Міністерство освіти і науки України

Чернігівський національний технологічний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки до проведення
практичних занять для студентів усіх спеціальностей
за темою ”Визначений інтеграл. Основні поняття”

Обговорено і затверджено на
засіданні кафедри вищої та
прикладної математики,
протокол № 7 від 17.02. 2016 р.

ЧЕРНІГІВ ЧНТУ 2016

Вища математика. Методичні вказівки до проведення практичних занять для студентів усіх спеціальностей за темою ”Визначений інтеграл. Основні поняття”/ Укл.: Лапа Т.В., Мовша О.М., Синенко М.А.– Чернігів: ЧНТУ, 2016. – 29 с.

Укладачі: Лапа Тамара Володимирівна, асистент

Мовша Олена Миколаївна, асистент

Синенко Марина Анатоліївна, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Відповідальний за випуск: Балюнов Олексій Олександрович, завідувач кафедри вищої та прикладної математики, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: Лось Валерій Миколайович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики Чернігівського національного технологічного університету

Зміст

Вступ

Стрімкий розвиток науки і наукова насиченість технологічних процесів вимагає від сучасних спеціалістів вміння швидко орієнтуватися у змінах, породжених науково – технічним прогресом, що неможливо без високої математичної культури та володіння математичним апаратом.

Зрозуміло, що у навчанні математики задачам належить провідна роль як найкращому способу, що забезпечує не тільки міцність математичних знат та глибоке розуміння матеріалу, але й сприяє розвитку абстрактного мислення взагалі.

Дані методичні вказівки призначені для студентів денної та заочної форми навчання і містять основні теоретичні відомості, приклади розв”язання задач, завдання до індивідуальних розрахунково – графічних робіт з вищої математики за темою "визначений інтеграл ", яка передбачена робочими навчальними програмами підготовки студентів за певними спеціальностями та містять рекомендовану літературу з відповідної теми курсу.

1 Основні теоретичні відомості.

Як відомо, визначеним інтегралом функції $f(x)$ на сегменті $[\alpha,\beta]$ називається границя виду $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$, якщо вона існує та скінченна.

Визначений інтеграл позначається $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Сума виду $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ називається інтегральною сумою, а величини α і β називають відповідно *нижньою* та *верхньою* межею інтегрування.

Якщо $f(x)\geq 0,\forall x\in[\alpha,\beta]$, то геометричний зміст визначеного інтеграла полягає в тому, що він дорівнює площі криволінійної трапеції обмеженої знизу віссю Ox, з боків – вертикалями $x=\alpha,$ та $x=\beta$, а зверху – графіком функції $y = f(x)$ (*рисунок 1*).

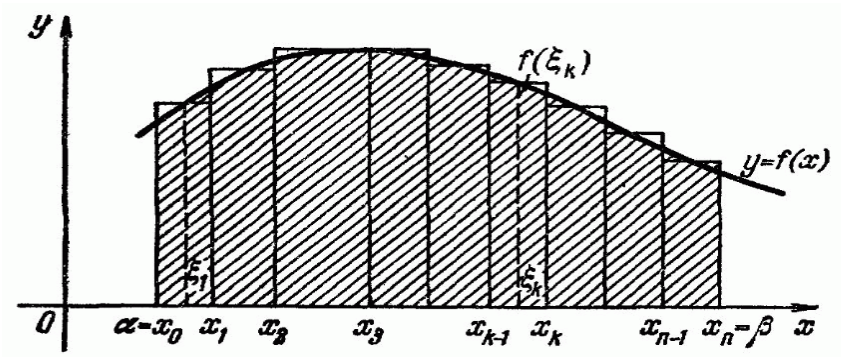

Рисунок 1 - Розбиття криволінійної трапеції для складання інтегральної суми

Сформулюємо основні властивості визначеного інтеграла.

1. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла (однорідність визначеного інтеграла):

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\gamma\cdot f(x)dx=\gamma\cdot\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,\quad \gamma=const.$$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від цих функцій (адитивність):

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\pm\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx.$$

3. Визначений інтеграл від диференціала вільної змінної дорівнює різниці значень верхньої та нижньої меж інтегрування:

$$\int_{\alpha}^{\beta}dx=\beta-\alpha\ .$$

4. Якщо поміняти місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл змінить знак на протилежний:

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=-\int_{\beta}^{\alpha}f(x)dx.$$

5. Проміжок інтегрування $\left[\alpha,\beta\right]$ може бути розбитий довільною точкою γ на два підпроміжки $\left[\alpha,\gamma\right]$ та $\left[\gamma,\beta\right]$, при цьому інтеграл на $\left[\alpha,\beta\right]$ буде дорівнювати сумі інтегралів:

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma}f(x)dx+\int_{\gamma}^{\beta}f(x)dx.$$

6. Модуль визначеного інтеграла не перевищує визначеного інтеграла від модуля підінтегральної функції:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\right|\le\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)\right|dx.$$

7. Правило інтегрування нерівностей:

якщо $f(x)\le g(x),\forall x\in[\alpha;\beta]$, то $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\le\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$.

