Дубенец В. Г.
Савченко Е. В.

Черниговский национальный технологический университет

Dubenets V. G.
Savchenko O. V.

Chernihiv National Technological University

УДК 539.3:534.1

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ИЗ ЭЛЕКТРОВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Рассматриваются методы математического моделирования колебаний пластин из слоев электровязкоупругих материалов с пассивным рассеянием энергии и задача оптимизации таких пластин по критерию максимального демпфирования с помощью метода оптимизации на основе генетического алгоритма.

Ключевые слова: *многослойные пластины, электровязкоупругие материалы, пассивное рассеяние энергии, демпфирование колебаний, оптимизация, генетические алгоритмы.*

Введение. Проблема демпфирования колебаний конструкций из однородных конструкционных материалов, сформулированная в работах Г.С.Писаренко и его школы [1, 2, 3], получила дальнейшее развитие в направлении использования композиционных материалов [3, 4] для обеспечения максимальных эксплуатационных параметров с учетом рассеяния энергии [4]. Появление материалов со специальными свойствами, так называемых smart-материалов (пьезоматериалов, электро- и магнитострикционных материалов, сплавов с памятью формы и др.) активизировало новый виток исследований в направлении создания конструкций с максимальным пассивным и регулируемым рассеянием энергии. В Украине развитие этого направления связано, в первую очередь, с исследованиями ученых школы В.Г.Карнаухова [5]. Исследования зарубежных ученых начали интенсивно развиваться на несколько лет раньше и в настоящее время вышли на уровень практического использования методов активного и пассивного демпфирования в конструкциях специального назначения [6, 7].

Методы пассивного демпфирования представляют особый интерес, поскольку обеспечивают стабильность и оптимальное управление в широкой полосе частот, хотя требуют оптимальных конфигураций электрических контуров и оптимизации структуры композита для максимизации демпфирования колебаний с помощью электромеханических связей.

Задача оптимизации предусматривает поиск вектора проектных параметров, обеспечивающих экстремум выбранной целевой функции при заданных ограничениях. Это так называемая задача условной глобальной оптимизации. Большинство методов оптимизации направлено на поиск локальных экстремумов, но существуют методы, позволяющие увеличить вероятность определения глобального экстремума.

В данной работе использован метод, базирующийся на применении генетического алгоритма [8, 9].

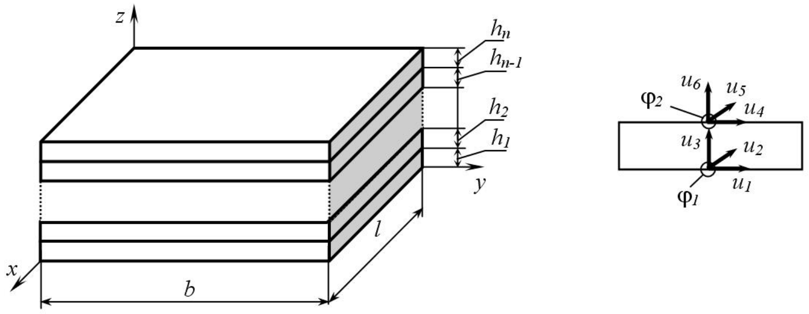
Математическая модель многослойной пластины. Рассматривается методика выбора оптимальных параметров многослойной пластины со слоями электровязкоупругих материалов с модифицированными демпфирующими свойствами за счет внешних электрических контуров (шунтов).

Для построения математической модели динамики пластины из электровязкоупругих материалов воспользуемся вариационным уравнением динамики электровязкоупругого тела объемом *V*, ограниченного поверхностью *S*, на одной части которой S_1 заданы внешние силы p_S, а на другой S_2 – электрические заряды q_S [10]:

$$\rho\int\limits_V \delta u^T \frac{d^2u}{dt^2}dV + \int\limits_V \delta\varepsilon^T \sigma dV - \int\limits_{S_1} \delta u^T p_S dS - \int\limits_V \delta E^T D dV + \int\limits_{S_2} \delta\varphi^T q_s dS = 0\,, \tag{1}$$

где u, ε, σ – соответственно перемещения, деформации и напряжения, *E* – вектор напряженности электрического поля, *D* – вектор электрического смещения, φ – потенциал.

