МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Чернігівський національний технологічний університет

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
З ДИСЦИПЛІНИ „ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ”
ДЛЯ СТУДЕНТІВ УСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Затверджено
на засіданні кафедри вищої і прикладної математики,
протокол № 4від 04.04.2016 р.

Чернігів ЧНТУ 2016

Транспортна задача. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни “Дослідження операцій”, для студентів усіх спеціальностей./ Укл.: Казнадій С.П., Мурашковська В.П.— Чернігів: ЧНТУ, 2016. — 23с.

Укладачі: Казнадій Світлана Петрівна, старший викладач
Мурашковська Віра Петрівна, старший викладач

Відповідальний за випуск: Балюнов Олексій Олександрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої і прикладної математики Чернігівського національного технологічного університету

Рецензент: Синенко Марина Анатольовна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої і прикладної математики Чернігівського національного технологічного університету

Зміст

Вступ

Методичні вказівки спрямовані на допомогу студентам оволодіти практичними навичками з побудови математичних моделей задач оптимального вибору і застосування оптимізаційних методів для їх розв’язання. Дисципліна «Дослідження операцій» є нормативною дисципліною циклу природничо-наукової та загальноекономічної підготовки бакалаврів.

Вивчення дисципліни «Дослідження операцій» спрямоване на підготовку висококваліфікованих фахівців, що володіють методами математичного моделювання та оптимізації і здатні приймати рішення, підкріплені математичними розрахунками.

У методичних вказівках до практичних занять розглянуто найважливійша тема «Транспортна задача», зокрема економічна та математична постановка транспортної задачі та задачі про призначення. Знання й навички, що отримані під час вивчення цих тем, є основою для вивчення наступних складніших тем курсу, та найчастіше застосовуються у практичній діяльності.

У методичних вказівках до самостійної роботи для кожної теми зазначено обсяг витрат часу на вивчення, що відповідає програмі курсу. Наприкінці методичних вказівок наведено список основних і додаткових підручників, які рекомендується використовувати. Кожна тема супроводжується посиланнями на відповідні їй сторінки підручників. Після вивчення теоретичного матеріалу треба дати відповіді на контрольні запитання з теми та розв’язати задачі, які запропоновані для самостійного розв'язання. Для полегшення роботи перед задачами для самостійної роботи розглянуто короткий теоретичний курс та наведені приклади розв'язання аналогічних задач.

Частина 1
КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Постановка задачі

Транспортні моделі (задачі) описують переміщення (перевезення) деякого товару з пункту відправлення (наприклад, місце виробництва) у пункт призначення (наприклад, магазин, склад). Мета транспортної задачі – визначити обсяг перевезення з пунктів відправлення у пункти призначення з мінімальною сумарною вартістю перевезень. При цьому повинні враховуватись обмеження, які накладаються на обсяги вантажів, які є в пунктах відправлення, та обмеження, які враховують потребу вантажів у пунктах призначення. В транспортній моделі припускається, що вартість перевезення за будь-яким маршрутом прямо пропорційна обсягу вантажу, який перевозиться за даним маршрутом.

Нехай є ***m*** пунктів відправлення A_1, A_2, …, A_m, в яких знаходиться однорідна продукція в кількостях $a_1, a_2, ..., a_m$ відповідно. Нехай є ***n*** пунктів призначення B_1, B_2, …, B_n , яким потрібна ця продукція відповідно в кількостях $b_1, b_2, ..., b_n$. Нехай відомі $\boldsymbol{c_{ij}}$ – витрати за перевезення одиниці продукції з i -го шяка вивозиться з i -го пункту відправлення в j -й пункт призначення.

Задача полягає в тому, щоб визначити, скільки треба вивезти продукції з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення, щоб сумарні витрати на перевезення були мінімальними.

Математична модель такої задачі має вигляд:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

за умови

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right),$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right).$$

Інколи можуть накладатись додаткові обмеження, у залежності від умови задачі:

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} ,$$

де $\boldsymbol{d_{ij}}$ – обмежений обсяг перевезення від пункту відправлення ***i*** у пункт призначення ***j*** .

Для відшукання розв’язку транспортної задачі повинна виконуватись умова

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

тобто транспортна задача має бути збалансованою (загальна кількість виробленої продукції дорівнює загальній кількості попиту споживачів). Якщо виконується ця умова, то така транспортна задача називається *закритою*.

Далі потрібно визначити кількість базисних змінних $m+n-1$, та початковий опорний план.

Кожна транспортна задача розв'язується за тією самою схемою, що й будь-яка задача лінійного програмування, а саме:
1) знайти будь-який базисний невід'ємний розв'язок;

2) перевірити його на оптимальність;

3) якщо знайдений розв'язок не є оптимальним, то перейти до нового плану.

Всі дані і шукані величини треба розмістити в таблиці:

Постачальники	Споживачі				
	B_1	B_2	…	B_n	Запаси
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	$в_1$	$в_2$	…	$в_n$	

1.2. Знаходження початкового опорного плану

Метод "північно-західного кута" (діагональний спосіб).

Цей метод полягає в тому, що розподіляється продукція постачальників і задовольняються потреби споживачів у тому порядку, в якому записано в таблиці: спочатку розподіляємо продукцію першого постачальника A_1, намагаючись повністю задовольнити перших споживачів B_1, B_2, ..., B_n, наскільки це можливо. Вичерпавши продукцію постачальника A_1, розподіляємо продукцію постачальника A_2 за тим самим принципом: задовольняємо потреби дальших споживачів, яких не вдалося задовольнити за рахунок постачальника , A_1, і так доти, поки не буде розподілена вся продукція всіх постачальників. Таким чином, заповнення кліток таблиці починається з крайньої в лівому верхньому кутку клітинки, з "північно-західного кута", продовжується в напрямі діагоналі таблиці до крайньої клітинки в правому нижньому кутку.

Розглянемо застосування цього методу на прикладі.