8. Якщо маємо значення $m,M\in\mathrm{R}$, причому $m=\min f(x)\forall x\in\left[\alpha,\beta\right]$, а $M=\max f(x)\forall x\in\left[\alpha,\beta\right]$, то справедлива нерівність:

$$m\cdot(\beta-\alpha)\le\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\le M\cdot(\beta-\alpha).$$

Якщо $F\left(x\right)$ є однією з первісних підінтегральної функції $f\left(x\right)$, то визначений інтеграл від функції $f\left(x\right)$ на сегменті $\left[a,b\right]$ дорівнює різниці значень первісної на верхній та нижній межах інтегрування.

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=F(x)\Big|_{a}^{b}=F(b)-F(a)\,. \qquad (1.1)$$

Формулу (1.1) називають *формулою Ньютона – Лейбніца*. Ця *формула* дає можливість обчислювати визначений інтеграл від функції $f(x)$ через одну з первісних цієї функції.

Приклад № 1.1:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+2x^2}} = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}} \left(1+2x^2\right)^{-\frac{1}{3}} d\left(1+2x^2\right) = \left.\frac{3\left(1+2x^2\right)^{\frac{2}{3}}}{8}\right|_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{8}\left(7^{\frac{2}{3}}-1\right).$$

Приклад № 1.2:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1+x^2\right)^{1/2} d\left(1+x^2\right) = \left.\frac{1}{2}\frac{\left(1+x^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Оскільки знаходження первісних є задачею невизначеного інтегрування, то і методи невизначеного інтегрування безпосередньо застосовуються для обчислення визначених інтегралів.

2 Інтегрування частинами та заміна змінної у визначеному інтегралі

На лекції була виведена *формула (1.2)* інтегрування частинами для визначених інтегралів .

$$\int_a^b u \cdot d\upsilon = \left(u \cdot \upsilon\right)\Big|_a^b - \int_a^b \upsilon \cdot du. \qquad (2.1)$$

Покажемо її застосування при обчисленні визначених інтегралів.

Приклад № 2.1:

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx = \left[\begin{array}{c} u = x,\ du = dx, \\ dv = e^x dx,\ v = \int e^x dx = e^x \end{array}\right] = x \cdot e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = x \cdot e^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = 1.$$

Приклад № 2.2:

$$\int_0^{\pi}\left(2x^2+3\right)\cos x dx=\begin{bmatrix} u=2x^2+3, \ du=4xdx, \\ dv=\cos xdx, \ \ v=\sin x \end{bmatrix}=\left(2x^2+3\right)\sin x\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}x\sin xdx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=x, \ \ du=dx, \\ dv=\sin xdx, \ \ v=-\cos x \end{bmatrix}=\left(2x^2+3\right)\sin x\Big|_0^{\pi}-4\left(\left(-x\cos x\right)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos xdx\right)=$$

$$=\left(2x^2+3\right)\sin x\Big|_0^{\pi}+4x\cos x\Big|_0^{\pi}-4\sin x\Big|_0^{\pi}=0-4\pi-0=-4\pi.$$

Приклад № 2.3:

$$\int_1^{\mathbf{e}}\mathbf{ln}^2 xdx=\begin{vmatrix} u=\mathbf{ln}^2 x, & du=2\mathbf{ln}\, x\dfrac{1}{x}dx \\ dv=dx, & v=x \end{vmatrix}=x\mathbf{ln}^2 x\Bigg|_1^{\mathbf{e}}-2\int_1^{\mathbf{e}}\mathbf{ln}\, xdx=\begin{vmatrix} u=\mathbf{ln}\, x, & du=\dfrac{1}{x}dx, \\ dv=dx, & v=x \end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{e}\,\mathbf{ln}^2\mathbf{e}-2\left(x\,\mathbf{ln}\, x-x\right)\Bigg|_1^{\mathbf{e}}=\mathbf{e}-2\mathbf{e}+2\mathbf{e}-2=\mathbf{e}-2.$$

3 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Заміна змінної у визначеному інтегралі вимагає відповідної заміни і меж інтегрування з таким розрахунком, аби значенням «нової» змінної відповідали задані, «старі», значення меж інтегрування. При цьому зворотна заміна змінної наприкінці розрахунку стає непотрібною:

$$\int_a^b f(x)dx=\begin{bmatrix} x=\varphi(t), t=\psi(x), \\ \alpha=\psi(a), \beta=\psi(b). \end{bmatrix}=\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt=$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt=G(t)\Big|_{\alpha}^{\beta}=G(b)-G(a)\in \mathrm{R}, \qquad \psi\left(\varphi(t)\right)=t. \tag{3.1}$$

