МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Опорний конспект лекцій
для студентів галузі знань 0305 «Економіка і підприємництво»
за напрямами підготовки
6.030505 «Управління персоналом і економіка праці»,
6.030507 «Маркетинг»

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні кафедри математичного
моделювання
та інформатики
протокол № 6 від 22.01.2014 р.

Чернігів ЧНТУ 2014

Вища математика. Опорний конспект лекцій для студентів галузі знань 0305 «Економіка і підприємництво» за напрямами підготовки 6.030505 «Управління персоналом і економіка праці», 6.030507 «Маркетинг»/ Укл.: Ткач Ю.М.- Чернігів: ЧНТУ, 2014. - 161 с.

Укладач: Ткач Юлія Миколаївна, кандидат педагогічних наук, доцент

Відповідальний за випуск: Ткач Юлія Миколаївна, завідувач кафедри математичного моделювання та інформатики, кандидат педагогічних наук, доцент

Рецензент: Лось В.М., кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Чернігівського національного технологічного університету

ВСТУП

Вища математика є однією з дисциплін фундаментальної підготовки фахівців економічного профілю. Знання з вищої математики знадобляться як для подальшого глибокого засвоєння багатьох базових та професійно орієнтованих дисциплін, так і для застосування їх у практичній діяльності.

Якісна математична освіта надає майбутнім економістам можливість не тільки досліджувати, аналізувати та прогнозувати складні процеси, що відбуваються в різних галузях народного господарства, але й завдяки сучасним комп'ютерним технологіям кількісно їх розраховувати та приймати обґрунтовані логічно несуперечливі рішення як на мікро- так і на макрорівні.

Зазначені вміння, світогляд, математична культура, економічне та логічне мислення студента формуються під час активного вивчення курсу вищої математики.

Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» розроблений у відповідності до робочої програми з вищої математики за напрямами підготовки 6.030505 «Управління персоналом і економіка праці», 6.030507 «Маркетинг», а також може бути використана для інших спеціальностей, зокрема 6.170103 «Управління інформаційною безпекою».

У посібнику міститься теоретичний матеріал та приклади задач з таких розділів: лінійна алгебра, елементи аналітичної геометрії та векторної алгебри, вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функції однієї змінної, диференціальне числення функції багатьох змінних, інтегральне числення функції однієї змінної, звичайні диференціальні рівняння, ряди.

Ця методична розробка може бути використана як викладачами так і студентами.

РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ ТА ВИЗНАЧНИКІВ

Означення. *Матрицею називають таблицю упорядкованих чисел або будь-яких інших об'єктів, розташованих в* ***m*** *рядках та* ***n*** *стовпцях.*

Матриці позначають великими літерами, наприклад ***A, B, C***... та круглими дужками.

Матриця, яка має ***m*** рядків та ***n*** стовпців, називається матрицею розміру $m \times n$ (перший множник завжди вказує кількість рядків). Така матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} називаються ***елементами матриці***, а запис $m \times n$ означає її ***розмірність***.

Кожен елемент a_{ij} матриці ***A*** має два індекси: перший індекс ***i*** вказує номер рядка, в якому знаходиться цей елемент, другий індекс ***j*** вказує номер стовпця, який містить цей елемент. Так, елемент a_{23} знаходиться на перетину другого рядка та третього стовпця матриці ***A***.

Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців, то матриця називається ***квадратною***.

Матриця розміру $m \times 1$ називається матрицею - стовпцем або ***вектором-стовпцем***. Матриця розміру $1 \times n$ називається матрицею - рядком або ***вектором-рядком***.

Наприклад, нехай задані матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матриця ***A*** має розмір 2×3, матриця ***B*** розміру 3×4,

Якщо в матриці ***A*** рядки записати стовпцями із збереженням їх нумерації, то одержана матриця зветься **транспонованою** і позначається A^{T}, а вказана операція перетворення матриці ***A*** називається **транспонуванням матриці А**.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Наприклад, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{тоді} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Дві матриці ***рівні між собою***, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Матриці бувають кількох видів:

1) матриця-рядок – матриця, яка складається з одного рядка:

$$A = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}).$$

Наприклад, $A = (1 \ \ 3 \ \ 5)$.

2) матриця-стовпець – матриця, яка складається з одного стовпця:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

Наприклад, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

3) діагональна матриця – квадратна матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю, крім елементів головної діагоналі:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 7 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 9 \end{pmatrix}$.

4) трикутна матриця – квадратна матриця, у якої під (над) головною діагоналлю усі елементи дорівнюють нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

5) одинична матриця (загальновживане позначення E) – діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

6) нуль-матриця – матриця будь-якого розміру, у якої усі елементи дорівнюють нулю.

7) східчаста матриця – прямокутна матриця, яка має вигляд:

$$A_{r\times k}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r}\dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r}\dots & a_{2n}\\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr}\dots & a_{rk}\end{pmatrix},$$

де $r \le k$.

Наприклад, $A_{3\times 5}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 7 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

Якщо такий визначник відмінний від нуля, то матриця називається ***неособливою***, або ***невиродженою***. Якщо визначник дорівнює нулю, то матриця ***особлива***, або ***вироджена.***

Дії з матрицями

Найпростішими діями з матрицями називають *множення матриці на число, їх додавання та віднімання, множення матриць.*

Добутком матриці A на число k називається матриця, елементи якої дорівнюють добуткам елементів матриці ***A*** та числа k:

$$kA=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn}\end{pmatrix}$$

Додавати та віднімати можна лише матриці однакового розміру.

Алгебраїчною сумою матриць A та B однакового розміру m × n називається матриця ***C*** розміру ***m × n***, елементи якої c_{ij} дорівнюють відповідній алгебраїчній сумі елементів a_{ij} та b_{ij} матриць ***A*** та ***B***, тобто

$$A\pm B=C=\begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \dots & a_{1n}\pm b_{1n}\\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \dots & a_{2n}\pm b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \dots & a_{mn}\pm b_{mn}\end{pmatrix}.$$

Наприклад обидві матриці $A=\begin{pmatrix}5 & -8 & 0 & 2\\ 4 & 3 & 1 & 2\\ -1 & 2 & -7 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & -1\\ 5 & 6 & -7 & 10\\ 1 & -3 & 4 & 0\end{pmatrix}$ мають розмір 3×4, тому за означенням можна утворити їх суму — матрицю

$$C=\begin{pmatrix}5+0 & -8+1 & 0+2 & 2-1\\ 4+5 & 3+6 & 1-7 & 2+10\\ -1+1 & 2-3 & -7+4 & 3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -7 & 2 & 1\\ 9 & 9 & -6 & 12\\ 0 & -1 & -3 & 3\end{pmatrix}.$$

Очевидно, що для суми матриць і добутку матриць на число виконуються рівності:

1) $A + B = B + A$;
2) 2) $\alpha A = A\alpha$;
3) 3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
4) 4) $(\alpha + \beta)A = \ = \alpha A + \beta A$,
5) 5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Для знаходження добутку ***AB*** *матриць* ***A*** *та* ***B*** *необхідно, щоб кількість стовпців матриці* ***A*** *(першого множника) дорівнювала кількості рядків матриці* ***B*** *(другого множника).*

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ розміру $m \times p$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, $C = (c_{ij})$, кожний елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \ .$$

Кожний елемент матриці *C* утворюється як сума добутків відповідних елементів *i*-го рядка матриці *A* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *B*, тобто за схемою:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{pj} & \vdots \end{pmatrix}$$

Зазначимо, що в результаті множення дістанемо матрицю розміру $m \times n$.

З означення випливає, що добуток матриць *некомутативний*: $AB \neq BA$.

Приклад: Знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2(-1) & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 2\cdot 2 + 0(-1) & 2\cdot 1 + 0\cdot 2 \\ -1\cdot 2 + 1\cdot(-1) & (-1)\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначники

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність визначник, який складається з тих самих елементів.

$$\Delta(A) = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення 2. *Визначником* **n***-го порядку квадратної числової матриці* ***A*** *порядку* **n** називають число, яке знаходиться з *елементів матриці* ***A*** *за певним правилом і позначають* |***A***|, *або* Δ, *або det A.*

Правило знаходження визначника 2 порядку: визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Приклад 2: Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix};$$

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 - (-3) \cdot 1 = -10 + 3 = -7$$

Правила знаходження визначника 3-го порядку

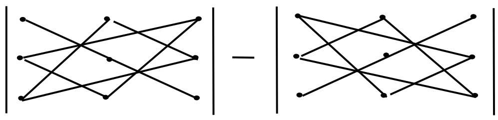
Визначником третього порядку називається вираз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Правило трикутника

Для запам’ятовування правила обчислення визначника третього порядку пропонуємо таку схему:



Три перших доданка із знаком (+) є добутками елементів головної діагоналі і елементів вершин трикутників з основами паралельними головній діагоналі. Три останні доданки у правій частині (5) мають від'ємний знак. Вони є добутками елементів неголовної діагоналі та елементів вершин трикутників із основами паралельними неголовній діагоналі

Правило Саррюса

У початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Для знаходження визначника за цим правилом треба утворити зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком «мінус» — добутків елементів, розміщених на сторонній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

Мінори та алгебраїчні доповнення

Нехай визначник має n рядків і n стовпців.

Мінором $\boldsymbol{M_{ij}}$ *елемента* $\boldsymbol{a_{ij}}$ *визначника* $\boldsymbol{n}$*-го порядку називається визначник* $\boldsymbol{(n-1)}$ *порядку, який одержуємо з визначника* $|A|$ *шляхом викреслювання* $\boldsymbol{i}$*-го рядка та* $\boldsymbol{j}$*-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент* $\boldsymbol{a_{ij}}$*.*

Приклад: Утворити кілька мінорів другого і один мінор третього порядку такого визначника:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$M_2^1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ M_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},\ M_2^3 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix},\ \dots,\ M_3^1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням $\boldsymbol{A_{ij}}$ *елемента* $\boldsymbol{a_{ij}}$ *визначника називають мінор цього елемента, взятий зі знаком* $\boldsymbol{(-1)^{i+j}}$ *, тобто* $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Приклад: Знайти алгебраїчні доповнення до елементів $\boldsymbol{a_{21}}$ та $\boldsymbol{a_{33}}$ визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Розв'язування. Алгебраїчні доповнення до елементів $\boldsymbol{a_{21}}$ та $\boldsymbol{a_{33}}$ позначимо $\boldsymbol{A_{21}}$ та $\boldsymbol{A_{33}}$, відповідно. Згідно з означенням

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21};\ \ A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33}$$

Знайдемо мінори $\boldsymbol{M_{21}}$ та $\boldsymbol{M_{33}}$ згідно з означенням:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} \cancel{2} & 3 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{2} \\ \cancel{-3} & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 = 12 + 1 = 13;$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & \cancel{-1} \\ 1 & 4 & \cancel{2} \\ \cancel{-3} & \cancel{1} & \cancel{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = 5;$$

Підставимо ці значення мінорів у відповідні рівності, одержимо шукані алгебраїчні доповнення $\boldsymbol{A_{21}} = -13$ та $\boldsymbol{A_{33}} = 5$.

Обчислення визначників n-го порядку

Означення. Визначником n-го порядку називається число Δ, яке дорівнює алгебраїчній сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні їм алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Алгебраїчні доповнення, що входять до формули, за якою обчислюють визначник, є, у свою чергу, мінорами, узятими з відповідними знаками, тобто визначниками (n–1)-го порядку. Отже, обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення n визначників (n–1)-го порядку.

Але з формули (1.3) випливає, що за наявності у визначнику нульових елементів відповідні алгебраїчні доповнення обчислювати не потрібно.

Зауважимо, що **сума добутків елементів рядка або стовпця визначника *n*-го порядку на алгебраїчні доповнення до елементів іншого рядка або стовпця цього самого визначника дорівнює нулю.**

Теорема Лапласа. *Визначник **n-го** порядку дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого стовпця (або рядка) на відповідні їм алгебраїчні доповнення.*

У випадку використання ***i-го*** рядка це правило математично можна записати так

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + \cdot a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{ik} \cdot A_{ik} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$

Дана теорема ще називаєтья розкладом визначника за елементами ***i-го*** рядка. Визначник можна розкласти і за елементами ***k-го*** стовпця ($\boldsymbol{k}$ = 1, 2, ..., $\boldsymbol{n}$).

Зауваження. Для скорочення обчислень визначника доцільно його розкласти за елементами такого рядка чи стовпця, який містить найбільшу кількість нулів. У такому випадку не треба знаходити алгебраїчні доповнення до елементів, що дорівнюють 0 (добуток 0 на будь-яке алгебраїчне доповнення дорівнює нулеві).

Властивості визначників:

1. Визначник не змінюється в результаті транспонування.

З властивості 1 випливає, що будь-яке твердження, котре справджується для рядків визначника, справджується і для його стовпців, і навпаки.

2. Якщо один із рядків визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

3. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки визначника, то його знак зміниться на протилежний.

4. Визначник, який має два однакові рядки, дорівнює нулю.

5. Якщо елементи будь-якого рядка визначника помножити на стале число C, то й визначник помножиться на C.

З останньої властивості випливає, що спільний множник елементів рядка можна виносити за знак визначника.

6. Визначник, який має два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

7. Якщо всі елементи будь-якого рядка визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику.

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи довільного іншого рядка, попередньо помножені не деяке число.

Приклад*:* Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 6 & -4 \\ 7 & -3 & 5 & -3 \\ 6 & -9 & 12 & 6 \end{vmatrix}$$

Розв'язання. У цьому визначнику елементи другого рядка мають спільний множник 2, а елементи четвертого рядка - спільний множник 3. Винесемо ці множники за знак визначника:

$$\Delta = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ 7 & -3 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

У першому рядку зробимо всі елементи, крім останнього, нулями. Для цього до першого стовпика додамо четвертий, помножений на -5, до другого - четвертий, помножений на 2, до третього - четвертий, помножений на -3. Матимемо:

$$\Delta = 6 \cdot \begin{vmatrix} 5-5 & -2+2 & 3-3 & 1 \\ 5+10 & 4-4 & 3+6 & -2 \\ 7+15 & -3-6 & 5+9 & -3 \\ 2-10 & -3+4 & 4-6 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 9 & -2 \\ 22 & -9 & 14 & -3 \\ -8 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Розкладемо останній визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta = 6a_{14}A_{14} = 6 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 15 & 0 & 9 \\ 22 & -9 & 14 \\ -8 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 15 & 0 & 9 \\ 22 & -9 & 14 \\ -8 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

У другому стовпчику -9 замінюємо на 0. Для цього до другого рядка додамо третій, помножений на 9.

$$\Delta = -6 \cdot \begin{vmatrix} 15 & 0 & 9 \\ 50 & 0 & -4 \\ -8 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Розкладемо останній визначник за елементами другого стовпчика:

$$\Delta = -6 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 15 & 9 \\ -50 & -4 \end{vmatrix} = -6 \cdot (-60 + 450) = 2340.$$

Ранг матриці

Нехай задана матриця $\boldsymbol{A}$ розміру $\boldsymbol{m \times n}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виберемо в ній довільно $\boldsymbol{k}$ рядків та $\boldsymbol{k}$ стовпців. Елементи, що знаходяться на перетині виділених рядків та стовпців, утворюють квадратну матрицю $\boldsymbol{k}$-того порядку, визначник якої називають мінором $\boldsymbol{k}$-того порядку матриці $\boldsymbol{A}$. Обираючи різними способами $\boldsymbol{k}$ рядків та $\boldsymbol{k}$ стовпців, одержимо деяку кількість мінорів $\boldsymbol{k}$-того порядку.

Зрозуміло, що $rangA = r \le \min(m, n)$, а найбільший можливий ранг матриці може дорівнювати меншому з чисел m і n.

Розглянемо в матриці $\boldsymbol{A}$ ті її мінори різних порядків, які відмінні від нуля і нехай їх найбільший порядок дорівнює $\boldsymbol{r}$.

***Рангом** матриці називають найбільший порядок її мінорів, відмінних від нуля.*

Ранг матриці позначають $\boldsymbol{r(A)}$ або $\boldsymbol{r_A}$ або просто $\boldsymbol{r}$. Ранг матриці можна знаходити методом обвідних мінорів.

Елементарними перетвореннями матриці називають наступні перетворення:

1. Перестановка рядків (стовпців) матриці.
2. Множення всіх елементів рядка (стовпця) на число $\lambda \neq 0$.
3. Додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число.

Всі ці перетворення не змінюють ранг матриці, але з їх допомогою матрицю зводять до матриці, у якої нижче головної діагоналі всі елементи — нулі. Тоді *ранг матриці дорівнює* кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

Приклад: Знайти ранг матриць:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$,

Розв'язання. Ранг матриці будемо знаходити методом елементарних перетворень.

а) Елементи першого рядка матриці помножимо на (-3) і додамо до відповідних елементів другого рядка матриці $\boldsymbol{A}$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Звідси випливає, що ранг цієї матриці дорівнює 1(нижче головної діагоналі – нуль та один елемент головної діагоналі $\neq 0$)

б) Зробимо такі перетворення, щоб нижче головної діагоналі були нулі:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 4\\ 2 & -2 & 6 & 3\end{pmatrix}\times(-2),(-2) \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\\ 0 & 3 & -7 & -6\\ 0 & 0 & 0 & -7\end{pmatrix}$$

Оскільки можна третій та четвертий стовпці поміняти місцями і отримати третій елемент головної діагоналі, який $\neq 0$, то ***r(A)*** =3.

Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається ***оберненою матрицею до квадратної невиродженої матриці*** A, якщо виконується співвідношення: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

тобто матриці A та A^{-1} комутують і їх добуток є одинична матриця.

Теорема. *Будь-яка невироджена квадратна матриця має єдину обернену до неї матрицю.*

Обернену матрицю A^{-1} до матриці $\boldsymbol{A}$ можна знаходити за формулою

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & a_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

де $\boldsymbol{A_{ij}}$ — алгебраїчні доповнення елементів $\boldsymbol{a_{ij}}$ матриці $\boldsymbol{A}$, (алгебраїчні доповнення до *i-го* рядка розташовані у $\boldsymbol{i}$ стовпці, ($\boldsymbol{i}$= 1, 2, ..., $\boldsymbol{n}$).

Приклад: Знайти матрицю обернену до матриці

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Розв'язання. Обчислюємо визначник цієї матриці

$$\Delta=\det B=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=3+0-6-0-1-18=-22\neq 0$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці $\boldsymbol{B}$:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-8;\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-9;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-7;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-5$$

Отже,

$$B^{-1}=-\frac{1}{22}\begin{pmatrix}2 & -8 & 4\\ -9 & 3 & -7\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/11 & 4/11 & -2/11\\ 9/22 & -3/22 & 7/22\\ -3/22 & 1/22 & 5/22\end{pmatrix}$$

Приклад: Знайти матрицю обернену до матриці

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$$

Розв'язання. Обчислюємо визначник цієї матриці

$$\det C = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці **C**

$A_{11} = a_{22} = -5;$ $A_{21} = -a_{12} = -2;$

$A_{12} = -a_{21} = -3;$ $A_{22} = a_{11} = -1$

Отже, $C^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Перевірка:

$$CC^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$C^{-1}C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Розв'язування матричних рівнянь

Рівняння вигляду ***AX = B, YC = D*** називаються простішими матричними рівняннями, де ***A*** і ***C*** **-** невироджені квадратні матриці, ***B*** і ***D*** – задані матриці, ***X*** і ***Y*** – невідомі матриці.

