисів у декартовій системі. Такий вибір обумовлений тим, що система координат, у якій здійснюється їх моніторинг методом GNSS, є частковим випадком декартової. Визначальну гіпотезу сформулюємо як таку, що перетворення простору мають геофізичне походження і ототожнюються з деформацією.

Перетворення (або відображення) простору – це процес, суть якого полягає у тому, що всякій точці M простору встановлюється у відповідність точка M' ; M' – це відображення M . Таке відображення завжди буде однозначним, якщо точці M відповідає одна і лише одна точка M' . Сукупність N точок M_i ($i = 1, N$) якоїсь частини або навіть всього простору, котрі зазнають перетворення, формують відображену область Δ . Сукупність точок M'_i формують область відображення Δ' . Допустимо, в просторі E_3 визначено систему координат x, y, z . Якщо Δ неперервна і замкнена, то її повністю визначають точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Якщо внаслідок однозначного відображення Δ трансформувалась у Δ' і остання залишилась неперервною і замкненою, то її повністю визначають точки $M'_i(x'_i, y'_i, z'_i)$.

У викладеній постановці проблеми загальна теорія не накладає жодних обмежень на розміри чи геометричну форму областей Δ і Δ' . Це є підставою вважати областю Δ топографічну поверхню безвідносно до її масштабу – Землю в цілому або її частину. Тоді можна допустити наступне: точки M_i – це GNSS-станції, які розміщені на топографічній поверхні, а їх положення задають координати $x_i = X_i^1$, $y_i = X_i^2$, $z_i = X_i^3$ як такі, що узгоджуються з умовами параметризації Землі системою ITRS.

Якщо координати $x'_i = X_i'^1$, $y'_i = X_i'^2$, $z'_i = X_i'^3$ задають положення точок M'_i , які є відображенням M_i , то трансформацію Δ у Δ' завжди можна описати рівняннями тієї чи іншої аналітичної форми:

$$\left. \begin{aligned} X'^1 &= u(X^1, X^2, X^3) \\ X'^2 &= v(X^1, X^2, X^3) \\ X'^3 &= w(X^1, X^2, X^3) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Теорія перетворення образів ріманового простору накладає на базисні функції (1) умови гомеоморфізму – однозначність, неперервність і диференційованість. Але не висуває жодних умов до їх аналітичних форм. Отже, це розкриває перспективу передавати перетворення якими завгодно гладкими або кусково-гладкими функціями, котрі підлягають визначенню за змінами координат $X_i'^k - X_i^k$ ($k = \overline{1,3}$), і у підсумку виражати деформації нелінійного характеру.

Беручи до уваги останні аргументації, для визначення базисних функцій доцільно використати властивості загальних гармонічних поліномів степені n

$$u_n(x, y, z) = \sum_{p+q+r=n} a_{pqr} x^p y^q z^r \quad (2)$$

Гармонічні поліноми (2) з $2n + 1$ незалежними коефіцієнтами називають кульовими функціями. Якщо гармонічний поліном u є сумою незалежних однорідних поліномів $u_0 + u_1 + \dots + u_n$, де u_i має степінь i , то кожна складова суми – це гармонічний поліном. Тоді u – це ряд гармонічних поліномів (або ряд кульових функцій). Його легко побудувати, враховуючи, що завжди залишаються незалежними коефіцієнти з індексами $p + q = n$ і $p + q + 1 = n$. У розрізі вирішуваного завдання розклад (2) в ряд кульових функцій зводиться до найкращого наближення заданої сукупності емпіричних значень координат шляхом лінійної комбінації системи трьох осцилюючих функцій. Підвищуючи степінь кожної з них, зростає детальність покриття емпіричних даних і підвищується точність апроксимації. Побудова функціональної моделі (1) на такій основі може бути реалізована методом найменших квадратів. Тоді разом з визначенням емпіричних формул розкривається можливість оцінювання ступеня наближення розв'язку до строгого з точки зору умов гомеоморфізму. Отримана на таких засадах система трьох емпіричних формул формує функціональну модель деформації.

