

УДК 681.5.01

Т.М. Герасименко, аспірантка

А.П. Ладанюк, д-р техн. наук

Національний університет харчових технологій, м. Київ, Україна

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ СУШІННЯ СОЛОДУ  
ЯК ОБ'ЄКТА РЕГУЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРИ ТА ВОЛОГОСТІ**

Т.М. Герасименко, аспірантка

А.П. Ладанюк, д-р техн. наук

Национальный университет пищевых технологий, г. Киев, Украина

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СУШКИ СОЛОДА КАК  
ОБЪЕКТА РЕГУЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ВЛАЖНОСТИ**

Tetiana Herasymenko, PhD student

Anatolii Ladaniuk, Doctor of Technical Sciences

National University of Food Technologies, Kyiv, Ukraine

**MATHEMATICAL MODELLING OF DRYING MALT AS AN OBJECT OF  
TEMPERATURE AND HUMIDITY CONTROL**

*Запропоновано математичну модель, яка враховує основні закономірності сушіння зерна у вертикальній солодосушарці та дає можливість визначити динамічні характеристики за окремими каналами. Крім того, математична модель дає можливість визначити ефективність окремих керувальних дій та вплив основних збурень.*

**Ключові слова:** математичні моделі, виробництво, процеси.

*Предложена математическая модель, учитывающая основные закономерности сушки зерна в вертикальной солодосушилке и дает возможность определить динамические характеристики по отдельным каналам. Кроме того, математическая модель дает возможность определить эффективность отдельных управляющих воздействий и влияния основных возмущений.*

**Ключевые слова:** математические модели, производство, процессы.

*The article offers a mathematical model, which takes into account the basic laws of drying grain in the vertical solodosushartsi and makes it possible to determine the dynamic characteristics for individual channels. In addition, the mathematical model makes it possible to determine the effectiveness of controlling individual actions and impact of major disturbances.*

**Key word:** mathematical models, production, processes.

**Вступ.** У технічній літературі наведені математичні моделі різного призначення, які використовуються у ході аналізу тепло- та масообмінних процесів, визначення та впливу геометричних розмірів та конструкцій сушарок, а саме: метод підводу тепла, спосіб переміщення речовини, характер руху сушильного агента та речовини (хаотичний або направлений), кількість зон у сушарці. Для аналізу та синтезу систем автоматизації необхідно отримати динамічну модель, яка описує поведінку головних змінних – вологості та температури зерна з урахуванням властивостей об'єкта (нестационарність, розподіленість координат тощо).

**Методика досліджень.** Відома класична математична модель [1], яка дозволила описати нестационарні поля вологовмісту і температури у процесі сушіння будь-якого продукту, у тому числі зерна.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a_m (\nabla^2 W + \delta_r \nabla^2 \theta_3) + \varepsilon(W) \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial t} = a \nabla^2 \theta_3 + \frac{\varepsilon(W) r}{c_3} \cdot \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (2)$$

де  $W$  – вологість матеріалу,  $\theta_3$  – температура матеріалу,  $c_3$  – теплоємність зерна,  $a_m$  – коефіцієнт дифузії вологи,  $\delta_r$  – термоградієнтний коефіцієнт,  $\varepsilon$  – критерій фазового перетворення,  $a$  – коефіцієнт теплообміну.

Запропонована модель найбільш повно враховує відомі положення теорії сушіння – про зв'язок вологи з матеріалом [2], явище термодифузії пару та ін. Ця модель має фізичний напрям і розроблена для детального опису процесів тепло- і масообміну в окремій зернині, поміщеній в умови сушіння. Процеси описуються системою диференціальних рівнянь з частинними похідними та нелінійними коефіцієнтами.

З огляду на особливості процесів, що протікають у сушильних камерах зерносушарок, застосування моделі (1) та (2) для вирішення завдань оптимізації сушіння зерна зустрічає багато труднощів фізичного (невизначеність коефіцієнтів тепло- і масообміну), математичного (неможливість аналітичного рішення) і обчислювального характеру. Тому в практиці для опису процесу сушіння зерна широке застосування отримали більш прості математичні моделі, які тією чи іншою мірою ідеалізують його протікання.