Якщо матриця ***A*** квадратна невироджена матриця, тоді існує обернена до ***A*** матриця A^{-1} , тому можна рівняння ***AX = B*** помножити на A^{-1} зліва та спрва. Одержимо $A^{-1}AX=A^{-1}B$

За означенням оберненої матриці маємо:

$A^{-1}A=E.$

Тому (11) прийме вигляд: $EX=A^{-1}B$

Але множення матриці-стовпця ***X*** на матрицю ***E*** не змінює ***X***, тобто ***EX=X***

.

Таким чином, одержуємо формулу: $X=A^{-1}B$

Аналогічно: $YC = D;$ $YC^{-1} = DC^{-1};$

$Y = DC^{-1}$

Приклад: Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Позначимо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Отримаємо рівняння ***AX = B,*** де $X=A^{-1}B$

$$A^{-1} = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -9 & 3 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -9 & 3 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 6-16+16 & -2-16+4 & 0-24+8 \\ -27+6-28 & 9+6-7 & 0+9-14 \\ 9-2-20 & -3-2-5 & 0-3-10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 6 & -14 & -16 \\ -49 & 8 & -5 \\ -13 & -10 & -13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3/11 & 7/11 & 8/11 \\ 49/22 & -4/11 & 5/22 \\ 13/22 & 5/11 & 13/22 \end{pmatrix}$$

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - квадратна матриця.

Власними значеннями (власними числами, характеристичними числами) цієї матриці називаються такі значення параметра λ , які задовольняють рівняння $|A-\lambda \cdot E| = 0$, тобто рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Приклад: Обчислити власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Будуємо рівняння для відшукання власних чисел: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Розв'язуємо це рівняння:

$(1-\lambda)\cdot(4-\lambda)-(-1)\cdot 2 = 0$;

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$;

$\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 3$.

Квадратна матриця називається **додатно визначеною**, якщо всі її власні числа є додатними.

Теорема. Квадратна матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ є додатньо визначеною тоді і тільки тоді, коли кожен з її діагональних мінорів є додатнім:

$a_{11} > 0$;

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$;

. . . .

$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$.

Приклад: Матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ є додатно визначеною, оскільки обидва її власні значення $\lambda_1 = 2$ та $\lambda_2 = 3$ є додатними. Додатну визначеність цієї матриці можна з'ясуватити також за допомогою обчислення мінорів:

$a_{11} = 1 > 0$;

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6 > 0$.

Власним (характеристичним) вектором матриці A називається вектор $\overline{x}$ такий, що $A\cdot\overline{x}=\lambda\cdot\overline{x}$, де λ - власне число матриці А.

Приклад: Вектори $\overline{x_1}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ та $\overline{x_2}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ є власними векторами (що відповідають власним числам $\lambda_1=2$ та $\lambda_2=3$) матриці $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}$, оскільки

$$\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad \text{та} \quad A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Застосування знань та вмінь з теми в економіці

Приклад: У продуктах $П_1$, $П_2$, $П_3$ містяться вітаміни *А, В, С, Д* у кількості (мг):

Продукти	**Вітаміни**			
	А	**В**	**С**	**Д**
$П_1$	0,3	0	0,1	0,2
$П_2$	0,5	0,3	0	0,4
$П_3$	0,2	0,1	0,4	0
Ціна од.	10	15	22	30

Скільки вітамінів кожного виду міститься в раціоні, що включає кількість продукту $П_1$ - 5 од., $П_2$ - 10 од., $П_3$ - 8 од.? Розрахуйте вартість одиниці кожного виду продукції та всього раціону в цілому.

Розв'язання.

Запишемо умову задачі у матричному вигляді.

Нехай

$B=\left[b_{ij}\right]$ - матриця кількості вітамінів, що містяться у продукції j -го виду:

$$B=\begin{pmatrix}0,3&0&0,1&0,2\\0,5&0,3&0&0,4\\0,2&0,1&0,4&0\end{pmatrix}.$$

$A=\left[a_{ij}\right]$ - матриця кількості продукції i -го виду:

$A=\ 5\ \ 10\ \ 8\ .$

$C=\left[c_{ij}\right]$ - матриця вартості вітаміну j -го виду:

$$C=\begin{pmatrix}\\10\\15\\22\\30\end{pmatrix}.$$

Визначимо кількість вітамінів у запропонованому раціоні:

$$D = A \cdot B = (5 \quad 10 \quad 8) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} = \; 8{,}1 \quad 3{,}8 \quad 3{,}7 \quad 5 \; .$$

Тобто, у раціоні міститиметься 8,1 мг вітаміну А, В - 3,8, С – 3,7, Д – 5.

Обчислимо вартість одиниці продукції:

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 22 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11{,}2 \\ 21{,}5 \\ 12{,}3 \end{pmatrix} .$$

Таким чином, продукція $П_1$ коштує 11,2 гр.од. за од. , $П_2$ - 21,5 гр.од., $П_3$ - 12,3 гр.од.

Розрахуємо вартість раціону:

$$E = \; 5 \quad 10 \quad 8 \; \cdot \begin{pmatrix} 11{,}2 \\ 21{,}5 \\ 12{,}3 \end{pmatrix} = 369{,}4 .$$

Отже, запропонований раціон коштуватиме 369,4 гр.од.

Міжгалузевий баланс

Розглянемо економічну систему, що її утворюють взаємозв’язані галузі виробництва за певний період часу. Скористаємося такими позначеннями:

x_i — загальна вартість продукції, виробленої в i-й галузі $(i = 1, 2, ..., n)$;

y_i — вартість кінцевого продукту i-ї галузі для невиробничих потреб;

x_{ij} — вартість продукції i-ї галузі, що споживається в j-й галузі $(i, j = 1, 2, ..., n)$.

Розподіл продукції між зазначеними галузями подамо таблицею 1.1:

Таблиця 1.1 – Розподіл продукції

Галузь	Вартість продукції	Міжгалузеві потоки				Разом на виробничі потреби	Кінцевий продукт
		1	2	…	n		
1	x_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	y_1
2	x_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	y_2
…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	y_n

Зв'язок між величинами в рядках цієї таблиці запишемо у вигляді системи рівнянь:

$x_i = \sum_{j=1}^{n} i\, x_{ij} + y_i$. - це рівняння називаються **балансовими рівняннями.**

Нехай a_{ij} — вартість продукції *i*-ї галузі, що споживається на виробництво одиниці продукції *j*-ї галузі, тоді

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \qquad \left(i,\ j = \overline{1,n}\right)$$

Величини a_{ij} називаються **коефіцієнтами повних витрат**. Вони утворюють матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яку називають **матрицею прямих витрат**, або **технологічною матрицею**.

Сукупність значень $y_1, y_2, \dots, y_n$, що характеризує випуск кінцевого продукту, називають **вектором у кінцевих продуктів**, а сукупність значень $x_1, x_2, \dots, x_n$, яка визначає валовий випуск усіх галузей, — **вектором-планом x**. Записують кожну із цих сукупностей у вигляді вектора-стовпця (або вектора-рядка):

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Отже, система рівносильна матричному рівнянню

$$\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

або

$$(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Єдиний розв'язок цього рівняння подається у вигляді

$$\mathbf{x} = (E - A)^{-1}\,\mathbf{y}\,.$$

Таким чином, якщо вектор **y** кінцевих продуктів задано і знайдено матрицю $B = (E - A)^{-1}$, то за (6) можна визначити вектор-план

$$\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n).$$

Очевидно, що коли задано матрицю $A = (a_{ij})$ прямих витрат, то кожному варіанту вектора ***y*** кінцевих продуктів відповідає певний варіант вектора-плану **x**.

Зауваження. Матриця

$$(E-A)^{-1}=B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

називається **матрицею повних витрат**, оскільки її елемент b_{ij} означає вартість продукції i-ї галузі, що йде на виробництво вартісної одиниці кінцевої продукції j-ї галузі (повні витрати b_{ij} включають прямі витрати a_{ij} та непрямі витрати $b_{ij}-a_{ij}$).

Приклад: Розглянемо економічну систему з трьох галузей виробництва. Відповідна матриця прямих витрат

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix},$$

а обсяги (у грошових одиницях) кінцевих продуктів такі відповідно 300, 1000, 2000. Знайти відповідний вектор-план $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку матрицю

$$E-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}4 & 0{,}0 \\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix},$$

а далі — матрицю повних витрат:

$$B=(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1{,}529 & 0{,}941 & 0{,}471 \\ 0{,}941 & 2{,}118 & 1{,}059 \\ 0{,}882 & 0{,}735 & 1{,}618 \end{pmatrix}.$$

Для обчислення матриці B можна скористатись різними програмними засобами, зокрема Excel, Mathematics або будь-який інший пакет.

Помноживши матрицю $B=(E-A)^{-1}$ на вектор-стовпець $\mathbf{y}$ кінцевих продуктів, дістанемо вектор-план:

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1{,}529 & 0{,}941 & 0{,}471 \\ 0{,}941 & 2{,}118 & 1{,}059 \\ 0{,}882 & 0{,}735 & 1{,}618 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3000 \\ 1000 \\ 2000 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6470 \\ 5177 \\ 6617 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, коли задано (у грошових одиницях) обсяги кінцевих продуктів $y_1=3000$, $y_2=1000$, $y_3=2000$, необхідно запланувати такі обсяги виробництва: $x_1=6470$, $x_2=5177$, $x_3=6617$.

РОЗДІЛ 2. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Різновиди систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Система алгебраїчних рівнянь називається **лінійною**, якщо вона може бути записана у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1i}\, x_i + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2i}\, x_i + \dots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots & = \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ \dots + a_{ki}\, x_i + \dots + a_{kn}x_n & = b_k \\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots & = \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots + a_{mi}\, x_i + \dots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \qquad (2.1)$$

де $\mathbf{x_1, x_2, \dots ,x_n}$ - невідомі; $\boldsymbol{a}_{\mathbf{ij}}$ – дійсні числа, які називають коефіцієнтами системи (індекс **i** вказує рівняння, а індекс **j** невідоме, при якому записано цей коефіцієнт); $\mathbf{b_k}$ **(k =1, 2,…, m)** – вільні (від невідомих) члени або їх називають правими частинами рівнянь.

Якщо $\mathbf{b_k}$ **= 0** для усіх **k = 1,2, …, m**, тоді систему називають **однорідною**. Якщо хоч би один вільний член $\mathbf{b_k}$ не дорівнює нулю, тоді система алгебраїчних рівнянь називається **неоднорідною.**

Розв'язком системи (2.1) називається множина дійсних чисел $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$, підстановка яких у систему замість невідомих $\mathbf{x_1, x_2, \dots, x_n}$, перетворює кожне рівняння системи у тотожність (іноді кажуть, що ця множина задовольняє систему рівнянь).

Система лінійних алгебраїчних рівнянь, що має хоч би один розв'язок, називається **сумісною**, а система, що не має розв'язку, називається **несумісною.**

Теорема Кронекера - Капеллі

Позначимо через $\boldsymbol{A}$ основну матрицю системи (2.1), яка складена з коефіцієнтів при невідомих, а через $\boldsymbol{\widetilde{A}}$ – розширену матрицю цієї системи, яка одержана шляхом доповнення матриці $\boldsymbol{A}$ стовпцем вільних членів, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера-Капеллі. Система лінійних алгебраїчних рівнянь **(2.1)** сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці

$$r(A) = r(\boldsymbol{\widetilde{A}}) \qquad (2.2)$$

Причому, система має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$r(A) = r(\boldsymbol{\widetilde{A}}) = n \qquad (2.3)$$

Приклад: Дослідити сумісність системи

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -0{,}5 \end{cases}$$

Розв'язання. Задана неоднорідна система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з чотирма невідомими. Для перевірки умови (2.2-2.3) теореми ***Кронекера-Капеллі*** знайдемо ранги основної та розширеної матриць заданої системи, застосовуючи до матриць елементарні перетворення.

Розширену матрицю одержуємо шляхом дописування до основної матриці системи стовпця вільних членів.

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -0{,}5 \end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1{,}5 \end{array}\right)$$

Еквівалентну матрицю отримали шляхом множення елементів першого рядка на (-1) та додавання до елементів другого та третього рядків. Тепер елементи другого рядка помножимо на $\left(-\frac{3}{2}\right)$ і додамо до елементів третього рядка, а потім поміняємо місцями другий та третій стовпчики.

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

З останнього запису випливає, що $r(\tilde{A}) = 2$ та $r(A) = 2$, тобто $r(A) = r(\tilde{A})$, а це означає, що задана система рівнянь є сумісною.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь називають ***еквівалентними,*** *якщо їх розв'язки співпадають.*

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має однакову кількість рівнянь та невідомих, тобто систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.4)$$

Якщо основний визначник Δ цієї системи (визначник основної матриці коефіцієнтів цієї системи) не дорівнює нулю, то ранги основної та розширеної матриць системи будуть рівними і дорівнювати кількості невідомих $\boldsymbol{n}$. Отже, згідно з теоремою Кронекера-Капеллі така система має єдиний розв'язок.

У випадку $\boldsymbol{b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0}$ система **(2.4)** *однорідна*, її єдиний розв'язок тривіальний, тобто $\boldsymbol{x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0}$.

Система однорідних лінійних рівнянь має нетривіальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли $\Delta(A) = 0$.

Якщо система (2.4) *неоднорідна*, її єдиний розв'язок можна знаходити різними способами.

Правило Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.5)$$

Теорема. Якщо головний визначник Δ, складений із коефіцієнтів при невідомих системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими (2.5), відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна і визначена), який обчислюється за формулами:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},}$$

де Δ — головний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи (2.5);

Δ_j — визначник, який утворюється заміною *j*-го стовпця в головному визначнику на стовпець вільних членів.

Приклад: Розв'язати за правилом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 \qquad - 6x_4 = 9 \\ \qquad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}.$$

Тут $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & 6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27; \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

x_1=81/27=3; x_2=(-108)/27=-4; x_3=(-2727)/ =-1; x_4=27/27=1.
Отже, розв'язком цієї системи буде (3;-4;-1;1).

Матричний метод

Якщо позначити

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

То згідно з правилом множення матриць та умовою рівності матриць одержимо запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

у матричній формі: $AX=B$

Таким чином: $X=A^{-1}B$

Для розв'язування неоднорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими матричним методом доцільно застосувати такий алгоритм:

1) Знайти визначник основної матриці Δ:

якщо $\Delta = 0$, то система розв'язку не має.

якщо $\Delta \neq 0$, тоді знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A.

2) Помножити обернену матрицю A^{-1} на матрицю-стовпець вільних членів системи. Одержаний при цьому стовпець і буде розв'язком системи.

Приклад: Знайти розв'язок заданої системи матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -13 \end{cases}$$

Розв'язання. Основною матрицею заданої системи буде матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Визначник цієї матриці

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 32 + 10 + 60 - 12 - 4 = 31 \neq 0$$

Для запису оберненої матриці A^{-1} знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(6-5) = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-6-16) = 22; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 20 = -23;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1+8) = -9;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 15 = 7;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4-10) = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1.$$

Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 14 & -23 & 6 \\ 14 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

Знайдемо розв'язок заданої системи:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 22 & -23 & 6 \\ 14 & -9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 5\cdot(-2)+(-1)\cdot(-8)+7\cdot(-13) \\ 22\cdot(-2)+(-23)\cdot(-8)+6\cdot(-13) \\ 14\cdot(-2)+(-9)\cdot(-8)+1\cdot(-13) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{31}\begin{pmatrix} -93 \\ 62 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язком цієї системи буде (-3;2;1).

Методи Ґаусса

Система лінійних алгебраїчних рівнянь має нескінченну кількість розв'язків у таких випадках:

1) коли однорідна система має $\boldsymbol{n}$ рівнянь з $\boldsymbol{n}$ невідомими і її основний визначник Δ дорівнює нулю;

2) коли кількість рівнянь неоднорідної системи не дорівнює кількості невідомих, а система рівнянь є сумісною;

3) коли кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих та дорівнює $\boldsymbol{n}$, система рівнянь сумісна $\mathbf{r(A) = r(\tilde{A}) = r}$ але $\mathbf{r} < \boldsymbol{n}$.

Суть метода Ґаусса полягає в тому, що шляхом елементарних перетворень систему треба привести до трикутного вигляду, коли усі елементи головної діагоналі основної матриці системи дорівнюють 1, а елементи основної матриці, що знаходяться нижче її головної діагоналі, дорівнюють нулю. Такий вигляд системи дозволяє знайти усі невідомі. Метод Ґаусса можна застосувати і до систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що мають єдиний розв'язок.

Приклад: Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку поміняємо місцями перше та друге рівняння, щоб елемент $\boldsymbol{a_{11}}$ основної матриці дорівнював 1.

Одержимо:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ 2x - 4y + 3z = 1 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$

Тепер перше рівняння помножимо на (-2) і додамо до другого (щоб одержати $\boldsymbol{a_{21}} = 0$), а потім помножимо перше рівняння на (-3) і додамо до третього рівняння (щоб одержати $\boldsymbol{a_{31}} = 0$). Тоді будемо мати систему

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ \qquad\quad -5z = -5 \\ \quad 5y - 7z = -7 \end{cases}$$

Тепер друге рівняння поділимо на (-5), третє рівняння поділимо на 5 і поміняємо їх місцями. Одержимо систему трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ y-\dfrac{7}{5}z=-\dfrac{7}{5} \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-4\cdot 1+2y \\ y=\dfrac{7}{5}\cdot 1-\dfrac{7}{5} \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

Отже, система має єдиний розв'язок (-1,0,1).

Зауваження. Елементарні перетворення доцільно виконувати не з усією системою, а з її розширеною матрицею. Розв'язування прикладу 1 у такий спосіб виглядає так:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -\dfrac{7}{5} & -\dfrac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Приклад: Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4=2 \\ 4x_1 \quad +4x_3-3x_4=3 \\ 2x_2-3x_3+x_4=1 \end{cases}$$

Розв'язання. Задана система 3 рівнянь з 4 невідомими. Виконаємо елементарні перетворення з розширеною матрицею.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Звідси випливає, що основна та розширена матриці мають рівні ранги: **r(A) = r($\tilde{\mathbf{A}}$) = 2** . Знайдемо мінор другого порядку, який не дорівнює нулю. Наприклад: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

Мінор, який не дорівнює нулю, та має порядок, рівний рангу

r = r(A) = r($\tilde{A}$), називають базисним мінором, тому обраний нами мінор – базисний .

