

ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ТВЕРДИХ ТІЛ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

з дисципліни „Теоретична механіка”
до виконання розрахунково-графічної роботи
для студентів напрямів підготовки
6.050502 – „Інженерна механіка”, 6.050503 – „Машинобудування”,
6.070106 – „Автомобільний транспорт”, 6.050504 – „Зварювання”

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри
теоретичної і прикладної механіки
Протокол №7
від 29.04.2014 р.

Визначення реакцій опор твердих тіл. Методичні вказівки з дисципліни „Теоретична механіка” до виконання розрахунково-графічної роботи для студентів напрямів підготовки 6.050502 – „Інженерна механіка”, 6.050503 – „Машинобудування”, 6.070106 – „Автомобільний транспорт”, 6.050504 – „Зварювання” / Укл. О.О.Горбатко. – Чернігів: ЧДТУ, 2014. – 32 с.

Укладач: Горбатко Оксана Олександрівна, кандидат технічних наук

Відповідальний за випуск: Дубенець Віталій Георгійович, завідувач кафедри теоретичної і прикладної механіки, доктор технічних наук, професор

Рецензент: Дубенець Віталій Георгійович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної і прикладної механіки Чернігівського національного технологічного університету

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Короткі теоретичні відомості з курсу теоретичної механіки	4
2 Розв'язок задач статки	11
3 Приклади розв'язку задач	12
4 Розрахунково-графічна робота	21
Рекомендована література	22
Додаток А	23
Додаток Б	32
Додаток В	32

Вступ

Методичні вказівки розроблено з метою спрощення розв'язку виконання розрахунково-графічної роботи з дисципліни „Теоретична механіка” розділу „Статика” для студентів механічних спеціальностей напрямів 6.050502 – „Інженерна механіка”, 6.050503 – „Машинобудування”, 6.070106 – „Автомобільний транспорт”, 6.050504 – „Зварювання”. В методичних вказівках наведено короткі теоретичні відомості з розділу «Статика», зокрема теоретичний матеріал, що необхідний для визначення реакцій опор твердих тіл, алгоритм розв'язку. Наведено коментарі, уточнення і пояснення, що мають полегшати розв'язок задач статички, зокрема пов'язаних з класифікацією опор і визначенням опорних реакцій. Викладено декілька прикладів визначення опорних реакцій для різних варіантів конструкцій, зокрема для балки на двох опорах і консольної балки. В методичних вказівках наведено завдання для виконання розрахунково-графічної роботи з розділу «Статика» «Визначення реакцій опор системи тіл» у 32 варіантах.

1 КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З КУРСУ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

В теоретичній механіці існує ряд понять, які використовуються при розв'язку задач. Нижче наведені деякі з них з необхідними визначеннями і роз'ясненнями.

Матеріальна точка – тіло, яке має масу, але розмірами якого можна знехтувати (скорочено – точка).

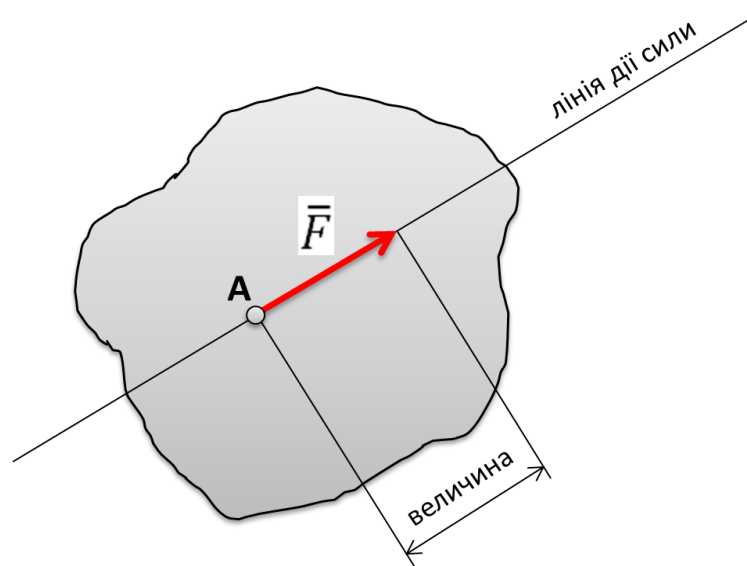
Механічна система – сукупність матеріальних точок, рух і положення яких взаємопов'язані (скорочено – система).

Абсолютно тверде тіло – система матеріальних точок, відстань між якими є незмінною і які безперервно заповнюють деяку частину простору (скорочено – тіло).

Сила – міра механічної взаємодії між тілами, внаслідок якої тіла змінюють швидкості або деформуються або одночасно і те, і інше.

Сила характеризується:

1. Точкою прикладання;
2. Напрямом;
3. Величиною (модулем).



Точка А (т. А) – точка прикладання сили

Рисунок 1.1 – Поняття сили

Вектор сили позначається як \vec{F} або F .

Модуль сили F позначається як F або F .

Одиниці виміру сили – 1Н (1 Ньютон) і похідні від нього (1 кН – 1 кілоНьютон).

Сили бувають зосередженими і розподіленими.

Система сил – сукупність усіх сил, що діють на тіло або систему. Математично систему сил позначають як $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$.

Сили, що входять до складу системи, називаються *складовими системи сил*.

Різновиди систем сил:

1. Система сил, що лежать на одній прямій.
2. Плоска паралельна.
3. Плоска збіжна.
4. Плоска довільна.
5. Просторова паралельна.
6. Просторова збіжна.
7. Просторова довільна.
8. Плоска система пар сил.
9. Просторова система пар сил.

Еквівалентна система сил – це система сил, на яку можна замінити початкову систему, не порушуючи при цьому стану твердого тіла

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_n \sim P_1, P_2, P_3, \dots, P_n .$$

Зрівноважена система сил – система, яка еквівалентна нулю

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_n \sim 0.$$

Рівнодійна (сила) – це така сила, яка діє на тіло або систему так, як і задана система сил

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_n \sim R.$$

Результуюча (сила) – це сила, яка дорівнює векторній (геометричній) сумі сил, що діють на систему.

Стан рівноваги – це стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху.

В'язь – це тіло, що накладає обмеження на поведінку тіла, що розглядається.

Між тілом і в'язю виникають сили взаємодії (за IV аксіомою статички).


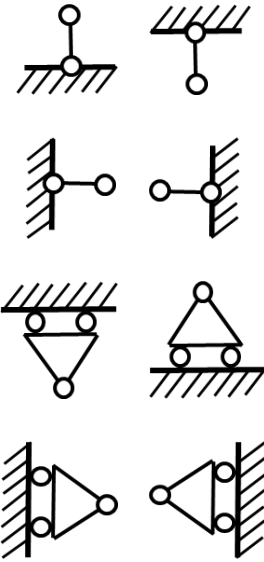
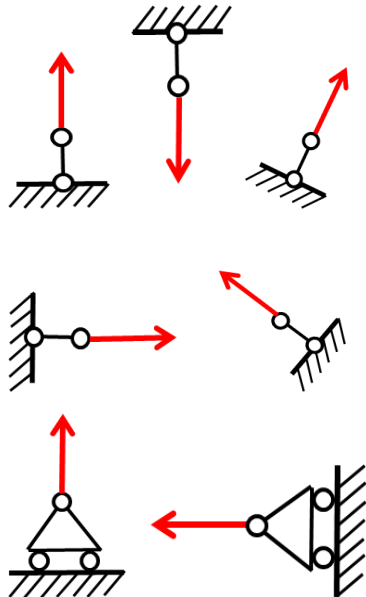
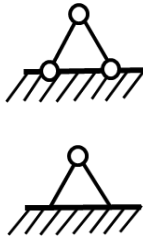
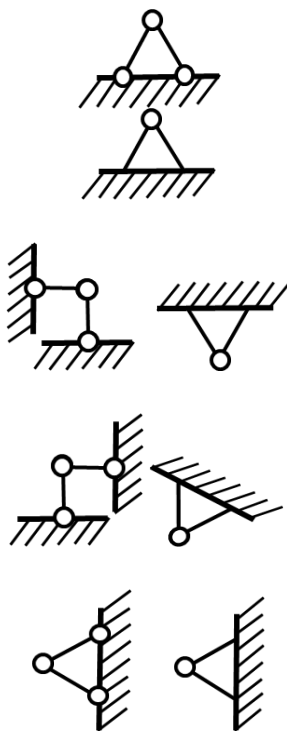
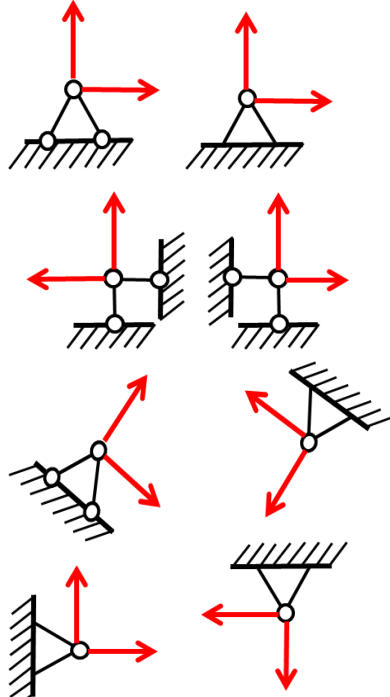
Сила, з якою тіло діє на в'язь називається силою тиску на в'язь. Сила, з якою в'язь діє на тіло, називається реакцією в'язі.

IV аксіому статички або *аксіому в'язей* можна сформулювати наступним чином – поведінка тіла не зміниться, якщо в'язі відкинути, а їх дію замінити відповідними реакціями в'язей. Тобто, застосовуючи цю аксіому можна замінити будь-яку в'язь, яка зустрічається в задачі, на відповідні цій в'язі реакції.


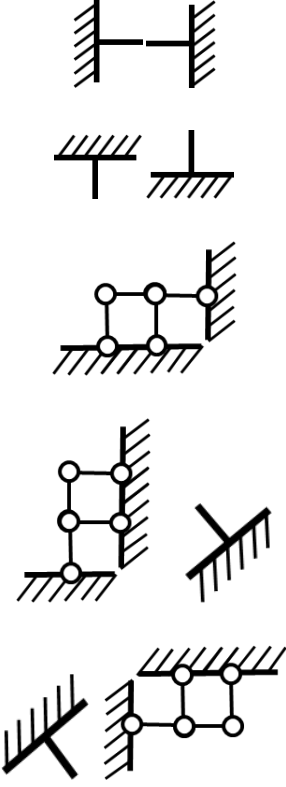
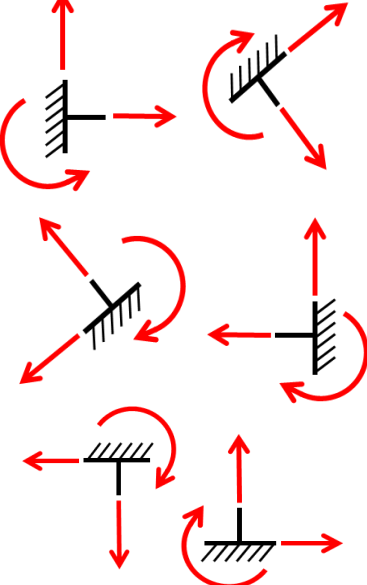
Якщо в'язі представлено у вигляді шарнірних опор, то реакції таких в'язей дуже часто називають *опорними реакціями*.

Розглянемо найбільш поширені види шарнірних опор і відповідні їм реакції (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Види шарнірних опор і їх реакції

№	Назва в'язі і найбільш розповсюджене позначення	Можливі позначення (розташування на площині)	Вигляд реакцій	Кількість реакцій рівноваги і їх напрямок
1	<p>Шарнірно-рухома опора</p> 			<p>В такій опорі виникає одна опорна реакція, яка направлена <i>перпендикулярно</i> до опорної поверхні</p>
2	<p>Шарнірно-нерухома опора</p> 			<p>В такій опорі виникають дві складові однієї опорної реакції, які направлено <i>перпендикулярно</i> до опорних поверхонь</p>

Продовження таблиці 1.1

1	2	3	4	5
3	Защемлення або жорстке закріплення 			В такій опорі випливають три опорні реакції – дві сили, які направлено <i>перпендикуляр</i> но до опорних поверхонь і один момент

Момент сили відносно точки на площині – це добуток модуля сили на найкоротшу відстань від лінії дії сили до цієї точки.

Найкоротша відстань від лінії дії сили до цієї точки називається *плечем сили* (h).

Плече сили – це довжина перпендикуляра, що опускається з точки до лінії дії сили.

Точка, відносно якої шукають момент, називається **центром моменту**.

На рисунку 1.2 показано як знаходиться вектор моменту сили відносно точки.

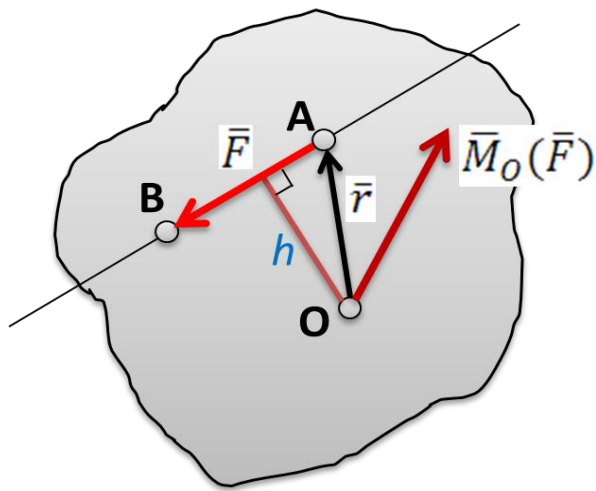
Модуль моменту сили відносно точки на площині можна визначити за формулою

$$M_O F = \pm F \cdot h, \quad (1.1)$$

де F – модуль сили F ,

h – плече сили F .

