

УДК 369.04:519.863

М. Є. Юрченко,

к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри економіко-математичних методів,
Чернігівський національний технологічний університет, м. Чернігів

Н. А. Марченко,

к. е. н., доцент кафедри фінансової діяльності суб'єктів господарювання і державних установ,
Чернігівський національний технологічний університет, м. Чернігів

МОДЕЛЬ НЕКОМЕРЦІЙНИХ ФОНДІВ СОЦІАЛЬНОГО СТРАХУВАННЯ З ЕКСПОНЕНЦІЙНИМ РОЗПОДІЛОМ ВИТРАТ

M. Yurchenko,

Ph. D. (Phys.-Math.), associate professor of Economic and Mathematical Methods department,
Chernihiv National University of Technology, Chernihiv

N. Marchenko,

Ph. D. (Econ.), associate professor of Financial Activity
of Management Subjects and Public Institutions department, Chernihiv National University of Technology, Chernihiv

THE MODEL OF NONCOMMERCIAL SOCIAL INSURANCE FUNDS WITH EXPONENTIAL DISTRIBUTION OF EXPENSES

Розглянуті особливості призначення та функціонування некомерційних фондів соціального страхування, що існують в Україні. Основною проблемою роботи таких фондів є достатнє наповнення доходної частини та своєчасна виплата страхового відшкодування у разі настання страхових випадків. Отримані інтегрально-диференціальні рівняння, які характеризують ймовірність розподілу капіталу фондів соціального страхування в припущенні, що страхові виплати та надходження є незалежними випадковими величинами, які розподіляються за законом Пуассона. Доведено, що розподіл витрат відрізняється від експоненційного закону розподілу, що унеможливує точне вирішення інтегральних та диференціальних рівнянь. Однак таке рішення можна знайти після деяких додаткових припущень відповідних областей.

In this article features of the Ukrainian non commercial social insurance funds' functioning and purposes are considered. The main problem of such funds' work is sufficient filling of revenues and timely payment of insurance compensations in insurable events. The integral and differential equations which characterize the probability of distribution of the social insurance funds' capital, in assumption that money is distributed under Poisson's law, are received. It is proved that in case of payment distributions which differ from the exponential distribution law, it is not possible to receive the exact solution of the integral and differential equations. However, the solutions of the equations can be found after some additional assumptions for the corresponding areas.

Ключові слова: соціальне страхування, некомерційні самоврядні організації, вірогідність, страхові випадки, експоненційний закон розподілу.

Key words: social insurance, the non-profit self-managing organizations, reliability, insured events, the exponential law of distribution.

ВСТУП

У країнах з ринковою економікою обов'язкове страхування є розповсюдженим методом гарантованого соціального захисту населення. На сьогодні на страховому ринку України працює більш ніж тисяча організацій, які надають послуги захисту від різних видів ризику. Окрім класичних комерційних страхових компаній на вітчизняному ринку страхових послуг присутні державні фонди соціального страхування. Використовуючи основоположні механізми страхової діяльності, держава за допомогою таких організацій виконує деякі соціальні функції і реалізує соціальні гарантії. Діяльність таких структур дуже схожа на роботу страхових компаній, однак, має ряд суттєвих відмінностей, основною з яких є повна або часткова відмова від отримання комерційної користі за результатом своєї роботи.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Розглядаючи питання застосування математичних методів у соціальному страхуванні економічних ризиків як у виробничій, так і у побутовій сферах, необхідно визначити критерії формування та використання грошових коштів некомерційних фондів соціального страхування [1; 2].

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Побудові та дослідженню математичних моделей наповнення і використання фінансових ресурсів фондів соціального страхування в останні роки присвячено ряд робіт. Для вирішення вказаних проблем використовуються різні методи математичного моделювання, в тому числі і актуарної математики, засновані на теоремах теорії ймовірностей та її додатках [3; 4], а також методи математичної статистики.

Розглянуті класичні моделі [5], що дозволяють розрахувати ймовірність банкрутства та виживання страхових компаній, принципи вибору навантаження страхових премій, ймовірність настання страхового випадку. У соціальному страхуванні, визначальне значення мають процес зміни числа застрахованих осіб і тривалості строку страхування, які є випадковими процесами [6].

Питанням, щодо побудови математичних моделей некомерційних фондів присвячені роботи [6; 7], в яких для вирішення поставлених математичних задач використовуються різні методи теорії масового обслуговування.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Основною метою статті є математичне обґрунтування діяльності некомерційних фондів соціального страхування та побу-

дова моделей його діяльності за умови, що страхові виплати ξ являються незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, які мають експоненційний закон розподілу.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Залежно від страхового випадку, вітчизняним законодавством передбачено такі види загальнообов'язкового державного соціального страхування:

- пенсійне страхування;
- страхування у зв'язку з тимчасовою втратою працездатності та витратами, зумовленими похованням;
- страхування від нещасного випадку на виробництві та професійного захворювання, які спричинили втрату працездатності;
- страхування на випадок безробіття;
- медичне страхування (знаходиться на стадії проекту закону).

