

УДК 621.391

В.К. Чумак, канд. техн. наук

Національний технічний університет України “КПІ”, м. Київ, Україна

С.В. Зайцев, канд. техн. наук

О.І. Вервейко, канд. техн. наук

Чернігівський державний технологічний університет, м. Чернігів, Україна

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ МІМО ПІД ЧАС ДІЇ ШУМОВИХ ЗАВАД

У роботі запропонована математична модель системи МІМО під час дії шумових завад та селективних замирань. Отримані точні аналітичні вирази дозволяють розрахувати завадостійкість приймання сигналу в МІМО-системі при дії шумових завад та селективних замирань.

В работе предложена математическая модель системы МІМО при воздействии шумовых помех и селективных замираний. Полученные точные аналитические выражения позволяют рассчитать помехоустойчивость приема сигнала в МІМО-системе при воздействии шумовых помех и селективных замираний.

The paper presents a mathematical model of the system MIMO under the influence of noise interference and selective fading. The obtained exact analytical expressions allow to calculate the noise immunity of signal reception in MIMO system when exposed to noise interference and selective fading.

Вступ. Перспективні системи спеціального призначення радіозв'язку (ССПРЗ) повинні забезпечувати передачу інформації у складній радіоелектронній обстановці [1]. Цих цілей необхідно досягти в складних умовах багатопроменевого просторового каналу, в якому можливі глибокі замирання (федінги) сигналів, а також при жорстких обмеженнях на частотну смугу і потужність передавальних пристроїв.

Одним з перспективних шляхів вирішення проблеми є використання систем зв'язку з рознесеними передавальними і приймальними антенами – системи МІМО (*multiple-input multiple-output*). Їх використання дозволяє проводити просторову і часову обробку сигналів, ефективніше використовувати випромінювану передавачем потужність і знижувати негативний вплив завад. Внаслідок цього пропускна спроможність МІМО-систем теоретично може бути збільшена пропорційно числу антенних елементів у порівнянні зі звичайними системами зв'язку, що використовують одноелементні антени (без збільшення повної випромінюваної потужності і смуги частот) [2].

Аналіз досліджень і публікацій. У роботах [3-4] розглядається застосування МІМО на фоні шуму Гауса, але не розглядаються питання дії на систему МІМО засобів радіоелектронного подавлення по постановці навмисних завад, які значно погіршують якість зв'язку.

Наявність у каналі навмисних завад не дозволяє при прийнятній складності реалізації відомих алгоритмів передачі дискретних повідомлень досягти тієї ж ефективності використання реальних каналів зв'язку, що й ідеального гаусівського каналу. Отже, задача підвищення ефективності ССПРЗ в умовах активної радіоелектронної боротьби є актуальною і має не тільки теоретичне, але і велике прикладне значення для забезпечення необхідного рівня бойової готовності військ за рахунок підвищення своєчасності, ймовірності і скритності бойового управління.

Формулювання цілей статті. Метою роботи є розробка математичної моделі системи МІМО в умовах шумових завад.

Виклад основного матеріалу статті. У загальному випадку відповідно до технології МІМО структура системи має в своєму складі M передавачів (передавальних антен) і N приймачів (приймальних антен) (рис. 1).

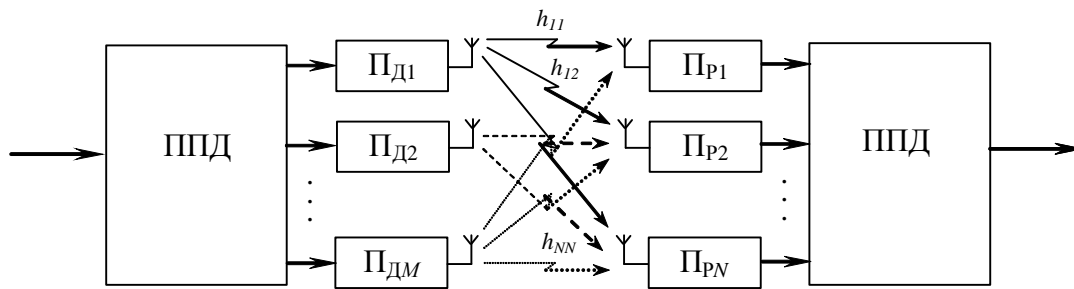


Рис. 1. Структура системи MIMO

Розглянемо MIMO систему $M \times N$, зображену на рисунку 1, де ППД – перетворювач потоку даних, $ПД_i$ – передавач i -ого каналу, $ПР_i$ – приймач i -ого каналу.