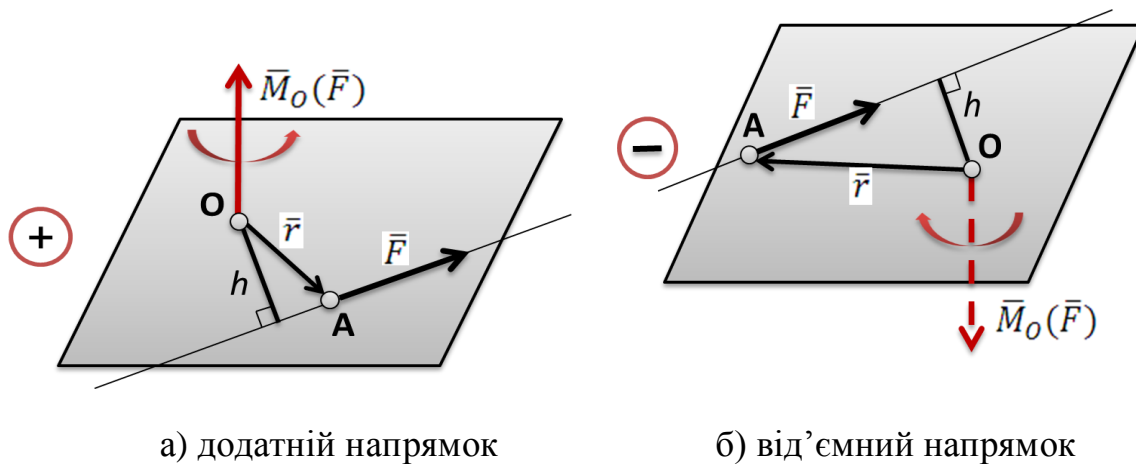
В формулі (1.1) перед добутком сили на плече стоїть знак « \pm ». Він визначається за правилом знаків для моментів сили відносно точки на площині.



точка O (т. O) – центр моменту; F – вектор сили; h – плече сили F відносно точки O

Рисунок 1.2 – Вектор моменту сили F відносно точки O

Правило знаків для моментів сили відносно точки на площині – момент сили відносно точки вважається *додатнім*, якщо сила намагається повертати відносно точки *проти напрямку годинникової стрілки* (рисунок 1.3, а), і *від'ємним*, якщо намагається повертати *за напрямком стрілки годинника* (рисунок 1.3, б).

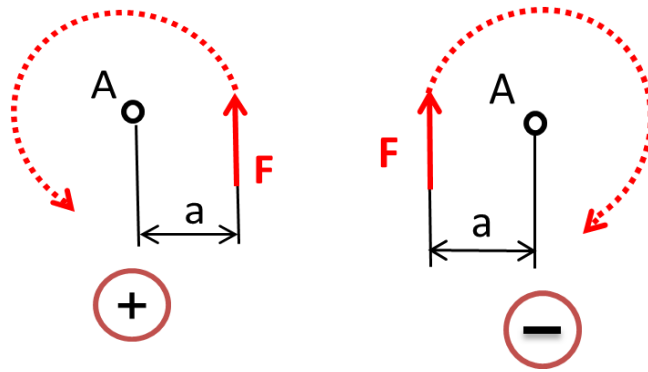


а) додатній напрямок

б) від'ємний напрямок

Рисунок 1.3 – Правило знаків для моменту сили відносно точки на площині

Покажемо яким чином відбувається намагання обертання сили P відносно точки на площині, якщо є відомою відстань a від лінії дії сили до точки, відносно якої необхідно знайти момент. Маємо знак «+», коли спостерігаємо згори обертання проти годинникової стрілки (рисунок 1.4, а) і знак «-», коли спостерігається обертання за годинниковою стрілкою (рисунок 1.4, б).



а) обертання проти стрілки годинника б) обертання за стрілкою годинника

Рисунок 1.4. Намагання обертання сили навколо точки

Приклад знаходження моментів сили відносно точки для декількох сил, що лежать в одній площині, показано на рисунку 1.5.

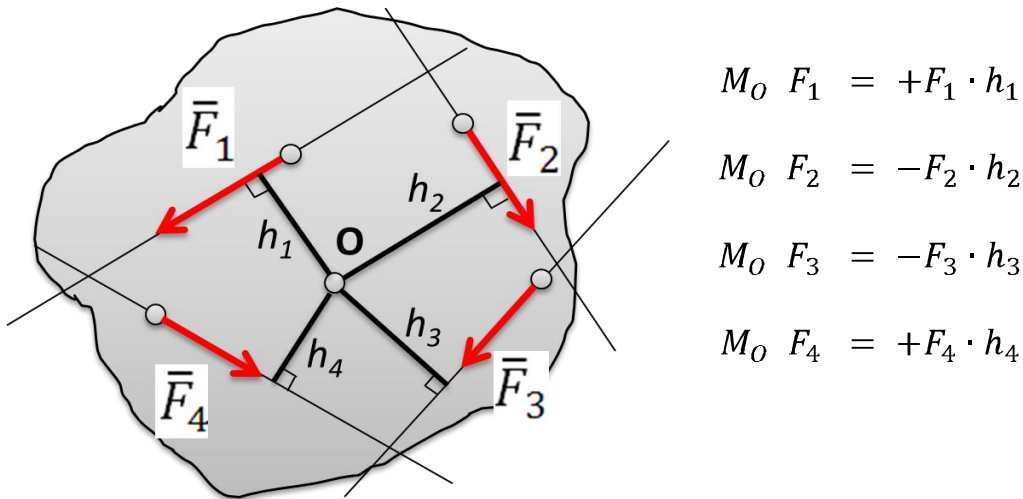


Рисунок 1.5 – Визначення моментів сили відносно точки O на площині

Існують *властивості моменту сили відносно точки*:

1. Якщо перемістити силу вздовж лінії її дії, то момент сили відносно точки не зміниться (рис. 1.6).

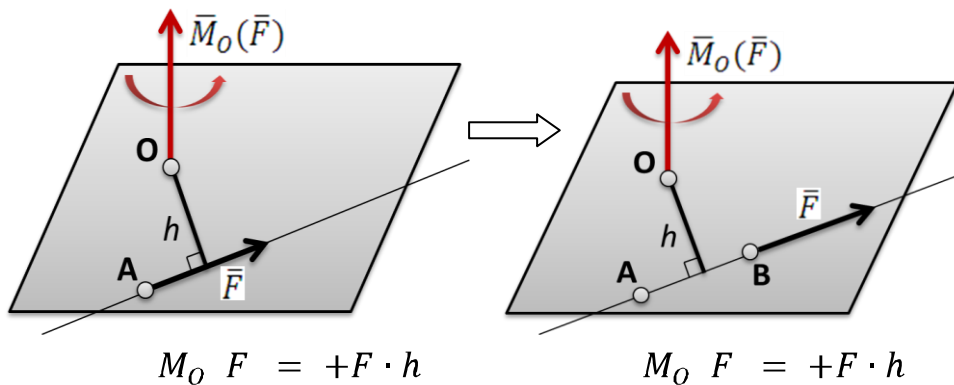


Рисунок 1.6 – Момент сили відносно точки при переміщенні сили вздовж лінії її дії

2. Момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінії дії сили проходить через цю точку (рис. 1.7).

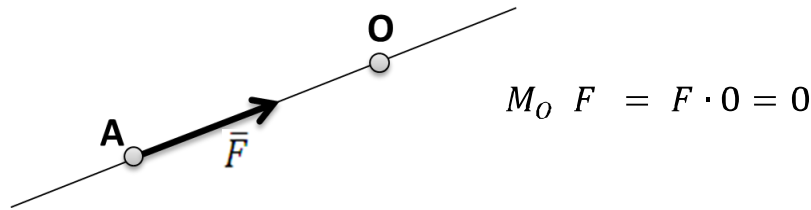
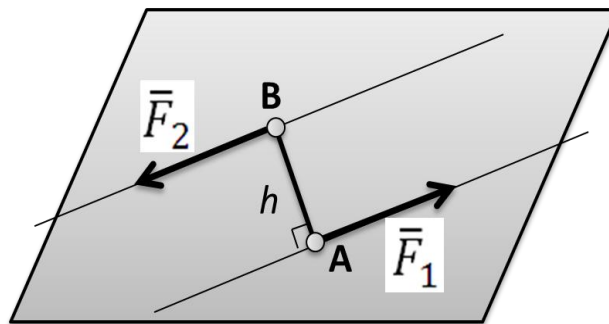


Рисунок 1.7 – Момент сили відносно точки при проходженні лінії дії сили через цю точку

Пара сил – це система двох рівних за модулем, паралельних і протилежно направлених сил (рисунок 1.8).



F_1, F_2 – пара сил, $AB=h$ – плече пари

Рисунок 1.8 – Вигляд пари сил

Правила знаків для пар сил аналогічні до правила знаків для моментів сили відносно точки – при намаганні обертання пари проти годинникової стрілки – знак «+», при намаганні обертання за годинниковою стрілкою – знак «-».

Момент пари сил – це добуток модуля сили на плече

$$M_{F_1, F_2} = \pm F_1 \cdot h = \pm F_2 \cdot h. \quad (1.2)$$

Розподілене навантаження зі сталою інтенсивністю q , що діє на ділянці a конструкції, замінюють рівнодієюною силою $Q = q \cdot a$, що діє посередині цієї ділянки (рис. 1.9).

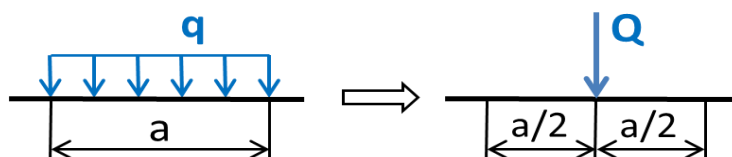


Рисунок 1.9 – Заміна розподілених сил зосередженою рівнодієюною

2 РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ СТАТИКИ

В статичі розглядають **дві основні задачі**:

1. Задача про зведення системи сил до найпростішого вигляду.
2. Дослідження умов рівноваги.

Стан рівноваги – стан спокою або рівномірного прямолінійного руху.

Рівняння рівноваги – це рівняння, за допомогою яких можна описати стан рівноваги системи сил.

Плоска довільна система сил – це така система сил, в якій усі сили системи лежать в одній площині, а що їх лінії дії можуть бути паралельними і перетинатися в одній точці (рисунок 2.1).

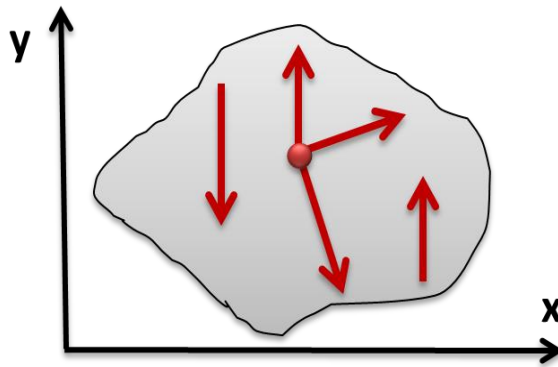


Рисунок 2.1 – Довільна плоска система сил

Для довільної плоскої системи сил можна скласти *три рівняння рівноваги*. Для такої системи існує три форми рівнянь рівноваги:

Головна або перша форма:

$$F_x = 0 \text{ – сума проекцій усіх сил на вісь } x \text{ має дорівнювати нулю;} \quad (2.1)$$

$$F_y = 0 \text{ – сума проекцій усіх сил на вісь } y \text{ має дорівнювати нулю;} \quad (2.2)$$

$$M_A = 0 \text{ – сума моментів від усіх сил відносно довільної точки } A \text{ має дорівнювати нулю.} \quad (2.3)$$

Друга форма:

$$F_x = 0 \text{ – сума проекцій усіх сил на вісь } x \text{ має дорівнювати нулю;} \quad (2.4)$$

$$M_A = 0 \text{ – сума моментів від усіх сил відносно довільної точки } A \text{ має дорівнювати нулю;} \quad (2.5)$$

$$M_B = 0 \text{ – сума моментів від усіх сил відносно довільної точки } B \text{ має дорівнювати нулю.} \quad (2.6)$$

Третя форма:

$$M_A = 0 \text{ – сума моментів від усіх сил відносно довільної точки } A \text{ має дорівнювати нулю.} \quad (2.7)$$

$M_B = 0$ – сума моментів від усіх сил відносно довільної точки B має дорівнювати нулю. (2.8)

$M_C = 0$ – сума моментів від усіх сил відносно довільної точки C має дорівнювати нулю. (2.9)

Для розв'язку задач статки можна застосувати алгоритм розв'язку.

Алгоритм розв'язку задач статки:

1. Виділити тіло (або систему тіл) рівновагу якого (яких) необхідно розглянути.
2. Застосувати шосту аксіому статки (аксіому в'язей) і замінити в'язі на відповідні опорні реакції. Якщо можливо, зробити спрощення навантаження (замінити розподілене навантаження на зосереджену силу; за необхідністю знайти проекції сил, що розташовано під кутом до осей).
3. Визначити вид системи сил.
4. Записати рівняння рівноваги відповідно до виду системи сил і розв'язати рівняння рівноваги відносно невідомих.
5. Зробити перевірку знайдених значень.

3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ

Розглянемо декілька прикладів визначення опорних реакцій.

Приклад 1.

Визначити реакції в опорах A і B для заданої конструкції з заданим навантаженням (рисунок 3.1): $a = 2$ м; $b = 1.5$ м; $c = 3$ м; $q = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$; $P = 30$ кН; $M = 20$ кН · м.

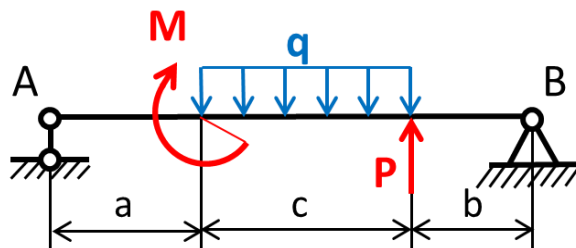


Рисунок 3.1 – Балка на двох опорах з навантаженням

Розв'язок

Застосуємо алгоритм розв'язку задач статки:

1. Розглянемо рівновагу стержня AB .
2. Застосуємо шосту аксіому статки і замінимо опори в точках A і B на відповідні опорні реакції (рисунок 3.2). В точці A маємо шарнірно-рухому опору, яку можна замінити на одну опорну реакцію. В точці B маємо шарнірно-нерухому опору, яку можна замінити на дві складові однієї опорної реакції.