У роботі [3] отримано математичну модель, яка описує неперервний процес сушіння солоду:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{K}{V}(\vartheta - \varphi), \quad \vartheta(0) = \vartheta_0, \quad (3)$$

$$U = \frac{(Q_0 - \rho\varepsilon_\infty)u_\infty + \lambda[(1-\varepsilon)\frac{\vartheta}{1+\vartheta} - (1-\varepsilon_\infty)\frac{\vartheta_H}{1+\vartheta_H}]}{\rho_0\varepsilon + \lambda\nu - \mu Q_0}, \quad (4)$$

$$T = \frac{(\rho_0\varepsilon_\infty + \lambda\nu - \mu Q_0)T_\infty + r_q\lambda[(1-\varepsilon)\frac{\vartheta}{1+\vartheta} - (1-\varepsilon_\infty)\frac{\vartheta_H}{1+\vartheta_H}]}{\rho_0\varepsilon + \lambda\nu - \mu Q_0}, \quad (5)$$

граничні умови:

$$T(\tau, 0) = f_1(\tau); u_T(\tau, 0) = u_T^0$$

початкові:

$$T(0, y) = T_H; W_3(0, y) = W_3^0; u_T(0, y) = u_T^0,$$

де  $V$  – швидкість руху солоду,  $K$  – коефіцієнт сушки солоду,  $\varphi$  – відносна вологість сушильного агента,  $U$  – вологовміст сушильного агента,  $\vartheta$  – вологовміст солоду,  $T$  – температура,  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності,  $\varepsilon$  – порозність,  $Q$  – витрата сушильного агента,  $\mu$  – динамічна в'язкість,  $r_q$  – теплота фазового переходу.

У роботі [4] зроблено математичний опис неперервного процесу сушіння солоду з певними припущеннями, який має вигляд такої системи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dW_3}{dy} = \frac{\lambda}{r} p_3 (1-\varepsilon) f; \\ \frac{d\varphi_3}{dy} = -\lambda p_3 (1-\varepsilon) \left[ d(T_T - T_3) + \frac{v_r f}{1-W_3} \right]; \\ T_3 = \frac{\varphi_3}{y C_3}; C_3 = C_{c3} + (C_B - C_{CT}) W_3; \\ \frac{d\varphi_T}{dy} = \lambda p_3 (1-\varepsilon) \left[ \frac{(1-v_r) f}{1-W_3} - a(T_T - T_3) \right]; \\ W_T = 1 - \frac{\mu}{\delta} (1 - W_{T0}); C_T = C_{CB} + (C_n - C_{CB}) W_T; \\ T_T = \frac{\varphi_T}{\delta C_T}; \gamma = \frac{1 - W_{30}}{1 - W_3}; \delta = \mu - 1 - \gamma; 0 \leq y \leq 1. \end{array} \right. \quad (6)$$

де  $W_3$  – вологість солоду,  $W_T$  – вологовміст теплоносія,  $v$  – коефіцієнт фазового перетворення,  $r$  – теплота пароутворення,  $a$  – коефіцієнт тепловіддачі солод-теплоносія,  $p_3$  – густина зерен солоду,  $\varepsilon$  – порозність,  $T_T$  – температура теплоносія,  $T_3$  – темпера-

тура солоду,  $C_{c3}$  – теплоємність сухих зерен солоду,  $C_B$  – теплоємність води,  $C_n$  – теплоємність водяної пари,  $C_{CB}$  – теплоємність сухого повітря.

Також відомі й інші моделі [5] для опису процесу сушіння матеріалу у шахтних зерносушарках:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + V_3 \frac{\partial W}{\partial x} - a_m(\theta_3) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial t} + V_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial x} - \frac{\rho}{c'_3} \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + V_3 \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right) + \frac{A(V_T)}{c'_3 \rho'_3} (\theta_3 - \theta_T) = 0, \quad (8)$$

де  $\bar{W}(t, x) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r W(t, x, r) dr,$

$A(V_T)$  – емпіричний коефіцієнт теплообміну.

Розглянувши рівняння (7) для вологовмісту, можна дійти висновку, що модель враховує закони внутрішнього масообміну в елементарній зернині. Після усереднення поля вологовмісту можна будувати залежності кінетики сушки шару зерна  $\bar{W}(t, x)$  та нагріву зернового шару  $\theta_3(t, x)$ .