Разделим пластину по толщине на *n* слоев (рис. 1) и получим расчетные уравнения для *k* -го слоя.



а б

Рис. 1. Многослойная пластина:
а) узловые плоскости; б) узловые перемещения и потенциалы

Для аппроксимации перемещений по толщине пластины используем линейный полином Лагранжа, а по координатам в плоскостях слоев – глобально определенные функции в соответствии с условиями закрепления на торцах пластины.

В соответствии с принятой методикой синтеза многослойной пластины [11] рассчитываются параметры одного слоя, который может быть вязкоупругим или электровязкоупругим, после чего традиционным образом составляется полный пакет слоев с использованием граничных условий соединения на поверхностях контакта.

Принимается линейная аппроксимация перемещений u и потенциала φ по толщине *k*-го слоя и глобальная аппроксимация по координатам *x* и *y*:

$$u = N_u u_k\,,\;\; \varphi = N_\varphi \varphi_k\,,\;\; N_u = N_u^z N_u^{xy}\,,\;\; N_\varphi = N_\varphi^z N_\varphi^{xy}\,, \tag{2}$$

где N_u^z, N_φ^z – матрицы функций аппроксимации по оси *z*; u_k, φ_k – векторы узловых перемещений и потенциалов (рис. 1, б):

$$u^k = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6],\quad \varphi^k = [\varphi_1, \varphi_2]. \tag{3}$$

Функции $N_u^z, N_u^{xy}, N_\varphi^z, N_\varphi^{xy}$ выбираются в соответствии с условиями закрепления слоя на краях пластины.

Тензор механических деформаций и вектор напряженности электрического поля (в векторной нотации) определяются по формулам

$$\varepsilon = A_u N_u u,\quad E = -A_\varphi N_\varphi \varphi, \tag{4}$$

где

$$A_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}^T,\quad A_\varphi = -\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Как известно [10], большинство пьезоэлектрических материалов в области малых деформаций и напряженностей электрического поля проявляют линейные наследственные свойства.

Линейные зависимости наследственной теории электровязкоупругого материала имеют вид [10]

$$\begin{aligned} \sigma(X,t) &= \int\limits_0^t R_c(X,t-\tau)\,\dot\varepsilon(X,\tau)d\tau - \int\limits_0^t R_e(X,t-\tau)\,\dot E(X,\tau)d\tau, \\ D(X,t) &= \int\limits_0^t K_e(X,t-\tau)\,\dot\varepsilon(X,\tau)d\tau + \int\limits_0^t R_k(X,t-\tau)\,\dot E(X,\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{5}$$

где $R_c(X,t-\tau),\ R_e(X,t-\tau),\ R_k(X,t-\tau)$ – матрицы функций релаксации соответственно вязкоупругих, пьезоэлектрических и диэлектрических свойств материала; $\sigma(X,t), D(X,t)$ – векторы напряжений и электрических смещений; $\dot{\varepsilon}(X,t), \dot{E}(X,t)$ – векторы скоростей изменения деформаций и напряженности электрического поля, X – вектор координатных осей.