На початковий момент часу t_0 система координат $x_i = X_i^1$, $y_i = X_i^2$, $z_i = X_i^3$ області Δ є декартова прямокутна. Метрику області визначає лінійний елемент ds :

$$ds^2 = \delta_{ij} dX^i dX^j \quad (3)$$

Ортогональність осей координат зумовлює метричні коефіцієнти $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

Для відображення ds' лінійного елемента ds , яке відповідає перетвореній області Δ' на момент часу $t_1 = t_0 + dt$,

$$ds'^2 = e_{ij}dX^i dX^j. \quad (4)$$

Метричні коефіцієнти e_{ij} генерують симетричну матрицю, яку називають метричним двовалентним коваріантним тензором перетворення (деформації) простору:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Алгоритм розкриття коефіцієнтів тензора (5) такий:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left(\frac{\partial u}{\partial X^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X^1}\right)^2; & e_{22} &= \left(\frac{\partial u}{\partial X^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X^2}\right)^2; \\ e_{33} &= \left(\frac{\partial u}{\partial X^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X^3}\right)^2; & e_{12} &= \frac{\partial u}{\partial X^1} \frac{\partial u}{\partial X^2} + \frac{\partial v}{\partial X^1} \frac{\partial v}{\partial X^2} + \frac{\partial w}{\partial X^1} \frac{\partial w}{\partial X^2}; \\ e_{23} &= \frac{\partial u}{\partial X^2} \frac{\partial u}{\partial X^3} + \frac{\partial v}{\partial X^2} \frac{\partial v}{\partial X^3} + \frac{\partial w}{\partial X^2} \frac{\partial w}{\partial X^3}; & e_{13} &= \frac{\partial u}{\partial X^1} \frac{\partial u}{\partial X^3} + \frac{\partial v}{\partial X^1} \frac{\partial v}{\partial X^3} + \frac{\partial w}{\partial X^1} \frac{\partial w}{\partial X^3}. \end{aligned}$$

Беручи до уваги визначальну гіпотезу щодо геофізичного походження зміни метричних властивостей простору, тензор (5) необхідно визнати тензором деформації. Будучи носієм інформації про зміни метричних властивостей простору, тензор спроможний передавати ознаки цих змін за допомогою характеристик деформації з різним геометричним змістом.

Результати розв'язків. Аналітичне вираження характеристик деформації одержано застосуванням методів проєктивно-диференціальної геометрії і прийомів описування змін ріманової метрики в дотичному просторі. Взято до уваги, що міра деформації виражається різницею або відношенням метричних форм (3) і (4) [17]. Слідуючи усталеній практиці деформаційного аналізу, характеристики поділено на три групи.

1. Головні лінійні деформації – це характеристики зміни форми області Δ у заданому напрямі. Таку ознаку деформації виражає коефіцієнт розширення μ – він є наслідком відношення ds'/ds . Для різних напрямів, які задають полярні геоцентричні координати (λ, φ) , одержано наступне [18]:

1) коефіцієнт розширення області Δ у довільно заданому напрямі

$$\begin{aligned} \mu^2 &= e_{11} \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + e_{22} \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + \\ &+ e_{33} \sin^2 \varphi + e_{12} \cos^2 \varphi \sin 2\lambda + e_{23} \sin 2\varphi \sin \lambda + e_{13} \sin 2\varphi \cos \lambda; \end{aligned} \quad (6)$$

2) коефіцієнти розширення у напрямках осей координат

$$\mu_1^2 = e_{11}, \quad \mu_2^2 = e_{22}, \quad \mu_3^2 = e_{33}; \quad (7)$$

3) коефіцієнти екстремальних розширень у головних ортогональних напрямках у проєкціях на координатні площини, як їх показано на рис. 1:

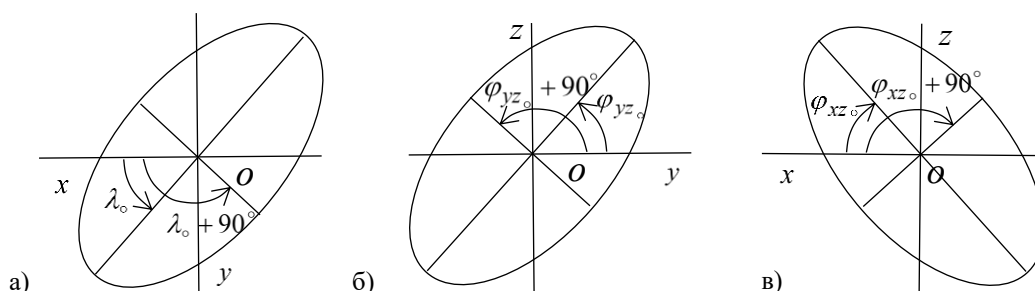


Рис. 1. Напрями екстремальних розширень у проєкціях на координатні площини [18]

- λ_0 і $\lambda_0 + 90^\circ$ на площині X^1OX^2 (xOy , рис. 1, а):

$$\begin{aligned} \mu_{12\max}^2 &= \frac{1}{2} \left(e_{11} + e_{22} + \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2} \right), \\ \mu_{12\min}^2 &= \frac{1}{2} \left(e_{11} + e_{22} - \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2} \right), \end{aligned} \tag{8}$$

де $tg 2\lambda_0 = \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}}$;