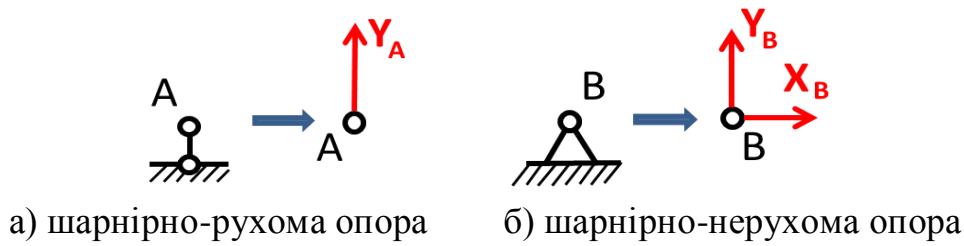


Рисунок 3.2 – Заміна опор на опорні реакції

Також замінимо розподілене навантаження q , що діє на ділянці c , на одну зосереджену силу Q , розташовану посередині цієї ділянки

$$Q = q \cdot c = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot 3 \text{ м} = 60 \text{ кН} .$$

На рисунку 3.3 показано перетворення початкової конструкції з навантаженням на розрахункову схему після заміни опор на опорні реакції і спрощення навантаження в координатних осях x і y .

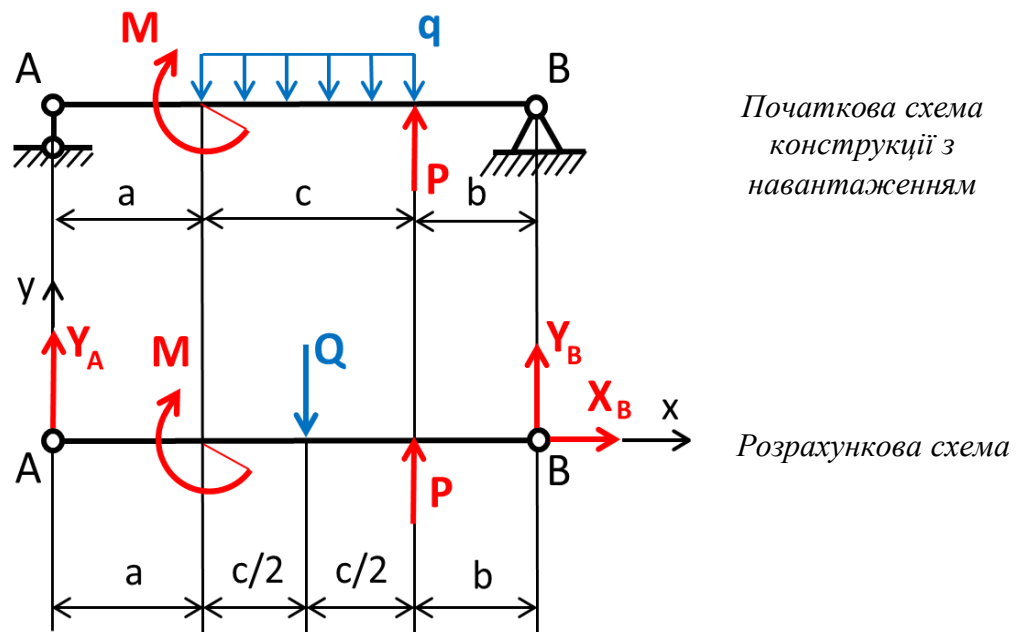


Рисунок 3.3 – Перетворення початкової схеми з навантаженням на розрахункову схему

3. З розрахункової схеми визначаємо вид системи сил, що утворюється. Маємо плоску довільну систему сил, для якої можна скласти три рівняння рівноваги. Визначимо невідомі X_B , Y_A і Y_B з цих рівнянь.

4. Застосуємо головну форму рівнянь рівноваги:

$$F_x = 0 \text{ (сума проекцій усіх сил на вісь } x) \Rightarrow X_B = 0; \quad (3.1)$$

$$F_y = 0 \text{ (сума проекцій усіх сил на вісь } y) \Rightarrow Y_A - Q + Y_B + P = 0; \quad (3.2)$$

$$M_A = 0 \text{ (сума моментів від усіх сил відносно точки } A) \Rightarrow$$

$$-M - Q \cdot a + \frac{c}{2} + P \cdot a + c + Y_B \cdot (a + c + b) = 0. \quad (3.3)$$

З рівняння (3.3) визначаємо Y_B :

$$Y_B \cdot a + c + b = M + Q \cdot a + \frac{c}{2} - P \cdot a + c ;$$

$$Y_B = \frac{M + Q \cdot a + \frac{c}{2} - P \cdot a + c}{a + c + b}.$$

$$Y_B = \frac{20 \text{ кН} \cdot \text{м} + 60 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м} + \frac{3 \text{ м}}{2} - 30 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м} + 3 \text{ м}}{2 \text{ м} + 3 \text{ м} + 1.5 \text{ м}} = 12.31 \text{ кН}.$$

Підставляємо знайдене значення Y_B в рівняння (3.2) для визначення Y_A :

$$Y_A = Q - Y_B - P; Y_A = 60 \text{ кН} - 12.31 \text{ кН} - 30 \text{ кН} = 17.69 \text{ кН}.$$

5. Зробимо перевірку знайдених значень. Для цього застосуємо ще одне рівняння рівноваги, яке до цього не використовувалося:

$$M_B = 0 \text{ (сума моментів від усіх сил відносно точки } B) \Rightarrow$$

$$-Y_A \cdot a + c + b - M + Q \cdot \frac{c}{2} + b - P \cdot b = 0.$$

$$-17.69 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м} + 1.5 \text{ м} + 3 \text{ м} - 20 \text{ кН} \cdot \text{м} + 60 \text{ кН} \cdot \frac{3 \text{ м}}{2} + 1.5 \text{ м} -$$

$$-30 \text{ кН} \cdot 1.5 \text{ м} = 0;$$

$$-114.99 \text{ кН} \cdot \text{м} - 20 \text{ кН} \cdot \text{м} + 180 \text{ кН} \cdot \text{м} - 45 \text{ кН} \cdot \text{м} = 0.01 \approx 0.$$

Отже, реакції в опорах A і B знайдено вірно.

Приклад 2.

Визначити реакції в опорах A і B для заданої конструкції з заданим навантаженням (рисунок 3.4): $a = 1.5 \text{ м}$; $b = 1 \text{ м}$; $c = 2 \text{ м}$; $q = 40 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$; $P = 50 \text{ кН}$; $M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

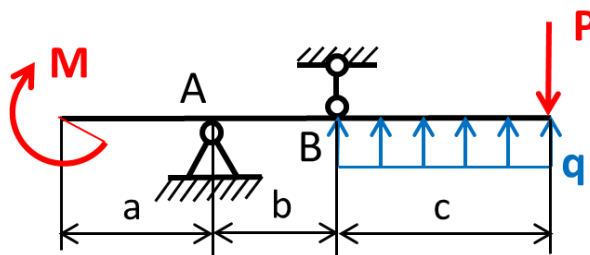


Рисунок 3.4 – Балка на двох опорах з навантаженням

Розв'язок

Застосуємо алгоритм розв'язку задач статки:

1. Розглянемо рівновагу стержня AB .
2. Застосуємо шосту аксіому статки і замінимо опори в точках A і B на відповідні опорні реакції (рисунок 3.5). В точці A маємо шарнірно-нерухому

опору, яку можна замінити на дві складові однієї опорної реакції. В точці B маємо шарнірно-нерухому опору, яку можна замінити на одну опорну реакцію.

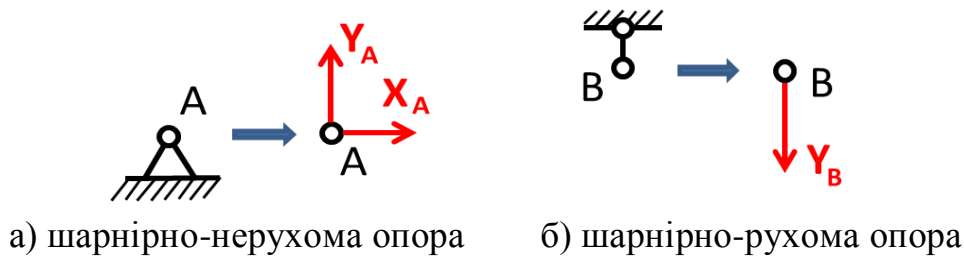


Рисунок 3.5. Заміна опор на опорні реакції

Також замінимо розподілене навантаження q , що діє на ділянці c , на одну зосереджену силу Q , розташовану посередині цієї ділянки

$$Q = q \cdot c = 40 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot 2 \text{ м} = 80 \text{ кН} .$$

На рисунку 3.6 показане перетворення початкової конструкції з навантаженням на розрахункову схему (після заміни опор на опорні реакції і спрощення навантаження) в координатних осях x і y ($a = 1.5 \text{ м}$; $b = 1 \text{ м}$; $c = 2 \text{ м}$; $q = 40 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$; $P = 50 \text{ кН}$; $M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

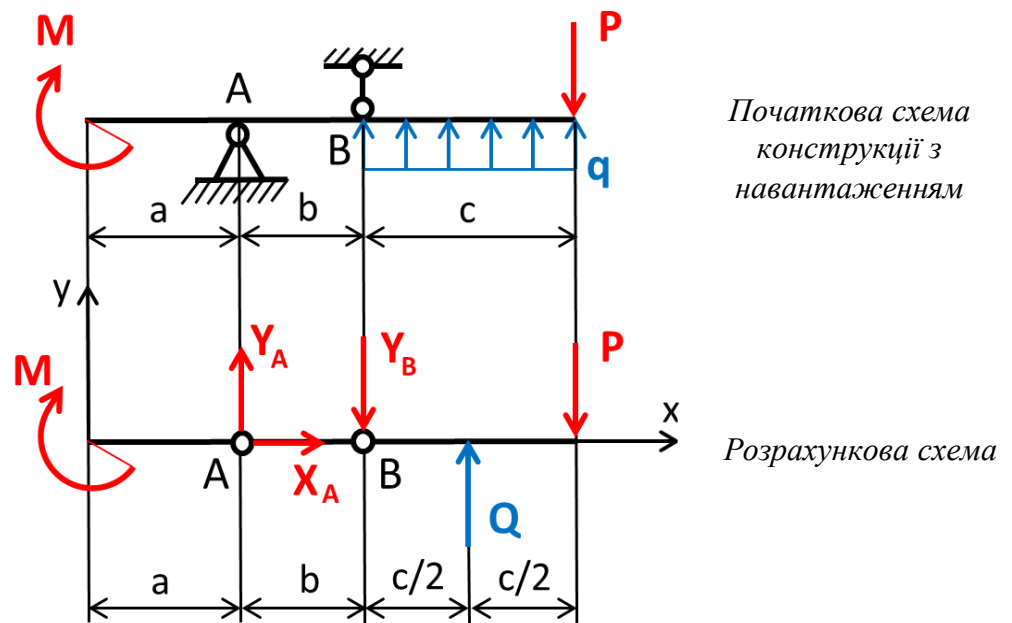


Рисунок 3.6 – Перетворення початкової схеми з навантаженням на розрахункову схему

3. З розрахункової схеми визначаємо вид системи сил, що утворюється. Маємо плоску довільну систему сил, для якої можна скласти три рівняння рівноваги. Визначимо невідомі X_A , Y_A і Y_B з цих рівнянь.

4. Застосуємо головну форму рівнянь рівноваги:

$$F_x = 0 \text{ (сума проекцій усіх сил на вісь } x) \Rightarrow X_A = 0; \quad (3.4)$$

$$F_y = 0 \text{ (сума проекцій усіх сил на вісь } y) \Rightarrow Y_A - Y_B + Q - P = 0; \quad (3.5)$$

$$M_B = 0 \text{ (сума моментів від усіх сил відносно точки } B) \Rightarrow$$

$$-M - Y_A \cdot b + Q \cdot \frac{c}{2} - P \cdot c = 0. \quad (3.6)$$

З рівняння (3.6) визначаємо Y_A :

$$Y_A \cdot b = -M + Q \cdot \frac{c}{2} - P \cdot c;$$

$$Y_A = \frac{-M + Q \cdot \frac{c}{2} - P \cdot c}{b}.$$

$$Y_A = \frac{-40 \text{ кН} \cdot \text{м} + 80 \text{ кН} \cdot \frac{2 \text{ м}}{2} - 50 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м}}{1 \text{ м}} = -60 \text{ кН}.$$

Підставляємо знайдене значення Y_A в рівняння (3.5) для визначення Y_B :

$$Y_B = Y_A + Q - P; \quad Y_B = -60 \text{ кН} + 80 \text{ кН} - 50 \text{ кН} = -30 \text{ кН}.$$

5. Зробимо перевірку знайдених значень. Для цього застосуємо ще одне рівняння рівноваги, яке до цього не використовувалося:

$$M_A = 0 \text{ (сума моментів від усіх сил відносно точки } A) \Rightarrow$$

$$-M - Y_B \cdot b + Q \cdot b + \frac{c}{2} - P \cdot (c + b) = 0.$$

$$-40 \text{ кН} \cdot \text{м} - (-30 \text{ кН}) \cdot (1 \text{ м}) + 80 \text{ кН} \cdot 1 \text{ м} + \frac{2 \text{ м}}{2} -$$

$$-50 \text{ кН} \cdot (2 \text{ м} + 1 \text{ м}) = 0;$$

$$-40 \text{ кН} \cdot \text{м} + 30 \text{ кН} \cdot \text{м} + 160 \text{ кН} \cdot \text{м} - 150 \text{ кН} \cdot \text{м} = 0.$$

Отже, реакції в опорах A і B знайдено вірно.

Приклад 3.