Невідомі x_1 та x_2, для яких елементи базисного мінора є коефіцієнтами, називають базисними невідомими. Інші невідомі системи x_3 та x_4 - вільні. Останній вигляд розширеної матриці відповідає такій системі

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4=2 \\ -2x_2+3x_3-x_4=-1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2x_1+x_2=x_3+x_4+2 \\ 2x_2=3x_3-x_4+1 \end{cases}$$

Вільні невідомі перенесли у праву частину системи. Ми одержали базисні змінні x_1 та x_2 як функції x_3 та x_4

$$\begin{cases} 2x_1=x_3+x_4+2-x_2 \\ x_2=\dfrac{3}{2}x_3-\dfrac{1}{2}x_4+\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{4}x_3+\dfrac{3}{4}x_4+\dfrac{3}{4} \\ x_2=\dfrac{3}{2}x_3-\dfrac{1}{2}x_4+\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Вільним невідомим x_3 та x_4 можна надавати будь-які значення: $x_3=C_1$, $x_4=C_2$, де C_1 та C_2 - довільні сталі. Отже, одержуємо нескінченну кількість розв'язків системи вигляду:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{c_1}{4}+\frac{3c_2}{4}+\frac{3}{4}\\ \frac{3c_1}{2}-\frac{c_2}{2}+\frac{1}{2}\\ c_1\\ c_2\end{pmatrix}.$$

Застосування знань та вмінь з теми в економіці

Приклад 1: Побудувати на площині множину розв'язків (багатокутник) системи лінійних обмежень-нерівностей й геометрично знайти найбільше та найменше значення лінійної функції в цьому багатокутнику ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$).

$$Z = 3x_1 + 7x_2 + 30$$

$$\begin{cases}10x_1 + 9x_2 \leq 90\\ -x_1 + 2x_2 \leq 6\\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30\end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$$

Розв'язання

Зобразимо графічно допустимий планів задачі. Замінимо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і побудуємо графіки відповідних прямих (рисунок 2.1).

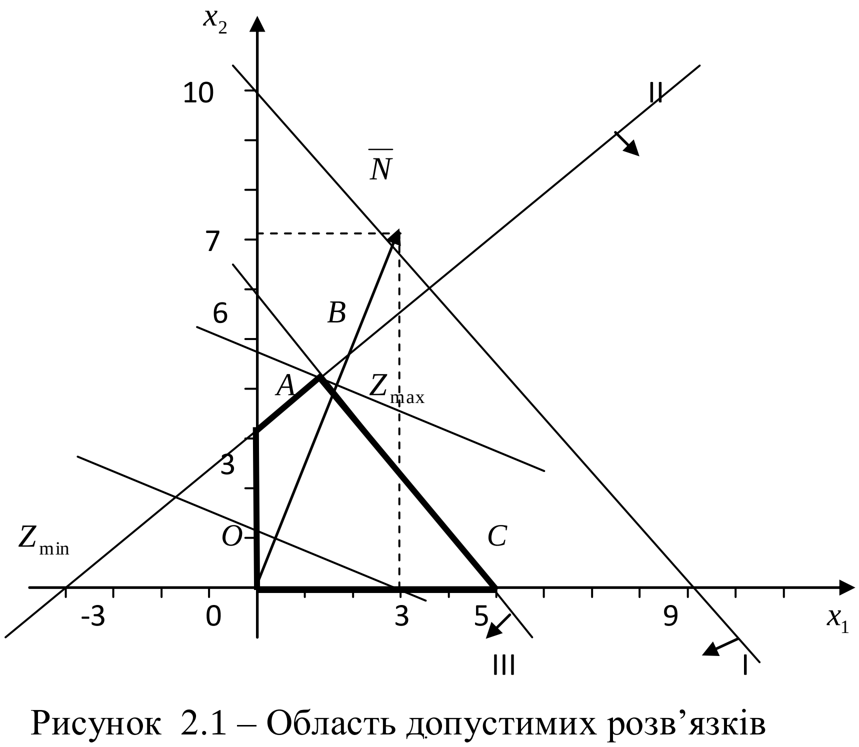


Рисунок 2.1 – Область допустимих розв'язків

Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї з півплощин задовольняють розглядувану нерівність, а іншої — ні. Щоб визначити необхідну півплощину потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності (на рисунку 2.1 відповідна півплощина позначена стрілочкою).

Умова невід'ємності змінних $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат.

Переріз усіх півплощин, де виконуються відповідні нерівності визначає область допустимих планів задачі. У нашому прикладі це чотирикутник *OABC*.

Знайдемо найбільше та найменше значення цільової функції.

Для цього побудуємо вектор $\vec{N} = (c_1;\ c_2)$, координатами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\vec{N}$ завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами ($x_1 = c_1$; $x_2 = c_2$). У нашій задачі вектор $\vec{N} = (3;\ 7)$. Він задає напрям збільшення значень цільової функції *Z*.

Побудуємо лінію рівнів. Нехай *Z*=0. Це буде пряма $3x_1 + 7x_2 + 30 = 0$ (лінія рівнів), яка перпендикулярна до вектора $\vec{N}$ і проходить через початок координат. Оскільки в даному прикладі необхідно визначити найбільше значення цільової функції, то пересуватимемо лінію рівнів паралельно самій собі за напрямом вектора $\vec{N}$ доти, доки не визначимо вершину багатокутника, яка відповідає максимальному плану задачі (остання точка області допустимих розв'язків, якої торкнеться лінія рівнів).

Із рисунку 2.1 видно, що останньою спільною точкою прямої цільової функції та багатокутника *OABC* є точка В. Для того, щоб знайти координати точки знайдемо перетином яких прямих є ця пряма. На рисунку 2.1 кожна пряма пронумерована відповідно до її розміщення у системи обмежень. Тобто точка В є точкою перетину II та III прямих.

Тоді координати точки *B* є розв'язком системи рівнянь. Запишемо рівняння другої та третьої прямих під знаком системи та знайдемо її розв'язок:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 6; \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases}$$

Звідси $x_1 = 1\dfrac{13}{17}$, $x_2 = 3\dfrac{15}{17}$.

Підставимо отримані координати у цільову функцію та знайдемо максимальне її значення: $Z_{\max} = 3 \cdot \dfrac{30}{17} + 7 \cdot \dfrac{66}{17} + 30 = 62\dfrac{8}{17}$.

Аналогічно знайдемо точку мінімуму. Пересуватимемо пряму $3x_1 + 7x_2 + 30 = 0$ паралельно самій собі проти напряму вектора $\vec{N}$ доти, доки не визначимо вершину багатокутника, яка відповідає мінімальному плану задачі (остання точка області допустимих розв'язків, якої торкнеться лінія рівнів).

З рисунку 2.8 видно, що це точка О. Її координати x_1 = 0; x_2 = 0. Тоді $Z_{\min} = 3 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 30 = 30$.

Метод Жордана-Гаусса

При дослідженні економічних об'єктів виникає потреба в розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь з багатьма невідомими. Більш зручним для цього є модифікований метод Жордана-Гаусса. Він полягає в **повному виключенні невідомих**. Дамо коротку схему цього методу. За перше рівняння візьмемо таке рівняння, в якому коефіцієнт (його назвемо **ключовим елементом**) біля x_1 відмінний від нуля і розділимо на нього все рівняння. З допомогою цього рівняння виключимо невідоме x_1 в усіх рівняннях, крім першого. Аналогічно невідоме x_2 виключимо в усіх рівняннях, крім другого і т.д. При цьому можливі три випадки:

1. Ліва частина ***i*** -го рівняння системи перетворилась в нуль, а права частина рівна деякому числу, відмінному від нуля. Це значить, що система лінійних рівнянь немає розв'язків.
2. Ліва і права частини ***i*** -го рівняння системи перетворились в нуль. В цьому випадку ***i*** -те рівняння можна відкинути.
3. У випадку використання всіх рівнянь, в процесі виключеня невідомих, одержуємо розв'язок даної системи.

Зауваження. Якщо в першому рівнянні вихідної системи коефіцієнт біля x_1 рівний нулю, то можна взяти інше рівняння, в якому за ключовий елемент візьмемо відмінний від нуля коефіцієнт при x_1.

Приклад 1: Розв'язати методом Жордана-Гаусса систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Розв'язання.

За ключовий елемент виберемо коефіцієнт "1" біля x_1 в першому рівнянні.

Виключимо невідому x_1 в другому і третьому рівняннях. Для цього додамо до другого рівняння перше, помножене на "-3", а до третього – перше, помножене на "-1".

Тобто перший крок є такий самий, як в методі Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_2 - 7x_3 = -9, \\ 2x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

У другому рівнянні виберемо за ключовий елемент відмінний від нуля коефіцієнт 4 при x_2. Поділимо обидві частини другого рівняння на 4:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_2 - \frac{7}{4}x_3 = -\frac{9}{4}, \\ 2x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Виключимо невідому x_2 в третьому рівнянні. Для цього додамо до третього рівняння друге, помножене на “-2”:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_2 - \frac{7}{4}x_3 = -\frac{9}{4}, \\ 1,5x_3 = 7,5 \end{cases}$$

З третього рівняння системи знайдемо x_3=5. Далі з другого: $x_2 = 6,5$, з третього: $x_1 = 0,5$.

Зручно користуватись методом Жордана-Гаусса в матричній формі. Перехід від однієї матриці-таблиці до іншої за методом Жордана-Гаусса називається **симплексним перетворенням** матриць-таблиць.

Приклад: Для виготовлення виробів А, В, С підприємство використовує 3 види сировини. Норми витрат сировини на виробництво кожного виду продукції, ціна одного виробу та загальна кількість сировини подані у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані

Вид сировини	**Норми витрат сировини на 1 виріб**			**Кількість сировини**
	Виріб А	**Виріб В**	**Виріб С**	
Сировина I	*1*	*5*	*4*	*315*
Сировина II	*1*	*2*	*1*	*90*
Сировина III	*5*	*3*	*4*	*168*
Ціна 1 виробу	*3*	*5*	*8*	-

Скласти план виробництва виробів, при якому загальна вартість всієї виготовленої продукції буде максимальною.

Розв’язання. Загальна виручка: $3x_1 + 5x_2 + 8x_3 \to \max$

Обмеження:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 315, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 90, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 168, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 315, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 90, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_6 = 168, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Запишемо рівняння у векторній формі:

$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 + P_5x_5 + P_6x_6 = P_{0,}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_0 = \begin{pmatrix} 315 \\ 90 \\ 168 \end{pmatrix}$$

Складаємо першу симплекс-таблицю (таблиця 2.2):

Таблиця 2.2– Перша симплекс-таблиця

i	**Базис**	$C_{баз}$	**План**	**3**	**5**	**8**	**0**	**0**	**0**	θ
				$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	
1	$\mathbf{x_4}$	*0*	*315*	*1*	*5*	*4*	*1*	*0*	*0*	*78,75*
2	$\mathbf{x_5}$	*0*	*90*	*1*	*2*	*1*	*0*	*1*	*0*	*90*
3	$\mathbf{x_6}$	*0*	*168*	*5*	*3*	*4*	*0*	*0*	*1*	*42*
Δ	-	-	*0*	*-3*	*-5*	*-8*	*0*	*0*	*0*	

Елементи останнього рядка симплекс-таблиці є оцінками Δ_j, за допомогою яких опорний план перевіряють на оптимальність. Їх визначають так:
$Z_1 - c_1 = (0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 5) - 3 = -3$; $Z_2 - c_2 = (0\cdot 5 + 0\cdot 2 + 0\cdot 3) - 5 = -5$ і т.д.

У стовпчику «План» рядка Δ_j записуємо значення, яких набувають рівності системи обмежень (у канонічному вигляді) при умові, що вільні змінні дорівнюють нулю.

Після заповнення першої симплекс-таблиці опорний план перевіряємо на оптимальність. Для цього застосовують теорему оптимальності. Тобто перевіряють чи задовольняють елементи рядка Δ_j відповідну умову. А саме, для задачі на максимум всі $\Delta_j \ge 0$ (для задачі на мінімум $\Delta_j \le 0$).

Якщо ж в оцінковому рядку є хоча б одна оцінка, що не задовольняє умову оптимальності (від'ємна в задачі на max або додатна в задачі на min), то опорний план є неоптимальним. Отже, треба перейти до наступного оптимального плану задачі. Для цього визначимо, яку змінну будемо виводити з базису, а яку вводити.

У оцінковому рядку Δ_j є три від'ємні оцінки $\Delta_1 = -3$, $\Delta_2 = -5$ та $\Delta_3 = -8$. Серед цих чисел виберемо найбільше за абсолютною величиною: $\Delta_3 = -8$.
Тобто, в базис будемо вводити змінну, яка відповідає цьому стовпчику: x_3. Стовпчик із змінною x_3 є розв'язувальний.

Визначимо змінну, яку виводитимемо з базису. Обчислимо співвідношення θ елементів стовпчика «План» до відповідних елементів розв'язувального стовпчика:

$\theta_1 = \frac{315}{4} = 78{,}75$, $\theta_2 = \frac{90}{1} = 90$, $\theta_3 = \frac{168}{4} = 42$.

Виберемо найменше значення θ, яке вказує на змінну, що виводиться з базису. Тобто, рядок із змінною x_6 є напрямним.

На перетині розв'язувального стовпчика та напрямного рядка розміщений розв'язуваний елемент: 4.

Заповнюємо нову симплекс-таблицю 2.3.

Таблиця 2.3 – Друга симплекс-таблиця

i	**Базис**	$C_{баз}$	**План**	**30**	**20**	**50**	**0**	**0**	**0**
				$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$
1	$\mathbf{x_4}$	*0*	*147*	*-4*	*2*	*0*	*1*	*0*	
2	$\mathbf{x_5}$	*0*	*48*	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	*0*	*0*	*1*	$-\frac{1}{4}$
3	$\mathbf{x_3}$	*42*	*42*	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	*1*	*0*	*0*	$\frac{1}{4}$
Δ	-		*336*	*7*	*1*	*0*	*0*	*0*	*2*

Спершу у нову симплекс-таблицю заносять елементи напрямного стовпчика поділені на розв'язувальний елемент. Під розв'язувальним елементом (якщо є порожні клітинки, то і над) записують нулі.

Решту елементів таблиці розраховують за правилом прямокутника:

$$a_{21} = \frac{a_{13} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{23}}{a_{13}} = \frac{1 \cdot 4 - 4 \cdot 5}{4} = -4;$$

$$a_{22} = \frac{1 \cdot 4 - 1 \cdot 5}{4} = -\frac{1}{4} \text{ і т.д.}$$

Аналогічно розраховуємо дані зі стовпчика «План»: $\frac{315 \cdot 4 - 168 \cdot 4}{4} = 147$, $\frac{90 \cdot 4 - 168 \cdot 1}{4} = 48$.

Елементи оцінкового рядку Δ_j обчислимо за формулою:

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \quad .$$

$$\Delta_1 = 0 \cdot 147 + 0 \cdot 48 + 8 \cdot 42 = 336$$

$$\Delta_2 = (0 \cdot (-4) + 0 \cdot (-\frac{1}{4}) + 8 \cdot \frac{5}{4}) - 3 = 7 \text{ і т.д.}$$

Після заповнення другої симплекс-таблиці опорний план перевіряємо отриманий план на оптимальність.

У оцінковому рядку для задачі на максимум всі числа повинні бути $\Delta_j \geq 0$. Усі числа задовольняють цю умову. Отже, отриманий план є оптимальним.

Таким чином, ми отримали розв'язок задачі: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 42$, $Z_{\max} = 336$.

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Вектором називається напрямлений відрізок.

Позначаються вектори $\vec{a},\vec{b}$, ...

Якщо точка A — початок вектора, а точка B — його кінець, то маємо вектор $\overrightarrow{AB}$.

Вектор, в якого початок і кінець збігаються, називається ***нульовим вектором.***

Вектор **вважається заданим**, коли відома його довжина $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ і напрям щодо деякої осі.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих та якщо їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$$

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вважаються ***рівними***, коли вони: 1) колінеарні; 2) однаково напрямлені; 3) їхні довжини рівні.

З останнього випливає, що при паралельному перенесенні вектора дістаємо новий вектор, що дорівнює попередньому, тому вектори в аналітичній геометрії називають **вільними**.

Нульовим вектором називається вектор $\overline{0}=(0;...;0)$.

Добутком вектора $\overline{a}=(a_1,...,a_n)$ на число k називається вектор $k\overline{a}=(ka_1,...,ka_n)$.

Сумою векторів $\overline{a}=(a_1,...,a_n)$ та $\overline{b}=(b_1,...,b_n)$ називається вектор $\overline{a}+\overline{b}=(a_1+b_1,...,a_n+b_n)$. Графічно суму векторів можна ппердставити (рисунок 3.1)

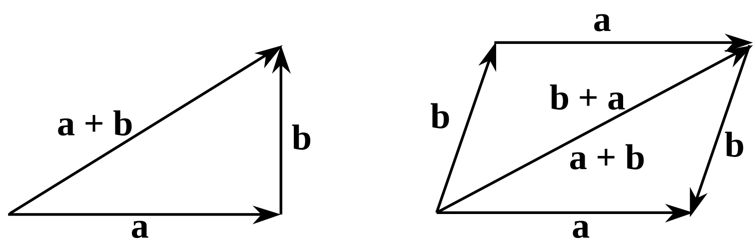


Рисунок 3.1 – Сума векторів

Додавання векторів комутативне, тобто для довільних векторів **a** і **b** справджується рівність

a + b = b + a.

Додавання векторів асоціативне, тобто для будь-яких векторів **a**, **b**, **c** виконується рівність

(a + b) + c = a + (b + c).

Цю властивість, що випливає з означення суми векторів, можна унаочнити (рисунок 3.2)

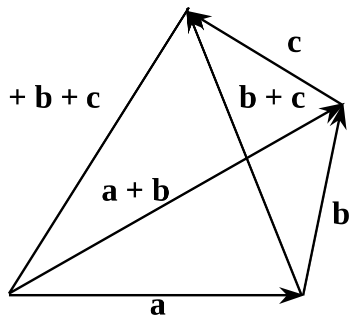


Рисунок 3.2 – Сума векторів

Віднімання векторів — операція, обернена до їх додавання. Різниця **b – a** векторів **a** і **b** являє собою вектор, початок якого збігається з початком вектора **a**, а кінець — із кінцем вектора **b** (рисунок 3.3).

a + (b – a) = b

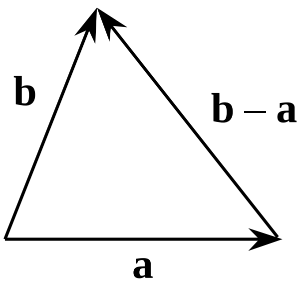


Рисунок 3.3 – Різниця векторів

Для будь-яких векторів **a**, **b** виконуються нерівності:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|,\ |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Модулем (довжиною) вектора $\overline{a}=(a_1,...,a_n)$ називається число $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+...+a_n^2}$.

Якщо позначити α, β, γ — кути між вектором $\vec{a}$ і відповідними осями системи координат, то їх **косинуси** можна знайти за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

У подальшому називатимемо їх ***напрямними косинусами*** *вектора* $\vec{a}$. Піднісши кожну з формул до квадрата, дістанемо:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Приклад: Розглянемо вектор **a** у площині *xy*, який утворює кут 60° з віссю *x* і кут 30° з віссю *y*. Знайдемо напрямні косинуси вектора **a**:

$$\cos\alpha=\cos 60°=\frac{1}{2},\ \cos\beta=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\gamma=\cos 90°=0.$$

Кут φ між векторами $\overline{a}=(a_1,...,a_n)$ та $\overline{b}=(b_1,...,b_n)$ задається формулою $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi$.