Приклад № 3.1:

$$\int_3^{29}\frac{\sqrt[3]{x-2}}{3+\sqrt[3]{x-2}}dx=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt[3]{x-2} \\ x=t^3+2 \\ dx=3t^2dt \\ \text{при } x=3 \quad t=1 \\ \text{при } x=29 \quad t=3 \end{array}\right|=\int_1^3\frac{t}{3+t}\cdot 3t^2dt=3\int_1^3\frac{t^3+27-27}{t+3}dt=$$

$$=3\int_1^3\left(t^2-3t+9-\frac{27}{t+3}\right)dt=3\left(\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}-27\mathbf{ln}|t+3|\right)\Bigg|_1^3=3\left(9-\frac{27}{2}-27\mathbf{ln}6-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+27\mathbf{ln}4\right)=$$

$$=\left(27\mathbf{ln}\frac{3}{2}-\frac{10}{3}\right)\cdot 3=81\mathbf{ln}\frac{3}{2}-10.$$

Приклад № 3.2:

$$\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{4+3\mathbf{cos}\,2x}=\left|\begin{array}{l} \boldsymbol{tg}\; x=t \\ \mathbf{cos}\,2x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \\ \text{при } x=0 \quad t=0 \\ \text{при } x=\pi/3 \quad t=\sqrt{3} \end{array}\right|=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dt}{(1+t^2)\left(4+3\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dt}{7+t^2}=\frac{1}{\sqrt{7}}\mathbf{arctg}\frac{t}{\sqrt{7}}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\left(\mathbf{arctg}\sqrt{\frac{3}{7}}-0\right)=\frac{1}{\sqrt{7}}\mathbf{arctg}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

Приклад № 3.3:

$$\int_0^{\mathbf{ln}2}\sqrt{\mathbf{e}^x-1}dx=\left|\begin{array}{l} \sqrt{\mathbf{e}^x-1}=t \\ x=\mathbf{ln}(t+1) \\ dx=\dfrac{dt}{t+1} \\ \text{при } x=0 \quad t=0 \\ \text{при } x=\mathbf{ln}2 \quad t=1 \end{array}\right|=\int_0^1\frac{tdt}{t+1}=\int_0^1\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=t-\mathbf{ln}|t+1|\,\Big|_0^1=1-\mathbf{ln}2$$

4 Невласні інтеграли.

Досі ми розглядали визначені інтеграли від обмежених функцій, неперервних на проміжках скінченної довжини – *власні інтеграли*. Якщо ж проміжок інтегрування є нескінченним або підінтегральна функція на скінченному проміжку інтегрування має розриви *другого роду*, то такі інтеграли називають *невласними*. Кажуть, що *невласний інтеграл існує* (збігається), якщо існує і скінченна границя значення цього інтеграла в точці розриву або в нескінченно віддаленій точці. В протилежному випадку кажуть, що невласний інтеграл розбігається. Розглянемо два типи невласних інтегралів.

4.1 Невласні інтеграли на нескінченних проміжках

Це інтеграли вигляду:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad \text{та} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Для обчислення інтегралів в перших двох випадках виконують граничний перехід за умови прямування до нескінченності верхньої або, відповідно, нижньої межі інтегрування. Для цього довільним чином вибирають точку $b \in (a;+\infty)$ або, відповідно, $b \in (-\infty;a)$ і обчислюють визначений інтеграл виду

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \quad \text{або} \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to(-\infty)}\int_b^a f(x)dx \qquad (4.1)\text{ - }(4.2)$$

Якщо відповідні границі існують і скінченні, то їх значення покладають рівними значенню відповідного невласного інтеграла.

Дещо іншим чином обчислюють третій інтеграл, невласний на всій осі.

Виберемо довільним чином точку $c \in \mathrm{R}$ так, щоб функція $f\left(x\right)$ була визначена в цій точці. Тоді інтеграл можна представити у вигляді суми двох інтегралів, невласних на півосях:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Отже, $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to(-\infty)} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx \qquad (4.3)$$

причому обидві границі треба обчислювати окремо. Якщо принаймні одна з границь не існує, то невласний інтеграл вважається розбіжним.

Приклад № 4.1:

$$\int_{a}^{\infty} \frac{A}{x^{\alpha}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} \frac{A}{x^{\alpha}}dx = \begin{cases} \alpha \neq 1, \quad \lim\limits_{b\to\infty}\left(\dfrac{A/(1-\alpha)}{x^{\alpha-1}}\right)\Bigg|_a^b \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 1 - \textit{збігається}, \\ \alpha < 1 - \textit{розбігається}; \end{cases} \\ \alpha = 1, \quad \lim\limits_{b\to\infty}\left(A\cdot\ln(x)\right)\Big|_a^b \Rightarrow \textit{розбігається}. \end{cases}$$

Приклад № 4.2:

$$\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{b\to\infty}\int_{\sqrt{2}}^{b} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{bmatrix} x = \dfrac{1}{t}; \\ dx = -\dfrac{1}{t^2}dt; \end{bmatrix} = \lim_{c\to 0}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{c} \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2-1}} = \lim_{c\to 0}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{c} \frac{-\frac{1}{t}dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} =$$

$$= \lim_{c\to 0}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{c} \frac{-\frac{1}{t}dt}{\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}} = \lim_{c\to 0}\left(-\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{c} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \lim_{c\to 0}\left(-\arcsin t\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{c}\right) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Так як границя скінченна, інтеграл є збіжним.