Визначити реакції в опорі A для заданої конструкції з заданим навантаженням (рисунок 3.7): $a = 2 \text{ м}$; $b = 1.5 \text{ м}$; $c = 4 \text{ м}$; $q = 25 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$; $P = 70 \text{ кН}$; $M = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

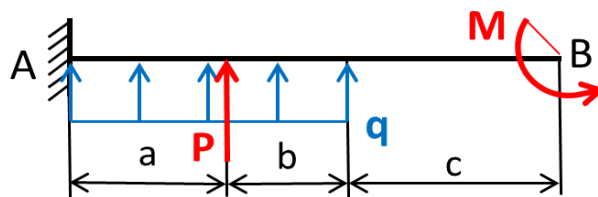


Рисунок 3.7 – Консольна балка з навантаженням

Розв'язок

Застосуємо алгоритм розв'язку задач статyki:

1. Розглянемо рівновагу стержня AB .

2. Застосуємо шосту аксіому статyki і замінимо опору в точці A на відповідні опорні реакції. В точці A маємо защемлення або жорстке закріплення, яке можна замінити на три опорні реакції – дві сили і один момент (рисунок 3.8).

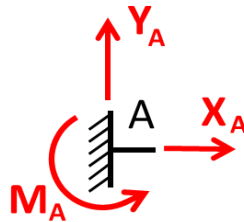


Рисунок 3.8 – Заміна защемлення на опорні реакції

Також замінимо розподілене навантаження q , що діє на ділянці $(a+b)$, на одну зосереджену силу Q , розташовану посередині цієї ділянки

$$Q = q \cdot a + b = 25 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot (2 \text{ м} + 1.5 \text{ м}) = 87.5 \text{ кН} .$$

На рисунку 3.9 показано перетворення початкової конструкції з навантаженням на розрахункову схему (після заміни опор на опорні реакції і спрощення навантаження) в координатних осях x і y .

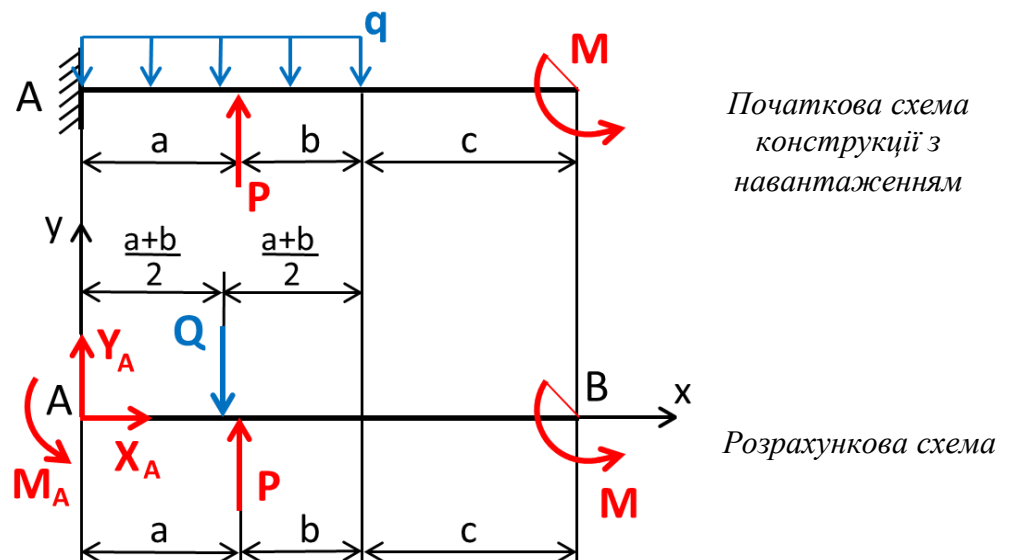


Рисунок 3.9 – Перетворення початкової схеми з навантаженням на розрахункову схему

3. З розрахункової схеми визначаємо вид системи сил, що утворюється. Маємо плоску довільну систему сил, для якої можна скласти три рівняння рівноваги. Визначимо невідомі X_A , Y_A і M_A з цих рівнянь.

4. Застосуємо головну форму рівнянь рівноваги:

$$F_x = 0 \text{ (сума проекцій усіх сил на вісь } x) \Rightarrow X_A = 0; \quad (3.7)$$

$$F_y = 0 \text{ (сума проекцій усіх сил на вісь } y) \Rightarrow Y_A - Q + P = 0; \quad (3.8)$$

$$M_A = 0 \text{ (сума моментів від усіх сил відносно точки } A) \Rightarrow$$

$$M_A - Q \cdot \frac{a+b}{2} + P \cdot a + M = 0. \quad (3.9)$$

З рівняння (3.8) визначаємо Y_A :

$$Y_A = Q - P;$$

$$Y_A = 87.5 \text{ кН} - 70 \text{ кН} = 17.5 \text{ кН}.$$

З рівняння (3.9) визначаємо M_A :

$$M_A = Q \cdot \frac{a+b}{2} - P \cdot a - M;$$

$$M_A = 87.5 \text{ кН} \cdot \frac{2 \text{ м} + 1.5 \text{ м}}{2} - 70 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м} - 60 \text{ кН} \cdot \text{м} = -46.88 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. Зробимо перевірку знайдених значень. Для цього застосуємо ще одне рівняння рівноваги, яке до цього не використовувалося:

$$M_B = 0 \text{ (сума моментів від усіх сил відносно точки } B) \Rightarrow$$

$$M_A - Y_A \cdot a + b + c + Q \cdot c + \frac{a+b}{2} - P \cdot (b + c) + M = 0.$$

$$-46.88 \text{ кН} \cdot \text{м} - 17.5 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м} + 1.5 \text{ м} + 4 \text{ м} + 87.5 \text{ кН} \cdot 4 \text{ м} + \frac{2 \text{ м} + 1.5 \text{ м}}{2} -$$

$$-70 \text{ кН} \cdot 1.5 \text{ м} + 4 \text{ м} + 60 \text{ кН} \cdot \text{м} = 0;$$

$$-46.88 \text{ кН} \cdot \text{м} - 131.25 \text{ кН} \cdot \text{м} + 503.13 \text{ кН} \cdot \text{м} - 385 \text{ кН} \cdot \text{м} + 60 \text{ кН} \cdot \text{м} = 0.$$

Отже, реакції в опорі A знайдено вірно.

Приклад 4.

Визначити реакції в опорі A для заданої конструкції з заданим навантаженням (рисунок 3.10): $a = 2 \text{ м}$; $b = 4 \text{ м}$; $c = 1 \text{ м}$; $q = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$; $P = 100 \text{ кН}$; $M = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

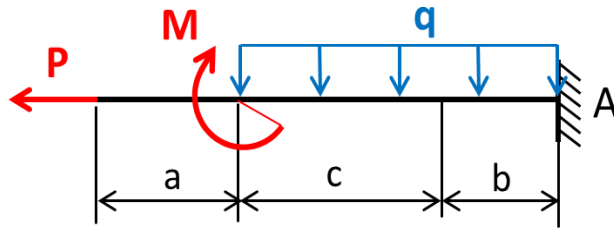


Рисунок 3.10 – Консольна балка з навантаженням

Розв'язок

Застосуємо алгоритм розв'язку задач статички:

1. Розглянемо рівновагу стержня.
2. Застосуємо шосту аксіому статички і замінимо опору в точці A на відповідні опорні реакції. В точці A маємо защемлення або жорстке закріплення, яке можна замінити на три опорні реакції – дві сили і один момент (рисунок 3.11).

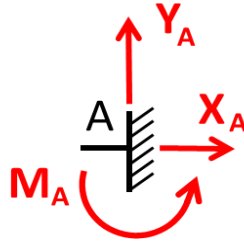


Рисунок 3.11 – Заміна защемлення в точці A на опорні реакції

Також замінимо розподілене навантаження q , що діє на ділянці $(a+b)$, на одну зосереджену силу Q , розташовану посередині цієї ділянки

$$Q = q \cdot c + b = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot (1 \text{ м} + 4 \text{ м}) = 100 \text{ кН} .$$

На рисунку 3.12 показане перетворення початкової конструкції з навантаженням на розрахункову схему (після заміни опор на опорні реакції і спрощення навантаження) в координатних осях x і y ($a = 2 \text{ м}$; $b = 4 \text{ м}$; $c = 1 \text{ м}$; $q = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$; $P = 100 \text{ кН}$; $M = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

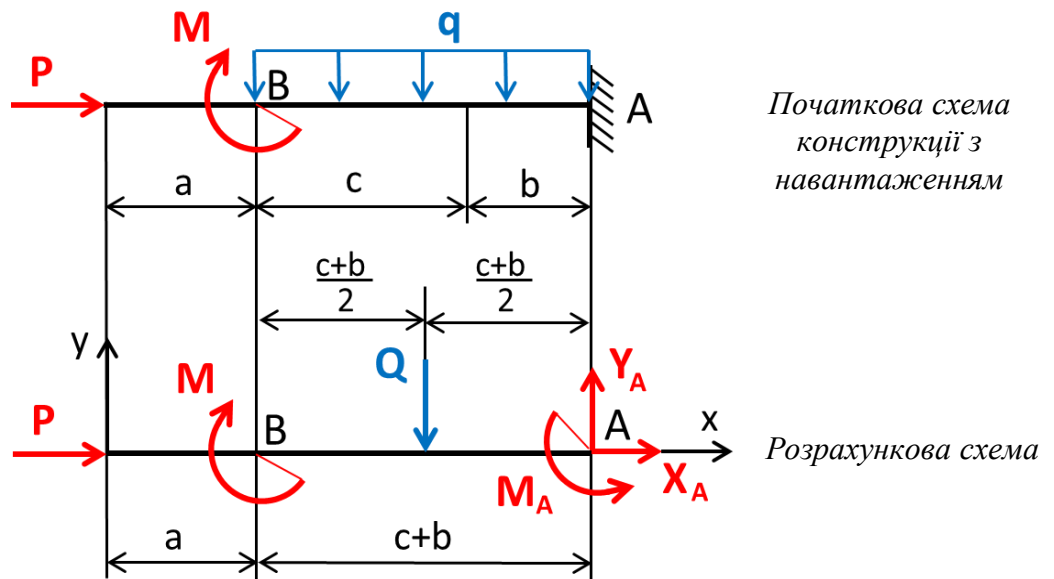


Рисунок 3.12 – Перетворення початкової схеми з навантаженням на розрахункову схему

3. З розрахункової схеми визначаємо вид системи сил, що утворюється. Маємо плоску довільну систему сил, для якої можна скласти три рівняння рівноваги. Визначимо невідомі X_A , Y_A і M_A з цих рівнянь.

4. Застосуємо головну форму рівнянь рівноваги:

$$F_x = 0 \text{ (сума проекцій усіх сил на вісь } x) \Rightarrow X_A + P = 0; \quad (3.10)$$

$$F_y = 0 \text{ (сума проекцій усіх сил на вісь } y) \Rightarrow Y_A - Q = 0; \quad (3.11)$$

$$M_A = 0 \text{ (сума моментів від усіх сил відносно точки } A) \Rightarrow$$

$$M_A + Q \cdot \frac{c+b}{2} - M = 0. \quad (3.12)$$

З рівняння (3.10) визначаємо X_A :

$$X_A = -P = -100 \text{ кН.}$$

З рівняння (3.11) визначаємо Y_A :

$$Y_A = Q = 100 \text{ кН.}$$

З рівняння (3.12) визначаємо M_A :

$$M_A = -Q \cdot \frac{c+b}{2} + M;$$

$$M_A = -100 \text{ кН} \cdot \frac{1 \text{ м} + 4 \text{ м}}{2} + 50 \text{ кН} \cdot \text{м} = -200 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

5. Зробимо перевірку знайдених значень. Для цього застосуємо ще одне рівняння рівноваги, яке до цього не використовувалося:

$$M_B = 0 \text{ (сума моментів від усіх сил відносно точки B)} \Rightarrow$$

$$-M - Q \cdot \frac{c+b}{2} + M_A + Y_A \cdot c + b = 0.$$

$$-50 \text{ кН} \cdot \text{м} - 100 \text{ кН} \cdot \frac{1 \text{ м} + 4 \text{ м}}{2} - 200 \text{ кН} \cdot \text{м} -$$

$$+100 \text{ кН} \cdot 1 \text{ м} + 4 \text{ м} = 0;$$

$$-50 \text{ кН} \cdot \text{м} - 250 \text{ кН} \cdot \text{м} - 200 \text{ кН} \cdot \text{м} + 500 \text{ кН} \cdot \text{м} = 0.$$

Отже, реакції в опорі A знайдено вірно.

4 ПЛАН ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

В даній розрахунково-графічній роботі необхідно визначити реакції в опорах конструкцій. Початкові дані для розрахунково-графічної роботи наведено в додатку 1. Кожен варіант містить 3 схеми конструкції з навантаженням. Номер варіанту складається з двох двозначних чисел: перше число - це номер строчки в таблиці 2 з початковими значеннями навантаження, друге число – це номер схеми з додатку А (рисунок 4.1). Наприклад, якщо варіант 12-24, то відповідно для розв'язку необхідно використовувати строчку №12 з початковими даними в таблиці А.1 і рисунок №24 з трьома розрахунковими схемами з додатку Б.

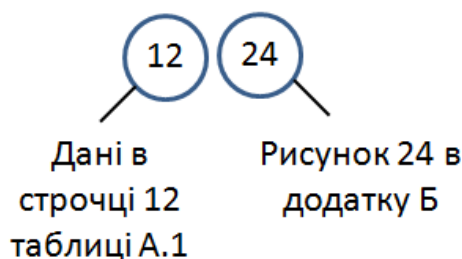


Рисунок 4.1. Визначення даних з номеру варіанту

Структура розрахунково-графічної роботи:

1. Титульний аркуш (приклад оформлення наведено в додатку В).
2. Початкові дані – початкові значення навантаження і розмірів згідно з варіантом (необхідно вказати номер варіанту), схеми згідно з варіантом.
3. Розв'язок для трьох заданих схем згідно з прикладами, наведеними в розділі 3.