Кут між двома векторами $\overline{a_1}(x_1;y_1;z_1)$ та $\overline{a_2}(x_2;y_2;z_2)$ обчислюється за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}}{|\overline{a_1}|\cdot|\overline{a_2}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Приклад: Дано просторовий трикутник з вершинами $A(1, 2, -1)$, $B(2, 4, 1)$, $C(3, 0, 0)$. Знайдемо кут при вершині A.

Розглянемо вектори $\mathbf{a}=\mathbf{AB}=\{1, 2, 2\}$, $\mathbf{b}=\mathbf{AC}=\{2, -2, 1\}$.

Визначимо косинус шуканого кута:

$$\cos A=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|a|\cdot|b|}=\frac{1\cdot 2+2\cdot(-2)+2\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{0}{3\cdot 3}=0 .$$

Оскільки скалярний добуток векторів **a**, **b** дорівнює нулю, то кут при вершині A прямий.

Вектори називаються **ортогональними**, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю. Це виконується за умови $\cos\varphi=0$, тобто при $\varphi=90^0$.

Розглянемо прямокутну систему координат на площині та вектори $\bar{i}=(1;0)$ і $\bar{j}=(0;1)$ на цій площині (рисунок 3.4). Ці вектори (вони ортогональні і їхня довжина дорівнює одиниці) називають ***ортами***.

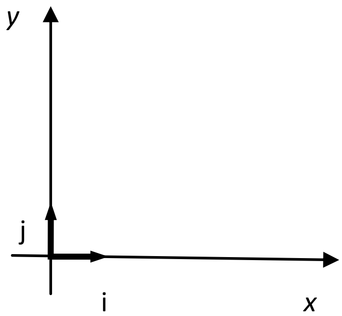


Рисунок 3.4 – Ортогональні вектори у прямокутній декартовій системи координат

Розглянемо також просторову систему координат з ортами $\bar{i}=(1;0;0)$, $\bar{j}=(0;1;0)$ та $\bar{k}=(0;0;1)$ (рисунок 3.5).

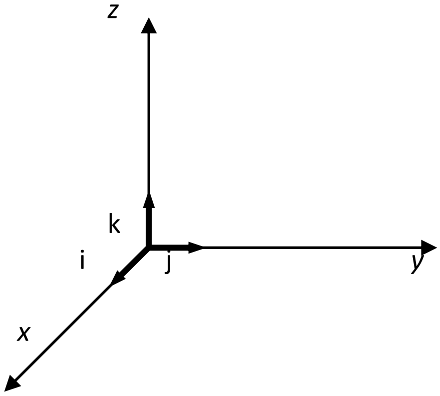


Рисунок 3.5 – Ортогональні вектори у просторі

Нехай вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ такі, що за напрямом збігаються відповідно з осями Ox, Oy, Oz і $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$. Такі вектори надалі називатимемо **одиничними** векторами осей системи координат.

Кожен вектор в n-вимірному просторі єдиним способом розкладається по координатних осях.

Зокрема, в тривимірному просторі

$\overline{a} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}$,

а в двовимірному

$\overline{a} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j}$.

Для лінійних операцій з векторами виконуються властивості:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
3. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.
4. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.
5. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

Скалярним добутком векторів $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ та $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ називається *число:*

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + \ldots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \ .$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi,$$

де φ — кут між векторами

Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *є* $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

Скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проекцію другого вектора на напрям першого.

$$np_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |b|\cos\varphi, \quad np_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = |a|\cos\varphi;$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |a|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |b|\,\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}.$$

де $np_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ — проекція вектора b на вісь, паралельну вектору a.

***Властивості скалярного добутку*:**

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.
4. $(\vec{a} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}|^2; \sqrt{(\vec{a})^2} = |\vec{a}|$.
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$ якщо $\vec{a} \perp \vec{b},$ і навпаки, $\vec{a} \perp \vec{b},$ якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,\ \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$.

Векторним добутком векторів $\overline{a_1}(x_1; y_1; z_1)$ та $\overline{a_2}(x_2; y_2; z_2)$ називається вектор

$$\overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Векторний добуток задовольняє, зокрема, таку властивість:

$|\overline{c}| = |\overline{a_1}| \cdot |\overline{a_2}| \cdot \sin\varphi$, де φ - кут між векторами $\overline{a_1}$ та $\overline{a_2}$.

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{b}\neq 0$ — колінеарні вектори.
2. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.
3. $(\lambda\vec{a}\times\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.
4. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Приклад: Обчислити площу трикутника *ABC*, де *A*(1;0;2), *B*(1;2;0), *C*(0;1;2).

Знаходимо вектори $\overline{AB}$=(0;2;-2) та $\overline{AC}$=(-1;1;0). Оскільки площа трикутника *ABC* дорівнює $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|\sin\varphi=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right|$, то спочатку обчислюємо векторний добуток

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}0 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}=(2;2;2)$$

Знаходимо модуль цього векторного добутку:

$$\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{12}$$

Отже, шукана площа $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{12}=\sqrt{3}$

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\left(\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}\vec{k}\right)=a_x\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix},$$

або

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Модуль мішаного добутку трьох неколінеарних векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах як на сторонах:

$$V=|\vec{a}|\cos\alpha\cdot|\vec{b}||\vec{c}|\sin\varphi=|\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\alpha=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|.$$

Властивості мішаного добутку:

1. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=-\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$.

Приклад: Знайдемо об'єм *V* тетраедра з вершинами *A*(1, 2, 3), *B*(4, 4, 4), *C*(2, 6, 4), *D*(2, 3, 6).

Розглянемо вектори

$$\mathbf{a}=\mathbf{AB}=\{3,2,1\},\ \mathbf{b}=\mathbf{AC}=\{1,4,1\},\ \mathbf{c}=\mathbf{AD}=\{1,1,3\}$$

і запишемо їх мішаний добуток:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=26.$$

Шуканий об’єм тетраедра $ABCD$ становить $\frac{1}{6}$ від об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах **a**, **b**, **c**. Отже,

$$V = \frac{1}{6}|(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})| = \frac{26}{6}.$$

Нехай у просторі задано деяку вісь l і вектор $\vec{AB}$. Проведемо через точки A і B площини, перпендикулярно до осі l (рисунок 3.6). Позначимо точки перетину цих площин з віссю l відповідно A' і B'.

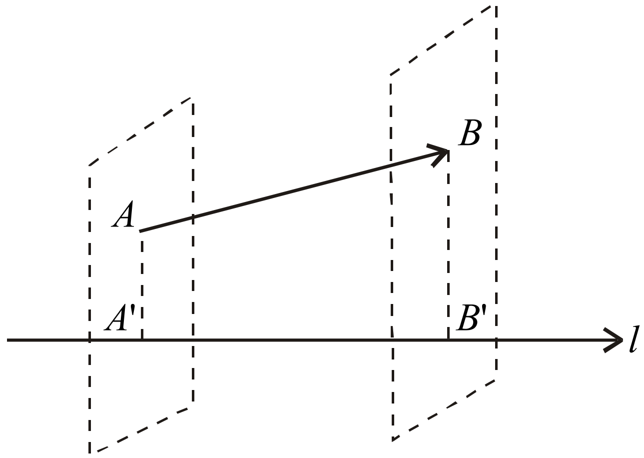


Рисунок 3.6 – Проекція

Проекцією вектора $\vec{AB}$ *на вісь* l називається довжина $A'B'$ напрямленого відрізка $\vec{A'B'}$ на осі l. Слід зазначити, що $A'B' = |\vec{A'B'}|$, якщо напрям $\vec{A'B'}$ збігається з напрямом l, то $A'B' = -|\vec{A'B'}|$, якщо напрям $\vec{A'B'}$ протилежний напряму l.

Позначається проекція вектора $\vec{AB}$ на вісь l — $np_l\vec{AB}$. З рисунку 3.6 випливає формула знаходження проекції вектора на вісь:

$$np_l\vec{AB} = |\vec{AB}|\cos\varphi,$$

де φ — кут між вектором і віссю.

Якщо розглянути прямокутну декартову систему координат і точки початку A $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ і кінця B $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ вектора $\vec{AB}$, то проекції вектора $\vec{AB}$ на кожну з осей мають вигляд:

$$Ox:\ a_x = x_2 - x_1,\quad Oy:\ a_y = y_2 - y_1,\quad Oz:\ a_z = z_2 - z_1.$$

Проекція суми двох векторів на вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь:

$$np_l(\vec{a} + \vec{b}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}.$$

При множенні вектора на число його проекція на цю вісь також множиться на це число:

$$np_l(\alpha\vec{a}) = \alpha np_l\vec{a}.$$

Лінійна залежність і незалежність векторів
Розкладання вектора за базисом

Нехай $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ вектори з n-вимірного векторного простору, а $k_1, k_2, ..., k_n$ - деякі дійсні числа.

Вектор $\overline{b} = k_1\overline{a_1} + k_2\overline{a_2} + ... + k_n\overline{a_n}$ називається ***лінійною комбінацією векторів*** $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$.

Вектори $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ називаються ***лінійно залежними***, якщо існують такі дійсні числа $k_1, k_2, ..., k_n$, одночасно не рівні нулю, такі що

$k_1\overline{a_1} + k_2\overline{a_2} + ... + k_n\overline{a_n} = 0$

Якщо рівність $k_1\overline{a_1} + k_2\overline{a_2} + ... + k_n\overline{a_n} = 0$ справджуються тільки тоді, коли $k_1 = k_2 = ... = k_n$, то вектори $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ називаються ***лінійно незалежними.***

Для перевірки векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ на *лінійну незалежність* потрібно скласти із координат векторів визначник, який не повинен дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Теорема 1. Вектори $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них є лінійною комбінацією інших.

Вимірність простору - це максимальна кількість лінійно незалежних векторів, що містяться у ньому. Будь-яку сукупність n лінійно незалежних векторів n-вимірного лінійного простору V^n називають його базисом.

Теорема 2. Будь-який вектор $\overline{x}$ з V^n єдиним способом може бути зображений у вигляді лінійної комбінації векторів ***базису.***

Якщо $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ - базис лінійного простору vя, то

$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_1\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}$ ***- розклад вектора*** $\overline{x}$ ***за базисом*** $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$,

$x_1, x_2, ..., x_n$ - координати вектора x у цьому базисі.

Алгоритм розкладу вектора $\overline{x}$ за базисом $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$

1. Записати рівність $\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_1\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}$ у формі матричного рівняння, де вектори $\overline{x}, \overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ записати у вигляді мат риць-стовпців.
2. Від матричного рівняння перейти до системи лінійних алгебраїчних рівнянь та розв'язати одержану систему.
3. Записати розклад вектора $\overline{x}$ за базисом $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$. Для цього в рівність $\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_1\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}$ замість $x_1, x_2, ..., x_n$ підставити розв'язки системи.

Приклад: Написати розклад вектора $\overline{x} = \ 2;5;0\ $ у базисі

$\overline{e_1} = \ 1;2;-1\ , \overline{e_2} = \ 3;6;1\ \overline{e_3} = \ 3;9;3\ $.

Розв'язання. Використаємо формулу розкладу вектора за базисом

$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_1\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}$

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

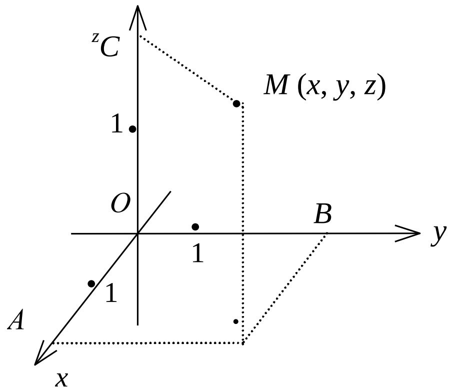
Розв'язком цієї системи є $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 \frac{1}{3}$.

Так, $\bar{x} = \bar{e}_1 + \frac{1}{3}\bar{e}_3$ - розклад вектора $\bar{x}$ в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Системи координат

Числовою віссю називають пряму, на якій визначено напрям, початок відліку та одиничний відрізок

Три взаємно перпендикулярні осі *Ox, Oy, Oz*, які мають спільний початок точку *O* і однакову масштабну одиницю, утворюють прямокутну декартову систему координат у просторі (рисунок 3.7). Якщо таких осей дві: *Ox* і *Oy*, то маємо систему координат на площині (рисунок 3.8).



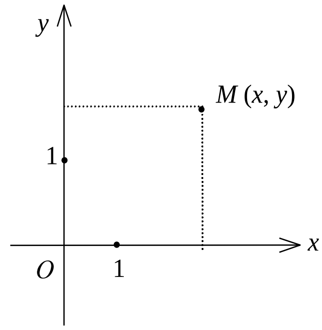


Рисунок 3.7 – Координати у просторі Рисунок 3.8 – Координати у xOy

Осі *Ox, Oy, Oz* називаються відповідно *осями абсцис, ординат і аплікат*, точка *O* — *початок системи координат*. Нехай *M* — довільна точка в просторі або на площині. Декартовими координатами *x, y, z* точки *M* називатимемо відповідно довжини *OA, OB, OC* напрямлених відрізків $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

Таким чином, кожній точці простору відповідає впорядкована трійка чисел (*x, y, z*), а на площині — впорядкована пара чисел (*x, y*), тобто встановлюється відповідність між геометричним образом — точкою і впорядкованою множиною чисел. Ця відповідність дає можливість використовувати рівняння для відображення геометричних образів, таких як лінія, площина тощо, та застосовувати алгебраїчні методи для розв’язування геометричних задач.

Полярна система координат складається з деякої точки площини *O*, яка називається *полюсом*, променя *OA,* що виходить з цієї точки і називається *полярною віссю* (рисунок 3.9). Крім того, задається одиниця масштабу для вимірювання довжин відрізків.

Полярними координатами точки М називаються числа ρ — відстань від полюса *O* до точки *M* і φ — кут, на який треба по-вернути полярну вісь *OA* до її збігу з *OM,* проти годинникової стрілки (рисунок 3.10).

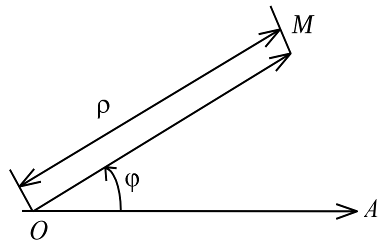


Рисунок 3.9 – Полярна система координат

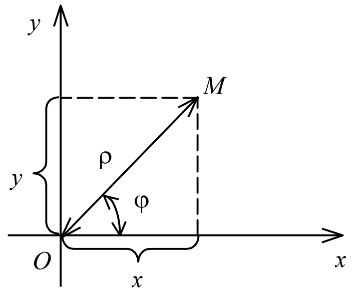


Рисунок 3.10 – Полярна система координат

Полярний радіус ρ може змінюватись у межах $0 \le \rho < \infty$, полярний кут, як правило, змінюється в межах $0 \le \varphi < 2\pi$.

Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки (рисунок 3.10) встановлюють формули:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Приклад: Знайти полярні координати точки *M* (2, 2).

З формули (2.1) маємо $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, tgφ = 1. Згідно з останньою рівністю $\varphi = \frac{\pi}{4}$, або $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, але $y = 2 > 0$ і $x = 2 > 0$, маємо $\varphi = \frac{\pi}{4}$. У полярних координатах точка $M\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Розглянемо такі перетворення систем координат:

1) паралельний зсув осей, коли змінюється положення початку системи координат, а напрям осей залишається таким самим (рисунок 3.11);

2) поворот осей, коли обидві осі повертаються на деякий кут відносно початку системи координат (рисунок 3.12).

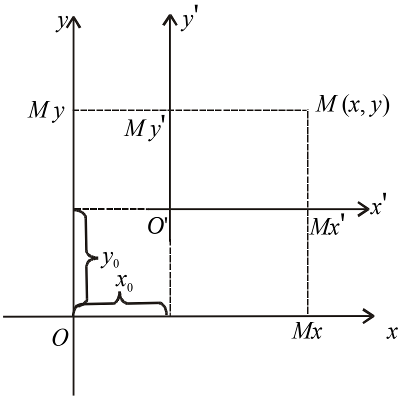


Рисунок 3.11 – Паралельний зсув осей

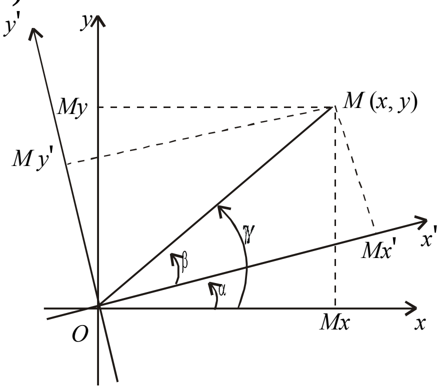


Рисунок 3.12 – Поворот осей

1. Нехай точка M у старій системі координат Oxy має координати (x, y), а в новій системі координат $O'x'y'$ — (x', y'). Знайдемо зв'язок між ними. З рисунку 3.11 бачимо, що

$$x = x' + x_0,\ y = y' + y_0,$$

де (x_0, y_0) — декартові координати початку нової системи координат (точка O') у старій системі координат. Розв'язуючи рівняння відносно x' і y', маємо $x' = x - x_0,\ y' = y - y_0$.

2. Повернемо тепер стару систему координат Oxy відносно точки O на кут α і дістанемо нову систему $Ox'y'$ (рисунок 3.12).

Розглянемо також дві полярні системи координат з полюсом у точці O і полярними осями Ox і Ox'. Тоді маємо

$$x = \rho\cos\gamma,\ y = \rho\sin\gamma,\ x' = \rho\cos\beta,\ y' = \rho\sin\beta.$$

Крім того, $\gamma = \alpha + \beta$, підставляючи це значення γ у формули, остаточно будемо мати:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Розв'язуючи рівності відносно x', y', дістаємо:

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Здобуті формули відбивають зв'язок між старими (x, y) і новими (x', y') координатами точки.

Поняття рівняння лінії на площині

Нехай на площині задано пряму у прямокутній системі координат x, y. Кут φ між віссю Ox і цією прямою називається **кутом нахилу прямої** до осі. Тангенс кута нахилу $k = \operatorname{tg}\varphi$ називається **кутовим коефіцієнтом** розглядуваної прямої. Якщо ця пряма перетинає вісь Oy у точці B з координатами $(0, b)$, то число b називається **початковою ординатою**. Візьмемо довільну точку $M(x, y)$ на прямій (рисунок 3.13).

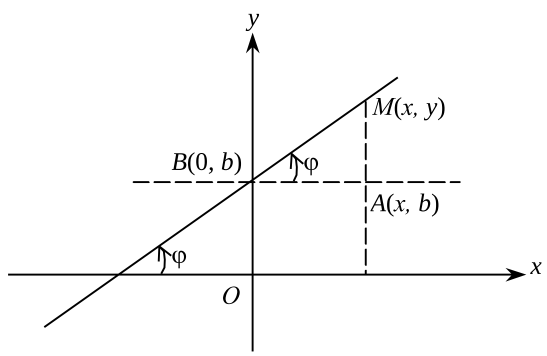


Рисунок 3.13 – Лінія на площині

Види рівнянь прямої на площині

Рівнянням лінії l на площині називається рівняння $F(x, y) = 0$ із змінними x та y, якому задовольняють координати довільної точки $M(x; y)$ цієї лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, що не належить лінії l.