Завданням загальнообов'язкового державного соціального страхування є захист прав та інтересів громадян, які мають право на пенсію, а також на інші види соціального захисту, що включають право на забезпечення їх у разі хвороби, постійної або тимчасової втрати працездатності, безробіття з незалежних від них обставин, народження дитини, необхідності догляду за малолітньою дитиною або дитиною-інвалідом, хворим членом сім'ї, смерті громадянина та членів його сім'ї тощо.

У системі державного соціального страхування роль страховика виконує держава, яка бере на себе зобов'язання щодо створення колективних страхових фондів і виплати страхового відшкодування. Організаційно-адміністративне забезпечення такої діяльності (за винятком медичного страхування) на підставі профільних законів здійснюється відповідними фондами, а саме:

- Пенсійним фондом України (далі — ПФУ);
- Фондом соціального страхування з тимчасової втрати працездатності (далі — ФВП);
- Фондом соціального страхування від нещасних випадків на виробництві та професійних захворювань України (далі — ФНВ);
- Фондом загальнообов'язкового державного соціального страхування України на випадок безробіття (далі — ФБ).

Фонди є некомерційними самоврядними організаціями (за винятком Пенсійного фонду, який функціонує як центральний орган виконавчої влади до його перетворення в неприбуткову самоврядну організацію). Кошти фондів не входять до складу Держбюджету, держава є гарантом надання матеріального забезпечення та соціальних послуг застрахованим особам фондів, стабільної діяльності фондів.

Функціонування усіх чотирьох фондів зумовлено єдиною логікою, що спирається на страховий принцип. Вказані фонди призначені для соціальної допомоги громадянам, які з певних причин опинились у скрутних життєвих умовах унаслідок втрати заробітку. Основна розбіжність полягає в тому, що для ФВП, ФНВ та ФБ ймовірність настання страхового випадку менша 100%, тоді як для ПФУ вона становить 100% (не враховуючи передчасно померлих). При цьому в діяльності фондів відсутні будь-які регіональні, галузеві та інші розбіжності принципового характеру: учасниками фондів, а отже й застрахованими особами є усі без винятку працівники, за яких сплачуються страхові внески. За вказаної умови навіть громадянство застрахованої особи не має значення [8].

Моменти зміни інтенсивності потоку страхових платежів залежать від багатьох випадкових факторів і не можуть бути розглянуті як детерміновані. Найбільш відповідною моделлю для опису діяльності такого фонду є стохастичний пуассонівський потік зі станом інтенсивності λ .

Головною характеристикою стану фонду соціального страхування на даний момент часу є його капітал $V(t)$. Будемо вважати, що кошти, які надходять до фонду, утворюють пуассонівський потік з інтенсивністю λ , а грошові суми, що поступають,

являються незалежними однаково розподіленими величинами з частотою розподілу $f_{\xi}(x)$.

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{m} e^{-\frac{x}{m}}, \quad x \geq 0 \tag{1}$$

Фонд виділяє частину своїх коштів на соціальні програми, і на відміну розглянутих раніше моделей, вважатимемо, що цей процес утворює пуассонівський потік змінної інтенсивності $\lambda(t)$, а виплати θ являються незалежними випадковими величинами, розподіленими за експоненційним законом:

$$P_{\theta}(x) = \frac{1}{b} \cdot e^{-\frac{x}{b}}, \quad x \geq 0 \tag{2}$$

$$v(t) = \varphi(V)$$

Припускаємо, що при $V(t)=0$ не відбувається банкрутство фонду, а при $V(t)<0$ він продовжує функціонувати із затримками по страховим виплатам, а за проміжок часу Δt виплати у цілому складають:

$$V(t) \Delta t.$$

МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даного дослідження являється встановлення деякого граничного значення капіталу V_0 , при якому для $V < V_0$ виплати на соціальні потреби не враховуються і $v(t)=0$.

При $V > V_0$ виконуються виплати з постійною інтенсивністю $V(t)$. Таким чином, при $V < V_0$ фонд соціального страхування в середньому витрачає менше коштів, ніж до нього надходить; при $V > V_0$ витрати фонду в середньому більші, ніж його надходження.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Будемо також припускати, що фонд витрачає отримані грошові кошти, причому виплати є випадковими величинами, які незалежно розподіляються. Моменти виплати грошових коштів фондом соціального страхування також утворюють пуассонівський потік.

Розв'язання поставленої задачі полягає у знаходженні щільності ймовірностей $p(V)$, яка буде мати різний вигляд у кожній з розглянутих областей.