- φ_{23_0} і $\varphi_{23_0} + 90^\circ$ на площині X^2OX^3 (yOz , рис. 1, б):

$$\begin{aligned} \mu_{23\max}^2 &= \frac{1}{2} \left(e_{22} + e_{33} + \sqrt{(e_{22} - e_{33})^2 + 4e_{23}^2} \right), \\ \mu_{23\min}^2 &= \frac{1}{2} \left(e_{22} + e_{33} - \sqrt{(e_{22} - e_{33})^2 + 4e_{23}^2} \right), \end{aligned} \tag{9}$$

де $tg 2\varphi_{23_0} = \frac{2e_{23}}{e_{22} - e_{33}}$;

- φ_{13_0} і $\varphi_{13_0} + 90^\circ$ на площині X^1OX^3 (xOz , рис. 1, в):

$$\begin{aligned} \mu_{13\max}^2 &= \frac{1}{2} \left(e_{11} + e_{33} + \sqrt{(e_{11} - e_{33})^2 + 4e_{13}^2} \right), \\ \mu_{13\min}^2 &= \frac{1}{2} \left(e_{11} + e_{33} - \sqrt{(e_{11} - e_{33})^2 + 4e_{13}^2} \right), \end{aligned} \tag{10}$$

де $tg 2\varphi_{13_0} = \frac{2e_{13}}{e_{11} - e_{33}}$;

4) коефіцієнти екстремальних розширень ($\mu_{12\min}^2, \mu_{\max}^2, \mu_{\min}^2$), які у просторі задає тріада головних ортогональних напрямів ($\lambda_0 + 90^\circ, \varphi_0, \varphi_0 + 90^\circ$):

$$\mu_{\max}^2 = \frac{1}{4} (e_{11} + e_{22} + 2e_{33} + \gamma_{12}^{(m)} + \gamma), \quad \mu_{\min}^2 = \frac{1}{4} (e_{11} + e_{22} + 2e_{33} + \gamma_{12}^{(m)} - \gamma), \tag{11}$$

де
$$\gamma = \sqrt{\left(e_{11} + e_{22} - 2e_{33} + \gamma_{12}^{(m)}\right)^2 + 4\left(2e_{23}\sqrt{\frac{\gamma_{12}^{(m)} - \gamma_{12}^{(1)}}{2\gamma_{12}^{(m)}}} + 2e_{13}\sqrt{\frac{\gamma_{12}^{(m)} + \gamma_{12}^{(1)}}{2\gamma_{12}^{(m)}}}\right)^2}; \gamma_{12}^{(m)} = \sqrt{\left(\gamma_{12}^{(1)}\right)^2 + \left(\gamma_{12}^{(2)}\right)^2}$$

максимальний зсув у площині X^1OX^2 (xOy); $\gamma_{12}^{(1)} = e_{11} - e_{22}$ і $\gamma_{12}^{(2)} = 2e_{12}$ – його

компоненти;
$$tg 2\varphi_0 = 2 \frac{2e_{23}\sqrt{\frac{\gamma_{12}^{(m)} - \gamma_{12}^{(1)}}{2\gamma_{12}^{(m)}}} + 2e_{13}\sqrt{\frac{\gamma_{12}^{(m)} + \gamma_{12}^{(1)}}{2\gamma_{12}^{(m)}}}}{e_{11} + e_{22} - 2e_{33} + \gamma_{12}^{(m)}}.$$

2. Дилатація – це характеристика зміни об’єму області Δ . У практиці деформаційного аналізу для оцінювання дилатації використовують коефіцієнти абсолютного θ_{abs} або відносного θ_{rel} об’ємного розширення. Аналітичне вираження θ_{abs} і θ_{rel} досягається складанням різних співвідношень елементів об’єму $dV = \sqrt{\delta}dX^1dX^2dX^3$ області Δ і $dV' = \sqrt{e}dX^1dX^2dX^3$ області Δ' . Зокрема, характеристикою абсолютного об’ємного розширення є інваріант $\theta_{abs} = \frac{dV'}{dV} = \sqrt{e}$, де $e = \det e_{ij}$ – це детермінант тензора e_{ij} :

$$\theta_{abs}^2 = e_{11}e_{22}e_{33} + 2e_{12}e_{13}e_{23} - e_{11}e_{23}^2 - e_{22}e_{13}^2 - e_{33}e_{12}^2. \tag{12}$$

Характеристика відносного об’ємного розширення є наслідком відношення
$$\theta_{rel}^2 = \frac{dV'^2 - dV^2}{dV^2}:$$

$$\theta_{rel}^2 = I_1 - I_2 + I_3 - 1. \tag{13}$$

З трьох інваріантів $I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$, $I_2 = e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} + e_{22}e_{33} - e_{12}^2 - e_{13}^2 - e_{23}^2$ та $I_3 = e_{11}e_{22}e_{33} + 2e_{12}e_{13}e_{23} - e_{11}e_{23}^2 - e_{22}e_{13}^2 - e_{33}e_{12}^2$ останній асоціюється з абсолютним коефіцієнтом об’ємного розширення (12). Подані тут узагальнені вираження дилатації використовують в задачах нелінійної теорії деформації [17].