Порядок розв'язку

1. Виділити тіло, рівновагу якого необхідно розглянути.
2. Застосувати шосту аксіому статички (аксіому в'язей) і замінити в'язі на відповідні опорні реакції. Якщо можливо, зробити спрощення навантаження (замінити розподілене навантаження на зосереджену силу; за необхідністю знайти проекції сил, що розташовано під кутом до осей).
3. Визначити вид системи сил.
4. Записати рівняння рівноваги відповідно до виду системи сил і розв'язати рівняння рівноваги відносно невідомих.
5. Зробити перевірку знайдених значень.

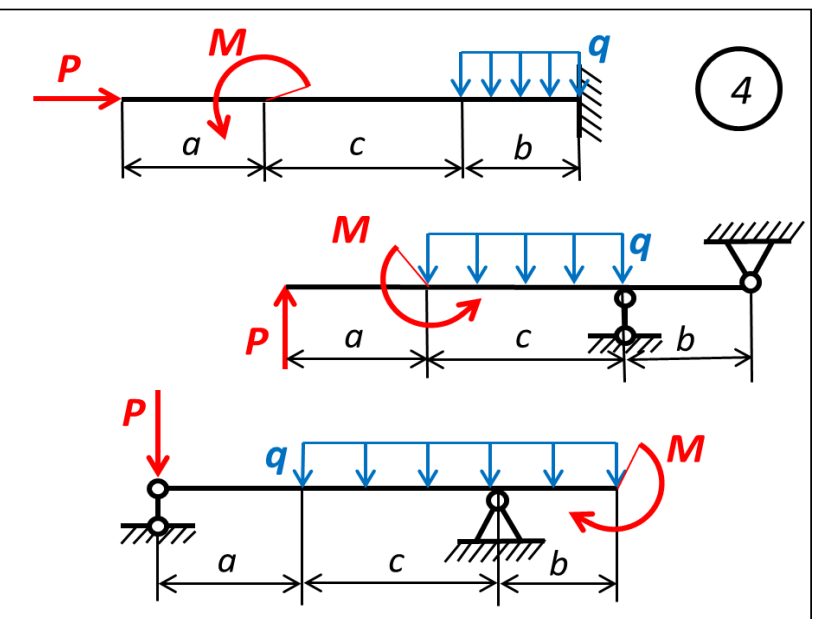
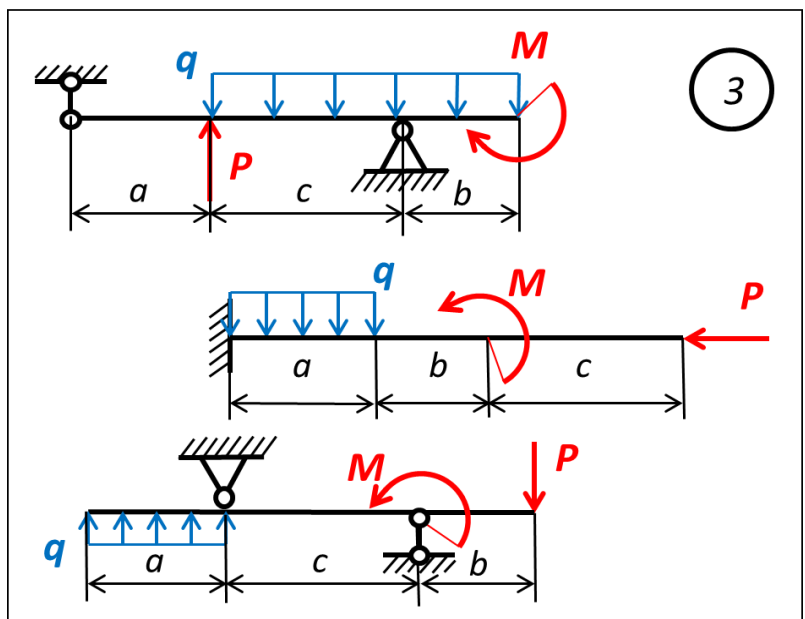
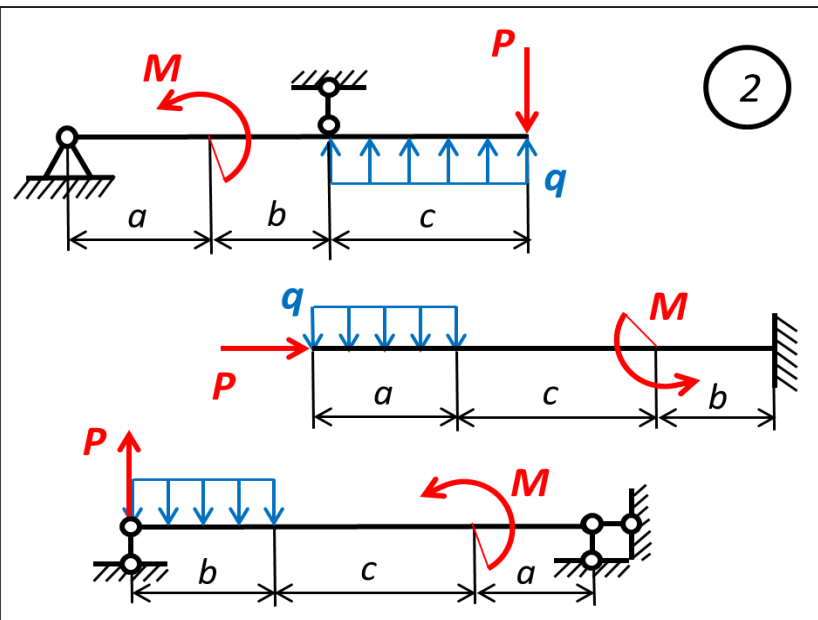
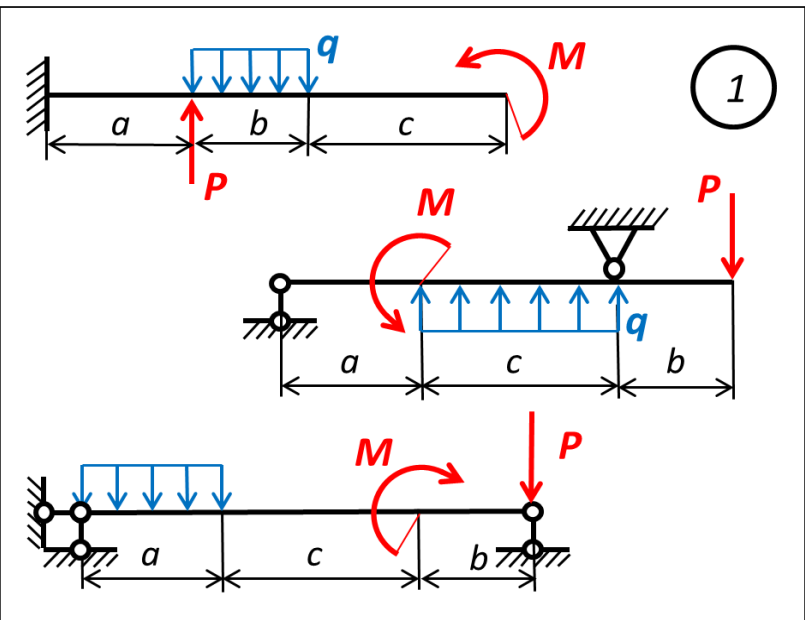
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

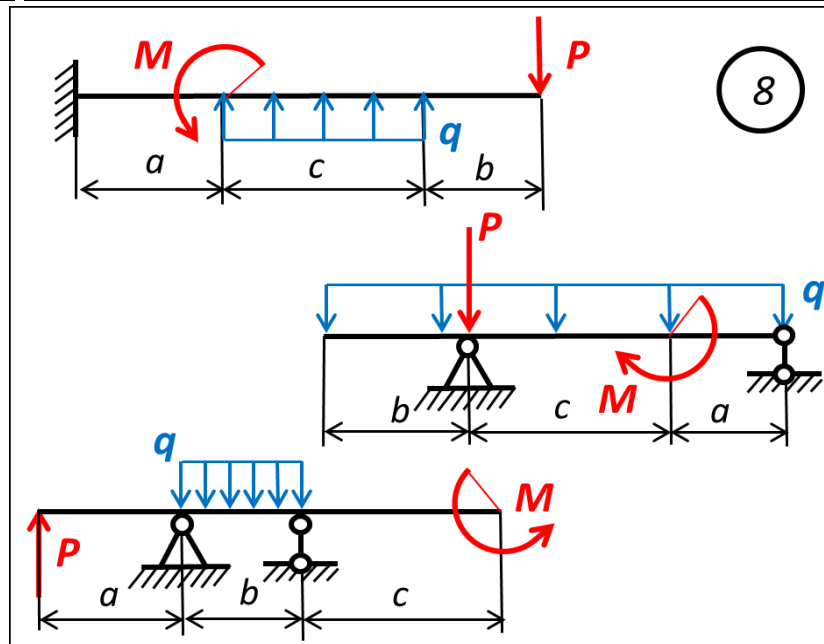
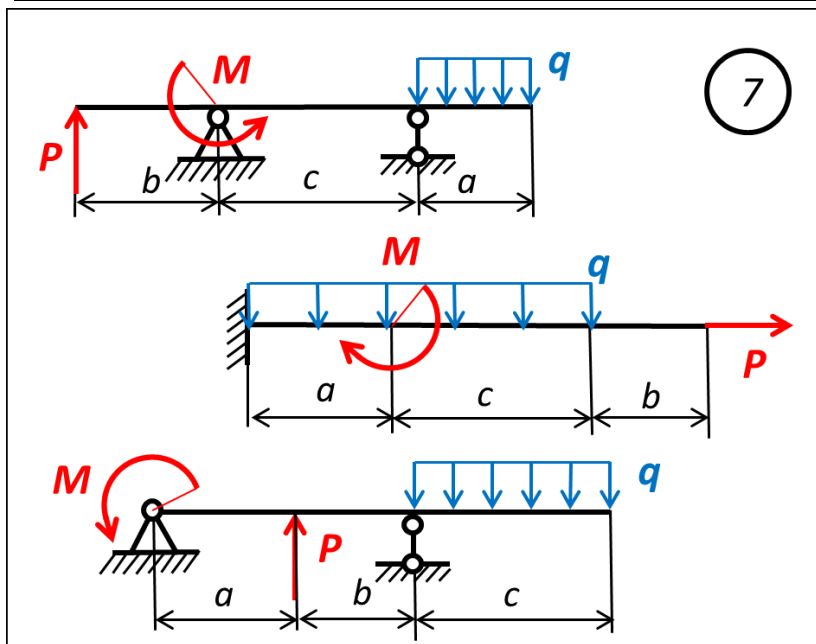
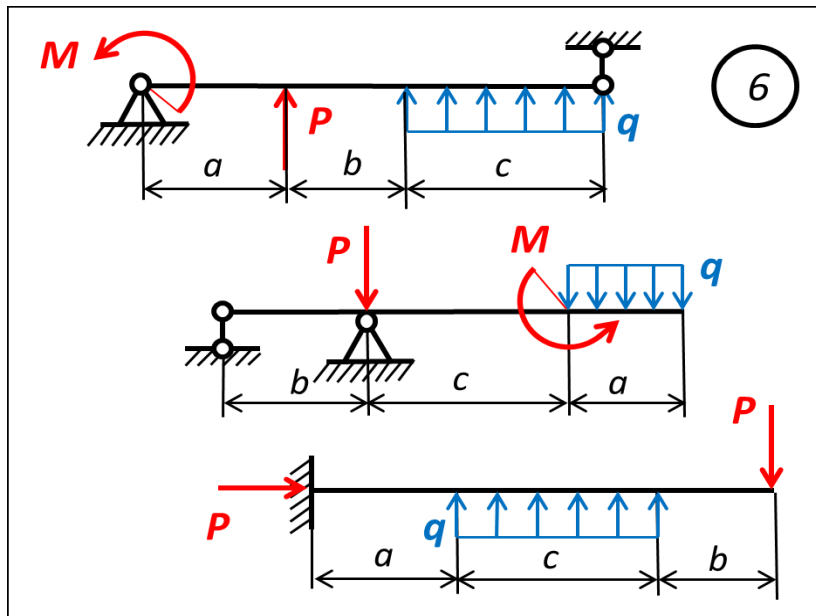
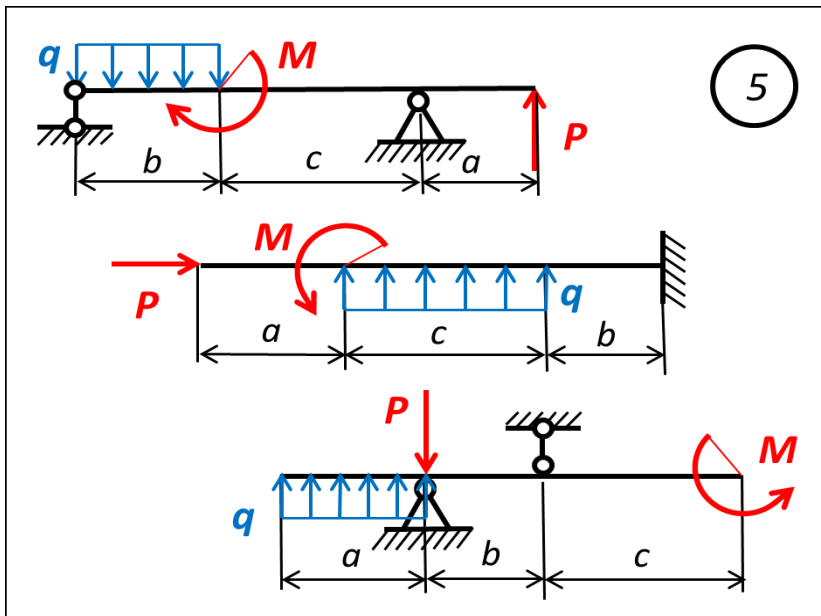
1. Бать М.И. и др. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М.: Наука, 2007. – 670 с.
2. Бертяев В.Д. Теоретическая механика на базе Mathcad. Практика. – СПб.: БХВ, 2005. – 752 с.
3. Бондаренко А.А. Теоретична механіка. Частина 1. Статика. – К.: Знання, 2004. – 599 с.
4. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики. – СПб.: Лань, 2008. – 729 с.
5. Добронравов В.В. Курс теоретической механики. – М.: Высш.шк., 1970. – 528 с.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1980. – 446 с.
7. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 510 с.
8. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1974. – 400 с.
9. Теоретическая механика. Терминология. Буквенные обозначения величин: Сборник рекомендуемых терминов. – М.: Наука, 2007. – 48 с.
10. Цасюк В.В. Теоретична механіка: Навчальний посібник. – К.: ЦУЛ, 2004. – 402 с.
11. Fetter A.L. Theoretical Mechanics of Particles and Continua. – NY.: Stella, 2012. – 356 p.