Для області $V > V_0$ відповідна щільність ймовірностей позначається $p_2(V)$ і визначається із відповідного рівняння Колмогорова для Марківських процесів:

$$p_2(V) = p_2(V - C_0 \cdot \Delta t)(1 - (\lambda + v)\Delta t) + \lambda \Delta t \int_C^{\infty} p_2(V + x) f_{\xi}(x) dx + \mu \Delta t \int_0^{\infty} p_2(V + y) \cdot p_{\theta}(y) dy + 0(\Delta t) \tag{3}$$

де C_0 — швидкість надходження коштів у фонд.
Розкладаючи $p_2(V - C_0 \cdot \Delta t)$ в ряд Тейлора, маємо:

$$p_2 = (1 - (\lambda + v)\Delta t)(p_2(V) - p_2'(V)C_0\Delta t) + \lambda \Delta t \int_0^{\infty} p_2(V + x) p_{\xi}(x) dx + v \Delta t \int_0^{\infty} p_2(V + y) p_{\theta}(y) dy + 0(\Delta t)$$

Переходячи до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, маємо інтегро-диференціальне рівняння для $p_2(V)$:

$$C_0 p_2'(V) + (\lambda + v) p_2(V) = \lambda \int_0^{\infty} p_2(V + x) p_{\xi}(x) dx + v \int_0^{\infty} p_2(V + y) p_{\theta}(y) dy \tag{4}$$

З урахуванням (1) та (2):

$$\int_0^{\infty} p_2(V + x) p_{\xi}(x) dx = \frac{1}{m} \int_0^{\infty} p_2(V + x) e^{-\frac{x}{m}} dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} p_2(t) e^{-\frac{t}{a}} dt.$$

$$\int_0^{\infty} p_2(V + y) p_{\theta}(y) dy = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} p_2(t) e^{-\frac{t}{b}} dt$$

Отже, рівняння (4) з урахуванням цього має вигляд:

$$C_0 p_2'(V) + (\lambda - \nu) p_2(V) = \frac{\lambda}{m} e^{mV} \int_0^V p_2(t) e^{-mt} dt - \frac{\nu}{b} e^{bV} \int_0^V p_2(t) e^{-bt} dt \quad (5)$$

Розв'язок рівняння (5) повинен задовольняти граничні умові $p_2(V_0) = 0$ та знаходиться у стандартному вигляді:

$$p_2(V) = C \cdot e^{(-\delta V)}$$

$$p_2(V) = A_0 - F_2 e^{mV} + G_0 e^{\frac{V}{b}} \quad (6)$$

З початковою умовою $A_0 = 0$. Після підстановки (6) в початкове рівняння (5), отримаємо систему лінійних рівнянь для визначення постійних F_0 та G_0 :

$$\begin{aligned} F_2 \frac{\lambda}{m\delta - 1} e^{mV} + C_0 \frac{\lambda b}{m - b} e^{\frac{V}{b}} - C_2 \frac{\lambda}{m\gamma + 1} \\ G_0 e^{\frac{V}{b}} \left(\frac{C_0}{b} + \frac{\lambda m}{m - b} \right) = C_2 \frac{\nu}{b\gamma + 1} \end{aligned} \quad (7)$$

Звідки

$$\begin{aligned} G_0 = C_2 e^{-\frac{V}{b}} \frac{m\delta(m - b)}{(b\gamma + 1)(C_0[m - b] - \lambda mb)} \\ F_2 = -C_2 e^{-mV} \left[\frac{\lambda}{m\gamma + 1} + \frac{m\delta(m - b)}{(b\gamma + 1)(C_0[m - b] + \lambda mb)} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

де невідома C_2 знаходиться із умови нормування і знаходиться чисельно:

$$\int_{-\infty}^{V_0} p_0(V) dV - \int_{V_0}^{+\infty} p_2(V) dV = 1 \quad (9)$$

За умови розподілу внесків, що надходять до фонду соціального страхування, та його виплат за експоненціальним законом, може бути знайдено точне рішення рівняння (9). При довільних розподілах внесків, що надходять до фонду, і його виплат, отримати точне рішення рівняння (9) не вдається. Однак рішення рівняння (9) може бути знайдено при введенні деяких додаткових припущень для відповідних областей, зокрема, в припущенні $V = V_0$, яке означає, що фонд практично витрачає майже стільки ж коштів, скільки отримує надходжень.