Рівняння (7) і (8) можна застосовувати для аналізу і синтезу оптимальних режимів сушіння, оскільки вони побудовані з застосуванням змінних стану процесу ( $W, \theta_3$ ), містять основні керувальні та збурювальні змінні.

Проте запропонована модель є складною, певну фізичну проблему представляє визначення емпіричних коефіцієнтів, а також неочевидний перехід від елементарного шару до моделі кінцевого шару і сушильної камери. Тоді необхідно перейти до рівнянь більш загального вигляду, а саме математичного плану. Вони не тільки спростять модель, але і з більшою математичною коректністю дозволять врахувати складний характер умов тепло- і масообміну в сушильній камері.

Для задач автоматизації відома робота [6], в якій розроблено систему диференціальних рівнянь, які описують процеси у пневмогазовій сушильній установці:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1390 \frac{d(\Delta t_{mn})}{d\tau} + \Delta t_{mn} = 0,382\Delta B_m, \\ 390 \frac{d(\Delta t_{r1})}{d\tau} + \Delta t_{r1} = 1,32\Delta B_m + 0,29\Delta t_{mn} - 0,024\Delta L_B, \\ 0,85 \frac{d(\Delta \omega_{n.p})}{d\tau} + \Delta \omega_{n.p} = 1,0\omega_1 - 0,018\Delta G_1^c - 0,202\Delta t_{Г.Р}, \\ 72 \frac{d(\Delta t_{Г.Р})}{d\tau} + \Delta t_{Г.Р} = 0,59\Delta t_{r1} - 0,64\Delta d_{Г.Р} - 0,042\Delta G_1^c + 2,18\Delta \omega_1 - 2,18\Delta \omega_{n.p}, \\ 0,6 \frac{d(\Delta d_{Г.Р})}{d\tau} + \Delta d_{Г.Р} = 1,42\Delta \omega_1 - 1,42\Delta \omega_{n.p} + 0,0276\Delta G_1^c, \\ 5,6 \frac{d(\Delta t_{II2})}{d\tau} + \Delta t_{II2} = -0,0238\Delta G_1^c - 1,91\Delta \omega_{n.p} + 0,85\Delta t_{r2} + 1,91\Delta \omega_2, \\ 2,24 \frac{d(\Delta \omega_2)}{d\tau} + \Delta \omega_2 = 1,0\Delta \omega_{n.p} + 0,01175\Delta G_1^c - 0,35\Delta t_{r2} - 1,12\Delta d_2, \\ 88 \frac{d(\Delta t_{r2})}{d\tau} + \Delta t_{r2} = 0,38\Delta t_{Г.Р} - 1,15\Delta d_2 + 0,0162\Delta G_1^c + 1,38\Delta \omega_{n.p} - 1,38\Delta \omega_2, \\ 2,4 \frac{d(\Delta d_{r2})}{d\tau} + \Delta d_{r2} = 1,42\Delta \omega_2 - 0,0166\Delta G_1^c + 1,42\Delta \omega_{n.p} + 1,0\Delta d_{Г.Р}. \end{array} \right. \quad (9)$$

де  $t_{mn}$  – температура в топці,  $L_B$  – витрата теплоносія,  $B_m$  – витрата палива,  $t_{r1}$  – температура в камері змішування,  $t_{r,p}$  – температура теплоносія,  $d_{r,p}$  – вологовміст теплоносія,  $G_1^c$  – витрата матеріалу,  $\omega_{n,p}$  – вологовміст матеріалу в зоні розрихлення,  $t_{II2}$  – температура продукту для ділянки постійної швидкості сушіння,  $\omega_2$  – вологість продукту для ділянки постійної швидкості сушки,  $d_{r,2}$  – вологовміст теплоносія для ділянки постійної швидкості сушки.

**Результати та висновки.** Враховуючи вищеперераховане, робимо висновок, що математичні моделі будуть відрізнятися за своєю будовою залежно від призначення і сфери застосування. У зв'язку з цим розробимо деяку класифікацію математичних моделей для опису процесу сушіння зерна. Таку класифікацію можна виконати згідно з різними критеріями:

- направленню досліджень (хімічне, біологічне, фізичне, математичне, кібернетичне);
- виду математичного оператора (алгебраїчні, трансцендентні, звичайні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння з частинними похідними);
- особливостями математичного опису (нелінійності, число рівнянь і змінних, число констант, у тому числі емпіричних і теоретичних);
- області застосування (для зернини, елементарного шару, шару кінцевої товщини, сушильної камери);
- способу отримання (використання законів тепло- і масообміну, рівнянь матеріального балансу, інших методів).