Приклад № 4.3:

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx.$ Згідно з (2.6) дослідимо на збіжність інтеграли $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ та $\int_{0}^{+\infty} e^x dx$.

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} e^x dx = \lim_{t\to-\infty}\left(e^0 - e^t\right) = 1$$, тобто перший з інтегралів збігається.

Натомість $\int_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{0}^{e} e^x dx = \lim_{t\to-\infty}\left(e^t - 1\right) = +\infty$, тобто розбігається.

Отже, невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ теж розбігається.

<u>Приклад № 4.4:</u>

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+9} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9} = \mathbf{lim}_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2+5} + \mathbf{lim}_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{(x+2)^2+5} =$$

$$= \mathbf{lim}_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt5}\mathbf{arctg}\,\frac{x+2}{\sqrt5}\Bigg|_a^0 + \mathbf{lim}_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt5}\mathbf{arctg}\,\frac{x+2}{\sqrt5}\Bigg|_0^b = \mathbf{lim}_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt5}\left(\mathbf{arctg}\,\frac{2}{\sqrt5} - \mathbf{arctg}\,\frac{a+2}{\sqrt5}\right) +$$

$$+ \mathbf{lim}_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt5}\left(\mathbf{arctg}\,\frac{b+2}{\sqrt5} - \mathbf{arctg}\,\frac{2}{\sqrt5}\right) = \frac{1}{\sqrt5}\left(\mathbf{arctg}\,\frac{2}{\sqrt5} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{2} - \mathbf{arctg}\,\frac{2}{\sqrt5} = \frac{\pi}{\sqrt5}.$$

Так як границя скінченна, інтеграл є збіжним.

4.2 Невласні інтеграли від необмежених (розривних) функцій

Якщо $f(x)$ має на $[a,b]$ принаймні одну точку розриву другого роду, тобто права, ліва, або обидві границі функції $f(x)$ при прямуванні до такої точки не існують або нескінченні, то такий інтеграл називають невласним інтегралом від необмеженої (розривної) функції на проміжку $[a,b]$. Така особлива точка функції може

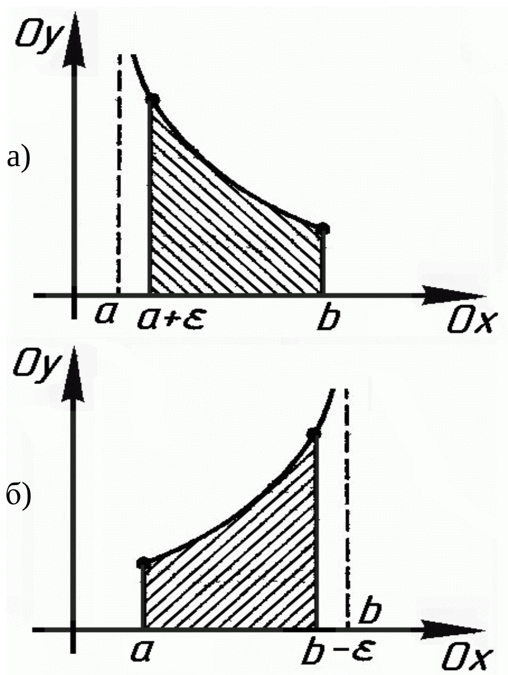

Рисунок 2 – Співпадіння точки розриву функції: а) – з лівим та б) – з правим кінцем сегменту $[a;b]$

співпадати з одним з кінців проміжку інтегрування, або бути внутрішньою точкою цього сегменту. Для визначення точок розриву другого роду достатньо знайти область допустимих значень підінтегральної функції на $[a,b]$.

У випадках, показаних на *рисунку 2*, для обчислення невласного інтеграла використовують формули:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to(+0)} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \qquad (4.4)$$

та, відповідно, $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to(+0)} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (4.5)$$

В разі розриву підінтегральної функції всередині сегменту інтегрування інтеграл по всьому проміжку представляють у вигляді суми двох інтегралів вигляду:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to(+0)} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to(+0)} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx. \qquad (4.6)$$

причому обидві границі треба обчислювати окремо. Якщо принаймні одна з границь не існує, то невласний інтеграл вважається розбіжним.

Приклад № 4.5:

Обчислити $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Точка розриву другого роду підінтегральної функції співпадає з лівим кінцем сегменту інтегрування.

$\int_\delta^1 x^{-1/2}dx = 2x^{1/2}\Big|_\delta^1 = 2\left(1-\sqrt{\delta}\right)$. При $\delta\to 0$ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta\to 0+} 2\left(1-\sqrt{\delta}\right) = 2$.