Еквівалентні щодо (12) та (13) вираження для θ_{abs} і θ_{rel} одержано як результат добутку рівнянь для коефіцієнтів екстремальних розширень $(\mu_{12\min}^2, \mu_{\max}^2, \mu_{\min}^2)$, які відповідають тріаді головних ортогональних напрямів $(\lambda_0 + 90^\circ, \varphi_0, \varphi_0 + 90^\circ)$ [19]:

$$\theta_{abs}^2 = e_{11}e_{22}e_{33} - e_{33}e_{12}^2 + \frac{1}{2\gamma_{12}^{(m)}} \left(2e_{12}e_{13}e_{23} \left(\gamma_{12}^{(m)} - e_{11} - e_{22} \right) - e_{11}e_{23}^2 \left(\gamma_{12}^{(m)} - e_{11} \right) - e_{22}e_{13}^2 \left(\gamma_{12}^{(m)} - e_{22} \right) + \left(e_{13}^2 + e_{23}^2 \right) \left(2e_{12}^2 - e_{11}e_{22} \right) \right); \tag{14}$$

$$\theta_{rel}^2 = e_{11} + e_{22} + e_{33} - e_{11}e_{22} - e_{11}e_{33} - e_{22}e_{33} + e_{12}^2 + e_{11}e_{22}e_{33} - e_{33}e_{12}^2 + \frac{1}{2\gamma_{12}^{(m)}} \left(2e_{12}e_{13}e_{23} \left(\gamma_{12}^{(m)} + 2 - e_{11} - e_{22} \right) - e_{11}e_{23}^2 \left(\gamma_{12}^{(m)} + 1 - e_{11} \right) - e_{22}e_{13}^2 \left(\gamma_{12}^{(m)} + 1 - e_{22} \right) + e_{13}^2 \left(\gamma_{12}^{(m)} + e_{11} (1 - e_{22}) + 2e_{12}^2 \right) + e_{23}^2 \left(\gamma_{12}^{(m)} + e_{22} (1 - e_{11}) + 2e_{12}^2 \right) \right) - 1. \tag{15}$$

Результати розв’язків (12), (13) чи, рівною мірою (14), (15), придатні для оцінювання дилатації будь-якого характеру, як це спроможна передати гомеоморфна модель (1).

Для оцінювання дилатації з точки зору лінійної моделі теорії пружності беруть до уваги нескінченно малі центроафінні перетворення просторових тіл. Наслідком лінійного перетворення координат є детермінант, який ототожнюється виключно з інваріантом $I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$. Саме інваріант I_1 використовують для оцінювання дилатації в геодинаміці. Такий підхід спроможний забезпечити лише локальну лінійну апроксимацію априорі невідомої фактичної деформації. Спроба використати для побудови функціональної моделі ті чи інші нелінійні базисні функції жодним чином не забезпечує очікуваного ефекту. Нелінійні функції все одно підлягають лінеаризації. Адже у детерміністичних відношеннях «функція-тензор» на такій основі присутня не функція, яка передає деформацію, а її локальна лінійна апроксимація у нескінченно малому масштабі.

3. Жорсткі обертання Землі можуть проявлятися сумісно з головними лінійними деформаціями та дилатацією. Їх аналітичне вираження ґрунтується на змінах в системі параметризації простору в частині порушення ортогональності осей координат – на момент часу t_1 система X^i може набути властивостей косокутної декартової. Підтвердити або, рівною мірою, спростувати таку гіпотезу можна на основі наступних незаперечних геометричних аргументацій.