Високошвидкісний потік даних розбивається на M незалежних послідовностей з $1/M$ швидкості, які потім передаються одночасно з декількох антен, відповідно використовуючи тільки $1/M$ їх первинної смуги частот.

Перетворювач потоку даних на передавальному кінці лінії зв'язку перетворює послідовний потік у паралельний, а на приймальному – виконує зворотне перетворення.

Матрицю стовбців \mathbf{A} сигналів передавального пристрою із M каналних передавачів та матрицю стовбців \mathbf{X} приймального пристрою із N каналних приймачів можливо записати у вигляді:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} U_{t1} \\ U_{t2} \\ \dots \\ U_{tM} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} U_{r1} \\ U_{r2} \\ \dots \\ U_{rN} \end{bmatrix}.$$

Передаточна функція багатопроменевого каналу описується матрицею [5]:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{M1} & h_{M2} & \dots & h_{MN} \end{bmatrix},$$

де h_{ij} – передаточна функція між i -ою передавальною та j -ою приймальною антенами.

Значна частина каналів ССПРЗ характеризується багатопроменим розповсюдженням сигналів. Імпульс, що приймається, є сумою окремих імпульсів, відбитих від достатньо великого числа розсіювачів (відбивачів), розташованих навколо користувача випадковим чином і що мають випадкову поверхню розсіяння. Тому сигнал може спотворюватися при розповсюдженні через багатопромений канал. Важливою характеристикою багатопроменевого середовища є часова дисперсія в каналі, оскільки перевідбиття мають різні затримки. Більш того, затримки багатопромених компонент змінюються в часі із-за руху користувача, що приводить також до частотної дисперсії в каналі.

Властивості багатопроменевого каналу можуть бути описані за допомогою комплексного коефіцієнта передачі h сигналів з передавальної антени в приймальну антену.

Амплітуди і фази коефіцієнта передачі h є випадковими величинами із-за інтерференції розсіяних сигналів. Якщо прямиий сигнал істотно ослаблений, то фаза коефіцієнта h рівномірно розподілена в межах $[0, 2\pi]$, а амплітуда підкоряється релеєвському розподілу. Розглянемо спочатку випадок однієї приймальної антени, тобто однопроме-

невий релеєвський канал. Якщо передається символ $A(t)$ одиничної амплітуди, то прийнятий сигнал $x(t)$ можна представити у вигляді

$$x(t) = \mu \sqrt{P_0} h A(t) + Z(t), \quad (1)$$

де μ – коефіцієнт, що визначає загасання і втрати в каналі зв'язку; P_0 – середня випромінювана потужність; $Z(t) = Z_{\text{ш}}(t) + Z_3(t)$ – сумарна завада; $Z_{\text{ш}}(t)$ – власний шум; $Z_3(t)$ – шумова завада.

Для цілей нашого вивчення коефіцієнт μ у виразі (1) можливо без обмеження спільності вважати рівним одиниці ($\mu = 1$).

З виразу (1) отримаємо, що миттєве значення відношення потужності сигналу P_c до сумарної потужності шуму $P_{\text{ш}}$ і завади P_3 – відношення сигнал/завада (BCЗ):

$$Q^2 = Q_0^2 |h|^2, \quad (2)$$

де $Q_0^2 = \frac{P_c}{P_{\text{ш}} + P_3}$ – середнє BCЗ.