Запишем уравнение (5) с использованием понятия свертки функций, после чего получим

$$\sigma = R_c * \dot{\varepsilon} - R_e * \dot{E}, \quad D = R_e * \dot{\varepsilon} + R_k * \dot{E}\,. \tag{6}$$

После подстановки физических зависимостей (6) в уравнение (1) получим вариационное уравнение динамики k-го электровязкоупругого слоя

$$\begin{aligned}&\int_V (\delta u)^T \rho \ddot{u} dV + \int_V (\delta\varepsilon)^T \left(R_c * \dot{\varepsilon} - R_e * \dot{E}\right) dV - \int_{S_1} (\delta u)^T p_s dS - \\ &-\int_V (\delta E)^T \left(R_e * \dot{\varepsilon} + R_k * \dot{E}\right) dV - \int_{S_2} (\delta\varphi)^T q_\varphi dS = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

Используем далее записанные выше аппроксимации перемещений и потенциала (2)-(4), вынесем за знак интегралов вариации вектора перемещений и потенциала и приравняем к нулю множители при вариациях. В результате получим систему интегро-дифференциальных уравнений относительно потенциала и вектора перемещений:

$$\begin{aligned}M_{uu}\ddot{u}_k + K_{uu} * \dot{u}_k + K_{u\varphi} * \dot{\varphi}_k = F,\\ K_{\varphi u} * \dot{u}_k + K_{\varphi\varphi} * \dot{\varphi}_k = Q,\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}&M_{uu} = \int_V \rho N_u^T N_u dV,\ K_{uu} = \int_V B_u{}^T R_c B_u dV, \quad K_{u\varphi} = \int_V B_u{}^T R_e B_\varphi dV,\\ &K_{\varphi u} = \int_V B_\varphi{}^T R_e B_u dV, \quad K_{\varphi\varphi} = \int_V B_\varphi{}^T R_k B_\varphi dV, \quad F = \int_S N_u{}^T p_s dS,\\ &Q = \int_S N_\varphi{}^T q_\varphi dS, \quad B_u = A_u u,\ B_\varphi = A_\varphi \varphi,\end{aligned} \tag{9}$$

Применим к (8) прямое преобразование Фурье [3, 4], после чего получим систему уравнений относительно изображений Фурье перемещений $\tilde{u}$ и потенциала $\tilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned}-\omega^2 M\tilde{u} + K_{uu}\tilde{u} + K_{u\varphi}\tilde{\varphi} = \tilde{F} + f,\\ K_{\varphi u}\tilde{u} + K_{\varphi\varphi}\tilde{\varphi} = \tilde{Q},\end{aligned} \tag{10}$$

где $f = j\omega M\dot{u}(0) + Mu(0),\ j = \sqrt{-1};\ u(0),\ \dot{u}(0)$ – векторы начального перемещения и начальной скорости узловых точек слоя. Уравнение (10) отличается от (8) обоснованной возможностью использования частотно-зависимых модулей при анализе нестационарных и многочастотных колебаний [3, 4], а также возможностью учета начальных условий.

Как известно [10], использование пьезоматериалов обусловлено не столько их свойством демпфировать колебания, которая невысока по сравнению со специальными вязкоупругими материалами, сколько возможностью увеличения пассивного демпфирования за счет превращения механической энергии в электрическую, а затем в тепловую (использование сенсоров), а также за счет возникновения усилий, противодействующих деформированию конструкции (использование актуаторов).

Ограничимся анализом пассивного демпфирования и получим уравнение колебаний пьезослоя, в котором увеличение демпфирования обусловлено использованием специальных устройств (шунтов).

Рассмотрим колебания пластины с присоединенным RL-шунтом (рис. 2).

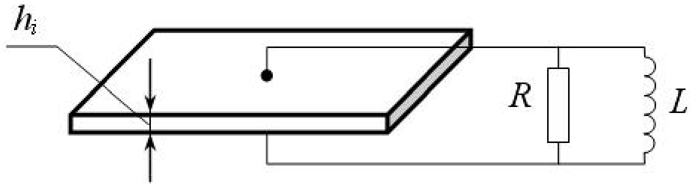


Рис. 2. Пластина с присоединенным RL шунтом

Как показано в [10, 12], уравнение колебаний пластины из пьезоэлектрических материалов можно использовать для анализа некоторых случаев использования свойств пьезоэлектрического материала. В частности, при разомкнутых электродах $Q = 0$ (10) получим уравнение для анализа собственных частот и вынужденных колебаний

$$-\omega^2 M\tilde{u} + (K_{uu} - K_{u\varphi}K_{\varphi\varphi}^{-1}K_{\varphi u})\tilde{u} = \tilde{F} + f\,. \quad (11)$$

Для учета присоединенных внешних пассивных элементов можно использовать уравнение (11), дополнив в нем матрицу $K_{\varphi\varphi}$ матрицей или суммой матриц, описывающих присоединенные внешние элементы.