Найпростішою лінією на площині є пряма.

1. **Загальним рівнянням прямої** на площині називається рівняння 1-го степеня відносно x та y вигляду $Ax+By+C=0$, де А, В, С - сталі коефіцієнти, причому А і В одночасно не дорівнюють нулю.

Вектор $\overline{n}\ A,B$ - це вектор, перпендикулярний до прямої $Ax+By+C=0$. Вектор, перпендикулярний до цієї прямої, називається нормальним вектором прямої (вектором нормалі прямої) (рисунок 3.14).

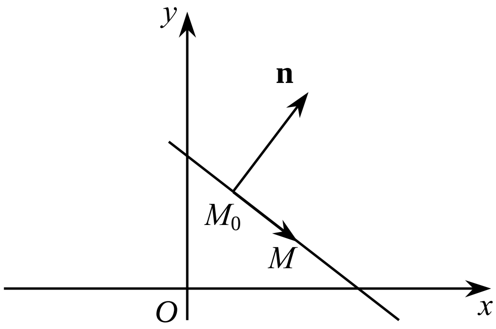


Рисунок 3.14 – Вектор нормалі

Часткові випадки загального рівняння прямої (таблиця 3.1)

Таблиця 3.1 – Часткові випадки рівняння $Ax+By+C=0$

Значення коефіцієнти	Рівняння прямої	Зауваження
$C=0$	$Ax+By=0$	Пряма проходить через початок координат
$A=0$	$By+C=0$	Пряма паралельна осі OX
$B=0$	$Ax+C=0$	Пряма паралельна осі OY
$A=C=0$	$y=0$	Вісь OX
$B=C=0$	$x=0$	Вісь OY

Приклад: Пряма, паралельна осі OX, проходить через точку (-2; 3). Скласти рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Оскільки пряма паралельна OX, то її рівняння: $By+C=0$.

Ордината точки дорівнює 3, тому $y=3$ або $y-3=0$ - шукане рівняння.

2. **Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом**:

$$y=kx+b,\ \text{де}\ k=tga$$

де α - кут нахилу прямої до додатного напряму осі OX,

b - відрізок, який відтинає пряма від осі OY.

Зауваження 1. Вертикальна пряма не має кутового коефієцієнта.

Зауваження 2. $y=kx$ - рівняння прямої, що проходить через початок координат.

$y=a\ \ a=const$ - рівняння прямої, паралельної осі OX,

$x=b\ \ b=const$ - рівняння прямої, паралельної осі OY

Зі зміною кутового коефіцієнта k в рівнянні утворюються різні прямі, що проходять через точку $M_1(x_1, y_1)$. Рівняння:

$y-y_1=k(x-x_1)$

називається **рівнянням пучка (в'язки) прямих** (рисунок 3.15).

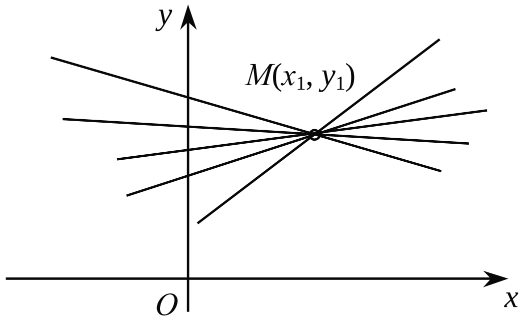


Рисунок 3.15 – Пучок прямих

Приклад: Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і утворює з додатнім напрямком осі OX кут 30°.

Розв'язання. Рівняння прямої, яка проходить через початок координат, має виг ляд: $y = kx; k = tg30°, k = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Отже, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ - шукане рівняння.

3. **Рівняння прямої, що проходить через дві точки** $M_1\ \ x_1, y_1$ та $M_2\ \ x_2, y_2$ має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, x_2 \neq x_1, y_2 \neq y_1$$

Приклад: Знайдемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(4, 1)$, $M_2(2, 3)$.

Розв'язання. За формулою маємо:

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-4}{2-4}, \quad y = -x+5, \quad \mathrm{tg}\varphi = -1, \quad \varphi = 135°.$$

Ця пряма утворює кут 135° з віссю Ox.

4. **Рівняння прямої, що проходить через точку** $M_0\ \ x_0, y_0$ **, перпендикулярно до заданого вектора** $\bar{n}\ \ A, B$

$$A\ \ x - x_0\ \ + B\ \ y - y_0\ \ = 0:$$

Приклад: Написати рівняння висоти AD трикутника, заданого точками $A\ \ -5;3\ \ , B\ \ 3;7\ \ , C\ \ 4;-1\ \ $.

Розв'язання. Пряма, що містить висоту AD, проходить через вершину $A\ \ -5;3$ і має нормальний вектор $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (1;-8)$.

Рівняння висоти AD матиме вигляд:

$$1 \cdot (x - (-5)) - 8 \cdot (y - 3) = 0, \text{ або } x - 8y + 29 = 0.$$

5. **Канонічне рівняння прямої** (рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0\ \ x_0, y_0$, паралельно до заданого вектора $\vec{s}\ \ l, m$)

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Будь-який ненульовий вектор, який паралельний до даної прямої, називається напрямним вектором цієї прямої.

6. **Параметричне рівняння прямої**:

$$x = x_0 + lt; y = y_0 + mt; t \in R$$

7. **Рівняння прямої у відрізках на осях координат**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

де $a;0$ і $0;b$ - точки перетину прямої з осями координат.

Приклад: Запишемо рівняння прямої

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

у вигляді рівняння прямої у відрізках на осях.

Розв’язання. Значенню $y_1 = 0$ відповідає $x_1 = 3$. При $x_2 = 0$ знаходимо $y_2 = 2$. Отже, шукане рівняння прямої подається у вигляді

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1.$$

Пряма перетинає вісь x у точці з координатою $x = 3$, а вісь y — у точці з координатою $y = 2$.

Кут між прямими

а) Якщо прямі задані рівнянням з кутовим коефіцієнтом $y_1 = k_1 x + b_1$ і $y_2 = k_2 x + b_2$, то кут між ними φ знаходиться за формулою

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2 + 1} \right|$$

б) Якщо прямі задані загальними рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то кут між ними φ знаходиться як кут між векторами нормалей до прямих $\overline{n_1}\ A_1, B_1\ , \overline{n_2}\ A_2, B_2$

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}:$$

в) Якщо прямі задані канонічними рівняннями, то кут між ними знаходиться як кут між напрямними векторами прямих.

Приклад: Знайти кут між прямими $3x - 4y + 2 = 0$ та $-6x + 8y + 1 = 0$.

Розв'язання. Оскільки прямі задані загальним рівнянням, то кут між ними φ знайдемо за формулою $\cos\varphi = \dfrac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

$$\cos\varphi = \frac{|3 \cdot (-6) - 4 \cdot 8|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}\sqrt{(-6)^2 + 8^2}} = \frac{50}{50} = 1, \varphi = \arccos 1 = 0$$

Отже, кут між заданими прямими дорівнює 0, тобто прямі паралельні.

Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

Прямі **паралельні**, якщо паралельні їх напрямні вектори, або вектори нормалей до прямих.

Прямі **перпендикулярні**, якщо перпендикулярні їх напрямні вектори, або вектори нормалей до прямих.

Нехай $\overline{s_1} = \ l_1, m_1$ та $\overline{s_2} = \ l_2, m_2$ - напрямні вектори заданих прямих, $\overline{n_1} = \ A_1, B_1\ , \overline{n_2} = \ A_2, B_2$ - вектори нормалей до кожної з прямих.

Умови паралельності двох прямих

1. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$
2. $k_1 = k_2$
3. $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$

Умови перпендикулярності двох прямих

1. $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
2. $k_1k_2 = -1$
3. $l_1l_2 + m_1m_2 = 0$

Приклад: У трикутнику з вершинами $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(2, 4)$ знайти кут α при вершині A, а також рівняння висоти CD і медіани BM (рисунок 3.16).

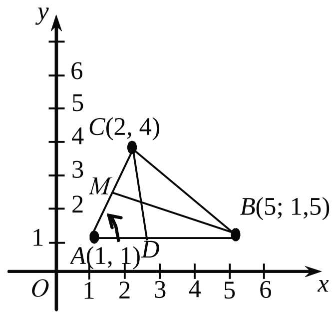


Рисунок 3.16 - Трикутник

Скориставшись формулою знаходження рівняння прямої, яка походить через дві точки, визначимо рівняння прямих AB та AC:

AC: $y = 3x - 2$

AB: $y = 0{,}125x + 0{,}875$

Знайдемо кут між прямими *AB, AC*:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} = \frac{3 - 0{,}125}{1 + 3 \cdot 0{,}125} = 2{,}(09), \quad \alpha = \mathrm{arctg}\, 2{,}(09).$$

Пряма CD перпендикулярна до прямої AB. Її кутовий коефіцієнт $k_3=-\dfrac{1}{k_1}=-8$, а відповідне рівняння

$$y=8x-12.$$

Точка M поділяє відрізок AC пополам. Отже,

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2},\ y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}.$$

Через точки $B(5;\ 1{,}5)$, $M\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$ проводимо пряму BM, дістаємо:

$$x+3{,}5y-0{,}25=0.$$

Відстань від точки до прямої

Відстань між точками $M_1(x_1,y_1)$ та $M_2(x_2,y_2)$ визначається за формулою

$$d=\left|M_1M_2\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Дано загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0$$

і точку $M_1(x_1,\ y_1)$. Знайдемо відстань d від точки M_1 до прямої. Візьмемо точку $M_0(x_0,\ y_0)$ на цій прямій.

Тоді відстань від точки M_1 до прямої дорівнює проекції вектора $\mathbf{M_0M_1}$ на вектор нормалі $\mathbf{n}=(A,B)$ (рисунок 3.17).

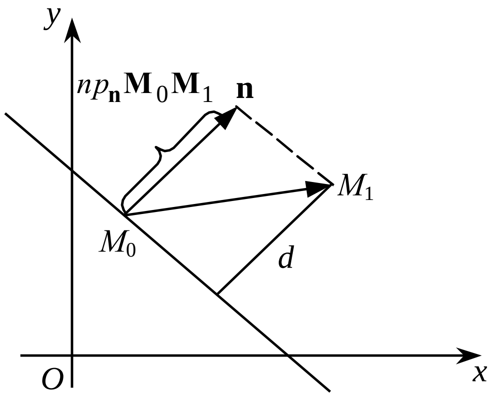


Рисунок 3.17 – Відстань від точки до прямої

Записуємо аналітичний вираз для шуканої відстані:

$$d=\left|np_{\mathbf{n}}\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1\right|=\frac{\left|\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1\right|}{|\mathbf{n}|}=\frac{\left|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Приклад: Знайти відстань від точки $M(2,-3)$ до прямої $3x-4y+2=0$.

Розв'язання. Використаємо формулу

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}},d=\frac{\left|3\cdot2-4\cdot(-3)+2\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4$$

Приклад: Обчислити відстань d від точки $M_1(5,\ 3)$ до прямої $3x + 4y + 3 = 0$.

Розв’язання. За формулою знаходимо

$$d = \frac{|3\cdot 5+4\cdot 3+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=6.$$

Нехай маємо загальні рівняння двох прямих, що перетинаються:

$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$

$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$

Якщо точка $M(x,\ y)$ лежить на бісектрисі кутів, утворених прямими, то вона однаково віддалена від цих прямих, тобто виконується рівність:

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Приклад: Знайти рівняння бісектриси AD трикутника з вершинами A(1, 1), B(6, 3), C(2, 5) (рисунок 3.18).

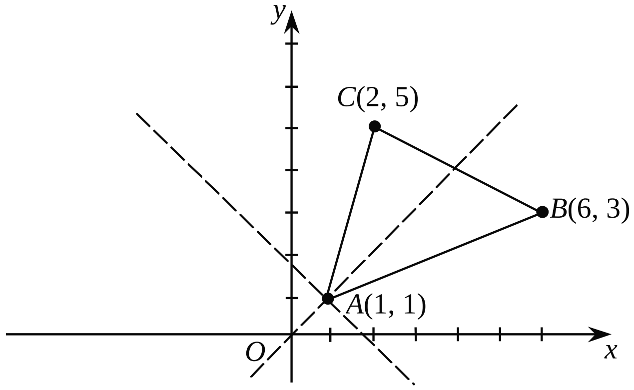


Рисунок 3.18 – Трикутник та бісектриса

Розв'язання. Згідно з формулою записуємо рівняння двох бісектрис:

$$\frac{2x-5y+3}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}=\pm\frac{4x-y-3}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}.$$

Звідси маємо:

$$\frac{2x-5y+3}{\sqrt{29}}-\frac{4x-y-3}{\sqrt{17}}=0,$$

Ділення відрізка у заданому відношенні.

Координати точки $M(x,y)$, що ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ (рисунок 3.19), знаходяться за формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

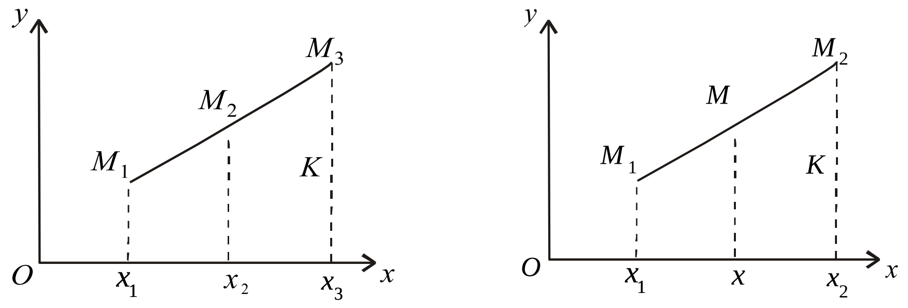


Рисунок 3.19 – Ділення відрізка у заданому співвідношенні

Наслідок. Якщо точка $M(x, y)$ є серединою відрізка, то координати точки знаходять так:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y \frac{y_1 + y_1}{2}$$

Приклад: Дано відрізок $AB, A(-3;1), B(9;1)$. Знайти координати точки М, яка ділить АВ у відношенні $AM : MB = 1:3$

Розв'язання. $AM : MB = \lambda, \lambda = \dfrac{1}{3}, x = \dfrac{-3 + \frac{1}{3}\cdot 9}{1 + \frac{1}{3}} = 0, y = \dfrac{1 + \frac{1}{3}\cdot 1}{1 + \frac{1}{3}} = \dfrac{1 + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = 1$

Отже, $M(0;1)$

Приклад: Написати рівняння медіани AM трикутника ABC, заданого координатами своїх вершин $A(7;0), B(3;6), C(-1;1)$.

Розв'язання. Знайдемо координати точки M - середини сторони вс:

Рівняння прямої, що містить медіану AM, мас такий вигляд:

$$\frac{x-7}{1-7} = \frac{y-0}{\frac{2}{7} - 0}, \text{ або } 7x + 12y - 49 = 0$$

Якщо точки $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ - вершини ΔABC, то його **площа** обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\left[\ x_2 - x_1 \quad y_3 - y_1 \ - \ x_3 - x_1 \quad y_2 - y_1\ \right] \text{або}$$

$$S = \frac{1}{2}\quad x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

Рівняння прямої у просторі

Загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$, при цьому A, B, C, D одночасно не дорівнюють нулю.

Пряму у просторі можна задати як лінію перетину двох площин у прямокутній системі координат:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Зрозуміло, що ці площини мають бути непаралельними, тобто їхні нормальні вектори $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ — не колінеарні. Система (3.1) називається ***загальним рівнянням прямої***.

Канонічне рівняння прямої. Нехай у системі координат *Oxyz* задано пряму *l* і ненульовий вектор $\vec{s}$, колінеарний цій прямій. Точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ належить прямій, а напрямний вектор $\vec{s}=(m,\ n,\ p)$. Тоді довільна точка *M* (*x, y, z*) лежатиме на прямій тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ колінеарні:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \quad (3.2)$$

Рівняння (3.2) називається *канонічним рівнянням прямої* у просторі.

Параметричне рівняння

У рівнянні прямої (3.2) позначимо через *t* кожне з рівних відношень. Тоді

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t\,.$$

Звідси дістаємо:

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt. \end{cases}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай дві точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ і $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ належать прямій у просторі. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ можна розглядати як напрямний вектор прямої. Замінюючи ним вектор $\vec{s}=(m,\ n,\ p)$ у рівнянні, дістанемо шукане рівняння прямої у просторі

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\,.$$

Для знаходження **кута між двома прямими**

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

візьмемо до уваги, що вектори $\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ і $\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ колінеарні відповідним прямим і скористаємося формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\,.$$

З останньої формули випливає **умова перпендикулярності** двох прямих

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0,$$

а **умову паралельності** двох прямих дістанемо як умову колінеарності напрямних векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}\,.$$

Розглянемо задачу знаходження **відстані від точки** $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$

Шукану відстань можна розглянути як довжину висоти паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{s}$ (рисунок 3.20).

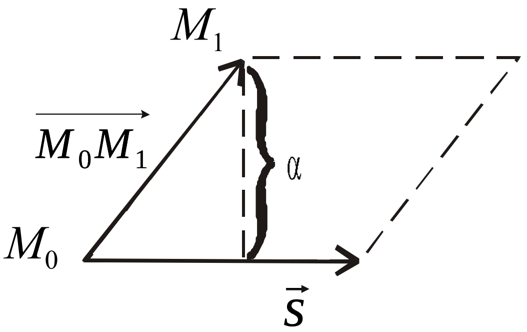


Рисунок 3.20 – Відстань від точки до прямої

Відомо, що площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких побудовано цей паралелограм. Шукану висоту, а отже, і відстань від точки до прямої можна знайти за формулою:

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Взаємне розміщення прямої і площини у просторі

Нехай площина задається рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, а

пряма - $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$. Тоді $\bar{n}\ \ A,B,C$ - вектор нормалі площини, а $\bar{s}\ \ l,m,n$ - напрямний вектор прямої.

1) ***Кут між прямою і площиною*** визначається за формулою

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

2) ***Умова паралельності площини і прямої*** ($\bar{n}\perp\bar{s}$):

$$\bar{n}\cdot\bar{s}=0$$

$$Al+Bm+Cn=0$$

3) ***Умова перпендикулярності прямої і площини*** ($\bar{n}\,\|\,\bar{s}$):

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}$$

Приклад: Знайти рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0\ \ 1;-2;3\ \ $, перпендикулярно до площини $2x+3y-z+8=0$

Розв'язання. Оскільки пряма l перпендикулярна до площини, то за напрямний вектор цієї прямої можна взяти нормальний вектор площини: $\bar{s}=\bar{n}=\ \ 2;1;-1\ \ $.

Тепер одержуємо рівняння прямої l: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{x-3}{-1}$.