Амплітуда $|h|$ коефіцієнта передачі має релеєвський розподіл. Отже, випадкове BCЗ Q^2 матиме експоненціальний розподіл вигляду [6]:

$$f(Q^2) = \frac{1}{Q_0^2} e^{-\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)}. \quad (3)$$

Знайдемо ймовірність P_6 бітової помилки, яка дорівнює відношенню середнього числа неправильно прийнятих біт до загального числа переданих біт. Оскільки BCЗ Q^2 є випадковою величиною, тоді необхідно спочатку знайти ймовірність бітової помилки для всіх можливих значень BCЗ Q^2 у виразі (3). Потім повинно бути виконане усереднювання цієї помилки, використовуючи функцію щільності ймовірності $f(Q^2)$ BCЗ. Отже, щоб знайти бітову помилку під час передачі через релеєвський канал, необхідно обчислити інтеграл

$$P_6 = \int_0^{\infty} f(Q^2) P_6(Q^2) dQ^2, \quad (4)$$

де $P_6(Q^2)$ – ймовірність бітової помилки в статичному каналі без завмирань при BCЗ рівному Q^2 .

Ймовірність $P_6(Q^2)$ при бінарній модуляції визначається інтегралом ймовірності $\Phi(x)$ і дорівнює [2]:

$$P_6(Q^2) = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\sqrt{2Q^2}\right) \right], \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (5)$$

Враховуючи розподіл (3) для BCЗ, отримаємо, що

$$P_6 = \int_0^{\infty} \frac{1}{Q_0^2} e^{-\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)} \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\sqrt{2Q_0^2}\right) \right] dQ^2. \quad (6)$$

Цей інтеграл обчислюється. В результаті для ймовірності бітової помилки матимемо:

$$P_6 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{Q_0}{Q_0 + 1}} \right). \quad (7)$$

У разі чималого середнього ВСЗ ($Q_0^2 \gg 1$) формула (7) спрощується і набуває вигляду:

$$P_6 \approx \frac{1}{4Q_0} . \quad (8)$$

Таким чином, при великих ВСЗ ймовірність бітової помилки в релеєвському каналі обернено пропорційна середньому ВСЗ.

Припустимо, що прийом сигналу ведеться на N антен, тобто, що є N гілок рознесення. Тепер властивості просторового каналу визначаються вектором-стовпцем $\mathbf{H} = (h_1, h_2, \dots, h_N)^T$ коефіцієнтів передачі, де $(\cdot)^T$ – знак транспонування.

Якщо передається сигнал $A(t)$, тоді вектор \mathbf{X} прийнятих сигналів дорівнює:

$$\mathbf{X}(t) = \sqrt{P_0} \mathbf{H} A(t) + \mathbf{Z}(t) . \quad (9)$$

Тут $\mathbf{Z}(t)$ – вектор сумарних завад. Завади в різних антенах вважатимемо некорельованими між собою, тобто кореляційна матриця шуму $\langle \mathbf{Z}\mathbf{Z}^H \rangle = \sqrt{P_3} \mathbf{I}$, де \mathbf{I} – одинична матриця, $(\cdot)^H$ – позначає ермітове сполучення.

Прийняті різними антенами сигнали підсумовуватимемо з ваговими коефіцієнтами, які об'єднаємо у ваговий вектор \mathbf{W} . Тоді сумарний сигнал дорівнює:

$$y(t) = \mathbf{W}^H \mathbf{X}(t) = \mathbf{W}^H \sqrt{P_0} \mathbf{H} A(t) + \mathbf{W}^H \mathbf{Z}(t) . \quad (10)$$

Знайдемо вихідне ВСЗ. Неважко отримати з виразу (10), що

$$Q^2 = Q_0^2 \frac{(\mathbf{W}^H \mathbf{H})(\mathbf{H}^H \mathbf{W})}{\mathbf{W}^H \mathbf{W}} . \quad (11)$$