В частности, для параллельного RL-шунта матрица $K_{\varphi\varphi}$ дополняется матрицами $K_{\varphi L}$ и $K_{\varphi R}$:

$$-\omega^2 M\tilde{u} + (K_{uu} - K_{u\varphi}(K_{\varphi\varphi} + K_{\varphi R} + K_{\varphi L})^{-1}K_{\varphi u})\tilde{u} = \tilde{F} + f\,, \quad (12)$$

$$K_{\varphi L} = \left(\frac{-1}{\omega^2 L}\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad K_{\varphi R} = \left(\frac{1}{i\omega R}\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Уравнение для анализа свободных колебаний с учетом дополнительного демпфирования и начальных условий получим из (12) при $F = 0$:

$$-\omega^2 M\tilde{u} + (K_{uu} - K_{u\varphi}(K_{\varphi\varphi} - K_{\varphi R} + K_{\varphi L})^{-1}K_{\varphi u})\tilde{u} = j\omega M\dot{u}(0) + Mu(0). \quad (14)$$

Проектирование пластины с максимальным демпфированием. Рассмотрим пример расчета и оптимизации параметров трехслойной, шарнирно опертой пластины, внешние слои которой состоят из электро-вязкоупругого материала, а внутренний – из пассивного материала (рис. 3).

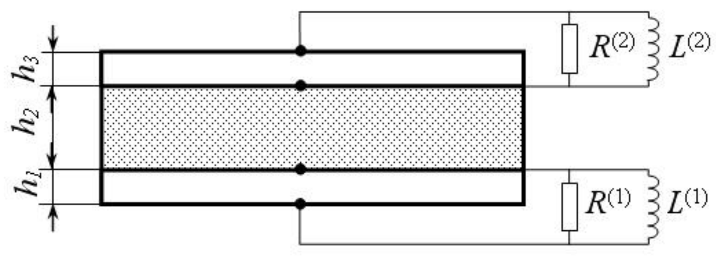


Рис. 3. Схема трехслойной пластины с параллельными RL-шунтами

Для построения модели трехслойной пластины воспользуемся полученными выше зависимостями для одного слоя, условиями равенства перемещений на смежных плоскостях, а также условиями равенства потенциалов в узлах присоединения внешних демпфирующих элементов. Входными параметрами пластины являются ее габаритные размеры, физико-механические характеристики материалов, электрические параметры шунтов.

Классические градиентные алгоритмы теории нелинейного программирования, которые используются для решения задачи проектирования конструкций, работающих в условиях динамических нагрузок, с усложнением конструкций и появлением новых материалов оказались неэффективными в связи со значительным увеличением количества проектных параметров, усложнением ограничений и критериев оптимизации, которые в большинстве случаев определяются программными средствами.

В связи с этим активно развиваются поисковые методы, которые используют принципы биологии и генетики. В первую очередь, это генетические алгоритмы [8, 9], основная идея которых состоит в создании популяции индивидов, каждый из которых имеет вид хромосомы, состоящей из генов, которые представляют собой набор наследственных признаков – проектных параметров. Лучший из индивидов выбирается в процессе эволюционного поиска в соответствии с принятой функцией пригодности. Процесс эволюционного поиска реализуется с использованием операторов, аналогичных биологическим процессам скрещивания, мутации, инверсии.

В последнее время для оптимизации в непрерывных пространствах используются алгоритмы, в которых хромосомы представляют в виде набора действительных чисел – так называемые непрерывные генетические алгоритмы RGA (real-coded GA) [8, 9].