Однією з важливих характеристик фонду є ймовірність неплатоспроможності. При виконанні умови $V < 0$ фонд повинен припинити виплати по страховим випадкам. Ця ймовірність знаходиться із отриманого інтегрально-диференціального рівняння і дорівнює:

$$P_0 = \int_0^{V_0} p_2(V) dV = C \frac{\left(\frac{\lambda m}{C_1} - 1 \right) \left(\frac{C_2}{\lambda m} - e^{-\lambda V_0} \right)}{K_2 \left(\frac{\lambda m}{C_1} e^{K_1 V_0} - 1 \right) \left(\frac{C_2}{\lambda m} - 1 \right)} e^{K_1 V_0 - K_2 V_0} \quad (10)$$

Перевищення виплат фонд виконує в разі, коли капітал фонду $V > V_0$, або при $0 \leq V \leq V_0$, коли зміна капіталу, що почалася при $V = V_0$ ще не досягло нульового значення, тому ймовірність підвищення виплат можуть бути знайдені у вигляді:

$$p_1 = C \left[\frac{1}{K_1} \frac{e^{K_1 V} - 1}{\lambda m} + \frac{1}{C_1} \frac{1}{e^{K_1 V} - 1} \right] \quad (11)$$

де C чисельно знаходиться із умови нормування (9).

ВИСНОВКИ

Таким чином, у статті розглянута діяльність некомерційних фондів соціального страхування і побудована модель їх діяльності за умови, що страхові виплати та надходження ξ являються незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, які мають закон розподілу Пуассона.

У рамках заданих припущень знайдена відповідна щільність розподілу капіталу фондів і отримана система інтегрально-диференціальних рівнянь, які дозволяють виявити параметри управ-

ління надходженнями і виплатами, які забезпечують задані ймовірнісні характеристики роботи фондів. Як конкретний приклад розглянуто випадок, коли рішення отриманих інтегрально-диференціальних рівнянь знаходиться не в чисельному вигляді, а представляється аналітично. Знайдено ймовірності неплатоспроможності при підвищених виплат фондів.

За умови, що страхові виплати ξ мають відмінні від експоненційного закон розподілу, інтегрально-диференціальні рівняння, отримані при вирішенні поставленого завдання, не можуть бути вирішені аналітично. Тому для розрахунку зазначених рівнянь чисельно, необхідно буде вводити додаткову систему обмежень.

Література.

1. "Україна фінансова": інформаційно-аналітичний портал Українського агентства фінансового розвитку [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://www.ufin.com.ua>
2. Офіційна інтернет-сторінка Державної комісії з регулювання ринку фінансових послуг [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://dfp.gov.ua/> (дата звернення: 25.10.13).
3. Адашкин Л.Ф. Математическая модель фонда социального страхования (диффузионное приближение) / Материалы Всероссийской научно-практической конференции. — 15 ноября. — 2002. — Томск. — 2002. — С. 14—18.
4. Радюк Л.Е. Теория вероятностей и случайных процессов / Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф. — Издательство ЮФУ. — 1988. — 174 с.
5. Ливиту К.Н. Пуассоновская модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом / Ливиту К.Н., Сухотина Л.Ю., Шифердекер И.Ю. // Вестник Томского государственного университета. — 2006. — № 19. — С. 302—312.
6. Mishura Y. Mathematics of binances // Y. Mishura, G. Shevchenko. — Kyiv University press. — 2009. — 352 p.
7. Panjer H.H. Risk Models // Panjer H.H., Willmont G.E. Insurance — Society of Actuaries, 1992. — 442 p.
8. Коваль О.П. Щодо оптимізації системи загальнообов'язкового державного соціального страхування. Аналітична записка / О.П. Коваль [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://www.niss.gov.ua/articles/1171/>

References:

1. Ukraina finansova (2014), information and analytical portal of the Ukrainian Agency of Financial Development, available at: <http://www.ufin.com.ua> (Accessed 25.10.14).
2. The official web-page of State commission on regulation of financial services market (2014), available at; <http://dfp.gov.ua> (Accessed 25.10.14).
3. Adashkin, L. F. (2002), "Mathematical model of social insurance fund (diffusive approach)", Materialy Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii [Conference Proceedings of the All-Russian Scientific and Practical Conference], Tomsk, Russia, 15 November 2002, pp. 14—18.
4. Radjuk, L. E. and Telepugov A. F. (1988), Teoriya veroyatnostey i sluchaynyh protsessov [Theory of Probability and Stochastic Processes], SFU, Rostov-na-Donu, Russia.
5. Livitu, K. N. Sukhotina, L. Yu. and Shiferdecker, I. Yu. (2006), "Poisson model of non-commercial fund's activity with relay capital management", Vestnik tomского Gosudarstvennogo universiteta, vol. 19, pp. 302—312.
6. Mishura, Y. and Shevchenko, G. (2009), Mathematics of binances, University press, Kyiv, Ukraine.
7. Panjer, H.H. Willmont, G.E. and Panjer, H.H. (1992), Risk Models, Insurance, Society of Actuaries, USA.
8. Koval, O.P. (2014), "About optimization of obligatory national social insurance system. Analytical note", available at: <http://www.niss.gov.ua/articles/1171/> (Accessed 25.10.14).

Стаття надійшла до редакції 14.10.2014 р.