Довжини проєкцій лінійного елемента ds на осі координат системи E_3 з метрикою, яку закладено у тензор g_{ij} , виражають добутки $ds^{(i)} = \sqrt{g_{ii}} dX^i$. Вони є прямим наслідком квадратичної форми $ds^2 = g_{ij} dX^i dX^j$. Значення індексу i в проєкції $ds^{(i)}$ ідентифікує її належність осі X^i . Кути η_{ij} між парами проєкцій $ds^{(i)}$ та $ds^{(j)}$, як це ілюструє рис. 2, виражає відношення [17]

$$\cos \eta_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}}. \tag{16}$$

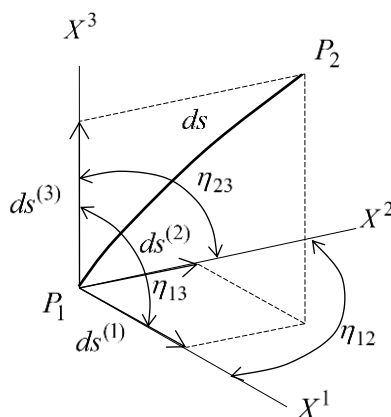


Рис. 2. Кути між проєкціями дуги ds на осі координат [20]

У початковому стані на момент часу t_0 система координат прямокутна, тому метричні коефіцієнти $g_{ij} = \delta_{ij}$ і $\eta_{ij}^{(0)} = 90^\circ$. Якщо на момент часу t_1 у просторі відбулись перетворення такого ступеня, що це призвело до зміни його метрики, то $g_{ij} = e_{ij}$. Якщо $e_{ij} \neq 0$, то з формули (16) слідує, що $\eta_{ij}^{(1)} \neq 90^\circ$. Отже, кути $\eta_{ij}^{(1)}$ слід інтерпретувати як абсолютні міри косокутної системи координат:

$$\cos \eta_{ij}^{(1)} = \frac{e_{ij}}{\mu_i \mu_j}. \quad (17)$$

Тоді кути $\varepsilon_{ij}^{(1)} = 90^\circ - \eta_{ij}^{(1)}$ виражають зміну прямого кута між парною проєкцій лінійного елемента ds на осі координат відносно початкового стану на момент t_0 :

$$\sin \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{e_{ij}}{\mu_i \mu_j}. \quad (18)$$

Отже, з погляду тензорного аналізу, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ – це характеристики кутових спотворень ортогональної системи координат [17].

У статті [20] подано результати аналітичного вираження кутів $\eta_{ij}^{(1)}$ і $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ у відношенні проєкцій лінійного елемента ds на координатні площини. Розв'язки ґрунтуються на вираженні взаємозв'язків диференціалів проєкцій пари осей координат на окремій площині станом на момент t_1 у системі координат цієї площини станом на момент t_0 . Одержано еквівалентні щодо (17), (18) аналітичні вираження кутів:

$$\operatorname{tg} \eta_{ij}^{(1)} = \frac{\sqrt{e}}{e_{ij}}; \quad (19)$$

$$\operatorname{ctg} \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{\sqrt{e}}{e_{ij}}, \quad (20)$$

де e – детермінант тензора (5).

Система параметризації будь-якої області простору завжди пов'язана з її станом. В умовах Землі неможливо вибрати систему координат, яка була б жорстко пов'язана з тілом планети і залишалась незмінною, коли остання деформується. Саме такою є система ITRS – вона жорстко прив'язана до Землі й зазнає трансформацій, які по мірі суттєвого вираження деформацій планети враховуються у формі реалізацій ITRF (International Terrestrial Reference Frame) [21; 22]. Виходячи з таких умов, потрібно констатувати наступне: кути $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ – це параметри, які разом з кутовими спотвореннями системи координат характеризують жорстке обертання Землі у напрямках між парами координатних осей $X^i X^j$ протягом періоду dt . Одержані формули враховують нелінійні ефекти деформації, наскільки їх спроможна передати функціональна модель (1) за посередництва тензора (5).

Висновки. Проблема оцінювання тривимірних деформацій Землі за GNSS-даними розглянута з позицій теорії перетворень образів ріманового простору в формі складних диффеоморфних многовидів. Зокрема, використано властивості дотичного евклідового простору з його параметризацією прямокутною декартовою системою координат. Саме така система параметризації закладена в основу ITRS, у якій реалізовується моніторинг координат методом GNSS. Використаний теоретичний підхід забезпечує пряме використання координат у системі ITRS і моделювання деформації топографічної поверхні Землі у тривимірному просторі з наступним оцінюванням тривимірних тензорів і пов'язаних з ними інваріантів, які віднесені до цієї поверхні. Одержано робочі формули для оцінювання головних лінійних деформацій, дилатації та жорсткого обертання Землі. Сформульовані положення, алгоритм побудови функціональної моделі на засадах гомеоморфізму перетворень і одержані робочі формули в сукупності утворюють метод оцінювання тривимірних деформацій Землі. Метод узагальнено для оцінювання нелінійних деформацій.