Приклад. З трьох пунктів виробництва A=(35; 43; 12) необхідно вивезти однорідний продукт у чотири пунктів споживання В=(15; 15; 40; 20). Транспортні витрати $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 10 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Усі дані подано в таблиці. Знайти початковий опорний план способом "північно-західного кута".

Постач⁄Спожив.	***B₁***	***B₂***	***B₃***	***B₄***	
A₁	0	3	2	3	35
A₂	2	7	10	1	43
A₃	3	3	4	4	12
	15	15	40	20	90

Розв'язання. В цій задачі є три постачальника і чотири споживачів. Умова балансу виконується: 35+43+12=15+15+40+20=90.

Кількість базисних невідомих дорівнює m□□+n-□1=6.

Будемо заповнювати нову таблицю8. Запишемо спочатку можливості постачальників і потреби споживачів. Як бачимо, споживачу B_1 потрібно 15 одиниць продукції, постачальник A_1 має 35 одиниць; отже, за рахунок постачальника A_1 можна повністю задовольнити потреби споживача B_1. Запишемо в клітинку (1, 1) менше з чисел 35 і 15**,** x_{11}= □min(□35, 15)□□=15. Перший стовпець виключаємо з розгляду, тобто в решті клітинок цього стовпця проставимо нулі.

У постачальника A_1 залишається ще 35-15=20 одиниць. Тепер заповнимо клітинку (1,2). Споживачу B_2 необхідно 15 одиниць. Отже, за рахунок постачальника A_1, у якого залишалося ще 20 одиниць, можна повністю задовольнити потреби споживача B_2. У клітку (1,2) записуємо менше з чисел 20 і 15, тобто x_{12} =□min(20, 15)=1□5. Другий стовпець виключаємо з розгляду, в решту кліток цього стовпця проставимо нулі. У постачальника A_1 залишилось ще 20-15=5 одиниць продукції.

Тепер будемо заповнювати клітинку (□1,3)□. Споживачу B_3 потрібно40 одиниць. Запишемо в клітинку (1,3) найменше з чисел 5 і 40, x_{13} =□min(5, 40)=□5. Резерви постачальника A_1 вичерпані. Перший рядок виключаємо з розгляду, тобто в решті клітинок ряду проставимо нулі.

Тепер будемо заповнювати клітку (□2,3). Споживачеві B_3 ще потрібно 35 одиниць, постачальник A_2 має 43 одиниці. У клітку (2,3) записуємо менше з чисел 35, 43 , тобто x_{23} =□min(35, 43)=3□5. Третій стовпець виключаємо з розгляду, записавши в останній клітці цього стовпця нуль.

У постачальника A_2 залишилося ще 43-35=8 одиниць. Тепер будемо заповнювати клітку (□2,4)□. Споживачу B_4 потрібно 20 одиниць. Записуємо в клітинку □(2,4) менше з чисел 8 і 20, тобто x_{24} =□min(8, 20)=8. Резерви постачальника A_2 вичерпані. Другий рядок виключаємо з розгляду.

Тепер заповнимо клітку (□3,4)□. Споживачу B_4 ще потрібно 12 одиниць. Записуємо в клітинку (□3,4) менше з чисел 12 і 12, x_{34} =□min(12, 12)=12. На цьому процес побудови початкового опорного плану закінчується. Початковий опорний план, знайдений цим способом, такий:

Постач⁄Спожив.	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	0 15	3 15	2 5	3 0	35
A_2	2 0	7 0	10 35	1 8	43
A_3	3 0	3 0	4 0	4 12	12
	15	15	40	20	90

Значення цільової функції:

$$F=0\cdot15+3\cdot15+2\cdot5+10\cdot35+1\cdot8+4\cdot8 = 461.$$

Розглянемо другий метод знаходження початкового опорного плану.

Метод мінімальної вартості.

Цей метод полягає в тому, що з усієї таблиці вартостей обирається найменша і в клітці, яка їй відповідає, записується менше з чисел $\boldsymbol{a_i}$ і $\boldsymbol{b_j}$. З розгляду виключається або рядок, відповідний постачальнику, запаси якого вичерпані, або стовпець, відповідний споживач, потреби якого повністю задоволені, або рядок і стовпець, якщо вичерпані запаси постачальника і задоволені потреби споживача. В частині таблиці, що залишилася, знову обирається найменша вартість, і процес розподілу запасів продовжується, доки всі запаси не будуть розподілені, а потреби задоволені.

Розглянемо застосування цього методу на попередньому прикладі.

Розв'язання. Шукаємо в таблиці найменший елемент. У даному випадку він дорівнює 0 розміщений у клітці (1,1). У цю клітку записуємо найменше з чисел 35 і 15, тобто x_{11} = min(35, 15)=15.

Перший стовпець далі не розглядається. Записуємо в останні клітці цього стовпця нулі У постачальника A_1 залишилося 35-15=20 одиниць. У частині таблиці, що залишилася, вибираємо знову найменший елемент. Таким елементом є 1. Він знаходиться в клітці (2,4). В цю клітку записуємо менше з чисел 43 і 20, тобто x_{24}= min (43,20)=20.Четвертий стовпець далі не розглядається. Аналогічно, продовжуючи заповнення таблиці, одержуємо такий опорний план:

Постач⁄Спожив.	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	0 15	3 0	2 20	3 0	35
A_2	2 0	7 3	10 20	1 20	43
A_3	3 0	3 12	4 0	4 0	12
	15	15	40	20	90

Значення цільової функції:

$$F=0\cdot15+2\cdot20+7\cdot3+10\cdot20+1\cdot20+3\cdot12 = 317.$$

1.3. Знаходження оптимального плану

Перевіримо на оптимальність початковий опорний план.

Якщо початковий опорний план транспортної задачі має $m+n$-1 додатних перевезень, то він називається *невиродженим*, а якщо початковий опорний план має менше додатних перевезень, то він називається виродженим.