ВСЗ не залежить від нормування вагового вектора \mathbf{W} . Нормуємо вектор \mathbf{W} так, що $\mathbf{W}^H \mathbf{W} = 1$. У результаті для ВСЗ матимемо:

$$Q^2 = Q_0^2 |\mathbf{W}^H \mathbf{H}|^2 . \quad (12)$$

ВСЗ залежить від вибору вагового вектора \mathbf{W} . Щоб забезпечити максимум ВСЗ на виході, ваговий вектор повинен бути паралельним вектору \mathbf{H} коефіцієнтів передачі для всіх приймальних антен, тобто $\mathbf{W} = \alpha \mathbf{H}$, де α – довільне комплексне число, що не впливає на величину ВСЗ. Тому можливо прийняти $\alpha = 1$. Насправді, величина скалярного добутку $(\mathbf{W}^H \mathbf{H})$ векторів \mathbf{W} і \mathbf{H} буде найбільшою, коли ці вектори паралельні один одному. В цьому випадку забезпечується узгоджений (когерентний) прийом сигналів і максимальне ВСЗ буде дорівнювати:

$$Q^2 = Q_0^2 \mathbf{H}^H \mathbf{H} = Q_0^2 \sum_{j=1}^N |h_j|^2 . \quad (13)$$

Порівнюючи вирази (13) і (2) можна бачити, що при оптимальному ваговому підсумовуванню вихідне ВСЗ є сумою ВСЗ в кожній приймальній антені.

Якщо завмирання сигналів у всіх антенах є некорельованими між собою, то з формули (13) виходить, що ВСЗ Q^2 має хі-квадрат розподіл з $2N$ ступенями свободи вигляду:

$$f(Q^2) = \frac{1}{(N-1)! Q_0^{2N}} Q^{2N} e^{-\frac{Q^2}{Q_0^2}} . \quad (14)$$

На рисунку 2 показано хі-квадрат розподіл при різному числі N приймальних антен ($N = 1, 2$ і 4). Середнє значення ВСЗ дорівнює N . Тому зі зростанням N відповідні криві

зрушуються управо. Більш того, видно, що ймовірність глибоких завмирань сигналів (малих значень ВСЗ) значно зменшується.

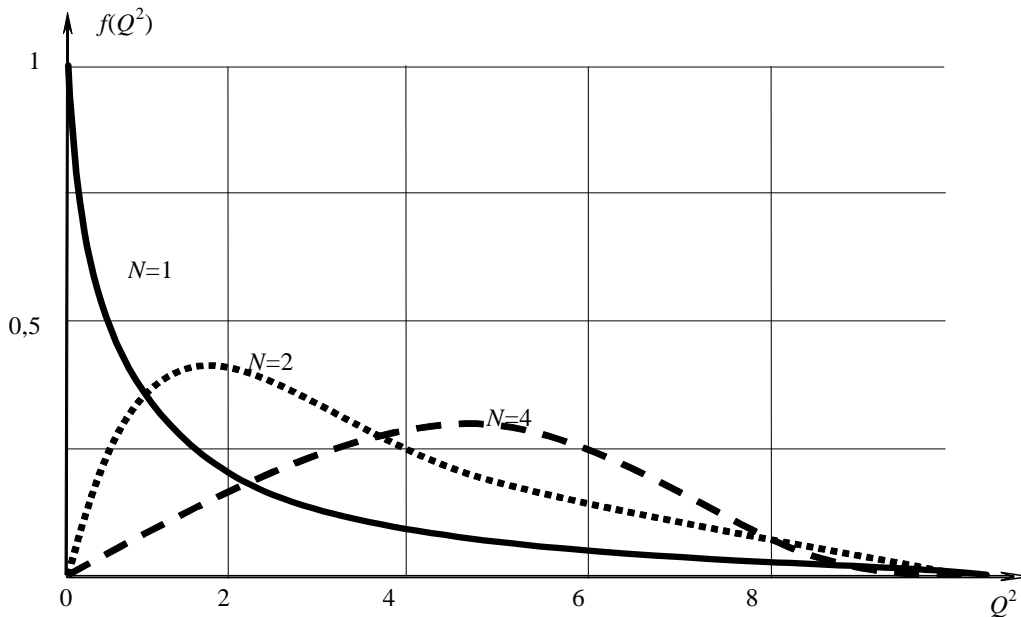


Рис. 2. Функція щільності ймовірності ВСЗ при різній кількості антен

Щоб знайти ймовірність P_6 бітової помилки необхідно функцію $f(Q^2)$ з виразу (14) підставити у формулу (4). У результаті матимемо, що

$$P_6 = \int_0^{\infty} \frac{1}{(N-1)! Q_0^{2N}} Q^{2N} e^{-\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)} \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\sqrt{2Q_0^2}\right) \right] dQ^2. \quad (15)$$

Після інтегрування, отримаємо вираз для бітової помилки в явному вигляді [7]:

$$P_6 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q_0^2}{Q_0^2 + 1}} \left[1 + \sum_{l=1}^{N-1} \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} \frac{1}{(Q_0^2 + 1)^l} \right], \quad (16)$$

де $(2l-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \dots \times (2l-1)$; $(2l)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2l)$.