Приклад № 4,6:

$$\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx+\int_{0}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{0+\varepsilon_2}^{1}\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_{0+\varepsilon_2}^{1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{9}{7}(0-\varepsilon_1)^{\frac{7}{3}}+6(0-\varepsilon_1)^{\frac{1}{3}}+\frac{9}{7}+6\right)+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\frac{9}{7}+6-\frac{9}{7}(0+\varepsilon_2)^{\frac{7}{3}}-6(0+\varepsilon_2)^{\frac{1}{3}}\right)=14\frac{4}{7}.$$

Рекомендована література

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 446с.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1969. – 736 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988. – 432с.
4. Гусак А.А. Высшая математика. – Минск: Издательство Белорус. университета, 1983. – 460с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2: Учеб. пособие для студентов втузов. – М.: Высшая школа, 1980. – 365с.
6. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: Учеб. пособие для втузов. Ч 2. – М.: Высшая школа, 1985. – 207с.
7. Задорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 460с.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1988. – 223с.
9. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике: Типовые расчёты. – М.: Высшая школа, 1983. – 176с.
10. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1973. – 640с.
11. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2ч. – К.: Техніка, 2000. – 592с.
12. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика / Под ред. П.Ф. Овчинникова. – К.: Вища школа, 1987. – 552с.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2т. – М.: Наука, 1985, Т.1. – 432с.
14. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и

основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, В.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 462с.
15. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие в 3 ч. Ч.1 / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть: Под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 270с.

Додаток
Варіанти завдань до розрахунково-графічної роботи

Варіант 1

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{5x^2-3}$; **2)** $\int\limits_1^{\mathbf{e}} \frac{1+\mathbf{ln}\,x}{2x}dx$.

3) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} (3x+4)\mathbf{sin}2x\,dx$; **4)** $\int\limits_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{\mathbf{e}^{3x}}dx$.

5) $\int\limits_0^5 \frac{x}{\sqrt{x+4}}dx$; **6)** $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{1+3\mathbf{cos}^2 x}dx$; **7)** $\int\limits_{\mathbf{ln}\,2}^{\mathbf{ln}\,7} \frac{\mathbf{e}^x+\sqrt{\mathbf{e}^x+4}}{\mathbf{e}^x+5}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_4^{\infty} \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; **б)** $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}$.

Варіант 2

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_0^{1/5} \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx$.

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (4x+2)\mathbf{sin}\,3x\,dx$; 4) $\int\limits_1^{\mathbf{e}} \frac{\mathbf{ln}^2 x}{x^2}dx$.

5) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3\mathbf{cos}^2 x+4\mathbf{sin}^2 x}$; 7) $\int\limits_{\mathbf{ln}2}^{\mathbf{ln}3} \frac{\mathbf{e}^x+2}{\mathbf{e}^{2x}-1}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4x+5}$; б) $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\mathbf{cos}\,3x\,dx}{\sqrt[6]{(1-\mathbf{sin}\,3x)^5}}$.

Варіант 3

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2x^2+5}$; 2) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathbf{sin}\,x\,dx}{1-2\mathbf{cos}^2 x}$.

3) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (3x+5)\mathbf{sin}\,x\,dx$; 4) $\int\limits_1^{\mathbf{e}^2} \sqrt{x}\,\mathbf{ln}\,x\,dx$.

5) $\int\limits_{2/3}^{7/3} \frac{x}{\sqrt{2+3x}}dx$; 6) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{4\mathbf{sin}^2 x-5\mathbf{cos}^2 x}$; 7) $\int\limits_{\mathbf{ln}2}^{\mathbf{ln}3} \frac{2\mathbf{e}^x+3}{\mathbf{e}^{2x}+1}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\mathbf{arctg}\,2x\,dx}{\pi(1+4x^2)}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Варіант 4

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/7} \frac{dx}{\sqrt{4+7x^2}}$; 2) $\int\limits_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}^2} \frac{dx}{x \cdot \mathbf{ln}^2 x}$.

3) $\int\limits_{0}^{1} \left(x^2 - 5\right)\mathbf{cos}\,x dx$; 4) $\int\limits_{0}^{1} \mathbf{arctg}\sqrt{x} dx$.

5) $\int\limits_{2}^{7} \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} dx$; 6) $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/6} \frac{\mathbf{tg}\, x}{1-\mathbf{ctg}^2 x} dx$; 7) $\int\limits_{\mathbf{ln}\,2}^{\ln 3} \frac{dx}{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{1/2}^{\infty} \frac{16dx}{\pi\left(4x^2 + 4x + 5\right)}$; б) $\int\limits_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

Варіант 5

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3+4x^2}}$; 2) $\int\limits_{0}^{1} x^3\sqrt{4+5x^4} dx$.

3) $\int\limits_{0}^{\pi} \left(4x+2\right)\mathbf{cos}\frac{x}{2} dx$; 4) $\int\limits_{0}^{1/5} \mathbf{arcsin}\, 5x dx$.

5) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x+\sqrt{x}}{1+x} dx$; 6) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{dx}{3\,\mathbf{cos}^2 x + 4\,\mathbf{sin}^2 x}$; 7) $\int\limits_{\mathbf{ln}3}^{\mathbf{ln}8} \frac{\mathbf{e}^x \sqrt{\mathbf{e}^x + 1} dx}{\mathbf{e}^x - 1}$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{(2x+1)dx}{4x^2 + 4x + 5}$; б) $\int\limits_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

Варіант 6

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{3-4x^2}$; 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

3) $\int_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x dx$; 4) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 2x} dx$.