Теорема. Якщо план транспортної задачі є оптимальним, то йому відповідає система з $m+n$ чисел U_i і Vj, які задовольняють умови

$U_i + Vj=c_{ij}$ для $x_{ij}>0$ і $U_i + Vj\leq0$ $x_{ij}=0$, (i=1,…,m; j=1,…,n).

Числа U_i і Vj називаються *потенціалами* постачальників і споживачів відповідно.

Отже, якщо виявиться, що хоч для однієї вільної клітинки

$\Delta_{ij} =U_i + Vj - c_{ij} >0$,

то план неоптимальний і його треба поліпшувати. Поліпшення плану полягає в тому, що вільну клітинку, для якої $\Delta_{ij}> 0$, заповнюємо, перемістивши в неї за певним правилом число з іншої клітинки, а якщо є декілька клітинок, для яких Δ_{ij} >□0, то заповнюємо ту клітинку, де Δ_{ij} найбільше.

Повернемося до нашої задачі. В даному прикладі початковий опорний план невироджений, тому що кількість заповнених клітинок дорівнює m+□□n-1=6. Перевіримо на оптимальність план, знайдений способом "північно-західного кута". Складемо систему рівнянь для визначення потенціалів, використовуючи таблицю. Для заповнених клітинок:

$c_{11} =U_1 + V_1 =0$; $c_{12} =U_1 + V_2 =3$; $c_{13} =U_1 + V_3 =2$; $c_{23} =U_2 + V_3 =10$; $c_{24}=U_2 + V_4 =1$; $c_{34} =U_3 + V_4 =4$.

Маємо систему 6 рівнянь із 7 невідомими. Така система має безліч розв'язків. Знайдемо один із них. Нехай U_1 =□ 0, тоді з першого рівняння знаходимо: V_1 =0. Аналогічно з решти рівнянь знаходимо значення всіх інших потенціалів : U_2=8; U_3 =11; V_2 =3; V_3 =2; V_4 =-7.

Знаходимо оцінки (для вільних клітинок):

$\Delta_{14} = U_1 + V_4 - c_{14} = 0 + 2 - 3 = - 1$;
$\Delta_{21} = U_2 + V_1 - c_{21} = 8 + 0 - 2 = 6$;
$\Delta_{22} = U_2 + V_2 - c_{22} = 8 + 3 - 7 = 4$;
$\Delta_{31} = U_3 + V_1 - c_{31} = 11 + 0 - 3 = 81$;
$\Delta_{32} = U_3 + V_2 - c_{32} = 11 + 3 - 3 = 11$;
$\Delta_{33} = U_3 + V_3 - c_{33} = 11 + 2 - 4 = 9$.

Оскільки Δ_{21}=6>0 Δ_{22} =4>0, Δ_{31}=8>0, Δ_{32}=11>0, Δ_{33} =9>0 то знайдений опорний план не є оптимальним. Його можна поліпшити. Найбільша оцінка відповідає клітинці (3,2)□. У клітку (3,2) □□треба розмістити вантаж, позначимо кількість його через θ□. Тепер треба знайти замкнутий цикл, який забезпечить баланс задачі. Для цього треба відняти θ□□ з обсягу перевезення клітки (1,2) (щоб сума перевезень у першому рядку залишилася без зміни); далі треба додати θ до об'єму перевезення клітки (1,3) (щоб сума перевезень у третьому стовпці залишилася без зміни); тепер треба відняти θ з об'єму перевезення клітинки (2,3), (щоб сума перевезень у другому рядку залишилася без зміни), аналогічно, додати θ до об'єму перевезення клітки (2,4) (щоб сума перевезень у четвертому стовпці залишилася без зміни); тепер треба відняти θ з об'єму перевезення клітинки (3,4), (щоб сума перевезень у третьому рядку залишилася без зміни).

Постач/Спожив.	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	0 15	3 15 - θ	2 5 + θ	3 0	35
A_2	2 0	7 0	10 35 - θ	1 8 + θ	43
A_3	3 0	3 0 + θ	4 0	4 12 - θ	12
	15	15	40	20	90

Величина θ визначає, скільки одиниць вантажу можна перерозподілити в знайденим циклі. θ визначаємо як найменшу зі всіх перевезень, які стоять в клітках, в яких θ віднімається. У нашому випадку $\theta = \min(15, 35, 12) = 12$. В результаті перерозподілу вантажу одержимо новий опорний план, представлений в таблиці.

Постач/Спожив.	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	0 15	3 3	2 17	3 0	35
A_2	2 0	7 0	10 23	1 20	43
A_3	3 0	3 12	4 0	4 0	12
	15	15	40	20	90

Перевіряємо новий план на оптимальність. Для цього знову знаходимо потенціали та перевіряємо виконання умови оптимальності для кожної вільної клітки.

Для заповнених клітинок:
$c_{11} = U_1 + V_1 = 0$; $c_{12} = U_1 + V_2 = 3$; $c_{13} = U_1 + V_3 = 2$; $c_{23} = U_2 + V_3 = 10$; $c_{24} = U_2 + V_4 = 1$; $c_{32} = U_3 + V_2 = 3$.

Маємо систему 6 рівнянь із 7 невідомими. Нехай $U_1 = 0$, тоді з першого рівняння знаходимо: $V_1 = 0$. Аналогічно з решти рівнянь знаходимо значення всіх інших потенціалів : $U_2 = 8$; $U_3 = 0$; $V_2 = 3$; $V_3 = 2$; $V_4 = -7$.