Список використаних джерел

1. IAG (International Association of Geodesy). Commission 3 – Earth Rotation and Geodynamics [Electronic resource]. – Access mode: http://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/handbook_2012/333_Commission_3.pdf.
2. Kiamehr, R. Analysis of surface deformation patterns using 3D finite element method: A case study in the Skane area, Sweden / R. Kiamehr, L.E. Sjoberg // *Journal of Geodynamics*. – 2005. – № 39(4). – P. 403-412. DOI: doi.org/10.1016/j.jog.2005.03.001.
3. Pietrantonio, G. Three-dimensional strain tensor estimation by GPS observations: methodological aspects and geophysical applications / G. Pietrantonio, F. Riguzzi // *Journal of Geodynamics*. – 2004. – № 38(1). – P. 1-18. DOI: doi.org/10.1016/j.jog.2004.02.021.
4. Savage, J. C. Strain accumulation and rotation in the Eastern California Shear Zone / J. C. Savage, W. Gan, J. L. Svarc // *Journal of Geophysical Research*. – 2001. – № 106(B10). – Pp. 21995-22007. DOI: doi.org/10.1029/2000JB000127.
5. Hammond, W.C. Crustal deformation across the Sierra Nevada, northern Walker Lane, Basin and Range transition, western United States measured with GPS, 2000-2004. / W.C. Hammond, W. Thatcher // *Journal of Geophysical Research*. – 2007. – № 112 (B5), B05411. DOI: [10.1029/2006JB004625](https://doi.org/10.1029/2006JB004625).
6. Kremer, C. Geodetic constraints on contemporary deformation in the northern Walker Lane: 2. Velocity and strain rate tensor analysis / C. Kremer, G. Blewitt, W.C. Hammond // *Late Cenozoic structure and evolution of the Great Basin – Sierra Nevada transition* / eds. J. S. Oldow, P. H. Cashman. – 2009. – Vol. 447. – P. 17-31. DOI: [10.1130/2009.2447\(02\)](https://doi.org/10.1130/2009.2447(02)).
7. Kremer, C. A geodetic plate motion and Global Strain Rate Model / C. Kremer, G. Blewitt, E. C. Klein // *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. – 2014. – № 15 (10). – Pp. 3849-3889. DOI: [10.1002/2014GC005407](https://doi.org/10.1002/2014GC005407).
8. Altiner, Y. Analytical surface deformation theory for detection of the Earth's crust movements / Y. Altiner. – Berlin : Springer, 1999.
9. Grafarend, E.W. Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on displacement fields derived from space geodetic measurements. Case studies: present-day deformation patterns of Europe and of the Mediterranean area (ITRF data sets) / E. W. Grafarend, B. Voosoghi // *Journal of Geodesy*. – 2003. – № 77. – P. 303-326. DOI: [10.1007/s00190-003-0329-2](https://doi.org/10.1007/s00190-003-0329-2).
10. Xu, P. L. Statistics and geometry of the eigenspectra of three-dimensional second-rank symmetric random tensor / P. L. Xu, E. W. Grafarend // *Geophysical Journal International*. – 1996. – № 127(3). – P. 744-756. DOI: [10.1111/j.1365-246X.1996.tb04053.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1996.tb04053.x).
11. Present-day tectonics in and around the Adria plate inferred from GPS measurements / Y. Altiner, Z. Bacic, T. Basic, A. Coticchia, M. Medved, M. Mulic, B. Nurce // *Geological Society of America Special Paper*. – 2006. – № 409. – P. 43-55. DOI: [10.1130/2006.2409\(03\)](https://doi.org/10.1130/2006.2409(03)).
12. Dermanis, A. Fundamentals of surface deformation and application to construction monitoring / A. Dermanis // *Applied Geomatics*. – 2011. – № 3. – P. 9-22. DOI: doi.org/10.1007/s12518-010-0040-y.
13. Grafarend, E.W. The transition from three-dimensional embedding to two-dimensional Euler-Lagrange deformation tensor of the second kind: variation of curvature measures / E. W. Grafarend // *Pure and Applied Geophysics*. – 2012. – № 169. – P. 1457-1462. DOI: [10.1007/s00024-011-0419-7](https://doi.org/10.1007/s00024-011-0419-7).
14. Hossainali, M. Comprehensive approach to the analysis of the 3D kinematics deformation with application to the Kenai Peninsula / M. Hossainali, M. Becker, E. Groten // *Journal of Geodetic Science*. – 2011. – № 1 (1). – P. 59-73. DOI: [10.2478/v10156-010-0008-1](https://doi.org/10.2478/v10156-010-0008-1).
15. Moghtased-Azar, K. Surface deformation analysis on dense GPS networks based on intrinsic geometry: deterministic and stochastic aspects / K. Moghtased-Azar, E. W. Grafarend // *Journal of Geodesy*. – 2009. – № 83. – P. 431-454. DOI: [10.1007/s00190-008-0252-7](https://doi.org/10.1007/s00190-008-0252-7).
16. Voosoghi, B. Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on 3-dimensional displacement fields derived from space geodetic measurements [Electronic resource] : dissertation / B. Voosoghi ; Institute of Geodesy, University of Stuttgart. – 2000. – Access mode: <http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2000/722/pdf/voosoghi.pdf>.
17. Sokolnikoff, I. S. Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua / I. S. Sokolnikoff. – New York, London, Sydney : John Wiley & Sons, 1964.
18. Tadyeyev, O. A. Evaluation of three-dimensional deformation fields of the Earth by methods of the projective differential geometry. The main linear deformation / O. A. Tadyeyev // *Geodynamics*. – 2016. – № 2(21). – P. 7-17. DOI: doi.org/10.23939/jgd2016.02.007.