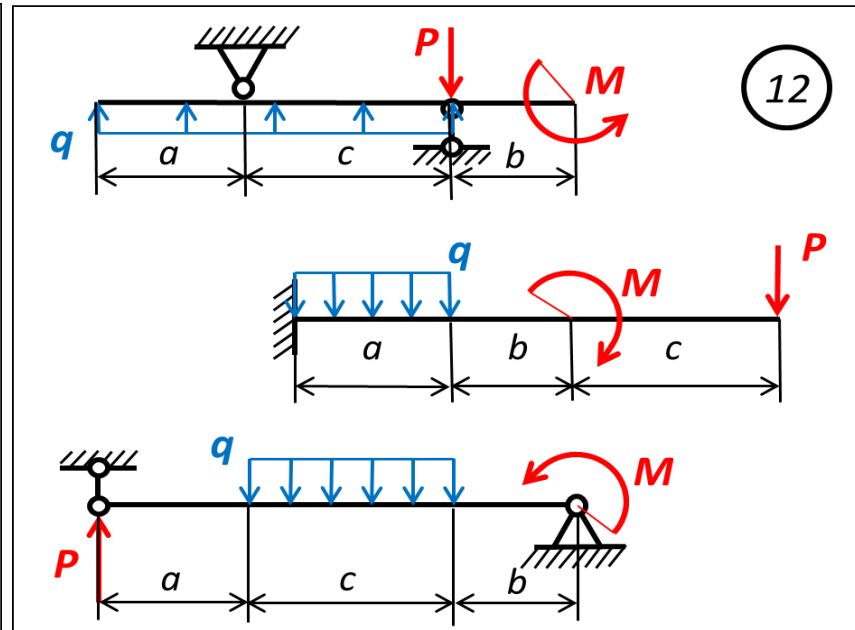
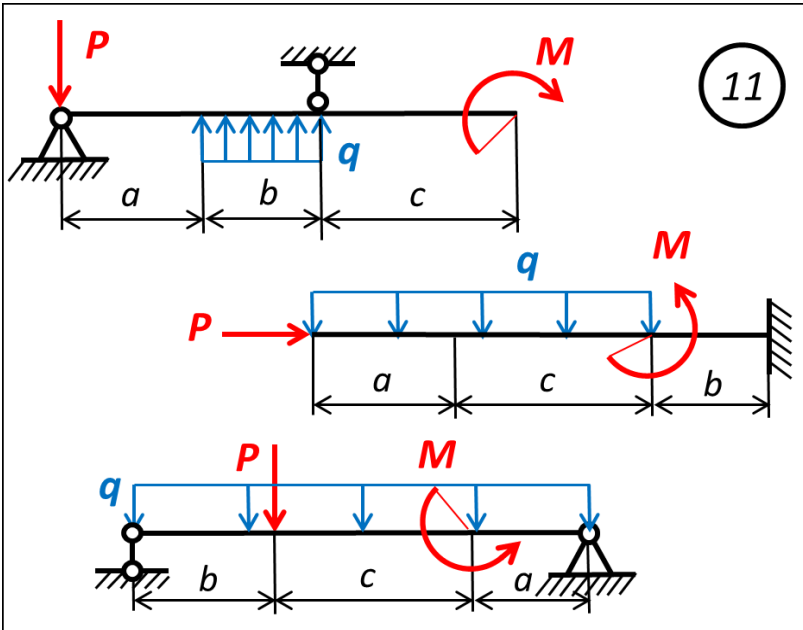
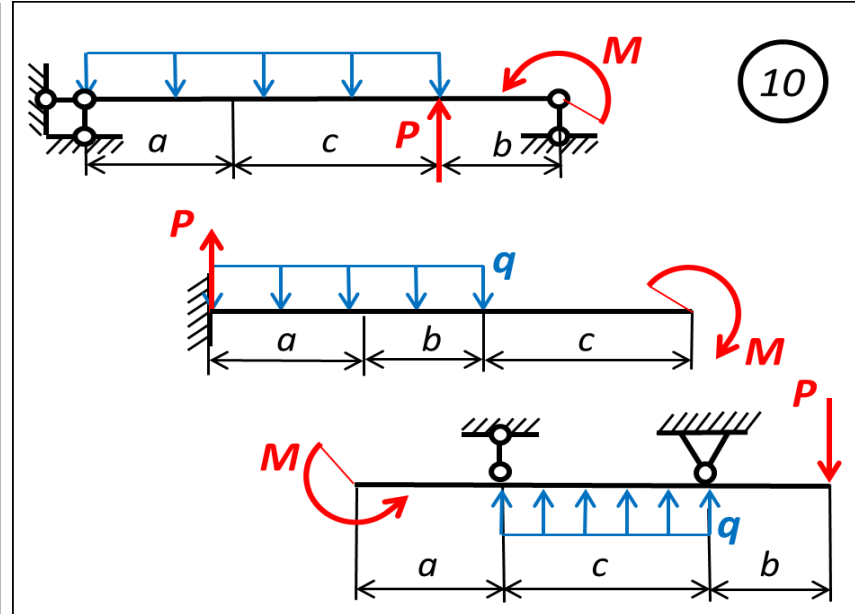
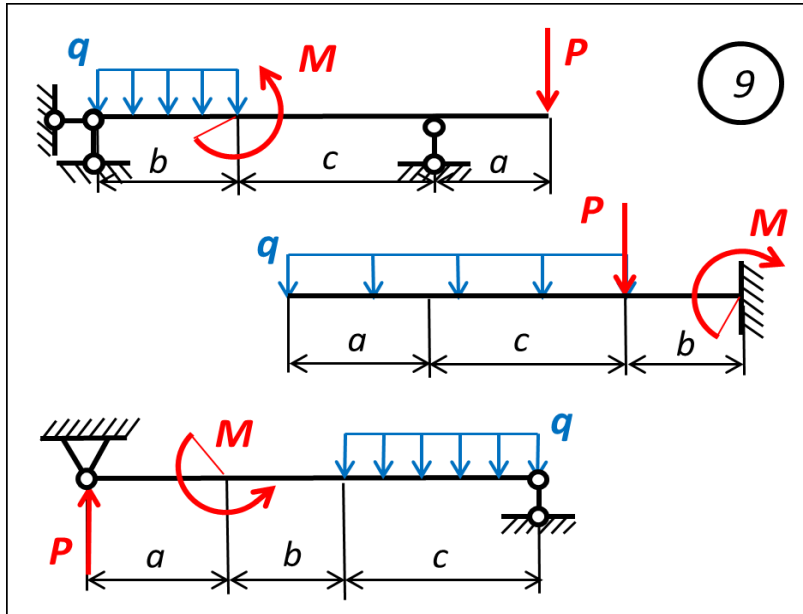
Додаток А – Початкові дані до розрахунково-графічної роботи

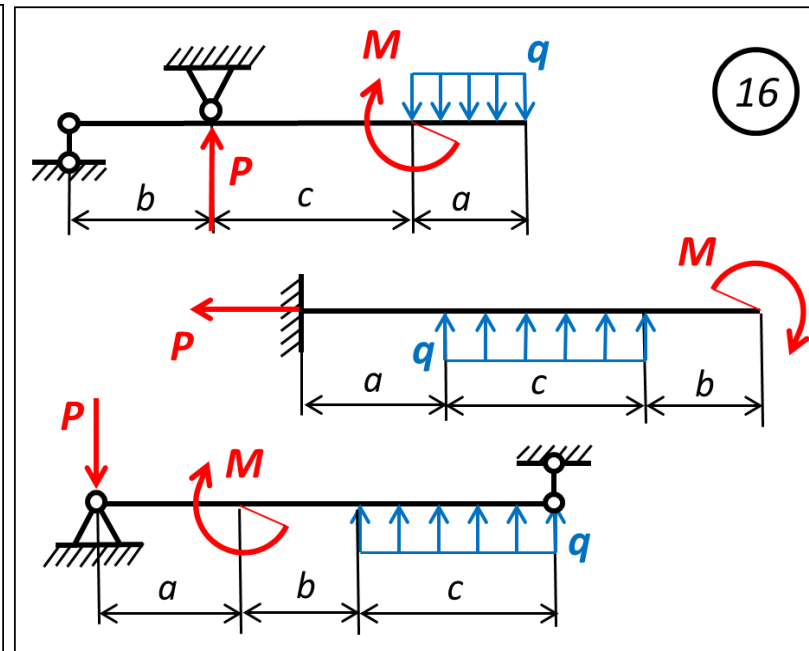
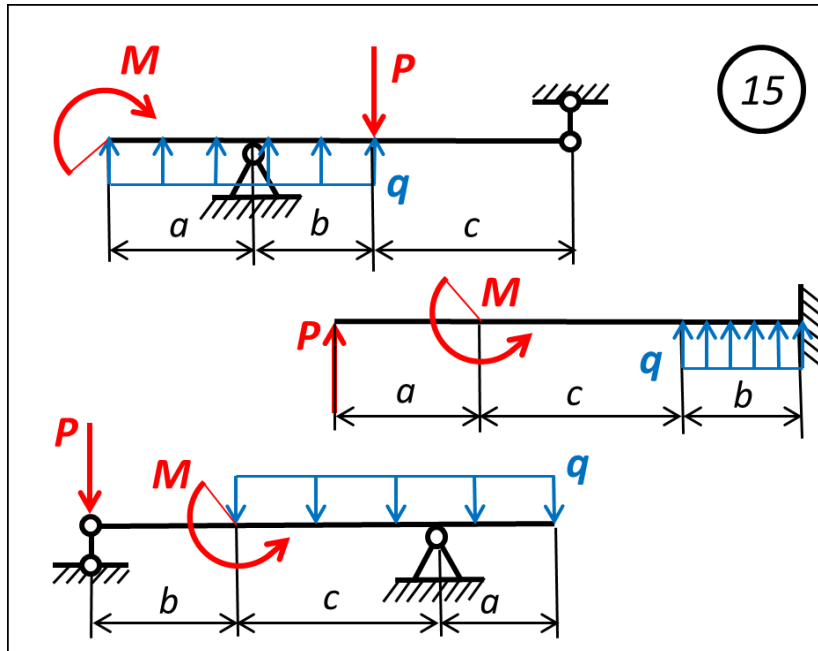
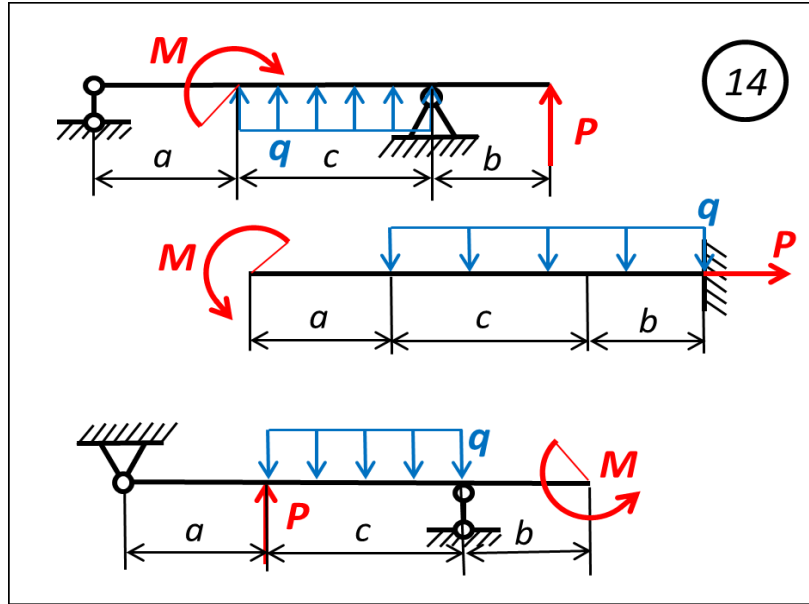
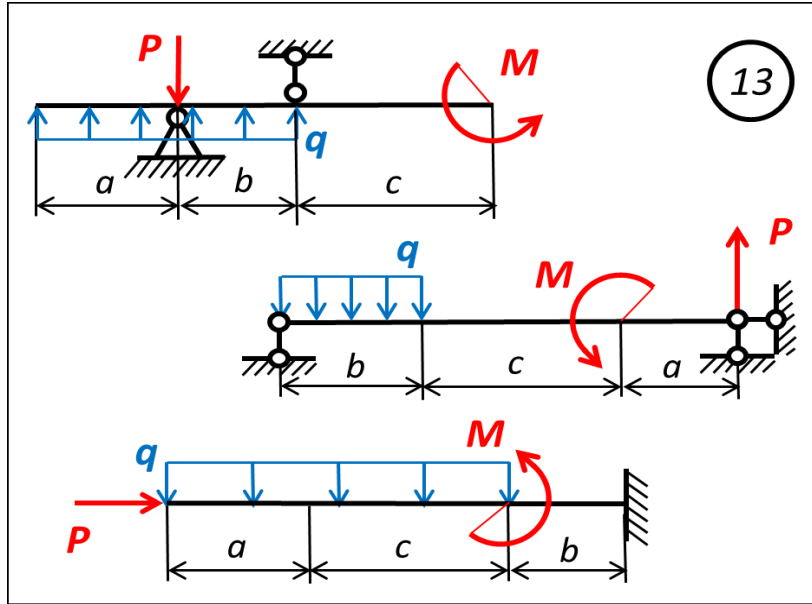
Таблиця А.1 – Початкові дані до розрахунково-графічної роботи