В настоящей работе используется алгоритм RGA, особенности которого описаны в [9].

Пример расчета оптимальных параметров трехслойной пластины. Рассматривали пластину с такими входными параметрами: габаритные размеры пластины $b = 0,4\ м$, $l = 0,4\ м$; толщины внешних слоев $h = 0,001\ м$. Электровязкоупругие свойства материалов приведены в [12].

На рис. 4-5 приведены некоторые результаты расчета и оптимизации трехслойной пластины.

Для определения оптимальных параметров пластины по критерию максимального демпфирования воспользовались указанным выше методом оптимизации. Вектор проектных параметров принимали в виде $x = (h_2\ \ R\ \ L)^T$, где h_2 – толщина среднего вязкоупругого слоя (*м*), R – сопротивление (*Ом*), L – индуктивность RL-шунта (генри). Ограничения на проектные параметры: $lb = [0,001\ 10\ 0,01]$, $ub = [0,01\ 500\ 1]$.

Результаты расчета: целевая функция (декремент колебаний на первой форме) $\Delta = 0,5328$; частота $\omega 1 = 1893,2$; максимальная амплитуда $a = 1,0921 \cdot 10^{-6}\ м$. Вектор оптимальных проектных параметров:

$$x = [0,0100\ \ 500,0000\ \ 0,3642]^T .$$

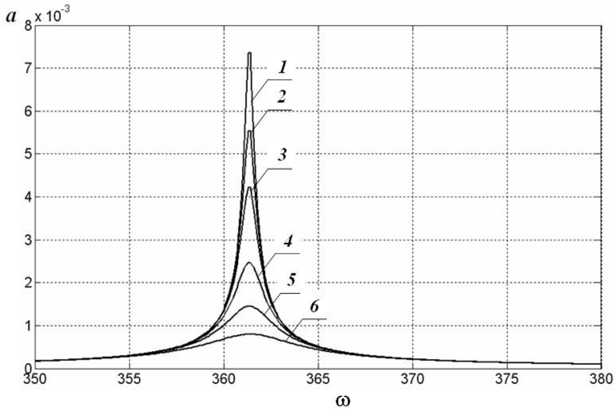


Рис. 4. Зависимость максимальной амплитуды на первой форме колебаний от частоты (АЧХ при нулевой L) и различных R: 1) 1 Ом; 2) 5 Ом; 3) 10 Ом; 4) 25 Ом; 5) 50 Ом; 6) 100 Ом

На рис. 5 показаны амплитудно-частотные характеристики для оптимального проекта и произвольного вектора проектных параметров $x = [0,005\ \ 500,0000\ \ 0,5]$, для которого декремент колебаний, первая частота и максимальная амплитуда составляют соответственно $\Delta = 0,3075$, $\omega 1 = 995,8709$, $a = 9,6087 \cdot 10^{-6}\ м$.

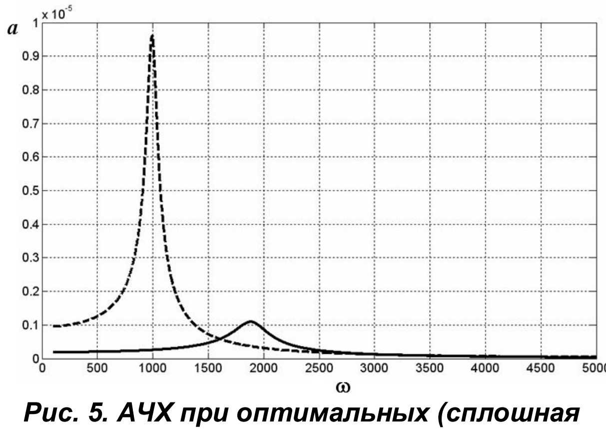


Рис. 5. АЧХ при оптимальных (сплошная линия) и произвольных (штриховая линия) значениях проектных параметров

Выводы. В настоящем исследовании рассматривались многослойные пластины со слоями из вязкоупругих и электровязкоупругих материалов. Расчетные уравнения колебаний получены с использованием интегрального преобразования Фурье. Для дополнительного пассивного демпфирования использованы демпфирующие устройства (шунты), с помощью которых можно создать специальные демпфирующие цепи. Показано, что использование конечно-элементных моделей конструкций из электровязкоупругих материалов в пространстве интегральных преобразований Фурье дает возможность обоснованно ввести комплексные модули, в том числе и при нестационарных и многочастотных колебаниях, а также корректно учесть начальные условия.