Площини

1. Загальне рівняння площини:

$Ax + By + Cz + D = 0$.

Дослідження неповного рівняння площини (таблиця 3.2).

Таблиця 3.2 – Частинні випадки рівняння площини

Рівняння площини	Зауваження
$Ax + By + Cz = 0$	Площина проходить через початок координат
$By + Cz + D = 0$ $Ax + Cz + D = 0$ $Ax + By + D = 0$	Площина паралельна осі OX Площина паралельна осі OY Площина паралельна осі OZ
$By + Cz = 0$ $Ax + Cz = 0$ $Ax + By = 0$	Площина проходить через вісь OX Площина проходить через вісь OY Площина проходить через вісь OZ
$By + D = 0$ $Ax + D = 0$ $Cz + D = 0$	Площина паралельна площині OXZ Площина паралельна площині OYZ Площина паралельна площині OXY
$X = 0$ $Y = 0$ $Z = 0$	Координатна площина OYZ Координатна площина OXZ Координатна площина OXY

2. Рівняння площини, що проходить ***через*** задану точку $M_0 \; x_0, y_0, z_0$ ***перпендикулярно до*** заданого ***вектора*** $\bar{n} = \; A, B, C$, має такий вигляд:

$$A \; x - x_0 \; + B \; y - y_0 \; + C \; z - z_0 \; = 0$$

3. ***Рівняння площини, що проходить через три точки*** $M_1 \; x_1, y_1, z_1 \; , M_2 \; x_2, y_2, z_2 \; , M_3 \; x_3, y_3, z_3$, що не лежать на оодній прямій:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Приклад: Записати рівняння площини, яка проходить через точки (1;1;1), (2;3;4), (4;3;1).

Розв'язання

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & 3-1 & 4-1 \\ 4-1 & 3-1 & 1-1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Розкривши визначник, дістанемо

$$2(z-1) + 9(y-1) - 6(z-1) - 6(x-1) = 0$$

Отже, $-6x + 9y - 4z + 1 = 0$ - шукане рівняння площини.

Відстань між двома точками в просторі

Відстань d ***між точками*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ знаходиться за формулою:

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Відстань d ***від точки*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***до площини*** $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Приклад: Знайти довжину висоти AH піраміди, заданої координатами своїх вершин:

$A(-1;2;-1), B(1;0;2), C(0;1;-1), D(2;0;-1)$.

Розв'язання. Висоту AH знайдемо як відстань від точки $A(-1;2;-1)$ до площини BCD.

Знайдемо рівняння площини BCD: $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$

Розкривши визначник, маємо $3x + 6y + z - 5 = 0$.

Знайдемо довжину висоти AH:

$$AH = \frac{|3\cdot(-1) + 6\cdot 2 + 1\cdot(-1) - 5|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{46}}$$

Взаємне розміщений двох площин

Нехай дві площини задано рівняннями

$A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D = 0$.

Тоді $\overline{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overline{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ - вектори нормалей до площин.

1. ***Кут між площинами*** визначається кутом Q між векторами $\overline{n_1}$ і $\overline{n_2}$:

$$\cos Q = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

2. ***Умова перпендикулярності площин*** $\overline{n_1} \perp \overline{n_2}$

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

3. ***Умова паралельності площин*** $\overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

Криві другого порядку

Розглянемо тепер лінії другого порядку, які на площині в загальному випадку можна записати так:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (3.4)$$

Рівняння (3.4) описує всі криві другого порядку в загальному випадку. Спинимось спочатку на простіших, так званих канонічних рівняннях ліній другого порядку.

Еліпс. *Означення.* Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами, називається *еліпсом*.

На рисунок 3.21 зображено F_1 $(-c, 0)$, F_2 $(c, 0)$ — фокуси еліпса, M (x, y) — точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a,$ причому $a>c$.

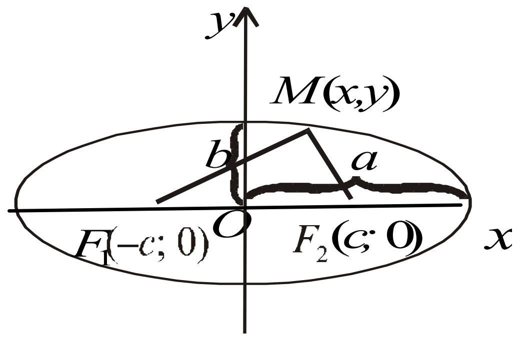


Рисунок 3.21 - Еліпс

Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3.5)$$

канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння (3.5). Якщо $x = 0$, $y = \pm\, b$, тобто точки $(0,\ b)$ і $(0,\ -b)$ є точками перетину еліпса з віссю Oy. Відрізок завдовжки b називають **малою піввіссю еліпса**. При y=0, x=$\pm a$ і відповідно $(a,0)$; $(-a;\ 0)$ є точками перетину еліпса з віссю Ox. Відрізок завдовжки a — **велика піввісь еліпса**. З парності виразу (3.5) за x і за y випливає симетрія еліпса відносно осей Ox і Oy.

Ексцентриситет еліпса — це відношення $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$; за означенням $c < a$ і $\varepsilon \in [0,\ 1)$. Оскільки $\varepsilon^2 = \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2$, то $\dfrac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$. З останньої рівності випливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує *ступінь витягнутості* еліпса. Так, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ox.

Гіпербола. *Означення.* Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами, називається *гіперболою*.

Скористаємось рисунком 3.22, з якого бачимо, що точки F_1 $(-c, 0)$ і F_2 $(c, 0)$ — фокуси гіперболи, точка M (x, y) — точка визначеної множини. Тоді $\left\| MF_1 \right| - \left| MF_2 \right\| = 2a, a < c$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = c^2 - a^2$.

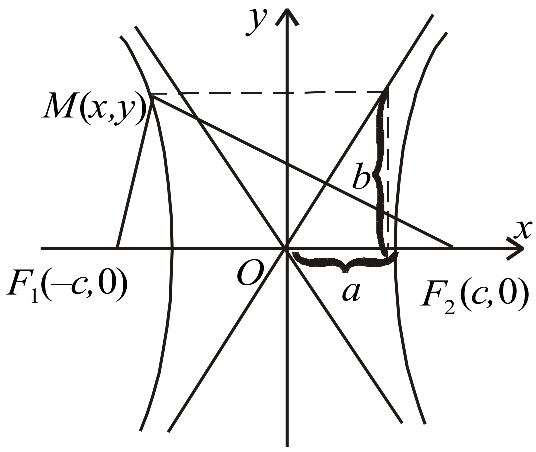


Рисунок 3.22 - Гіпербола

Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь Oy. При $y = 0$; $x=\pm a$ і точки $(-a,0)$; $(a,0)$ — точки перетину з віссю Ox. Розглянемо ще рівняння прямих $y = \pm \frac{b}{a} x$, які далі називатимемо ***асимптотами гіперболи***. Враховуючи симетрію відносно осей Ox і Oy, будуємо графік гіперболи, який зображено на рисунку 3.22.

Відрізки завдовжки b і a називають відповідно ***уявною* і *дійсною осями*** *гіперболи*.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a}$, але $c > a$ і $\varepsilon > 1$. Беручи до уваги, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо: $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$, або $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі Ox.

Парабола. *Означення*. Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається *директрисою*, є *парабола*.

За означенням $r = d$, отже (рисунок 3.23):

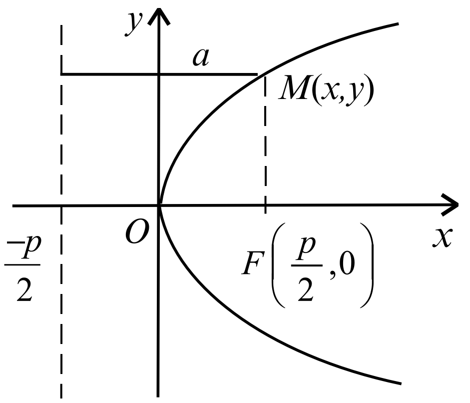


Рисунок 3.23 - Парабола

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}, \text{ або } y^2 = 2px$$

— **канонічне рівняння параболи**, коли ε = 1. Парабола симетрична осі Ox, проходить через початок системи координат.

Коло. До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається *колом* (рисунок 3.24).

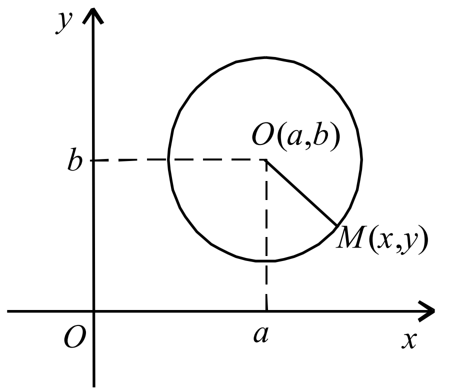


Рисунок 3.24 - Коло

Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра, називається *колом*. За означенням $OM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$.

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

— канонічне рівняння кола. Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус.

Застосування знань та вмінь з теми в економіці

Приклад: Ціни за одиницю кожного з трьох товарів становлять, відповідно 3, 5 та 15 умовні одиниці. Бюджет споживача дорівнює 165 умовних одиниць. Зобразити графічно бюджетне обмеження цього споживача.

Розв'язання. Нехай споживач на всі гроші купив x одиниць першого товару, y одиниць другого та z одиниць третього. Тоді виконується рівність

$$3x+5y+15z=165.$$

Ми отримали бюджетне обмеження споживача як загальне рівняння площини.

Зручніше записати це обмеження у вигляді рівняння площини у відрізках (виконавши ділення на 165):

$$\frac{x}{55}+\frac{y}{33}+\frac{z}{11}=1 \ .$$

Отже, споживач може купити або тільки 55 одиниць першого товару, або тільки 33 другого, або тільки 11 третього, а також може перебувати в довільній іншій точці площин $\frac{x}{55}+\frac{y}{33}+\frac{z}{11}=1$ за умов $x\geq0$; $y\geq0$; $z\geq0$ (рисунок 3.25).

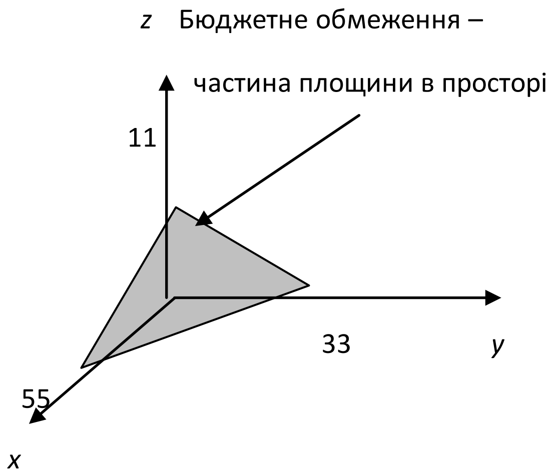


Рисунок 3.25 – Бюджетне обмеження

Якщо ж витрачають не всі гроші, то бюджетне обмеження буде тетраедром:

$$\begin{cases} 3x+5y+15z\leq 165 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ z\geq 0 \end{cases} .$$

Розглянемо випадок, коли споживач зовсім не купує третього товару (z =0). Тоді бюджетне обмеження представлятиме собою відрізок прямої на площині

$$\begin{cases} 3x+5y=165 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} ,$$

або множину точок всередині трикутника (рисунок 3.26)

$$\begin{cases} 3x+5y \le 165 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}.$$

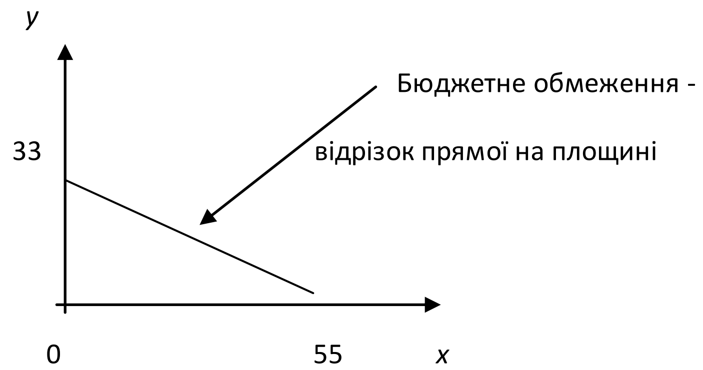


Рисунок 3.26 – Бюджетна лінія

Аналогічно, якщо не споживаєтья один з інших трьох товарів.

Приклад: Два підприємства А та В виготовляють однотипну з однаковою роздрібною ціною. Транспортні витрати підприємства А становлять 10 гр.од. за км, а для підприємства В – 15 гр.од. за км. Відстань між підприємствами станвомть 250 км. Яким чином треба розподілити ринок збуту між підприємствами, щоб витрати споживачів на транспортні перевезення продукції були мінімальними?

Розв'язання. Нехай p (гр.од.) - це роздрібна ціна продукції, S_1 (км) та S_2 (км) відстані до нинку збуту від пункту А й В відповідно.

Тоді функція витрати споживачів становитимуть:

$f(A) = p + 10 \cdot S_1$,

$f(B) = p + 15 \cdot S_1$.

Знайдемо множину точок, для яких $f(A) = f(B)$.

$S_1 = \sqrt{x^2+y^2}$, $S_2 = \sqrt{(300-x)^2+y^2}$.

$x^2 + y^2 = 2,25(90000 - 600x + x^2 + y^2)$,

$(x-540)^2 + y^2 = 129600$.

Це рівняння кола із центром у т. (540;0) та радіусом 360.

Для споживачів, які знаходяться всередині кола вигідніше купувати у пункті В, ті хто знаходяться поза колом - у пункті А, споживачам, що розташовані на колі – однаково.

РОЗДІЛ 4. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Поняття функції

Залежність змінної y від змінної x, при якій кожному елементу x множини X відповідає єдиний елементу множини Y, називається **функцією**.

Позначення функції: $y = f(x)$,

де x - незалежна змінна (аргумент),

y - залежна змінна (функція).

Множину X (сукупність значень, які може приймати аргумент) називають ***областю визначення функції*** (позначають $D(f)$), а множину Y - ***областю значень функції*** (позначають $E(f)$).

При знаходженні області визначення функції потрібно врахувати наступне:

1) знаменник функції не повинен дорівнювати нулю;

2) підкореневий вираз (у випадку кореня парного степеня) більший або рівний нулю;

3) вираз, який стоїть під знаком функції логарифма строго більше нуля;

4) в основі логарифма - додатний вираз, що не дорівнює 1;

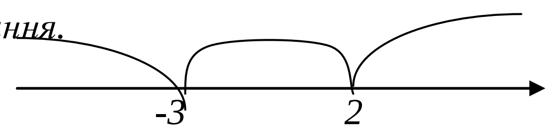
5) область визначення функції $y = \arcsin x$ і $y = \arccos x$ $D(f) = -1;1$

6) під знаком функції $y = tgx$ може стояти лише вираз, що не дорівнює $\frac{\pi}{2} + \pi k \;\; k \in Z$

7) під знаком функції $y = ctgx$ може стояти лише вираз, що не дорівнює $\pi k \;\; k \in Z$.

Приклад: Знайти область визначення функції $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$

Розв'язання.



$x \in -\infty; -3 \cup 2; +\infty$

Функції, які дістають з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій і скінченного числа операцій, що полягають у побудові складної функції, називаються **елементарними**.

Скажімо,

$$y = \frac{(x\cos x)^4}{x + 6^{8x}} + \sqrt[17]{6^x} + 5$$ — елементарна функція.

Знайти область визначення функцій:

1) $y = \log_2(\sqrt{x} - 5)$;

2) $y = \log_{11}(x^2 + 5x) + \frac{1}{\arccos(x - 1)}$;

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-5}} + \arcsin(5x-1)$.

1. Скориставшись властивостями степеневої $\left(p = \dfrac{1}{2}\right)$ та логарифмічної функцій, дістанемо (рисунок 4.1):

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x > 25 \end{cases}$$

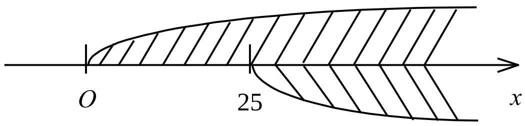


Рисунок 4.1 - Числова вісь

Отже, $x \in (25; +\infty)$.

2. Згідно з властивостями логарифмічної та оберненої тригонометричної функцій маємо (рисунок 4.2):

$$\begin{cases} -x^2 + 5x > 0 \\ \arccos(x-1) \ne 0 \\ -1 \le x - 1 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-5) < 0 \\ x - 1 \ne 1 \\ -1 + 1 \le x < 1 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-5) < 0 \\ x \ne 2 \\ 0 \le x < 2 \end{cases}$$

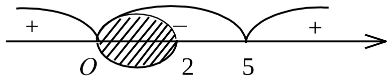


Рисунок 4.2 – Числова вісь

Отже, $x \in [0; 2)$.

3. Із тих самих міркувань, що й у попередніх прикладах, записуємо (рисунок 4.3):

$$\begin{cases} x - 5 > 0 \\ -1 \le 5x - 1 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ 0 \le 5x \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ 0 \le x \le \dfrac{2}{5} \end{cases}.$$

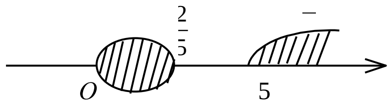
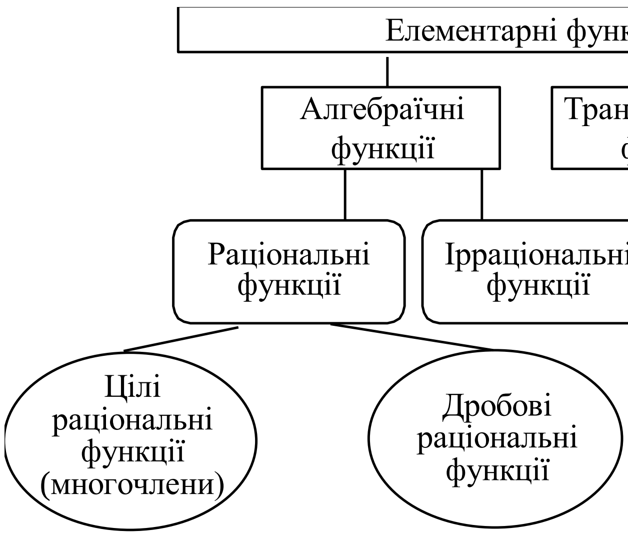


Рисунок 4.3 – Числова вісь

Отже, $x \in \varnothing$.