Знаходимо оцінки (для вільних клітинок):

$\Delta_{14} = U_1 + V_4 - c_{14} = 0 - 7 - 3 = -10;$

$\Delta_{21} = U_2 + V_1 - c_{21} = 8 + 0 - 2 = 6;$

$\Delta_{22} = U_2 + V_2 - c_{22} = 8 + 3 - 7 = 4;$

$\Delta_{31} = U_3 + V_1 - c_{31} = 0 + 0 - 3 = -3;$

$\Delta_{32} = U_3 + V_2 - c_{32} = 0 + 3 - 4 = \mathbf{-2;}$

$\Delta_{34} = U_3 + V_4 - c_{34} = 0 - 7 - 4 = -11.$

Оскільки Δ_{21}=6>0 Δ_{22} =4>0 то знайдений опорний план не є оптимальним. Його можна поліпшити. Найбільша оцінка відповідає клітинці (2,1)□. У клітку (2,1) треба розмістити вантаж, позначимо кількість його через θ□. Тепер треба знайти замкнутий цикл, який забезпечить баланс задачі. Для цього треба відняти θ□□ з обсягу перевезення клітки (1,1) (щоб сума перевезень у першому рядку залишилася без зміни); далі треба додати θ□ □до об'єму перевезення клітки □(1,3) (щоб сума перевезень у третьому стовпці залишилася без зміни); тепер треба відняти θ□□ з об'єму перевезення клітинки □(2,3)□, (щоб сума перевезень у другому рядку залишилася без зміни).

Постач⁄Спожив.	***B₁***	***B₂***	***B₃***	***B₄***	
A₁	0 15 - θ□	3 3	2 17 + θ□	3 0	35
A₂	2 0 + θ□	7 0	10 23 - θ□	1 20	43
A₃	3 0	3 12	4 0	4 0	12
	15	15	40	20	90

Величина θ□□ визначає, скільки одиниць вантажу можна перерозподілити в знайденим циклі. θ□ визначаємо як найменшу зі всіх перевезень, які стоять в клітках, в яких θ□ віднімається. У нашому випадку θ = □min (1□5, 23) = □15. В результаті перерозподілу вантажу одержимо новий опорний план, представлений в таблиці.

Постач⁄Спожив.	***B₁***	***B₂***	***B₃***	***B₄***	
A₁	0 0	3 3	2 32	3 0	35
A₂	2 15	7 0	10 8	1 20	43
A₃	3 0	3 12	4 0	4 0	12
	15	15	40	20	90

Перевіряємо новий план на оптимальність. Для цього знову знаходимо потенціали та перевіряємо виконання умови оптимальності для кожної вільної клітки.

Для заповнених клітинок:
$c_{12} = U_1 + V_2 = 3$; $c_{13} = U_1 + V_3 = 2$; $c_{21} = U_2 + V_1 = 2$; $c_{23} = U_2 + V_3 = 10$; $c_{24} = U_2 + V_4 = 1$; $c_{32} = U_3 + V_2 = 3$.

Маємо систему 6 рівнянь із 7 невідомими. Нехай U_1 =□ 0, тоді з першого рівняння знаходимо: $V_2 = 3$. Аналогічно з решти рівнянь знаходимо значення всіх інших потенціалів : $U_2=8$; $U_3=0$; $V_1=-6$; $V_3=2$; $V_4=-7$.

Знаходимо оцінки (для вільних клітинок):

$\Delta_{11} = U_1 + V_1 - c_{11} = 0 - 6 - 0 = -6$;
$\Delta_{14} = U_1 + V_4 - c_{14} = 0 - 7 - 3 = -10$;
$\Delta_{22} = U_2 + V_2 - c_{22} = 8 + 3 - 7 = 4$;
$\Delta_{31} = U_3 + V_1 - c_{31} = 0 - 6 - 3 = -9$;
$\Delta_{33} = U_3 + V_3 - c_{33} = 0 - 7 - 4 = -11$;
$\Delta_{34} = U_3 + V_4 - c_{34} = 0 - 7 - 4 = -11$.

Оскільки $\Delta_{22} = 4 > 0$ то знайдений опорний план не є оптимальним. Його можна поліпшити. У клітку (2,2) треба розмістити вантаж, позначимо кількість його через θ□. Тепер треба знайти замкнутий цикл, який забезпечить баланс задачі. Для цього треба відняти θ□□ з обсягу перевезення клітки (1,2) (щоб сума перевезень у першому рядку залишилася без зміни); далі треба додати θ□ □до об'єму перевезення клітки □(1,3) □□(щоб сума перевезень у третьому стовпці залишилася без зміни); тепер треба відняти θ□□ з об'єму перевезення клітинки (2,3)□, (щоб сума перевезень у другому рядку залишилася без зміни).

Постач⁄Спожив.	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	0 0	3 3 - θ□	2 32 + θ□	3 0	35
A_2	2 15	7 0 + θ□	10 8 - θ□	1 20	43
A_3	3 0	3 12	4 0	4 0	12
	15	15	40	20	90

Величина θ□□ визначає, скільки одиниць вантажу можна перерозподілити в знайденим циклі. θ□ визначаємо як найменшу зі всіх перевезень, які стоять в клітках, в яких θ□ віднімається. У нашому випадку θ = □min (3, 8) = 3. В результаті перерозподілу вантажу одержимо новий опорний план, представлений в таблиці.

Постач/Спожив.	***B₁***	***B₂***	***B₃***	***B₄***	
A_1	0 0	3 0	2 35	3 0	35
A_2	2 15	7 3	10 5	1 20	43
A_3	3 0	3 12	4 0	4 0	12
	15	15	40	20	90

Перевіряємо новий план на оптимальність. Знаходимо потенціали та перевіряємо виконання умови оптимальності для кожної вільної клітки.

Для заповнених клітинок:
$c_{13} = U_1 + V_3 = 2$; $c_{21} = U_2 + V_1 = 2$; $c_{22} = U_2 + V_2 = 7$; $c_{23} = U_2 + V_3 = 10$; $c_{24} = U_2 + V_4 = 1$; $c_{32} = U_3 + V_2 = 3$.

Маємо систему 6 рівнянь із 7 невідомими. Нехай $U_1 = 0$, тоді з першого рівняння знаходимо: $V_3 = 2$. Аналогічно з решти рівнянь знаходимо значення всіх інших потенціалів : $U_2 = 8$; $U_3 = 4$; $V_1 = -6$; $V_2 = -1$.; $V_4 = -7$.