5. а) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; **6)** $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$; **7)** $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x(e^x+3)}$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$; **б)** $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} 3x} dx}{\cos^2 3x}$.

Варіант 7

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}$; **2)** $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$.

3) $\int_0^2 (3x+4)\sin 3x dx$; **4)** $\int_1^2 x^2 \ln x dx$.

5) $\int_1^8 \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x+1} dx$; **6)** $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$; **7)** $\int_0^{\frac{1}{2}\ln 2} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{(3-x^2)dx}{x^2+4}$; **б)** $\int_0^1 \frac{2e^{1-\frac{2}{\pi}\arcsin x}}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx$.

Варіант 8

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \sqrt[5]{3-2x}\,dx$; 2) $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

3) $\int_0^{\pi/5} \left(x^2+3\right)\mathbf{sin}\,5x\,dx$; 4) $\int_0^1 \frac{\mathbf{ln}(x+1)}{(x+1)^2}\,dx$.

5) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{x+3}\,dx$; 6) $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1+2\mathbf{sin}^2 x}$; 7) $\int_0^{\mathbf{ln}3} \frac{dx}{\mathbf{e}^{2x}+1}$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(\mathbf{arctg}\,2x)dx}{1+4x^2}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$.

Варіант 9

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \sqrt[4]{1+3x}\,dx$; 2) $\int_0^1 \left(x^2+x^2\mathbf{e}^{x^3}\right)dx$.

3) $\int_0^{\pi} (3x-4)\mathbf{cos}\,2x\,dx$; 4) $\int_{3/2}^2 \mathbf{arctg}(2x-3)\,dx$.

5) $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx$; 6) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{4\mathbf{sin}^2 x+4\mathbf{sin}\,2x}$; 7) $\int_{\mathbf{ln}2}^{\mathbf{ln}3} \frac{dx}{\sqrt{\mathbf{e}^x}+1}$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_1^{\infty} \frac{4dx}{x\left(1+\mathbf{ln}^2 x\right)}$; б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\mathbf{sin}\,x\,dx}{\sqrt[7]{\mathbf{cos}^2 x}}$.

Варіант 10

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{5-4x^2}$; 2) $\int\limits_{\pi^2/9}^{\pi^2}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

3) $\int\limits_{0}^{\pi/2}(2x+3)\sin x dx$; 4) $\int\limits_{1}^{e}(5x-8)\ln x dx$.

5) $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$; 6) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{2\sin^2 x-\sin 2x+\cos^2 x}$; 7) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{e^x+e^{2x}}{e^x+3}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt[4]{(1+x^2)^5}}$; б) $\int\limits_{-3/4}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

Варіант 11

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{(3-4x)^5}}$; 2) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^6}dx$.

3) $\int\limits_{0}^{2}(3x+4)\cos 3x dx$; 4) $\int\limits_{1}^{e}x\ln^2 x dx$;

5); $\int\limits_{0}^{2}\frac{\sqrt{x+2}}{x+3}dx$ 6) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{6-3\cos^2 x}$; 7) $\int\limits_{\ln 3}^{0}\frac{1-e^x}{1+e^x}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 3}$; б) $\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3}\ln 2}$.

Варіант 12

1 Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{8x^2-9}$; 2) $\int\limits_{1}^{\mathbf{e}}\frac{\mathbf{sin\,ln}\,x}{x}dx$.

3) $\int\limits_{0}^{\pi/2}(5x+8)\,\mathbf{sin}\,3x\,dx$; 4) $\int\limits_{4}^{5}\mathbf{arccos}\,(x-4)\,dx$.

5) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\mathbf{cos}\,x}{4+\sqrt{\mathbf{sin}\,x}}dx$; 6) $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{7\,\mathbf{cos}^2x+16\,\mathbf{sin}^2x}$; 7) $\int\limits_{\mathbf{ln}\,2}^{\mathbf{ln}\,3}\frac{\mathbf{e}^x\sqrt{\mathbf{e}^x+2}}{\mathbf{e}^x+3}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{1/3}^{\infty}\frac{\pi dx}{(1+9x^2)\,\mathbf{arctg}^2\,3x}$; б) $\int\limits_{0}^{1/3}\frac{dx}{9x^2-6x+1}$.

Варіант 13

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{2+3x^2}$; 2) $\int\limits_{1}^{\sqrt{\mathbf{e}}}\frac{dx}{x\sqrt{1-\mathbf{ln}^2x}}$.

3) $\int\limits_{0}^{\pi/4}(4x+6)\,\mathbf{cos}\,4x\,dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi/9}\frac{x\,dx}{\mathbf{cos}^2\,3x}$.

5) $\int\limits_{2}^{5}\frac{x^2}{(x-1)\sqrt{x-1}}dx$; 6) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{3\,\mathbf{cos}^2x+2}$; 7) $\int\limits_{0}^{\mathbf{ln}\,2}\frac{\mathbf{e}^x+3}{\mathbf{e}^{2x}+1}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{\pi\cdot\mathbf{arctg}\,(x/2)}}$; б) $\int\limits_{0}^{3}\frac{x\sqrt[3]{9}\,dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

Варіант 14

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_{3}^{8}\sqrt{3x+1}dx$; **2)** $\int_{0}^{1/2}\frac{2xdx}{\sqrt{4x^2+3}}$.