Класифікація функцій



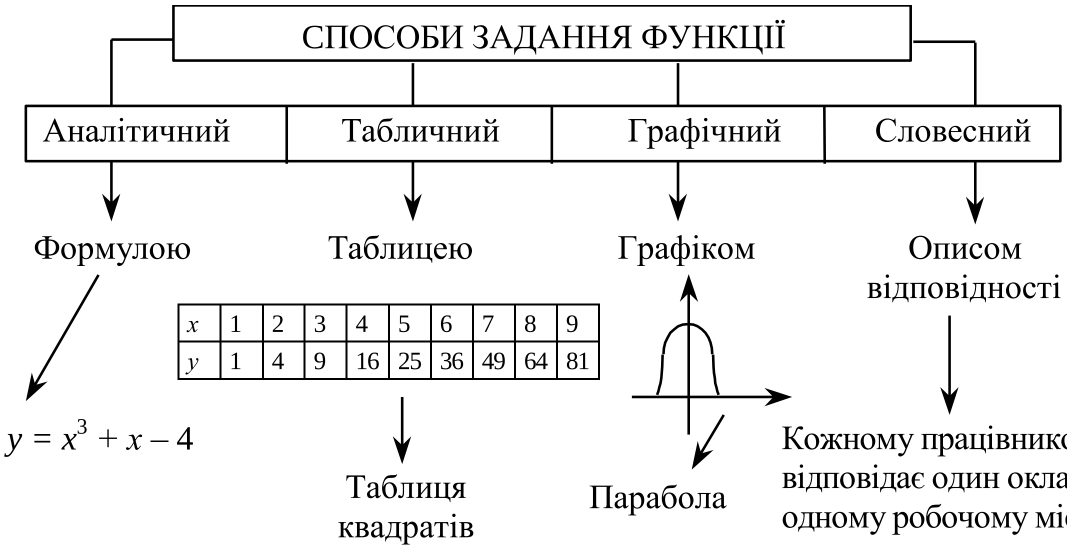
Функція $y = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$

називається **многочленом *n*-го степеня.**

Наприклад, $y = ax^2 + a_1x + 67,\ a, a_1, \in R$.

Функція $\boxed{y = \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)} = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}}$ називається **дробово-раціональною функцією**.

Функція, до складу дій над аргументом якої входить дія добування кореня, ***називається ірраціональною функцією.***



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Властивості функцій

Функція $y = f(x)$ називається **монотонно зростаючою** якщо для кожної пари $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 < x_2)$ виконується нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Функція $y = f(x)$ називається **строго монотонно зростаючою** якщо для кожної пари $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 < x_2)$ виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2);$.

Функція $y = f(x)$ називається **монотонно спадною** якщо для кожної пари $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 < x_2)$ виконується нерівність $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Функція $y = f(x)$ називається **строго монотонно спадною** якщо для кожної пари $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 < x_2)$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Функція $y = f(x)$ називається **парною** якщо для кожного x із X $f(-x) = f(x)$.

Функція $y = f(x)$ називається **непарною** якщо для кожного x із X $f(-x) = -f(x)$.

Функція $y = f(x)$ називається **загального виду (ні парна, ні непарна)** якщо для кожного x із X не виконується жодна з попередніх властивостей.

У випадку парності функції – осьова симетрія.

У випадку непрності функції - симетрія відносно точки (наприклад, точки O).

Функція $y = f(x)$ називається **періодичною**, якщо існує відмінне від нуля число T, таке що для всіх значень x з області визначення X виконується рівність:

$f(x+T) = f(x)$.

Число T називається **періодом функції**.

Функцією, оберненою до функції $y = f(x)$ $(x \in X, y \in Y)$, називається відповідність між множинами Y та X, при якій кожному елементу з Y відповідає єдине значення з X.

Позначення. $f^{-1}: \ Y \to X$;
$x = f^{-1}(y)$.

Якщо в рівності $x = f^{-1}(y)$ y замінити на x, а x виразити через y, дістанемо функцію $y = f^{-1}(x)$. Цю функцію можна також називати оберненою до утвореної. Функції $y = f(x)$ та $y = f^{-1}(x)$ називаються **взаємно оберненими**.

Геометрична інтерпретація

Графіки двох взаємно обернених функцій симетричні відносно бісектриси квадрантів I і III (рисунок 4.4):

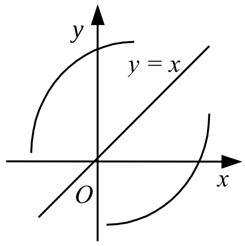


Рисунок 4.4 – Взаємно обернені функції

Приклад: Знайдемо функцію, обернену до $y = –2x + 4$ (рисунок 4.5).

Розв'язання. Замінимо y на x, а x на y:

$x = –2y + 4$.

Звідси маємо:

$–2y = x – 4$, або

$y = –0,5x + 2$.

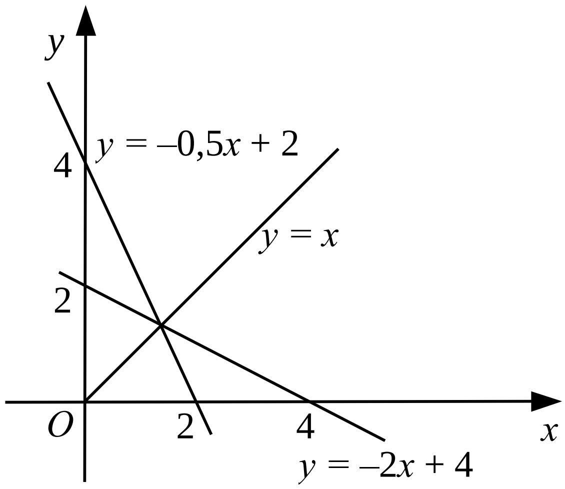


Рисунок 4.5 – Графік функції

Поняття складної (складеної) функції

Функція $y = F(u)$, де $u = g(x)$ є, у свою чергу, деякою функцією, називається **складною (складеною) функцією**, або **суперпозицією (композицією) двох функцій** (рисунок 4.6).

Нехай маємо:

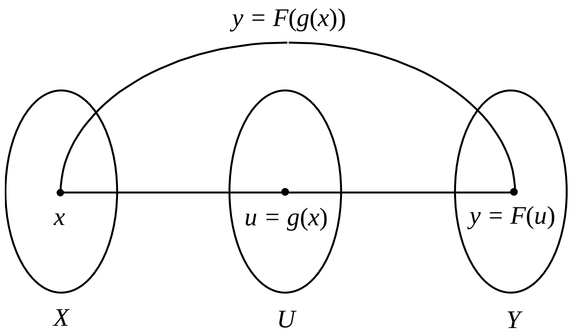


Рисунок 4.6 – Композиція двох функцій

Позначення. $F = f \circ g = f(g(x))$

1) $y = \sin^3 x$ — це композиція двох функцій: $y = F(u) = u^3$ і $u = \sin x$;

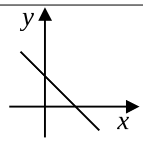
2) $y = \sin x^3$ — це композиція двох функцій: $y = F(u) = \sin u$ і $u = x^3$.

Основні елементарні функції

Лінійною називається функція виду $y = ax + b$, де $a, b \in R$.

Властивості (таблиця 4.1).

Таблиця 4.1 – Властивсоті лінійної функції

X	Y	Парність	Монотонність	Періодичність	Графік
$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	Загального виду (ні парна, ні непарна), $a \neq 0$; якщо $a = 0$ — парна	$a > 0$ — зростаюча; $a < 0$ — спадна; $a = 0$ — стала	Неперіодична при $a \neq 0$, $a = 0$ — періодична з будь-яким періодом	 Пряма лінія

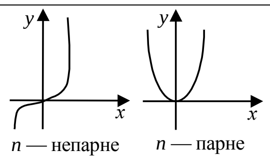
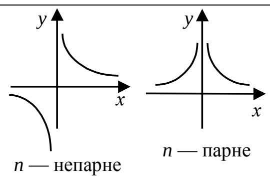
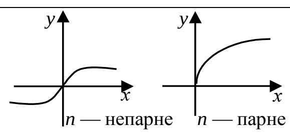
Функція $y = x^a$, де a — будь-яка дійсна стала, називається **степеневою**.

Властивості степеневої функції, які залежить від показника *a* (таблиця 4.2).

Основні формули

1. $x^0 = 1,\ x \neq 0.$
2. $x^a\, x^b = x^{a+b}.$
3. $x^a : x^b = x^{a-b}.$
4. $(x^a)^b = x^{ab}.$
5. $(xy)^a = x^a y^a.$

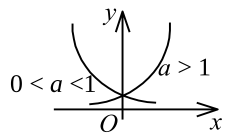
Таблиця 4.2 – Властивості степеневої функції

Показник степеня	X	Y	Парність	Монотонність	Періодичність	Графік
$a = n$, $n \in N$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$, якщо n — непарне; $[0; +\infty]$, якщо n — парне	Непарна, якщо n — непарне; парне, якщо n — парне	Зростаюча на $(-\infty, +\infty)$, якщо n — непарне; спадна на $[-\infty; 0]$ і зростаюча на $[0; +\infty]$, якщо n — парне	Неперіодична	
$a = -n$, $n \in N$	$(-\infty, 0) \cup$ $\cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, якщо n — непарне; $(0, +\infty)$, якщо n — парне	Якщо n — непарне, непарна; якщо n — парне, парна	Якщо n — парне, зростаюча на $(-\infty, 0)$ і спадна на $(0, +\infty)$; якщо n — непарне, спадна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	Неперіодична	
$a = 1/n$, $n \in N$	$(0; +\infty)$, якщо n — парне; $(-\infty, +\infty)$, якщо n — непарне	$(0, +\infty)$, якщо n — парне; $(-\infty, +\infty)$, якщо n — непарне	Непарна, якщо n — непарне; загального виду (ні парна, ні непарна), якщо n — парне	Зростаюча на $(-\infty, +\infty)$, якщо n — непарне; зростаюча на $(0; +\infty)$, якщо n — парне	Неперіодична	

Функція $y = a^x$, якщо $a > 0$, $a \neq 1$, називається **показниковою функцією**.

Властивості (таблиця 4.3).

Таблиця 4.3 – Властивості показникової функції

X	Y	Парність	Монотонність	Періодичність	Графік
$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	Загального виду (ні парна, ні непарна)	Якщо $a > 0$ — зростаюча на $(-\infty, +\infty)$; якщо $a < 0$ — спадна на $(-\infty, +\infty)$	Неперіодична	

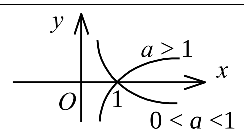
Основні формули

1. $a^0 = 1,\ a > 0,\ a \neq 1.$ 2. $a^x a^y = a^{x+y}.$ 3. $a^x : a^y = a^{x-y}.$

4. $(a^x)^y = a^{xy}.$ 5. $(ab)^x = a^x b^x.$

Функція $y = \log_a x$, якщо $a > 0$, $a \neq 1$, називається **логарифмічною функцією**. Логарифмічна та показникова функції взаємно обернені (таблиця 4.4).

Таблиця 4.4 – Властивості логарифмічної функції

X	Y	Парність	Монотонність	Періодичність	Графік
$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	Загального виду (ні парна, ні непарна)	Якщо $a > 1$ — зростаюча на $(0, +\infty)$; $0 < a < 1$ — спадна на $(0, +\infty)$	Неперіодична	

Основні формули

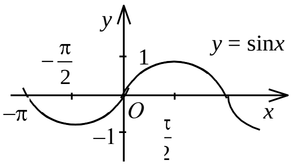
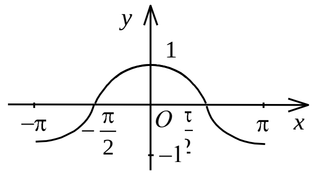
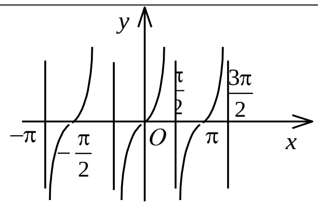
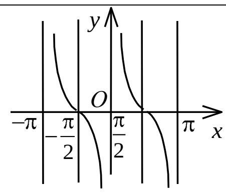
$1. \log_a 1 = 0,\ \ a > 0, a \neq 1.$ $2. \log_a a = 1.$

$3. \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y.$ $4. \log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$

$$5. \log_{a^r} b^p = \frac{p}{r} \log_a b.$$

Функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$ називаються *тригонометричними* (таблиця 4.5).

Таблиця 4.5 – Властивості тригонометричних функцій

Функція	X	Y	Парність	Монотонність	Періодичність	Графік
$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$ $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[-1; 1]$	Непарна	Зростаюча на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; спадна на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	Періодична; $T = 2\pi n$; $T_{\min} = 2\pi$	
$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1; 1]$	Парна	Зростаюча на $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$; спадна на $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$	Те саме; $T = 2\pi n$; $T_{\min} = 2\pi$	
$y = \operatorname{tg} x$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	$(-\infty, +\infty)$	Непарна	Зростаюча	Те саме; $T = \pi n$; $T_{\min} = \pi$	
$y = \operatorname{ctg} x$	$(\pi n; \pi+\pi n)$	$(-\infty, +\infty)$	Непарна	Спадна	Те саме; $T = \pi n$; $T_{\min} = \pi$	

Основні формули

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$; $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$.

3. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 =$

$= 1 - 2\sin^2 x$; $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

4. $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

5. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$;

$$\mathrm{tg}3x = \frac{3\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}^3 x}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\, x}.$$

6. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos y \sin x$;

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.

7. $\mathrm{tg}(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y}{1 \mp \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y}$.

8. $$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)];$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)];$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)].$$

9. $$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2};$$

$$\mathrm{tg}\ x \pm \mathrm{tg}\, y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}.$$

10. $\sin x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}$; $\quad \cos x = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}$;

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}; \qquad \mathrm{ctg}\ x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 x}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}.$$

11. $$\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos\alpha;\ \ \cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\sin\alpha;$$

$$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha;\ \ \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha.$$

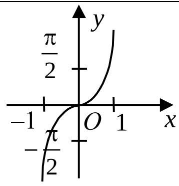
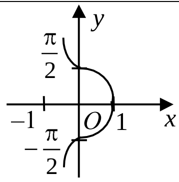
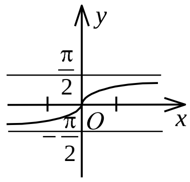
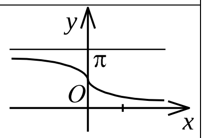
12. $$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\mathrm{ctg}\alpha;\ \ \ \mathrm{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm\mathrm{tg}\alpha;$$

$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \mathrm{tg}\alpha;\ \ \mathrm{ctg}(\pi \pm \alpha) = \pm \mathrm{ctg}\alpha.$

Функції y = arcsin x, y = arccos x, y = arctg x, y = arcctg x називаються **оберненими тригонометричними функціями.** Вони є оберненими до функцій y = sin x, y = cos x, y = tg x, y = ctg x.

Властивості (таблиця 4.7).

Таблиця 4.7 – Властивості обернених тригонометричних функцій

Функція	X	Y	Парність	Монотонність	Періодичність	Графік
y = arcsin x	[– 1; 1]	$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$	Непарна	Зростаюча	Неперіодична	
y = arccos x	[– 1; 1]	[0; π]	Непарна	Спадна	Неперіодична	
y = arctg x	(–∞, +∞)	$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$	Непарна	Зростаюча	Неперіодична	
y = arcctg x	(–∞, +∞)	[0; π]	Непарна	Спадна	Неперіодична	

Основні формули

1. $\arcsin\alpha = -\arcsin(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.

2. $\arccos\alpha = \pi - \arccos(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\alpha = \mathrm{arcctg}\,\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.

3. $\mathrm{arctg}\,\alpha = -\mathrm{arctg}(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\,\alpha = \arcsin\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.

4. $\operatorname{arcctg}\alpha = \pi - \operatorname{arcctg}(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\alpha = \arccos\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.

Функції $\operatorname{ch}x = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2}$, $\operatorname{sh}x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ називаються **гіперболічним косинусом** і **синусом**, а функції $\operatorname{th}x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$, $\operatorname{cth}x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$ — відповідно **гіперболічним тангенсом *і* котангенсом**.

Для гіперболічних функцій справджуються співвідношення:

1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; 2) $\operatorname{sh}2x = 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}$;

3) $\operatorname{th}x \cdot \operatorname{cth}x = 1$; 4) $\operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$.

Графіки головних гіперболічних функцій наведено на рисунок 4.7, 4.8.

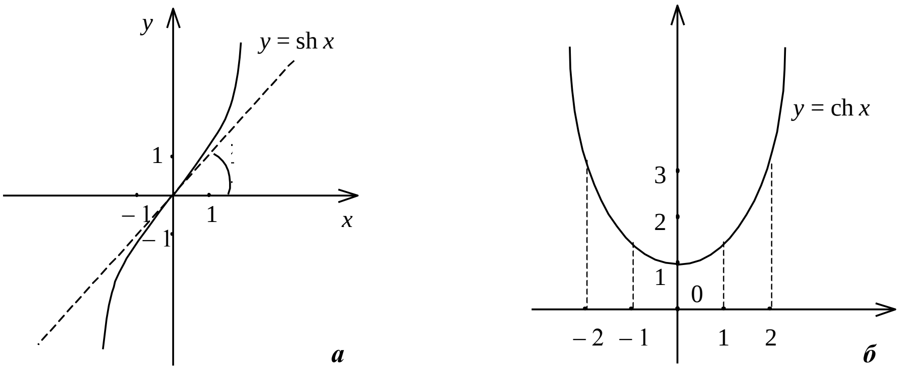


Рисунок 4.7 - Головнігіперболічні функції

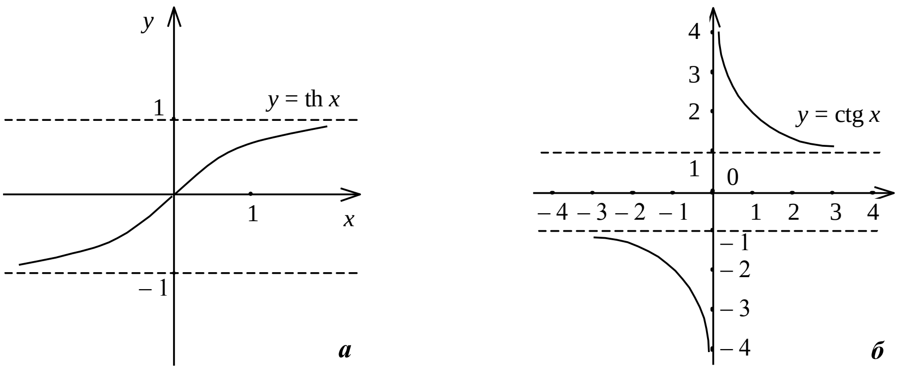


Рисунок 4.8 - Головнігіперболічні функції

Деякі неелементарні функції

1. $y = |x|$ — абсолютне значення, або модуль, числа (рисунок 4.9).

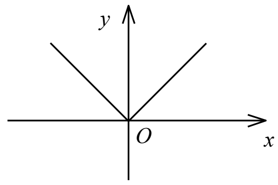


Рисунок 4.9

2. $y = [x]$ — ціла частина числа (рисунок 4.10).

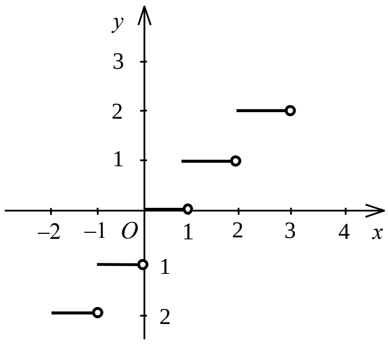


Рисунок 4.10

3.$y = \{x\}$ — дробова частина числа (рисунок 4.11).