Для создания эффективных виброустойчивых конструкций необходимым является использование методов оптимального проектирования. Наличие большого количества параметров оптимизации приводит к необходимости отдать предпочтение поисковым методам, в частности, генетическим. В настоящей работе показано, что вариант метода оптимизации на основе генетических алгоритмов с действительным кодированием позволяет с большой долей вероятности находить глобальный экстремум в многоэкстремальной задаче оптимизации.

Список использованных источников

1. Писаренко Г.С. Избранные труды / Отв. ред. В. Т. Трощенко. – Киев: Наук. думка, 2010. – 728 с.
2. Матвеев В.В. Демпфирование колебаний деформируемых тел / В. В. Матвеев –Киев: Наукова думка, 1985. – 263 с.
3. Дубенец В. Г. Колебания демпфированных композитных конструкций / В. Г. Дубенец, В. В. Хильчевский. – Київ: Вища школа, 1995. – Т. 1. – 226 с.
4. Савченко Е. В. Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций: монография / Е. В. Савченко. – Нежин: ООО “Видавництво “Аспект-Поліграф”, 2006. – 232 с.
5. Карнаухов В. Г. Демпфирование колебаний тонкостенных элементов конструкций с помощью распределенных пьезоэлектрических включений / В.Г. Карнаухов, В.В. Михайленко. Процеси механічної обробки в машинобудуванні. – ВИПУСК 2, 2005. – С. 19–34.
6. Carrera E., Brischetto S., Naly P. Plates and shells for Smart Structures. John Wiley & Sons. Ltd, Publication, 2011.–316 p.
7. Araujoa A.L., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A. Optimal design of active, passive, and hybrid sandwich structures / A.L. Araujoa, C.M. Mota Soares and C.A. Mota Soares / Modeling, Signal Processing, and Control for Smart Structures 2008, Vol. 6926, 69260T, (2008).
8. Гладков Л.А. Генетические алгоритмы / Л. А. Гладков, В. В. Курейчик, В. М. Курейчик [Под ред. В.М. Курейчика] — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 320 с. – (2-е изд., испр. и доп.).
9. Савченко О.В. Метод пошуку глобального екстремуму в задачах оптимізації конструкцій з композиційних матеріалів / О. В. Савченко, І. О. Савченко. – Вісник Чернігівського державного технологічного університету: зб. – Чернігів: ЧДТУ, 2008. – № 36. – С. 72–81.
10. Колебания пьезоэлектрических тел / Шульга Н.А., Болкисев А.М.; Отв. ред. Б. П. Маслов; АН УССР. Ин-т механики. – К. : Наукова думка, 1990. – 228 с.
11. Дубенець В. Г. Оптимальне проектування пологих оболонок з композиційних в'язкопружних матеріалів / В. Г.Дубенець, О. В. Савченко. – Вісник Чернігівського державного технологічного університету: зб. – Чернігів: ЧДТУ, 2010. – № 45. – С. 21–29.
12. V.G. Dubenets, O.V. Savchenko. Optimization of Multilayered Electro-Viscoelastic Plates. Visnyk Chernigiv State Technological University. – 2013. – 63, N2. – P. 59 – 68.