Знаходимо оцінки (для вільних клітинок):
$\Delta_{11} = U_1 + V_1 - c_{11} = 0 - 6 - 0 = -6$;
$\Delta_{12} = U_1 + V_2 - c_{12} = 0 - 1 - 3 = -4$;
$\Delta_{14} = U_1 + V_4 - c_{14} = 0 - 7 - 3 = -10$;
$\Delta_{31} = U_3 + V_1 - c_{31} = 4 - 6 - 3 = -5$;
$\Delta_{33} = U_3 + V_3 - c_{33} = 4 - 2 - 4 = -2$;
$\Delta_{34} = U_3 + V_4 - c_{34} = 4 - 7 - 4 = -7$
Усі клітинки цієї таблиці мають $\Delta_{ij} < 0$. Отже, план є оптимальним.
Транспортні витрати на перевезення дорівнюють:
$F = 2\cdot35 + 2\cdot15 + 7\cdot3 + 10\cdot5 + 1\cdot20 + 3\cdot12 = 227$.

1.4 Розв'язок незбалансованої транспортної задачі

Було розглянуто транспортну задачу, коли $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто попит і пропозиція збалансовані. На практиці часто ця умова не виконується.
Трапляються випадки:

1) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто сумарний обсяг виробництва більший за сумарну потребу споживачів. У цьому випадку вводять фіктивного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ і з вартостями перевезень $_{i(n+1)} = 0$.

2) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто сумарний обсяг виробництва менший за сумарну потребу споживачів. У цьому випадку вводять фіктивного постачальника A_{m+1} із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ і з вартостями перевезень $c_{(m+1)j} = 0$.

Після того, як задача збалансована, вона розв'язується звичайним способом.

Приклад. У трьох сховищах знаходиться пальне, яке необхідно відправити до чотирьох пунктів споживання. Відстані від кожного сховища до кожного пункту споживання в кілометрах, запаси сховища і потреби кожного споживача в тоннах подані в таблиці. Скласти такий план відправки пального, щоб одержати мінімум тонно-кілометрів.

Постач⁄Спожив.	***B₁***	***B₂***	***B₃***	***B₄***	Запаси
A₁	2	4	5	1	60
A₂	2	3	9	4	70
A₃	8	4	2	5	50
Потреби	85	30	25	80	

Сумарні запаси менші за сумарні потреби. Вводимо фіктивного постачальника A_4 (четверте сховище) із запасом пального 40 т і з відстанями C_{4j} =0 (j=1,…,4).

Після того, як задачу збалансовано, знаходимо початковий опорний план, наприклад, за методом мінімальної вартості.

Постач⁄Спожив.	***B₁***	***B₂***	***B₃***	***B₄***	
A₁	2 0	4 0	5 0	1 60	60
A₂	2 70	3 0	9 0	4 0	70
A₃	8 0	4 25	2 25	5 0	50
A₄	0 15	0 5	0 0	0 20	40
	85	30	25	80	220

Не враховуючи поки що фіктивного постачальника, шукаємо найменшу відстань. Таким елементом є 1, що знаходиться в клітці (1,4). Заповнюємо цю клітку. $x_{14} = \min(80,60) = 60$. Перший рядок далі не розглядаємо. Наступним найменшим елементом є 2. Заповнюємо клітку(2,1). $x_{21} = \min(85,70) = 70$. Другий рядок далі не розглядаємо. Заповнюємо клітку(3,3). $x_{33} = \min(25,50) = 25$. Далі третій стовпець не розглядаємо. Тепер заповнюємо останній рядок. $x_{14}= 15, x_{42}=5, x_{44}=20$.

Кількість заповнених кліток - 7, тобто план не вироджений. Перевіримо його на оптимальність.

Постач/Спожив.	***B₁***	***B₂***	***B₃***	***B₄***	
A_1	2 0	4 0	5 0	1 60	60
A_2	2 70	3 0	9 0	4 0	70
A_3	8 0	4 25	2 25	5 0	50
A_4	0 15	0 5	0 0	0 20	40
	85	30	25	80	220

Для цього знаходимо потенціали та перевіряємо виконання умови оптимальності для кожної вільної клітки.

Для заповнених клітинок:

$c_{14} = U_1 + V_4 = 1$; $c_{21} = U_2 + V_1 = 2$; $c_{32} = U_3 + V_2 = 4$; $c_{33} = U_3 + V_3 = 2$; $c_{14} = U_1 + V_4 = 0$; $c_{42} = U_4 + V_2 = 0$; $c_{44} = U_4 + V_4 = 0$.

Маємо систему 7 рівнянь із 8 невідомими. Нехай U_1 =□ 0, тоді з першого рівняння знаходимо: $V_4 = 0$. Аналогічно з решти рівнянь знаходимо значення всіх інших потенціалів : $U_2=1$; $U_3 = 3$; $U_4 = -1$; $V_1 = 1$; $V_2 = 1$; $V_3 = -1$; $V_4 = 1$.

Знаходимо оцінки (для вільних клітинок):

$\Delta_{11} = U_1 + V_1 - c_{11} = 0 + 1 - 2 = -1$;
$\Delta_{12} = U_1 + V_2 - c_{12} = 0 + 1 - 4 = -3$;
$\Delta_{13} = U_1 + V_3 - c_{13} = 0 - 1 - 5 = -6$;
$\Delta_{22} = U_2 + V_2 - c_{22} = 1 + 1 - 3 = -1$;
$\Delta_{23} = U_2 + V_3 - c_{23} = 1 - 1 - 9 = -9$;
$\Delta_{31} = U_3 + V_1 - c_{31} = 3 + 1 - 8 = -4$;
$\Delta_{34} = U_3 + V_4 - c_{34} = 3 + 1 - 5 = -1$;
$\Delta_{43} = U_4 + V_3 - c_{43} = -1 + 1 - 0 = 0$.
Усі $\Delta_{ij} < 0$.