19. Тадєєв, О. Оцінювання тривимірних деформаційних полів Землі методами проєктивно-диференціальної геометрії. Дилатаційні поля Землі / О. Тадєєв // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2017. – № I(33). – С. 53-60.
20. Tadyeyev, O. Evaluation of three-dimensional deformation fields of the Earth by methods of the projective differential geometry. Rigid rotations of the Earth / O. Tadyeyev // *Geodesy, Cartography and Aerial Photography*. – 2016. – № 84. – P. 25-38. DOI: doi.org/10.23939/istcgcap2016.02.025.
21. Moritz, H. Earth's Rotation. Theory and estimations / H. Moritz, I. I. Muller. – New York : Ungar, 1987.
22. IERS Conventions 2010. IERS Technical Note [Electronic resource] / eds. G. Petit, B. Luzum. – Frankfurt am Main : Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010. – Access mode: http://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechNote36/tn36_031.pdf.

References

1. IAG (International Association of Geodesy). Commission 3 – Earth Rotation and Geodynamics. http://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/handbook_2012/333_Commission_3.pdf.
2. Kiamehr, R., Sjöberg, L.E. (2005). Analysis of surface deformation patterns using 3D finite element method: A case study in the Skane area, Sweden. *Journal of Geodynamics*, 39(4), 403–412. doi.org/10.1016/j.jog.2005.03.001.
3. Pietrantonio, G., Riguzzi, F. (2004). Three-dimensional strain tensor estimation by GPS observations: methodological aspects and geophysical applications. *Journal of Geodynamics*, 38(1), 1–18. doi.org/10.1016/j.jog.2004.02.021.
4. Savage, J.C., Gan, W., Svarc, J.L. (2001). Strain accumulation and rotation in the Eastern California Shear Zone. *Journal of Geophysical Research*, 106(B10), 21995–22007. doi.org/10.1029/2000JB000127.
5. Hammond, W.C., Thatcher, W. (2007). Crustal deformation across the Sierra Nevada, northern Walker Lane, Basin and Range transition, western United States measured with GPS, 2000-2004. *Journal of Geophysical Research*, 112 (B5), B05411. doi: 10.1029/2006JB004625.
6. Kremer, C., Blewitt, G., Hammond, W.C. (2009). Geodetic constraints on contemporary deformation in the northern Walker Lane: 2. Velocity and strain rate tensor analysis. In Oldow, J.S., Cashman, P.H. (Eds.), *Late Cenozoic structure and evolution of the Great Basin – Sierra Nevada transition*, 17–31. Geological Society of America Special Paper 447. doi: 10.1130/2009.2447(02).
7. Kremer, C., Blewitt, G., Klein, E.C. (2014). A geodetic plate motion and Global Strain Rate Model. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 15 (10), 3849–3889. doi:10.1002/2014GC005407.
8. Altiner, Y. (1999). *Analytical surface deformation theory for detection of the Earths crust movements*. Berlin: Springer.
9. Grafarend, E.W., Voosoghi, B. (2003). Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on displacement fields derived from space geodetic measurements. Case studies: present-day deformation patterns of Europe and of the Mediterranean area (ITRF data sets). *Journal of Geodesy*, 77, 303–326. doi: 10.1007/s00190-003-0329-2.
10. Xu, P.L., Grafarend, E.W. (1996). Statistics and geometry of the eigenspectra of three-dimensional decond-rank symmetric random tensor. *Geophysical Journal International*, 127(3), 744–756. doi:10.1111/j.1365-246X.1996.tb04053.x.
11. Altiner, Y., Basic, Z., Basic, T., Coticchia, A., Medved, M., Mulic, M., Nurce, B. (2006). Present-day tectonics in and around the Adria plate inferred from GPS measurements. In Dilek, Y., Pavlides, S. (Eds.), *Postcollisional tectonics and magnetism in the Mediterranean region and Asia*, 43–55. Geological Society of America Special Paper 409. doi: 10.1130/2006.2409(03).
12. Dermanis, A. (2011). Fundamentals of surface deformation and application to construction monitoring. *Applied Geomatics*, 3, 9–22. doi.org/10.1007/s12518-010-0040-y.
13. Grafarend, E.W. (2012). The transition from three-dimensional embedding to two-dimensional Euler-Lagrange deformation tensor of the second kind: variation of curvature measures. *Pure and Applied Geophysics*, 169, 1457–1462. doi: 10.1007/s00024-011-0419-7.
14. Hossainali, M., Becker, M., Groten, E. (2011). Comprehensive approach to the analysis of the 3D kinematics deformation with application to the Kenai Peninsula. *Journal of Geodetic Science*, 1(1), 59–73. doi: 10.2478/v10156-010-0008-1.