Розглянемо деякі окремі випадки.

а) Потужність сигналу прагне до нуля ($Q_0^2 \rightarrow 0$). Ймовірність помилки прагне до $\frac{1}{2}$ ($P_6 \rightarrow \frac{1}{2}$), оскільки є тільки власний шум.

б) Число приймальних антен дорівнює двом ($N = 2$). З (8) маємо, що ймовірність помилки дорівнює:

$$P_6 = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{Q_0^2}{Q_0^2 + 1}} \left(1 + \frac{1}{2(Q_0^2 + 1)} \right) \right]. \quad (17)$$

При великих ВСЗ ($Q_0^2 \gg 1$) маємо, що

$$P_6 \approx \frac{3}{16(Q_0^2)^2}. \quad (18)$$

в) Число приймальних антен дорівнює чотирьом ($N = 4$). З (8) знаходимо ймовірність помилки у вигляді:

$$P_6 = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{Q_0^2}{Q_0^2 + 1} \left(1 + \frac{1}{2(Q_0^2 + 1)} + \frac{3}{8(Q_0^2 + 1)^2} + \frac{5}{16(Q_0^2 + 1)^3} \right)} \right]. \quad (19)$$

При великих ВСЗ ($Q_0^2 \gg 1$) маємо, що

$$P_6 \approx 0,14(Q_0^2)^{-4}. \quad (20)$$

г) Число приймальних антен дорівнює восьми ($N = 8$). При великих ВСЗ ($Q_0^2 \gg 1$) маємо:

$$P_6 \approx 0,1(Q_0^2)^{-8}. \quad (21)$$

Неважко бачити з приведених прикладів, що ймовірність помилки зменшується обернено пропорційно ВСЗ у ступені, рівному числу приймальних антен, тобто як $P_6 \sim (Q_0^2)^{-N}$. Тому в логарифмічному масштабі крива ймовірності помилок має лінійну асимптоту при великих ВСЗ з кутом нахилу прямих, рівним $(-N)$.

Криві ймовірності помилок залежно від ВСЗ для різного числа антен ($N = 1, 2, 4$ і 8) представлені на рисунку 3.

Оцінимо ВСЗ, необхідне для забезпечення заданої ймовірності бітової помилки, наприклад, рівною 1%. Результати оцінки показані в таблиці 1.

Таблиця 1

ВСЗ, необхідне для забезпечення заданої ймовірності бітової помилки

Число антен, N	Потрібне ВСЗ, дБ	Повний виграш у ВСЗ, дБ	Виграш у ВСЗ за рахунок підсилення, дБ	Виграш у ВСЗ за рахунок послаблення завмирань, дБ
$N = 1$	14	-	-	-
$N = 2$	5	9	3	6
$N = 4$	0	14	6	8
$N = 8$	-4	18	9	9