Отже, маємо оптимальний план. Значення цільової функції наступне:

$$F = 1 \cdot 60 + 2 \cdot 70 + 4 \cdot 25 + 2 \cdot 25 = 350.$$

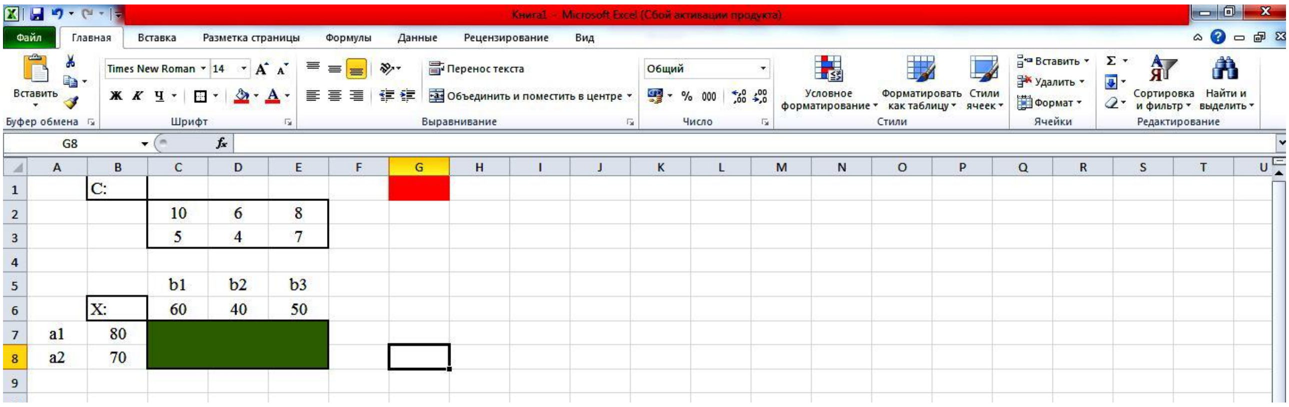
1.5 Використання EXEL для розв’язання транспортної задачі

Нехай маємо двох виробників з потужністю виробництва $a_1 = 80$, $a_2 = 70$. Маємо трьох споживачів з обмеженими потребами $b_1 = 60$, $b_2 = 40$, $b_3 = 50$. Матриця витрат на перевезення $C = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Знайти оптимальний план перевезень від виробників до споживачів.

1. Ввести дані задачі – матрицю витрат на перевезення C, стовпець потужностей виробників a_i, рядок потреб споживачів b_j.

2. Визначити матрицю X для невідомих x_{ij} та клітинку цільової функції (їх можна позначити певним кольором):



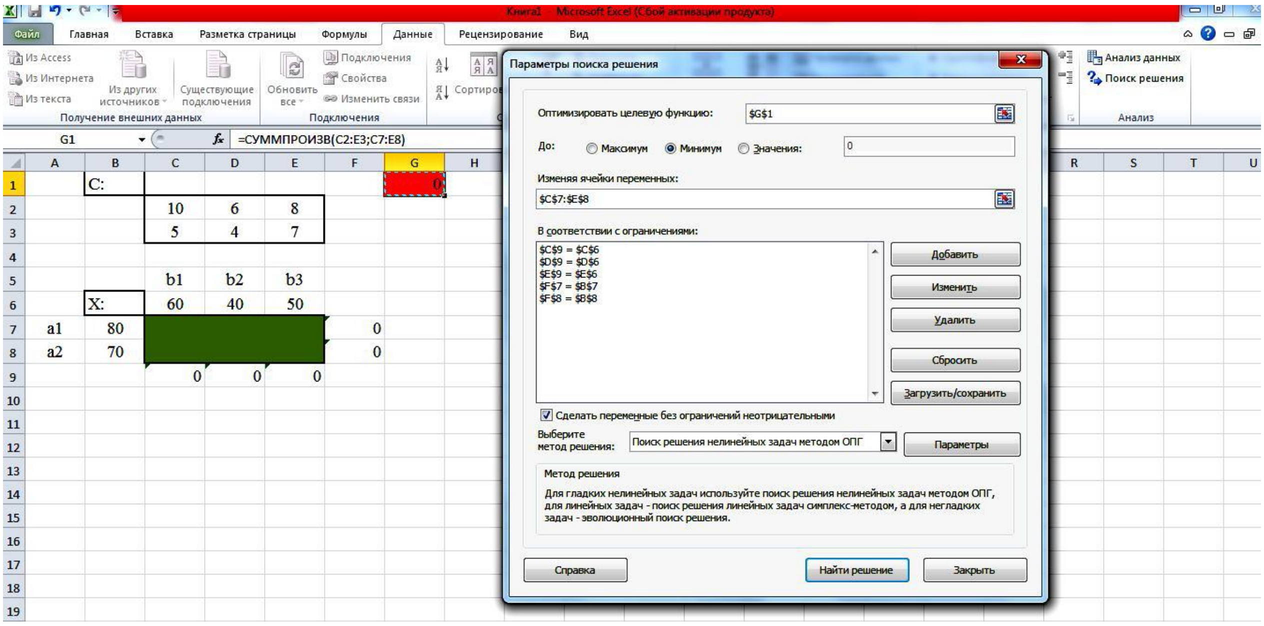
3. Підготувати клітинки, які міститимуть функції, які виражають ліві частини обмежень моделі. Наприклад, для даного прикладу у клітинку F7 ввести =СУММ(C7:E7) та скопіювати у клітинку F8. Аналогічно у клітинку C9 ввести =СУММ(C7:C8) та скопіювати формулу до клітинок D9, E9.

4. Підготувати клітинку, яка буде містити цільову функції. Одним із способів введення даної функції є використання функції СУММПРОИЗВ. Для цього у G1 ввести =СУММПРОИЗВ(C2:E3;C7:E8).

Пояснити, як ввести у G1 цільову функцію, не використовуючи функції СУММПРОИЗВ!