15. Moghtased-Azar, K., Grafarend, E.W. (2009). Surface deformation analysis on dense GPS networks based on intrinsic geometry: deterministic and stochastic aspects. *Journal of Geodesy*, 83, 431–454. doi: 10.1007/s00190-008-0252-7.
16. Voosoghi, B. (2000). Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on 3-dimensional displacement fields derived from space geodetic measurements. *PhD thesis*. Institute of Geodesy, University of Stuttgart, Germany. <http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2000/722/pdf/voosoghi.pdf>.
17. Sokolnikoff, I.S. (1964). *Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua*. New York, London, Sydney, John Wiley & Sons.
18. Tadyeyev, O.A. (2016). Evaluation of three-dimensional deformation fields of the Earth by methods of the projective differential geometry. The main linear deformation. *Geodynamics*, 2(21), 7–17. doi.org/10.23939/jgd2016.02.007.
19. Tadyeyev, O. (2017). Otsiniuvannia tryvymirnykh deformatsiinykh poliv Zemli metodamy proektyvno-dyferentsialnoi heometrii. Dylatatsiini polia Zemli [Evaluation of three-dimensional deformation fields of the Earth by methods of the projective differential geometry. Dilatation fields of the Earth]. *Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva – Modern Achievements of Geodetic Science and Industry*, I(33), 53–60.
20. Tadyeyev, O. (2016). Evaluation of three-dimensional deformation fields of the Earth by methods of the projective differential geometry. Rigid rotations of the Earth. *Geodesy, Cartography and Aerial Photography*, 84, 25–38. doi.org/10.23939/istcgcap2016.02.025.
21. Moritz, H., Muller I.I. (1987). *Earth's Rotation. Theory and estimations*. New York: Ungar.
22. Petit, G., Luzum, B. (Eds.). (2010). *IERS Conventions 2010. IERS Technical Note; 36*. – Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie. Retrieved from http://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechNote36/tn36_031.pdf.

Отримано 12.12.2023

UDC 528.22+551.24

Oleksandr Tadyeyev

PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Geodesy and Cartography
National University of Water and Environmental Engineering (Rivne, Ukraine)

E-mail: o.a.tadyeyev@nuwm.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4566-0160>. ResearcherID: B-6081-2019

PROSPECTS FOR EVALUATION OF THREE-DIMENSIONAL DEFORMATIONS OF THE EARTH BASED ON DATA FROM GLOBAL NAVIGATION SATELLITE SYSTEMS

Presented in the article information is of a scientific and methodical character. Accumulation of coordinate monitoring data in networks of permanent GNSS stations made it possible to increase the efficiency of solving of many problems of modern geodynamics. At the same time, their use made it necessary to rethink traditional theoretical approaches to solving of the problem, in particular, in terms of developing methods for evaluation of three-dimensional deformations. The analysis of the used theoretical approaches and methods for evaluation of three-dimensional deformations of the Earth in this article are presented. The insufficient degree of their correspondence to the potential information resource of GNSS data is substantiated. The method for evaluation of deformations of the Earth from the standpoint of the theory of transformations of Riemannian space images in the form of complex diffeomorphic manifolds is proposed. Properties of complex manifolds in the form of a tangent Euclidean space, which is parameterized by a rectangular Cartesian coordinate system, are used. This choice is justified by its identity with the ITRS system, which is used to monitoring of coordinates by the GNSS method. The algorithm for constructing a functional model of deformation based on the homeomorphism of transformations is formulated. The method involves the direct use of coordinates in the ITRS system and modeling of deformations of the curvilinear topographic surface of the Earth in three-dimensional space. The method provides evaluation of three-dimensional deformation tensors and related invariants, which belong to the topographic surface. Working formulas for evaluation of main linear deformations, dilatation and rigid rotation of the Earth have been obtained. The method is generalized for evaluation of nonlinear deformations.

Keywords: GNSS; ITRS; deformation; metric tensor; diffeomorphic manifolds; homeomorphism.

Fig.: 2. References: 22.