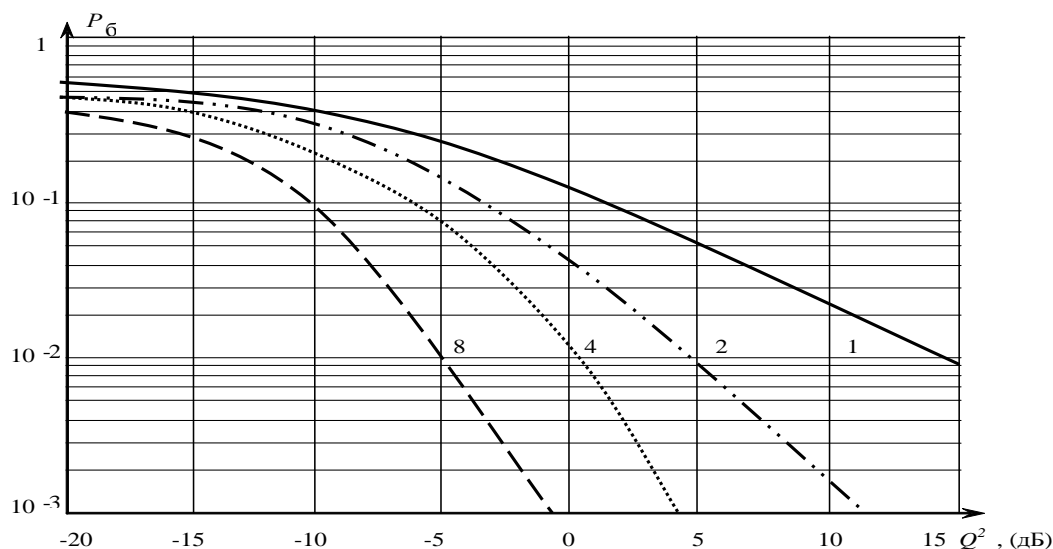


Рис. 3. Ймовірність бітової помилки залежно від ВСЗ для різної кількості приймальних антен ($N = 1, 2, 4$ та 8)

Видно, що зі зростанням числа антен необхідне ВСЗ значно зменшується, тобто має місце значний енергетичний виграш. Цей виграш забезпечується двома чинниками.

Перший – пов’язаний із збільшенням посилення сигналу, що приймається, за рахунок використання рознесеного прийому, яке росте пропорційно збільшенню числа антен. Другий – із зменшенням ймовірності глибоких завмирань сигналів при прийомі на множину антен, коли ймовірність одночасного завмирання сигналів у всіх антенах зменшується зі зростанням їх числа.

Висновки. У статті розроблена математична модель системи МІМО під час дії шумових завад та селективних завмирань.

Відмінність розробленої моделі від відомих, що визначає її новизну, полягає в тому, що вона базується на нових аналітичних співвідношеннях для розрахунку показників завадостійкості МІМО-систем, які враховують вплив шумових завад у каналі зв’язку. Отримані точні аналітичні вирази дозволяють розрахувати завадостійкість приймання сигналу в МІМО-системі під час дії шумових завад та селективних завмирань.

Розроблена модель дозволяє:

- провести кількісну оцінку негативного впливу певних видів завад на якість зв’язку, що визначається ймовірністю бітової помилки;
- отримати математичні співвідношення під час дії інших видів завад (полігармонійна та ретрансльована завади);
- визначити заходи, спрямовані на боротьбу з навмисними завадами;
- проводити імітаційне моделювання радіоліній з використанням МІМО в умовах дії навмисних завад та селективних завмирань.

Список використаних джерел

1. Слюсар В. Системы МІМО: принципы построения и обработка сигналов / В. Слюсар // *Електроника: Наука, Технологія, Бізнес.* – 2005. – № 8. – С. 52-58.
2. Кувшинов О. В. Аналіз основних видів навмисних завад для військових систем рухомого зв’язку з ППРЧ / О. В. Кувшинов, В. К. Чумак, В. В. Ольшанський // *Збірник наукових праць ВІТІ НТУУ „КПІ”.* – 2008. – Вип. № 2. – С. 60-64.
3. Кравчук С. О. Напрямки вдосконалення технологій МІМО / С. О. Кравчук, Д. А. Міночкін, В. К. Чумак // *Збірник наукових праць ВІКНУ імені Тараса Шевченка.* – 2008. – Вип. № 15. – С. 153-159.
4. Alamouti S. Space-time block coding / S. Alamouti // *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Oct. 2008, vol. 16, p. 1451-1458.
5. Ермолаев В. Т. Уменьшение вероятности битовой ошибки при параллельной передаче информации в МІМО системе / В. Т. Ермолаев, Е. А. Маврычев, А. Г. Флакман // *Изв. вузов. Радиофизика.* – 2003. – Т. 46. – № 3. – С. 251-260.