5. Після проведених приготувань для відшукання оптимального розв’язку задачі викликати надбудову Microsoft Excel – Пошук рішення (Дані $\rightarrow$ Пошук рішення).

6. В діалоговому вікні Параметри пошуку рішень ввести адресу клітинки, в якій міститься цільова функція ($G$1), вибрати мінімум, оскільки ми мінімізуємо витрати, змінюючи клітинки змінних ввести клітинки, які виражають невідомі ($C$7:$E$8), а також добавити обмеження.

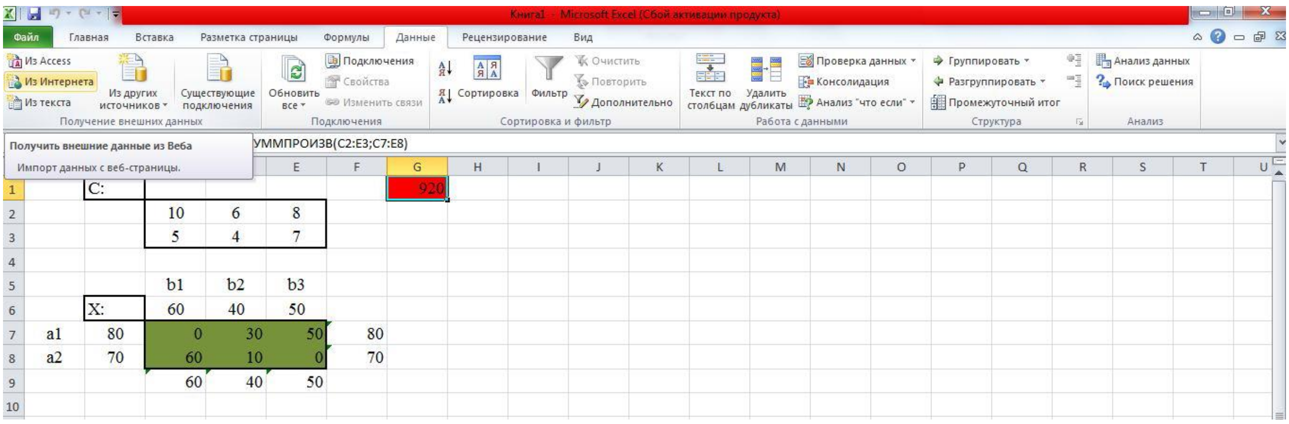


Для даного прикладу обмеження матимуть вигляд:

$C$9=$C$6
$D$9=$D$6 $F$7=$B$7   або   C$9:$E$9=$C$6:$E$6
$E$9=$E$6 $F$8=$B$8 $F$7:$F$8=$B$7:$B$8

Рис. 3.3

7. В результаті отримаємо розв'язок: $x_{11} = 0$, $x_{12} = 30$, $x_{13} = 50$, $x_{21} = 60$, $x_{22} = 10$, $x_{23} = 0$, а оптимальні витрати перевезення при цьому становитимуть 920 у.о.



Частина 2
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Перелік питань для усного опитування студентів

1. Які задачі називають транспортними?
2. Які транспортні задачі називають закритими, а які — відкритими?
3. Вкажіть основні властивості закритої транспортної задачі.
4. Як перейти від відкритої транспортної задачі до закритої?
5. Який розв’язок транспортної задачі називають базисним?
6. Який базисний розв’язок транспортної задачі називають невиродженим, який — виродженим?
7. В якому вигляді шукають розв’язок транспортної задачі?
8. Які методи застосовують для побудови початкового опорного розв’язку транспортної задачі?
9. Як будують початковий розв’язок транспортної задачі методом північно-західного кута?
10. Як будують початковий розв’язок транспортної задачі методом мінімальної вартості?
11. Який метод застосовують для побудови оптимального розв’язку транспортної задачі?
12. Як визначають потенціали пунктів постачання і споживання?
13. Як визначають (що є ознакою) оптимальність?

Індивідуальні завдання для студентів

1. Знайти початковий опорний план методом "північно-західного кута".
2. Знайти початковий опорний план методом мінімальної вартості.
3. Методом потенціалів знайти оптимальний план транспортної задачі.

Варіант №1

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

$A = (30\,50\,20)$, $B = (15\,15\,30\,30)$,

Варіант №2

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 10 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 04 \end{pmatrix},$$

$A = (35\,43\,12)$, $B = (15\,15\,40\,20)$, *Варіант* № 3

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 3 & 20 & 5 \end{pmatrix},$$

$A = (50\ 60\ 20),\quad B = (40\ 30\ 30\ 50),$

Варіант № 4

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$

$A = (15\ 32\ 13),\quad B = (10\ 10\ 20\ 20),$

Варіант № 5

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$A = (100\ \ 100\ \ 150\ \ 130),$

$B = (140\ \ 130\ \ 90\ \ 140),$

Варіант № 6

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 2 \\ 7 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$A = (60\ \ 20\ \ 30\ \ 20),$

$B = (40\ \ 30\ \ 30\ \ 15),$

Варіант № 7

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$A = (60\ \ 70\ \ 20\ \ 20),$

$B = (40\ \ 30\ \ 30\ \ 50),$

Варіант № 8

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$A = (40\quad 30\quad 20\quad 60),$

$B = (30\quad 25\quad 18\quad 20),$

Варіант № 9

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 0 \\ 6 & 14 & 8 & 7 \\ 8 & 3 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$A = (40\quad 25\quad 35\quad 20),$

$B = (15\quad 40\quad 30\quad 15),$

Варіант № 10

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \\ 12 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$A = (50\quad 20\quad 30\quad 40),$

$B = (30\quad 45\quad 35\quad 10),$

$Варіант \quad № 11$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 6 & 4 \\ 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix},$$

$A = (35\,25\,20)$, $\quad B = (17\,13\,34\,16)$,

$Варіант \quad № 12$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 & 1 \\ 10 & 2 & 8 & 1 \\ 9 & 15 & 10 & 10 \end{pmatrix},$$