Основні методи побудови математичних моделей:

- застосування фундаментальних законів природи (закон збереження енергії, маси тощо);
- застосування варіаційних принципів;
- ієрархічний підхід до побудови математичних моделей (принцип «від простого до складного»).

Управління процесом сушіння має відбуватися таким чином, щоб збереглися основні поживні властивості продуктів та висушити речовину до вологовмісту, який не буде перевищувати заданий. Для збереження поживних властивостей у більшості випадків необхідно накладати обмеження на температуру сушильного агента та матеріалу.

Для використання методів сучасної теорії управління математичні моделі повинні мати вигляд та форму, які є зручними для комплексного моделювання. Математичну модель шахтної солодосушарки розроблено з урахуванням таких основних принципів.

Сушильна камера шахтної зерносушарки як динамічний об'єкт являє собою систему з розподіленими параметрами. Враховуючи особливості її конструктивного виконання, вона може бути представлена у вигляді сукупності  $n = L / h$  ( $L$  – висота сушарки,  $h$  – довжина зони) послідовно з'єднаних зон (у цьому випадку  $n=4$ ), кожна з яких можна розглядати як об'єкт із зосередженими параметрами.

Загальний процес сушіння в сушильній камері розглядається як сукупність процесів, що одночасно протікають в її локальних зонах. Зерновий матеріал безперервним потоком переміщається по сушильній камері, послідовно переходячи з шару в шар. У кожній зоні процеси тепло- і масопереносу описуються на основі використання рівнянь матеріального та енергетичного балансу:

$$F_{\text{пр}} = F_{\text{відт}}, \quad (10)$$

де  $F_{\text{пр}}$ ,  $F_{\text{відт}}$  – потоки речовини на вході та виході.

Для нестационарного режиму:

$$\Delta(F_{\text{пр}} - F_{\text{відг}}) = K \frac{d\Delta E}{dt}, \quad (11)$$

де  $E$  – змінна, яка характеризує матеріал,  $K$  – коефіцієнт передачі об'єкта.

Таким чином, математична модель сушильної камери являє собою систему 4x4 рівнянь рухливих шарів. Вхідними параметрами зерна для кожної наступної зони є параметри зерна на виході з попередньої (вологість матеріалу, його температура). Вхідні параметри зерна для сушильної камери збігаються з граничними умовами для першого шару, а параметри зерна на виході останнього шару є вихідними для сушильної камери.

Для отримання математичної моделі сушарки необхідно мати класифікаційні ознаки, які будуть визначальними при її отриманні. Однак реалізація моделі у вигляді системи 4x4 нелінійних рівнянь у частинних похідних представляє значні складності. Тому модель можна спростити, врахувавши основні технологічні особливості процесу в кожній зоні.

Особливості шахтної солодосушарки:

- конвективний нагрів матеріалу;
- направлений рух матеріалу та сушильного агента;
- не враховується теплообмін у навколишнє середовище;
- рух сушильного агента та матеріалу: протилежні;
- режим роботи: як статичний, так і динамічний;
- кількість зон у сушарці: 4.

На основі вищевикладеного після проміжних перетворень приходимо до наступного вигляду:

$$\begin{cases} G_m \frac{dW}{dx} + Ng_m = \frac{d(g_m w)}{d\tau}, \\ G_m \frac{d[(c_m + c_B w)t_m]}{dx} + a_m F_m (t_m - t_z) + Ng_m r + \frac{\partial[(c_m + c_B w)t_m g_m]}{\partial \tau} = 0, \\ G_z - \frac{dI_z}{dx} + a_m F_m (t_z - t_m) - Ng_m r + \frac{\partial(g_z I_z)}{\partial \tau} = 0, \\ G_z - \frac{dd}{dx} - Ng_m = \frac{\partial(g_z I_z)}{\partial \tau}. \end{cases} \quad (12)$$

де  $G_m$  – витрата матеріалу,  $N$  – швидкість сушки,  $g_m$  – маса матеріалу,  $c_m$  – теплоємність матеріалу,  $c_B$  – теплоємність води,  $a_m$  – коефіцієнт теплообміну між матеріалом та сушильним агентом,  $F_m$  – площа теплообміну,  $t_m$  – температура матеріалу,  $t_z$  – температура сушильного агента,  $r$  – теплоємність пароутворення,  $I_z$  – ентальпія сушильного агента,  $g_z$  – маса сушильного агента,  $d$  – вологовміст сушильного агента,  $G_z$  – витрата сушильного агента,  $w$  – вологовміст на виході з сушильної камери.