3) $\int_{0}^{2}x^2\cos(x+9)dx$; **4)** $\int_{1/2}^{1}\arcsin(1-x)dx$.

5) $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x+1}}{x-3}dx$; **6)** $\int_{0}^{\pi/6}\frac{dx}{5+3\sin^2 x}$; **7)** $\int_{0}^{\ln 2}\frac{1}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+2x)\ln 3}$; **б)** $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}$.

Варіант 15

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_{1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$; **2)** $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sin x\cos^3 xdx$.

3) $\int_{0}^{\pi/7}(2x+1)\cos 7xdx$; **4)** $\int_{1}^{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(1/x)dx$.

5) $\int_{1}^{e^3}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$; **6)** $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{3\operatorname{tg}x-1}{\sin^2 x+4\cos^2 x}dx$; **7)** $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+3}{e^{2x}-1}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{0}^{\infty}e^{-3x}xdx$; **б)** $\int_{0}^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$.

Варіант 16

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$; 2) $\int\limits_0^{\sqrt{8}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

3) $\int\limits_0^{\pi/4} 3x\cos 4x\,dx$; 4) $\int\limits_2^3 x\ln(x-1)\,dx$.

5) $\int\limits_8^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{2dx}{3\sin 2x-5\cos 2x}$; 7) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{16x^4+1}$; **б)** $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

Варіант 17

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_0^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{4+3x^2}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{12x^5}{\sqrt{x^6+1}}\,dx$.

3) $\int\limits_0^{\pi} (4x+3)\cos 3x\,dx$; 4) $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

5) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{3x+\sqrt{2x+1}}$; 6) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x+\sin 2x}$; 7) $\int\limits_1^{\ln 2} \frac{dx}{e^x(3+e^x)}$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{16x\,dx}{16x^4-1}$; **б)** $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

Варіант 18

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_{0}^{1/2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{2x^2+1}dx$.

3) $\int\limits_{0}^{\pi/4} (3x-1)\cos 4x dx$; 4) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2-x}}dx$.

5) $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{3x+\sqrt{3x+1}}$; 6) $\int\limits_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{2\sin^2 x - \cos^2 x}$; 7) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+2}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}}$; **б)** $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$.

Варіант 19

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_{0}^{1/4} \frac{dx}{1-8x^2}$; 2) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

3) $\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \sin x dx$; 4) $\int\limits_{2}^{3} x^2 \ln(x-1) dx$.

5) $\int\limits_{3}^{8} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$; 6) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{4\cos^2 x + \sin^2 x}dx$; 7) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{(e^x-1)dx}{\sqrt{e^x+1}}$

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{16x^4-1}}dx$; **б)** $\int\limits_{0}^{1/3} \frac{e^{3-1/x}}{x^2}dx$.

Варіант 20

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3-2x^2}$; 2) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$.

3) $\int\limits_0^{\pi/3} (5x+2)\cos 2x dx$; 4) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$.

5) $\int\limits_3^8 \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{2\operatorname{tg} x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$; 7) $\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}+1}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; б) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1)dx}{3x-1}$.

Варіант 21

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$; 2) $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{x^2dx}{x^3+1}$.

3) $\int\limits_0^{\pi/4} (3x-2)\cos 4x dx$; 4) $\int\limits_1^2 (y-1)\ln y dy$.

5) $\int\limits_1^5 \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+5}dx$; 6) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x-\sin 2x}$; 7) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$; б) $\int\limits_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2-9x+1}$.

Варіант 22

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$;   2) $\int\limits_0^1 x\mathbf{e}^{-2x^2}\,dx$.

3) $\int\limits_0^{\pi/4} (3x-2)\mathbf{cos}\,8x\,dx$;   4) $\int\limits_{-1/2}^0 x\mathbf{e}^{-2x}\,dx$.

5) $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}dx$;   6) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{4\mathbf{sin}^2 x-\mathbf{sin}\,2x}$;   7) $\int\limits_{\mathbf{ln}2}^{2\mathbf{ln}2} \frac{dx}{\mathbf{e}^x-1}$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$;   б) $\int\limits_{1/2}^1 \frac{\mathbf{ln}2\,dx}{(1-x)\mathbf{ln}^2(1-x)}$.

Варіант 23

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$;   2) $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+4}}dx$.

3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\,\mathbf{sin}\,x\,\mathbf{cos}\,x\,dx$;   4) $\int\limits_0^1 \mathbf{e}^{-4x}x^2dx$.

5) $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}-1}{2+\sqrt{x}}dx$;   6) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{5\mathbf{cos}\,2x+2\mathbf{sin}^2 x}$;   7) $\int\limits_1^{\mathbf{ln}\,2} \sqrt{\mathbf{e}^x+1}\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$;   б) $\int\limits_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}dx}{2-3x}$.