Список источников в транслитерации

1. Pisarenko G. S. Izbrannye trudy / Otv. red. V. T. Troshchenko. – Kiev: Nauk. Dumka, 2010. – 728 s.
2. Matveev V. V. Dempfirovanie kolebaniy deformiruemykh tel / V. V. Matveev. – Kiev: Naukova dumka, 1985. – 263 c.
3. Dubenets V. G. Kolebaniya dempfirovannykh kompozitnykh konstruktsiy / V. G. Dubenets, V.V. Khilchevskiy. – K.: Vyshcha shkola, 1995. – T. 1. – 226 s.
4. Savchenko E. V. Passivnoe dempfirovanie kolebaniy kompozitnykh konstruktsiy: monografiya / E. V. Savchenko. – Nezhin: Aspekt-Poligraf, 2006. – 232 s.
5. Karnaukhov V. G. Dempfirovanie kolebaniy tonkostennykh elementov konstruktsiy s pomoshchyu raspredelennykh piezoelektricheskikh vklyucheniy / V.G.Karnaukhov, V.V.Mikhaylenko. Protsesy mekhanichnoyi obrobky v mashynobuduvanni. – VYPUSK 2, 2005. – S. 19–34.
6. Carrera E., Brischetto S., Naly P. Plates and shells for Smart Structures. John Wiley & Sons. Ltd, Publication, 2011.–316 p.
7. Araujoa A. L., Mota Soares C. M., Mota Soares C.A. Optimal design of active, passive, and

hybrid sandwich structures / A.L. Araujoa, C.M. Mota Soares and C.A. Mota Soares / Modeling, Signal Processing, and Control for Smart Structures 2008, Vol. 6926, 69260T, (2008).

8. Gladkov L. A. Geneticheskie algoritmy / L.A.Gladkov, V.V.Kureychik, V.M.Kureychik [Pod red. V.M.Kureychika] – M.: FIZMATLIT, 2006. – 320 s. – (2-e izd., ispr. i dop.).

9. Savchenko O.V. Metod poshuku hlobalnoho ekstremumu v zadachakh optymizatsii konstruktsiy z kompozytsiynych materialiv / O. V. Savchenko, I. O. Savchenko. – Visnyk Chernihivskoho derzhavnoho tekhnolohichmoho universytetu: zb. – Chernihiv: CDTU, 2008. – № 36. – S. 72–81.

10. Shulga N.A. Kolebaniya piezoelektricheskikh tel / N. A. Shulga, A. M. Bolkisev; Otv. red. B. P. Maslov; AN USSR. In-t mekhaniki. – K.: Naukova dumka, 1990. – 228 s.

11. Optymalne proektyvannya polohykh obolonok z kompozytsiynykh viazkopruzhnykh materialiv / V. G. Dubenets, O. V. Savchenko. – Visnyk Chernihivskoho derzhavnoho tekhnolohichmoho universytetu: zb. – Chernihiv: CDTU, 2010. – № 45. – S. 21–29.

12. V. G. Dubenets, O. V. Savchenko. Optimization of Multilayered Electro-Viscoelastic Plates. Visnyk Chernihiv State Technological University. – 2013. – 63, № 2. – P. 59–68.

ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН З ЕЛЕКТРОВ'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ

Анотація. *Розглядаються методи математичного моделювання коливань пластин із шарів електров'язкопружних матеріалів з пасивним розсіянням енергії і задача оптимізації таких конструкцій за критерієм максимального демпфірування за допомогою методу оптимізації на основі генетичного алгоритму.*

Ключові слова: *багатошарові пластини, електров'язкопружні матеріали, пасивне розсіяння енергії, демпфірування коливань, оптимізація, генетичні алгоритми.*

PROBLEMS OF OPTIMAL DESIGN OF MULTI-LAYERED ELECTROVISCOELASTIC PLATES

Annotation. *Mathematical modeling of vibrations of multilayered electro-viscoelastic material plates with passive energy dissipation and the optimal design problem of plates by maximum damping criterion using genetic algorithms are considered.*

Key words: *multilayered plates, electro-viscoelastic materials, passive energy dissipation, vibration damping, optimization, genetic algorithms.*