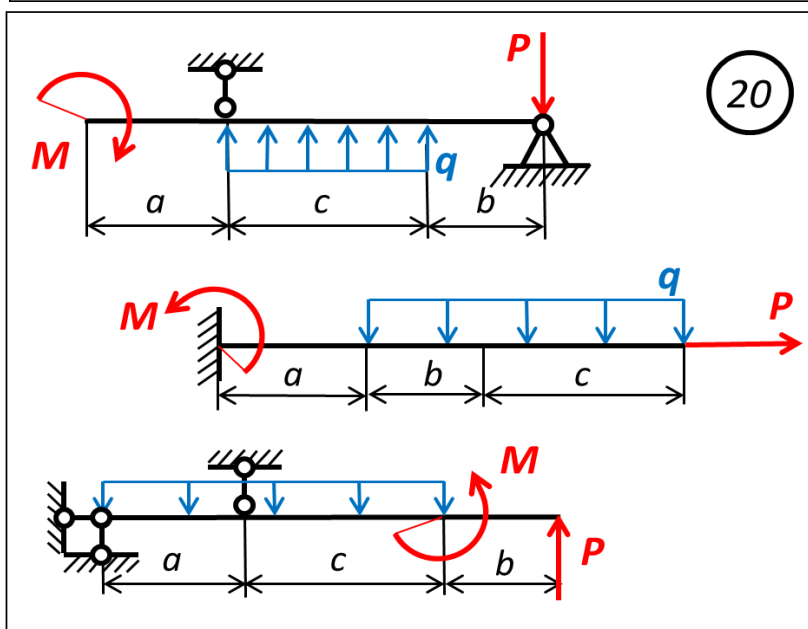
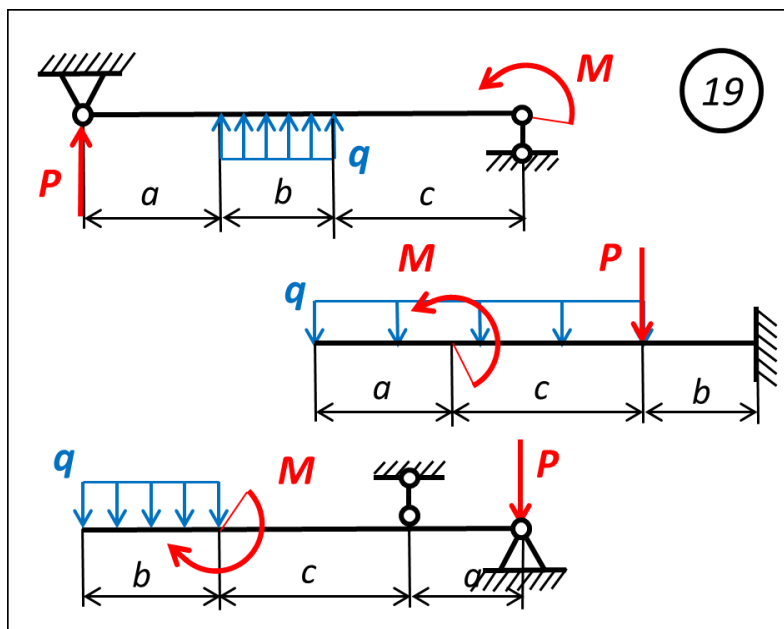
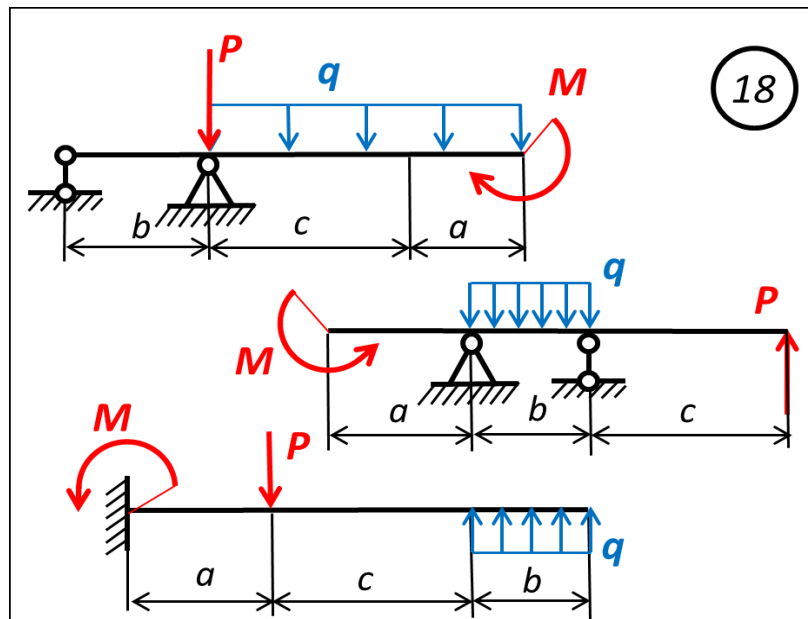
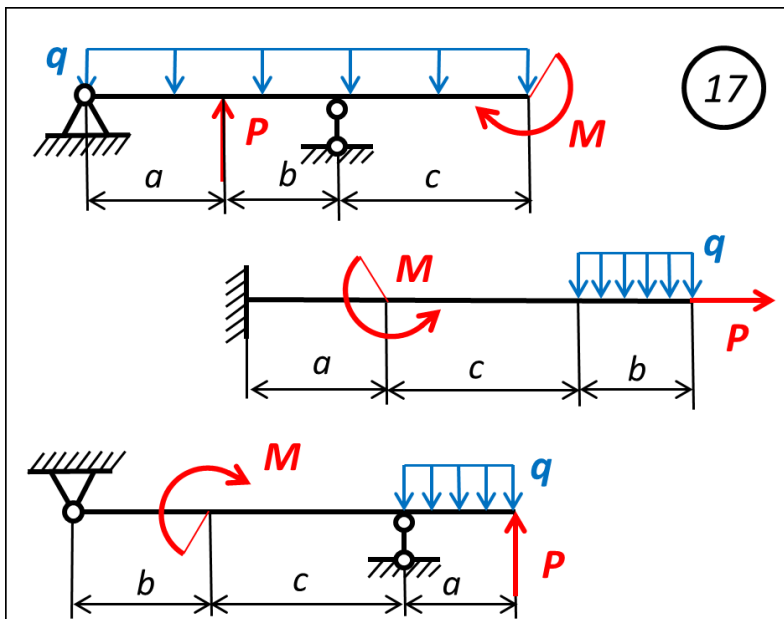
№	а, м	б, м	с, м	q, кН/м	Р, кН	М, кН·м
01	1	2	3	10	-20	30
02	2	3	4,5	-20	30	40
03	1	2	4	-15	10	50
04	0,5	1,5	3	30	50	-30
05	0,5	1	2	-10	40	20
06	1	2	2,5	20	-40	10
07	1,5	3	4	40	-10	-40
08	0,5	1	2	50	-25	20
09	1	1,5	6	-40	15	45
10	1,5	2	4	20	20	-65
11	0,5	2	4,5	30	-30	10
12	0,5	1	4	10	40	-25
13	1,5	2	3	-20	10	45
14	1	1,5	2	15	-15	30
15	2	3	3,5	30	45	-10
16	0,5	2	3,5	35	30	-65
17	1	3,5	4	40	-20	10
18	0,5	1,5	4	20	-10	45
19	1,5	3	5	-25	40	25
20	2	3,5	6	35	60	-15
21	1	1,5	5	60	-10	45
22	1,5	2,5	3	-15	20	55
23	0,5	1	4	40	15	-30
24	1,5	3,5	6	65	25	40
25	0,5	2	3,5	55	-20	15
26	2	3	4	20	-40	-45
27	0,5	1,5	6	40	-60	25
28	1,5	2,5	5	-20	15	35
29	1	3,5	3,5	45	20	-60
30	2	3	4	-30	40	25
31	1,5	2,5	5,5	10	65	-20
32	2	3	5	20	-30	55

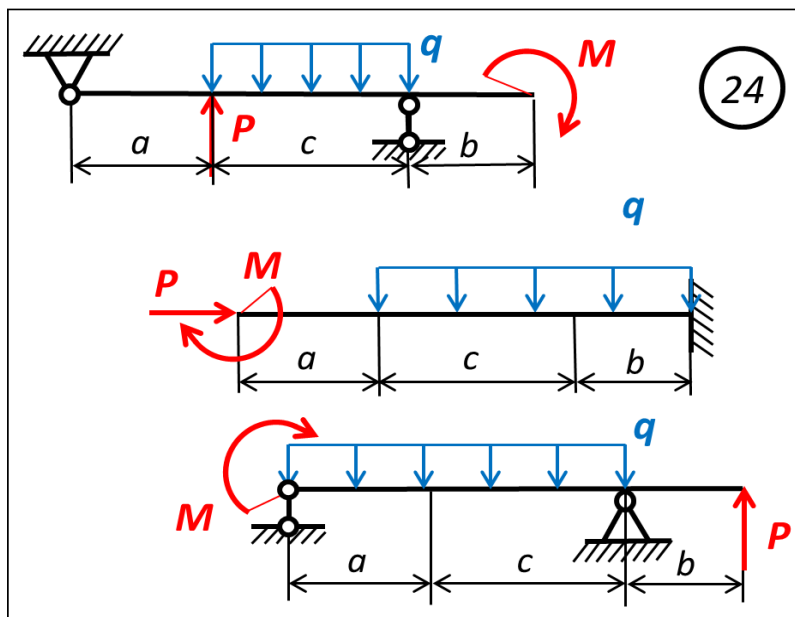
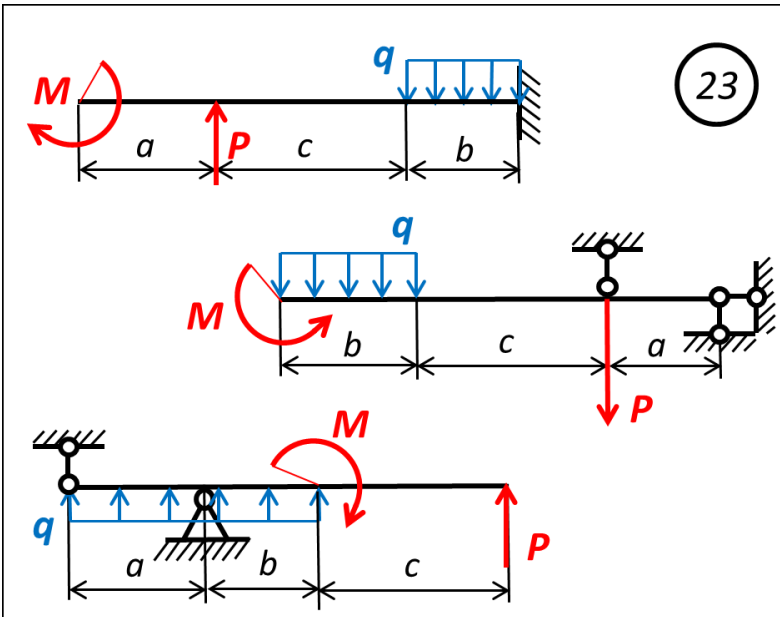
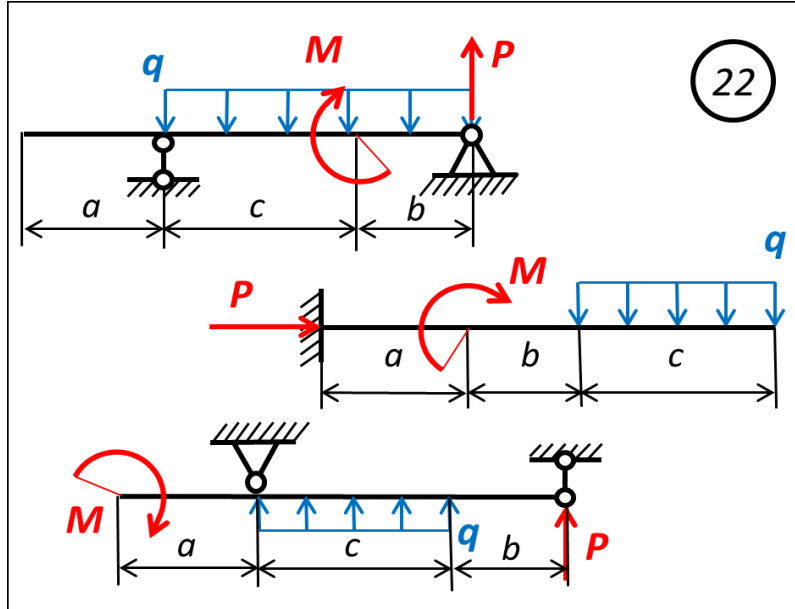
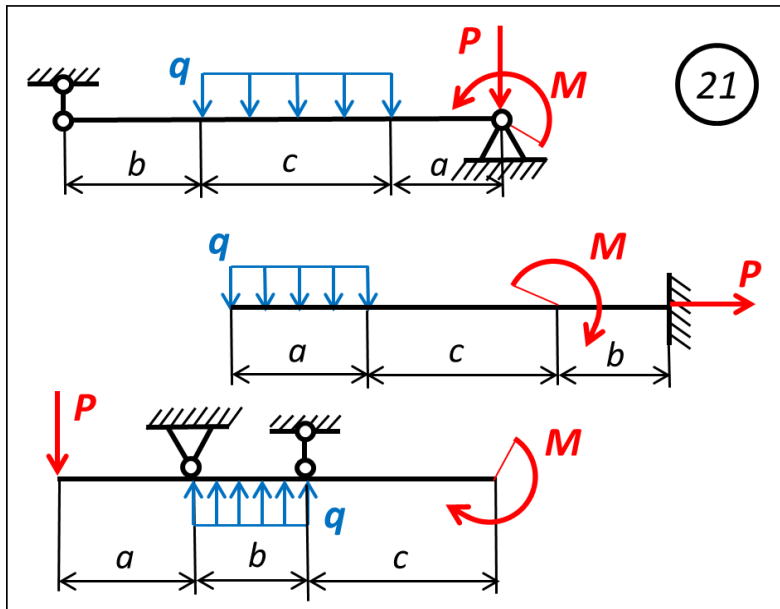