Варіант 24

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{6-5x^2}$; 2) $\int_{\pi/18}^{\pi/6} 12\,\mathbf{ctg}\,3x\,dx$.

3) $\int_{0}^{2} (3x+2)\,\mathbf{sin}\left(\frac{x}{2}\right)dx$; 4) $\int_{-1}^{0} x\,\mathbf{ln}(1-x)\,dx$.

5) $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}dx$; 6) $\int_{0}^{\pi/6} \frac{dx}{3-2\,\mathbf{sin}^2 x}$; 7) $\int_{\mathbf{ln}2}^{\mathbf{ln}3} \frac{1}{\sqrt{1+\mathbf{e}^x}}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$; б) $\int_{0}^{2} \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

Варіант 25

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; 2) $\int_{0}^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt[4]{2-5x^2}}$.

3) $\int_{0}^{\pi/3} \left(\frac{4x+1}{5}\right)\mathbf{sin}\,2x\,dx$; 4) $\int_{0}^{1} \frac{\mathbf{arcsin}(x/2)}{\sqrt{2-x}}dx$.

5) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}+3}{x+1}dx$; 6) $\int_{0}^{\pi/3} \frac{\mathbf{sin}\,2x\,dx}{\mathbf{sin}^4 x + 4\,\mathbf{cos}^4 x}dx$; 7) $\int_{\mathbf{ln}5}^{\mathbf{ln}12} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-1}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$; б) $\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

Варіант 26

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+3}$; 2) $\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$.

3) $\int\limits_0^{\pi} (3x+4)\mathbf{cos}\left(\frac{x}{2}\right)dx$; 4) $\int\limits_1^2 \mathbf{ln}(3x+2)dx$.

5) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{dx}{5\mathbf{sin}^2 x+3\mathbf{cos}^2 x}$; 7) $\int\limits_0^{\mathbf{ln}6} \frac{\mathbf{e}^x\sqrt{\mathbf{e}^x+3}}{\mathbf{e}^x+2}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$; б) $\int\limits_1^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-1}}$.

Варіант 27

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{8x^2+9}$; 2) $\int\limits_1^{\mathbf{e}} \frac{\mathbf{ln}^2 x}{x}dx$.

3) $\int\limits_0^3 (2x+1)\mathbf{sin}\left(\frac{x}{3}\right)dx$; 4) $\int\limits_0^2 x\mathbf{ln}(x+7)dx$.

5) $\int\limits_4^9 \frac{1+\sqrt{x}}{x-3}dx$; 6) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{2\mathbf{cos}^2 x+3}$; 7) $\int\limits_{\mathbf{ln}2}^{\mathbf{ln}7} \frac{\mathbf{e}^x+1}{\sqrt{\mathbf{e}^x+2}}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{\mathbf{e}^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\mathbf{ln}x-1)^2}$; б) $\int\limits_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

Варіант 28

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{4x^2-9}$;   2) $\int\limits_{0}^{2} x\sqrt[5]{3+2x^2}\,dx$.

3) $\int\limits_{0}^{4}(3x+2)\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx$;   4) $\int\limits_{-1}^{0}(x+1)e^{-2x}\,dx$.

5) $\int\limits_{0}^{13}\frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$;   6) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{4\cos^2 x+3\sin^2 x}$;   7) $\int\limits_{\ln 6}^{\ln 3}\frac{e^x\sqrt{e^x+3}\,dx}{e^x-2}$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln\frac{3}{4}}$;   б) $\int\limits_{0}^{4}\frac{10x\,dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$.

Варіант 29

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_{0}^{1}\sqrt[4]{(3+5x)^3}\,dx$;   2) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\cos x\sin^3 x\,dx$.

3) $\int\limits_{0}^{\pi}(2x+3)\sin\left(\frac{x}{4}\right)dx$;   4) $\int\limits_{0}^{\pi/4} x\,\mathrm{tg}^2\, x\,dx$.

5) $\int\limits_{1}^{6}\frac{\sqrt{x+3}}{x+\sqrt{x+3}}dx$;   6) $\int\limits_{0}^{\pi/3}\frac{dx}{5\sin^2 x+3\cos^2 x}$;   7) $\int\limits_{\ln 5}^{\ln 12}\frac{1}{\sqrt{e^x+4}}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$;   б) $\int\limits_{0}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

Варіант 30

1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int\limits_0^1 \frac{2dx}{4-3x^2}$; 2) $\int\limits_0^{\sqrt{\pi}/4} \frac{xdx}{\mathbf{cos}^2\left(x^2\right)}$.

3) $\int\limits_0^1 (2x+3)\mathbf{cos}(2-x)dx$; 4) $\int\limits_0^1 x\,\mathbf{arctg}\,x dx$.

5) $\int\limits_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{dx}{4\mathbf{cos}^2 x - 5\mathbf{sin}^2 x}$; 7) $\int\limits_0^{\mathbf{ln}3} \frac{\mathbf{e}^{2x}-1}{\mathbf{e}^x+3}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^2-3x+2}$; **б)** $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$.