$A = (80\,40\,20)$, $\quad B = (10\,5\,15\,10\,10)$,

$Варіант \quad № 13$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 5 \\ 7 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$A = (13\ 27\ 20)$, $\quad B = (12\,18\,14\,16)$,

$Варіант \quad № 14$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 30 & 3 \\ 10 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$A = (9\ 1\ 12)$, $\quad B = (5\ 7\ 2\ 8)$,

$Варіант \ № 15$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

$A = (20 \quad 16 \quad 14 \quad 11)$,

$B = (16 \quad 18 \quad 12 \quad 15)$,

$Варіант \ № 16$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 & 7 \\ 8 & 7 & 1 & 6 \\ 9 & 2 & 1 & 2 \\ 10 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix},$$

$A = (20 \quad 10 \quad 15 \quad 251)$,

$B = (10 \quad 80 \quad 25 \quad 5)$,

$Варіант № 17$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 8 & 10 \\ 10 & 3 & 2 & 3 & 15 \\ 0 & 10 & 5 & 1 & 16 \end{pmatrix},$$

$A = (130 \quad 90 \quad 40)$,

$B = (110 \quad 30 \quad 50 \quad 80 \quad 90)$,

$Варіант № 18$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$A = (30 \quad 20 \quad 40)$,

$B = (30 \quad 30 \quad 55 \quad 15 \quad 10)$, *Варіант* № 19

$$C=\begin{pmatrix}8&5&3&4\\0&1&5&2\\0&0&2&10\\3&4&3&8\end{pmatrix},$$

$$A=(45\quad 35\quad 70\quad 5),$$

$$B=(20\quad 60\quad 50\quad 50),$$

Варіант № 20

$$C=\begin{pmatrix}2&7&2&10\\3&6&4&2\\4&5&3&5\\1&0&3&4\end{pmatrix},$$

$$A=(15\quad 10\quad 30\quad 40),$$

$$B=(20\quad 30\quad 40\quad 50),$$

Варіант № 21

$$C=\begin{pmatrix}8&6&2&6\\1&3&3&8\\4&7&7&3\\0&5&3&4\end{pmatrix},$$

$$A=(10\quad 20\quad 50\quad 40),$$

$$B=(20\quad 10\quad 60\quad 70),$$

Варіант № 22

$$C=\begin{pmatrix}3&0&2&10\\6&4&8&12\\12&8&7&5\\11&10&2&1\end{pmatrix},$$

$$A=(10\quad 27\quad 13\quad 20),$$

$$B=(15\quad 18\quad 17\quad 5),$$

Варіант № 23

$$C=\begin{pmatrix}5&6&12&4\\4&0&17&8\\3&5&18&6\\2&10&14&13\end{pmatrix},$$

$$A=(10\quad 30\quad 20\quad 20),$$

$$B=(25\quad 20\quad 20\quad 25),$$

Варіант № 24

$$C=\begin{pmatrix}10&7&6&20\\12&7&4&16\\14&9&5&12\\18&10&3&8\end{pmatrix},$$

$$A=(50\quad 30\quad 40\quad 40),$$

$$B=(25\quad 35\quad 15\quad 20),$$

Варіант № 25

$$C=\begin{pmatrix}2&6&5&4\\0&2&10&2\\4&6&8&3\\8&0&12&6\\0&2&4&4\end{pmatrix},$$

$$A=(10\quad 20\quad 15\quad 25\quad 10),$$

$$B=(35\quad 15\quad 10\quad 20),$$

Варіант № 26

$$C=\begin{pmatrix}1&5&2&2&1&6\\3&6&2&4&3&3\\8&10&4&5&6&8\\7&3&7&9&1&2\end{pmatrix},$$

$$A=(10\quad 15\quad 90\quad 55),$$

$$B=(30\quad 40\quad 55\quad 80\quad 45\quad 10),$$

$$Варіант \quad № 27$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 8 & 10 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = (15\ 15\ 45), \quad B = (25\ 10\ 16\ 24),$$

$$Варіант \quad № 28$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A = (5\ 7\ 8), \quad B = (1\ 2\ 3\ 14),$$

$$Варіант \quad № 29$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 5 & 12 \\ 4 & 4 & 6 & 8 \\ 9 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A = (1105010), \quad B = (41293862),$$

$$Варіант \quad № 30$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A = (33314), \quad B = (15101510),$$

Рекомендована література

1. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. – Київ: ЗАТ “ВІПОЛ”, 2000. – 688 с.
2. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Учебник для вузов. – Киев: Вища школа, 1975. - 319 с.
3. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. – Киев: Вища школа, 1984. – 224 с.
4. Математические методы исследования операций. – Киев: Вища школа, 1979. – 312 с.
5. Горелик В.А., Ушаков И.А. Исследование операций. – М.: Машиностроение, 1986. – 288 с.
6. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
7. Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990. – 383 с.
8. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
9. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 496 с.
10. Оуэн Г. Теория игр. – М.: Мир, 1971. – 230 с.
11. Карлин С. Математические игры в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964. – 838 с.
12. Кондратенко Г.В. Фаззифікація якісних сигналів у нечітких системах підтримки прийняття рішень // Вестник ХГТУ. – 2002. – № 14. – С. 74-81.
13. Kondratenko Y.P. The fuzzy model for efficient solving ship’stransportation problem // Proc. of Int. Conf. “Contemporary systems on business control” CSBS’2001, 4-6 June, 2001, Lipetsk, Russia, pp. 56-60.
14. Гожий А.П. Применение генетических алгоритмов для решения задач дискретной оптимизации в САПР // Вестник ХДТУ. – Хмельницкий: ХДТУ. – 2002.
15. Цыбенко Б.А., Стрелковский И.В. Методы машинного проектирования и оптимизации элементов судна. – Николаев: НКИ, 1983. – 38 с.
16. Бугір М.К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. – К.: Академія, 1998. – 272 с.
17. Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування. – К.: Либідь, 2001. – 256 с.