Проаналізувавши вищерозроблену систему, запишемо її у вигляді (13) системи диференціальних рівнянь для однієї зони шахтної сушарки. Після деяких перетворень отримуємо:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{g_{mi}}{G_m} \frac{d\Delta w_i}{d\tau} + \Delta w_i = \Delta w_{BX} + \frac{N}{G_m} \Delta g_{mi}; \\
 \frac{(c_m + c_B w_i) g_{mi}}{G_m (c_m + c_B w_i) + a_m F_m} \frac{d\Delta t_{mi}}{d\tau} + \Delta t_{mi} = \\
 = \frac{a_m F_m}{G_m (c_m + c_B w_i) + a_m F_m} \Delta t_2 - \frac{Nr}{G_m (c_m + c_B w_i) + a_m F_m} \Delta g_{mi}; \\
 \frac{g_2}{G_2} \frac{d\Delta I_{zi}}{d\tau} + \Delta I_{zi} = \Delta I_{z0} - \frac{a_m F_m}{G_2} \Delta t_2 + \frac{a_m F_m}{G_2} \Delta t_{mi} + \frac{Nr}{G_2} \Delta g_{mi}; \\
 \frac{g_2}{G_2} \frac{d\Delta d_i}{d\tau} + \Delta d_i = \Delta d_0 + \frac{N}{G_2} \Delta g_{mi}.
 \end{array} \right. \quad (13)$$

де індекс "i" – зона сушарки.

Отже, математичне моделювання конвективного сушіння зерна для промислових зерносушарок дозволяє відслідкувати процес сушіння, пов'язаний з багатьма факторами та параметрами, а також оцінити їх вплив на видалення вологи з зерна.

Для основних задач аналізу та синтезу автоматичної системи регулювання отримано математичну модель, яка враховує основні закономірності сушіння зерна у вертикальній солодосушарці та дає можливість визначити динамічні характеристики – постійні часу та коефіцієнти передачі за окремими каналами. Крім того, математична модель дає також можливість визначити ефективність окремих керувальних дій та вплив основних збурень.

Аналіз математичних моделей показав, що коефіцієнт передачі за різними змінними змінюється в 1,5–5 разів, а постійні часу в 1,3–1,8 раза, що приводить до необхідності застосування методів побудови адаптивних систем у класі нестационарних систем.

### Список використаних джерел

1. *Лыков А. В.* Теория сушки / А. В. Лыков. – М.: Энергия, 1968. – 471 с.
2. *Ребиндер П. А.* О формах связи влаги с материалом в процессе сушки: Доклады пленарного заседания / П. А. Ребиндер // Всесоюзн. науч.-техн. совещ. по интенсификации процессов и улучшению качества материалов при сушке в основных отраслях пром-ти и сел. хоз-ве. – М.: Профиздат, 1958. – 14 с.
3. *Кашурин А. Н.* Исследование конвективной сушки светлого солода с целью повышения эффективности работы солодосушилок: автореф. дис. ... канд. техн. наук / А. Н. Кашурин. – К., 1977. – 24 с.
4. *Вылегжанин А. Н.* Разработка высокоэффективного процесса сушки пивоварного солода: дис. ... канд. техн. наук: спец. 05.18.12, 05.18.07 / А. Н. Вылегжанин. – К., 1987. – 188 с.
5. Математическое описание процесса в шахтных зерносушилках / В. И. Жидко, П. Н. Платонов, А. С. Бомко, Ю. Н. Митрофанов // Изв. ВУЗов: Пищевая технология. – 1965. – № 5. – С. 173–178.
6. *Сасин Н. Д.* Разработка и исследование автоматической системы пневмогазовой сушильной установкой в производстве: дис. ... канд. техн. наук: спец. 05.13.07 / Н. Д. Сасин. – К., 1973. – 228 с.