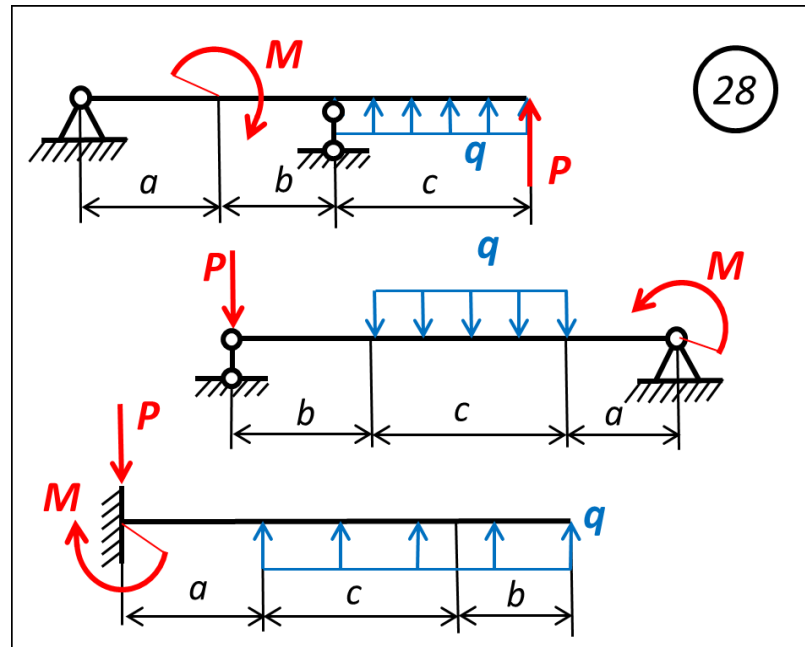
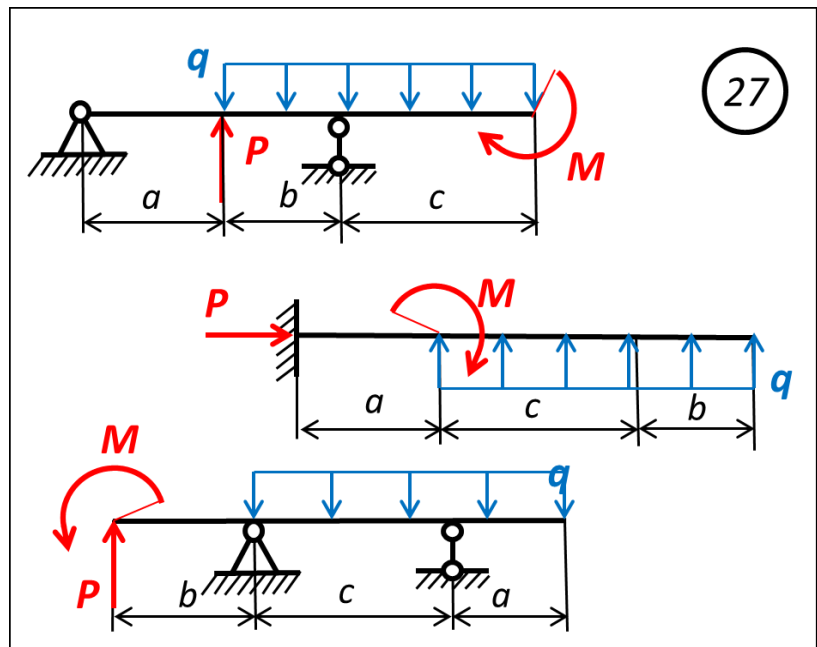
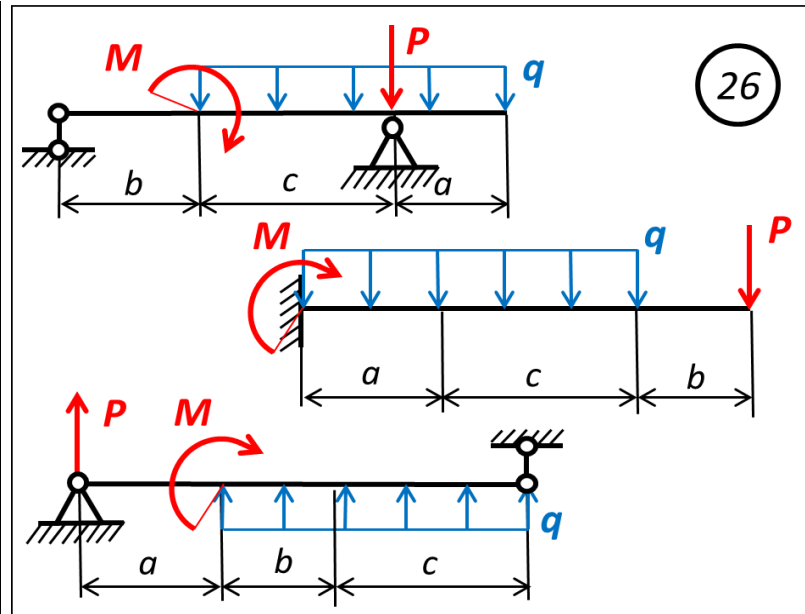
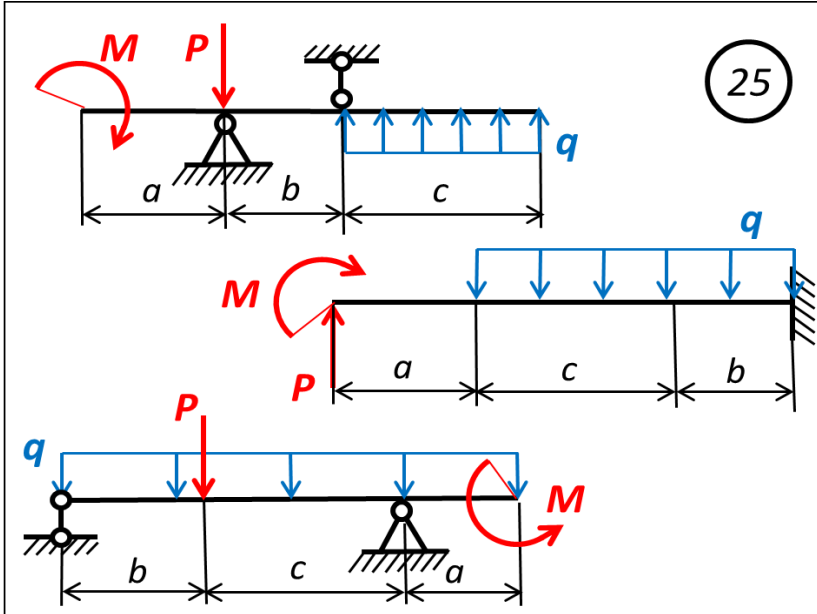


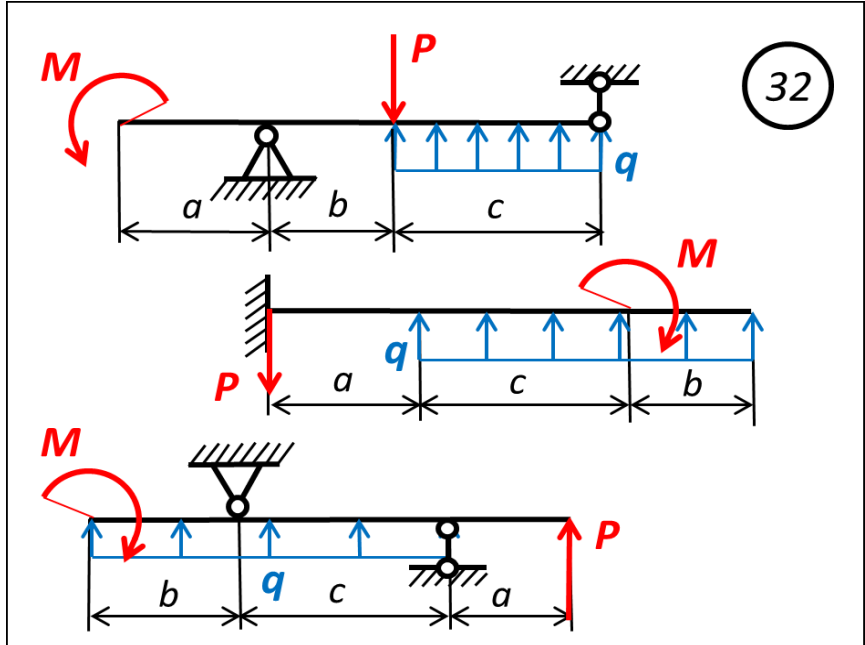
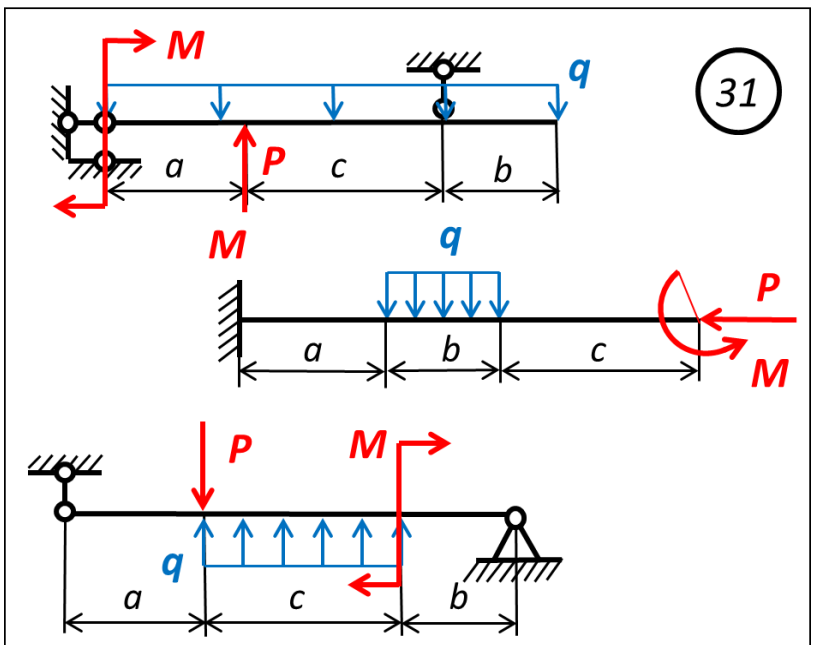
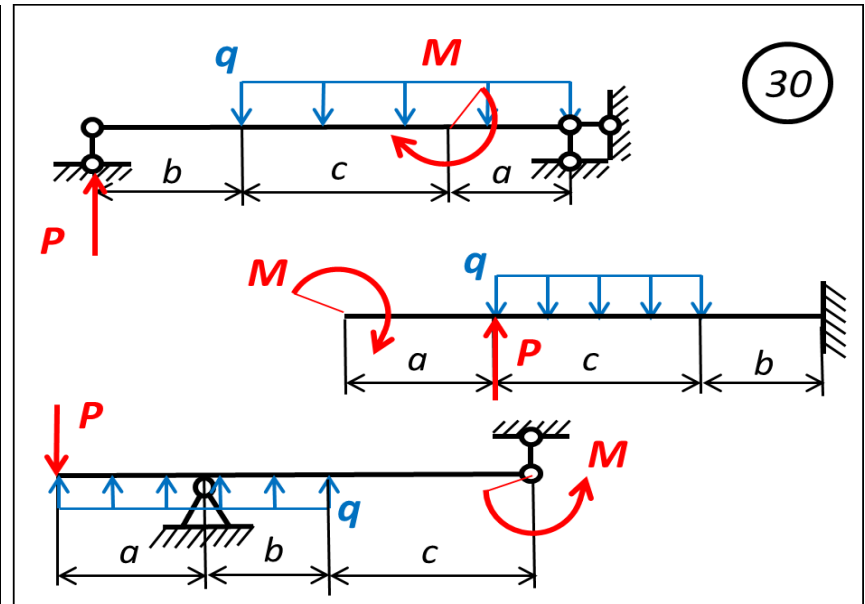
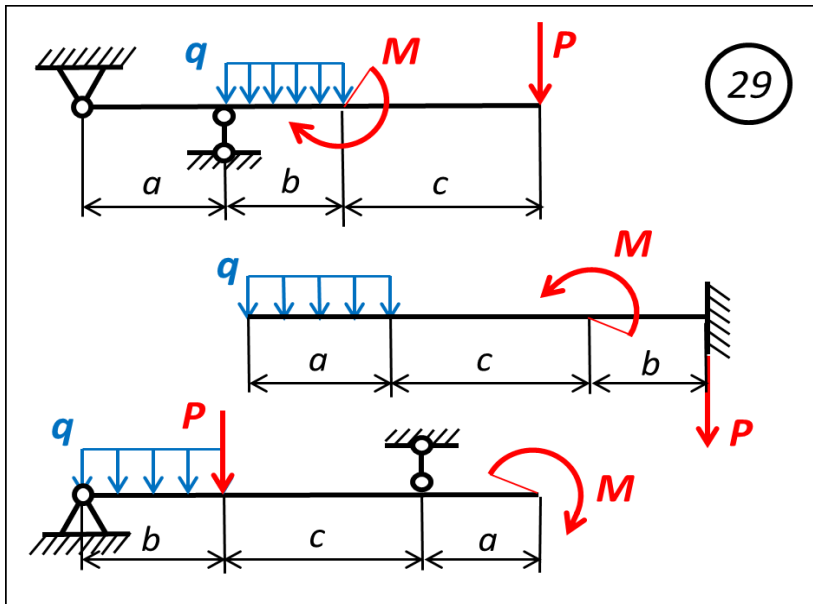












Міністерство науки і освіти України

Чернігівський національний технологічний університет

Кафедра теоретичної і прикладної механіки

Розрахунково-графічна робота з теоретичної механіки
«Визначення реакцій опор твердих тіл»

Варіант № 00-00

Виконав
студент групи АТ-000

П.І.Б.

Перевірив викладач

П.І.Б.

Чернігів 2014