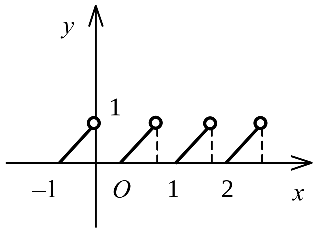


Рисунок 4.11

4. $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ — знак числа (рисунок 4.12).

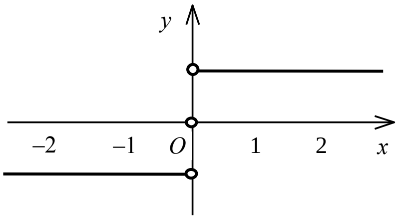


Рисунок 4.12

Границя функції. Неперервність функції

Поняття числової послідовності.

Якщо за деяким законом (правилом) кожному натуральному числу n поставлено у відповідність деяке дійсне число a_n, то кажуть, що задана ***числова послідовність*** $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Числа a_i - *члени послідовності*, i - *номер члена послідовності*.

Позначення *числової послідовності*: a_n , x_n , a_n , x_n .

Приклади числових послідовностей:

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} ...$$

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \quad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$$

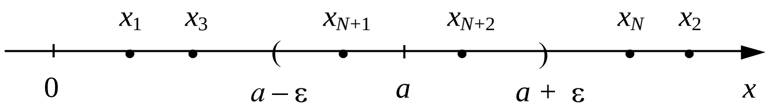
$$a_n = n!, \quad 1, 2, 6, 24$$

Границя послідовності. Нескінченно малі та

нескінченно великі послідовності

Число B називається *границею послідовності* x_n , якщо для будь - якого $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $N\ \varepsilon$, що для всіх $n > N\ \varepsilon$ виконується нерівність $|x_n - B| < \varepsilon$. Тобто $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = B$.

Розглянемо геометричну інтерпретацію границі послідовності. На числовій осі побудуємо ε-окіл числа *a*, тобто інтервал (*a* – ε; *a* + ε), і покажемо, як розміщуватимуться точки, які відповідають членам послідовності $x_n \to a$, при $n \to \infty$:



Послідовність, що має скінченну границю, називається ***збіжною***, інакше – ***розбіжною***

Приклад: Послідовність $a_n = \frac{1}{n}$ — збіжна, оскільки існує $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (за означенням $\left|\frac{1}{n-0}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ для будь-якого $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$).

Послідовність x_n називається *нескінченно малою*, якщо її границя дорівнює нулю, тобто $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$

Послідовність x_n називається *нескінченно великою*, якщо $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \infty$

Сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену є нескінченно мала послідовність

Якщо x_n — нескінченно велика послідовність, то $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ — нескінченно мала послідовність.

Якщо x_n — нескінченно мала послідовність і $x_n \neq 0$, то послідовність $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ є нескінченно великою.

Послідовність x_n називається ***обмеженою знизу (зверху)***, якщо існує таке число M m, що для всіх $n \in N$ виконується нерівність $x_n \geq m$ $x_n \leq M$.

Послідовність x_n називається ***обмеженою***, якщо існують такі числа m і M, що для всіх $n \in N$ виконується нерівність $m \leq x_n \leq M$.

Наприклад. Послідовність натуральних чисел 1, 2, 3, ... обмежена знизу числом 1.

Послідовність x_n називається ***зростаючою (спадною)***, якщо для будь-якого n виконується нерівність $a_{n+1} \geq a_n$ $a_{n+1} \leq a$.

Якщо $a_{n+1} \geq a_n$ $a_{n+1} \leq a$, то послідовність називається строго *зростаючою (спадною).*

Наприклад. Послідовність $a_n = n, n \in N$ є строго зростаючою.

Теореми про границі

Теорема 1. **Границя сталої дорівнює цій сталій:**

$\lim\limits_{n\to\infty} c = c, \quad c = \text{const}.$

Теорема 2. **Якщо послідовність x_n має границю, то ця границя єдина.**

Теорема 3. **Послідовність x_n, яка має границю, є обмеженою.**

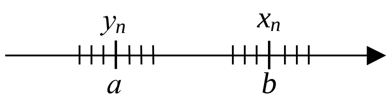
Теорема 4. **Нехай** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ a<b$**. Тоді знайдеться число *N*, таке що при будь-якому** $n>N$ **справджуватиметься нерівність**

$x_n < b$.

Теорема 5. **Нехай** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$**. Якщо послідовність x_n при всіх *n* задовольняє нерівність** $x_n \le b$**, то**

$a \le b$.

Теорема 6. **Якщо** $x_n \ge y_n$ **і** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$**,** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$**, то** $a \ge b$**.**



Теорема 7 **(про «охоплену» послідовність). Нехай виконується нерівність** $x_n \le u_n \le y_n$**. Якщо послідовності x_n і y_n збіжні, причому** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$**, то послідовність u_n також буде збіжною і** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$**.**

Теорема 8. **(Больцано–Вейєрштрасса). Будь-яка монотонна обмежена послідовність має границю.**

Теорема **9. (Вейєрштрасса). Про границю монотонної й обмеженої послідовності:**

1) якщо монотонно зростаюча послідовність обмежена зверху, то вона збіжна;

2) якщо монотонно спадна послідовність обмежена знизу, то вона збіжна.

Приклади обчислення границь послідовностей

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+2}{-3n^2} = -\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}{-3n^2} = -\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{1} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}\right) = -\frac{1}{3}\ 1-0+0\ = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{n\left(1-\frac{3}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{n\left(1-\frac{3}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)}==\frac{0}{1-0}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\ \sqrt{n^2-2n}-n\ =\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-2n}-n\quad\sqrt{n^2-2n}+n}{\sqrt{n^2-2n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}=\frac{\sqrt{n^2-2n}^{\ 2}-n^2}{\sqrt{n^2-2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n-n^2}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n\left(1+\frac{3}{n}+1\right)}==\frac{-2}{\sqrt{1+0}+1}=-1$$

Поняття границі функції. Односторонні границі

Число B називається *границею функції*/ $f(x)$ в точці a (при $x\to a$), якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться такс число $\delta>0$, що при всіх $x\neq a$, які задовольняють нерівність $|x-a|<\delta$ виконується нерівність $\left|f(x)-B\right|<\varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x\to a}f(x)=B$.

Функція $y=f(x)$ називається *нескінченно малою* в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. Функція $y=f(x)$ називається *нескінченно великою* в точці x_0 , якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$

Односторонні границі

Якщо шукається $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ при умові, що x приймає значення менші за x_0, то ця границя, якщо вона існує, називається *лівосторонньою* і позначається $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)$;

Якщо x приймає значення більші за x_0, то границя називається *правосторонньою* і позначається $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)$

Приклад: Знайти правосторонню та лівосторонню границі функції $y=\dfrac{-2}{x}$ в точці $x=0$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to x_0+}\frac{-2}{x}=\left[\frac{-}{+}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to x_0-}\frac{-2}{x}=\left[\frac{-}{-}\right]=\infty$$

Основні теореми про границі. Чудові границі

1. *Границя суми (різниці)* двох функцій дорівнює сумі (різниці) границь цих функцій, якщо границі доданків існують, тобто

$$\lim_{x\to x_0-}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

2. *Границя добутку* двох функцій дорівнює добутку границь цих функцій, якщо границі співмножників існують, тобто

$$\lim_{x\to x_0-}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

3. *Границя частки* двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границі чисельника і знаменника існують. а границя знаменника не дорівнює нулю, тобто

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\quad \lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

4. *Сталий множник* можна винести за знак границі тобто

$$\lim_{x\to a}C\cdot f\quad x\quad =C\lim_{x\to a}f(x)$$

5. *Границя цілого додатного степеня* функції дорівнює тому ж степеню границі функції, тобто

$$\lim_{x\to a}f\quad x\quad^{n}=\lim_{x\to a}(f(x)\quad^{n}$$

Перша важлива границя: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Наслідки:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=1,\quad k\neq 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgkx}{kx}=1, k\neq 0$$

Друга важлива границя: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, де $r=2,718281...$

Наслідки:

$$\lim_{x\to 0}\ 1+x^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}=e$$

Прийоми обчислення границь функції $\lim_{x\to a} f(x)$

1. Пробуємо підставити значення $x=a$ у функцію $f(x)$.

Приклад: $\lim_{x\to 2}\frac{9-x^2}{x-1}=\frac{9-2^2}{2-1}=5$

2. Розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$: в чисельнику і знаменнику винести за дужки найвищий степінь невідомого.

Приклад:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{x-3\quad x+3}{x-3\quad x-2}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=\frac{3+3}{3-2}=6,$$

$$x^2-5x+6=0$$
$$x_1=3; x_2=2$$

$$ax^2+bx+c=a\ \ x-x_1\quad x-x_2\ \ , x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$$

3. Розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$:

а) розкласти чисельник і знаменник на множники:

Приклад:

б) якщо до чисельника або знаменника входять *квадратні чи кубічні корені,* то потрібно домножити чисельник і знаменник на відповідні вирази, щоб позбутися коренів:

Приклад:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x})^2-2^2}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=(4+4)(\sqrt{4}+2)=8\cdot 4=32$$

в) якщо під знаком границі стоять *тригонометричні або обернені тригонометричні функції,* то такі границі зводяться до першої визначної границі або її варіацій (наслідків).

Приклад:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cos 2x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x\cos 2x}{7x}==\frac{5}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\cos 2x=\frac{5}{7}\cos 0=\frac{5}{7}$$

4. Розкриття невизначеності $\left[1^{\infty}\right]$ звести *до другої визначної* границі:

Приклад: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{2x}=\lim_{\frac{3}{4x}\to\infty}\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{\frac{4x\cdot 3}{3\cdot 4x}\cdot 2x}=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3}$.

Неперервність функції. Основні поняття

Функція $y=f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Приклад: Довести неперервність функції $y = \dfrac{x^2+9}{x^2-x}$ в точці $x=3$.

Розв'язання

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+9}{x^2-x} = \frac{9+9}{9-3} = 3; f(3) = \frac{3^2+9}{3^2-3} = 3$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$, то задана функція неперервна в точці $x=3$, що і треба було довести.

Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо

$f(x)$ визначена в точці x_0,

границя зліва в точці x_0 дорівнює іраниці справа в цій точці і дорівнює значенню в ній функції:

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0)$$

Функція $y = f(x)$ ***неперервна на проміжку***, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Функція $y = f(x)$ ***неперервна на відрізку*** $a;b$, якщо вона неперервна на проміжку $a;b$ і неперервна в точці $x=a$ справа і в точці $x=b$ зліва.

Властивості неперервних функцій

Теорема 1. Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ - неперервні на інтервалі $a;b$. Тоді їх наведені далі комбінації також неперервні

$f(x) \pm g(x)$

$f(x) \cdot g(x)$

$const \cdot g(x)$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

Теорема 2 (Больцано-Коші) Нехай функція y = f{x) неперервна на відрізку $a;b$ і на кінцях відрізка набуває значень різних знаків. Тоді на проміжку $[a;b]$ знайдеться точка c, в якій функція перетворюється на нуль: $f(c)=0, a<c<b$.

Теорема 3 (Вейєрштрасса). Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $y=f(x)$ досягає на цьому відрізку свого найбільшого і найменшого значень.

Теорема 4 (Коші). Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на його кінцях набуває різних значень. Позначимо $f(a)=A, f(b)=B$. Тоді при будь-якому $C: A<C<B$ знайдеться точка $c\in [a;b]$, така що $f(c)=C$.

Розриви функції та їх класифікація

Функція $y=f(x)$, яка не є неперервною в точці x0і називається ***розривною*** в цій точці. Точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду*** функції $y=f(x)$, якщо існують скінчені односторонні границі $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ і при цьому:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)\neq f(x_0) \quad \textit{або} \\ \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)\neq f(x_0) \quad \textit{або} \\ \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \end{array}\right\} \text{- } \textbf{\textit{неусувний розрив першого роду}}$$

$$\lim\limits_{x\to x_0-} (x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \neq f(x_0) \text{ - у}\textbf{\textit{сувний розрив першого роду}}$$

Точка x_0 називається ***точкою розриву другого роду*** функції $y=f(x)$, якщо одна із односторонніх границь $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ не існує або нескінченна.

Методика дослідження функції $y=f(x)$ на неперервність

Знаходимо точку x_0 - "підозрілу" на розрив.

Це може бути точка, в якій функція невизначена або змінює закон визначеності.

Визначаємо інтервали неперервності функції.

Обчислюємо $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$.

Робимо висновок згідно з теоремами, або використовуючи означення точок розриву.

Приклад: Дослідити на неперервність функцію $y=\begin{cases} x, x\le 1 \\ x+1, x>1 \end{cases}$

Розв'язання

Точка $x_0=1$ є "підозрілою" на розрив, оскільки в ній функція змінює закон визначеності (на проміжку $-\infty;1$ маємо $y=x$, на проміжку $1,+\infty$ - іншу залежність: $y=x+1$).

Функція неперервна на проміжку $-\infty;1$ і $1;+\infty$.

Знаходимо $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=1, \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=2$.

$1\ne 2$, тому за означенням функція $y=\begin{cases} x, x\le 1 \\ x+1, x>1 \end{cases}$ - має в точці $x = 1$ неусувний розрив 1-го роду.

Застосування знань та вмінь з теми в економіці

Приклад: Підприємство має 10000 одиниць скляного посуду. Відомо, що за одиницю часу виходить з ладу 5 % цієї продукції. Опишіть функцією кількість одиниць продукції, що залишилась до моменту часу *х*.

Розв'язання. Нехай у — кількість одиниць продукції, що залишилась до моменту часу *х*. Тоді за умовою задачі: $y=10000\cdot 0{,}95^x$.

Знайдемо кілька значень функції у:

- якщо х=1, то у=9500 (од.),
- якщо х=2, то у=9025 (од.) і т.д.

Тобто від початку відліку часу до моменту часу 1 вийшло з ладу 9500 одиниць скляного посуду, до моменту часу 2 –9025 одиниць тощо.

Отже, функцію кількості одиниць продукції, що залишилась до моменту часу х можна записати таким чином:

$y=10000-10000\cdot 0{,}95^x$.

Приклад: Нехай початковий капітал у=1000 грн., знаменник прогресії *r*=1,1. Знайдіть величину капіталу в проміжку $[0;4]$ років.

Розв'язання. Якщо знаменник прогресії *r*=1,1, то це значить, що відбувається щорічне збільшення капіталу на 10%.

Тоді величина капіталу через х років: $y=1000\cdot 1{,}1^x$.

Складемо таблицю значень у даної функціональної залежності в проміжку $[0;4]$ років:

x	0	1	2	3	4
y	1 000	1 100	1 210	1 331	1 464,1

Приклад: Продуктивність праці на підприємстві збільшується щороку на однакову кількість відсотків, за останні три роки вона зросла на 25 %. На скільки відсотків продуктивність праці збільшувалась щорічно?

Розв'язання. Спочатку необхідно нагадати учням означення продуктивності праці (це ефективність затрат праці, тобто кількість продукції, яка виробляється робітником за одиницю часу).

Нехай a_1 — початкова продуктивність праці, p — кількість відсотків, на яку збільшується продуктивність щороку.

Тоді через рік продуктивність становитиме $a_1(1+0{,}01p)$, через 2 роки – $a_1(1+0{,}01p)^2$, через n років – $a_1(1+0{,}01p)^n$.

За умовою даної задачі $(1+0{,}01p)^3=1{,}25$; $1+0{,}01p=\sqrt[3]{1{,}25}$; $p\approx 8\,\%$.

Тобто, продуктивність праці збільшувалась наближено на 8%.

Приклад: Італійський економіст Парето сформулював теорему про розподіл доходів у капіталістичному суспільстві.

Якщо через y позначити число осіб, що мають дохід не менше x гр.од., то $y=\frac{a}{x^m}$, де a, m — сталі величини.

Закон Парето достатньо точно описує розподіл дуже «високих» доходів, тоді як для низьких доходів він не справджується.

Нехай у суспільстві розподіл доходів визначається рівнянням $y=\frac{4000000000}{x^{1,5}}$.

1) Знайдіть число осіб, що мають дохід, який перевищує 100000 гр.од. (за рік).

2) Знайдіть найнижчий дохід серед 50 найбагатших осіб.

Розв'язання. 1) за умовою задачі маємо, що x=100000, тоді $y=\frac{4000000000}{100000^{1,5}}$. Логарифмуємо обидві частини останньої рівності, одержимо

$$\lg y=\lg\frac{4000000000}{100000^{1,5}}=\lg 4000000000-1{,}5\lg 100000=9{,}6021-7{,}5=2{,}1021$$

Отже, $\lg y = 2{,}1021$. Звідси $y = 10^{2{,}1021} \approx 126$.

Тобто 126 осіб мають дохід, що перевищує 100000 гр. од.

2) За умовою задачі маємо, що $50 = \frac{4000000000}{x^{1{,}5}}$. Розв’язавши це рівняння, одержимо $50x^{1{,}5} = 4000000000$, $x^{1{,}5} = 80000000$,

$1{,}5\lg x = \lg 80000000$, $1{,}5\lg x = 7{,}9031$, $\lg x = 5{,}2687$

$x = 10^{5{,}2687}$, $x \approx 185000$.

Отже, найнижчий дохід серед 50 найбагатших осіб (тобто дохід п’ятидесятої особи), становить 185000 гр. од.

Неперервне нарахування відсотків

Якщо нарахування прибутку здійснюють безперервно із номінальною ставкою r, то майбутня вартість S дорівнює:

$S=Pe^{rt}$.

***Приклад*:** До банку вкладено 25 000 грн. із 15 % неперервним компаундом на 4 роки. Знайдіть величину компаунда.

Розв’язання

$S = P \cdot e^{rt} = 25000 \cdot e^{0{,}15 \cdot 4} \approx 45553$ (грн.).

Отже, через 4 роки на рахунку буде наближено 45553 грн.

РОЗДІЛ 5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Поняття похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку X. Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо аргументу довільний приріст $\Delta x \neq 0$ такий, щоб точка $x = x_0 + \Delta x \in X$.

Функція набуде при цьому приросту $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$.

$\Delta x = x - x_0$- приріст аргументу,

$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приріст функції.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аріументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$f'\ x_0\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\ \ x_0 + \Delta x\ \ - f\ \ x_0}{\Delta x}$$

де $y', f'\ \ x\ \ ; y'_x$ - позначення похідної, запропоноване Ньютоном;

$\dfrac{dy}{dx}; \dfrac{df}{dx}$ - позначення Лейбніца похідної функції $y = f(x)$

Операція шукання похідної називається ***диференціюванням***.

Функція $y = f(x)$ називається ***диференційованою в точці*** x_0, якщо існує похідна цієї функції в цій точці.

Геометричний та механічний зміст похідної

Дотичною до кривої в даній точці M називається граничне положення січної MN, коли точка N наближається вздовж кривої до точки M (рисунок 5.1)·

Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ є тангенсом кута нахилу січної до осі Ox. При $\Delta x \to 0$ січна прямує до дотичної в точці P. Тангенсом кута α нахилу дотичної до осі Ox при цьому буде границя відношення

$$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

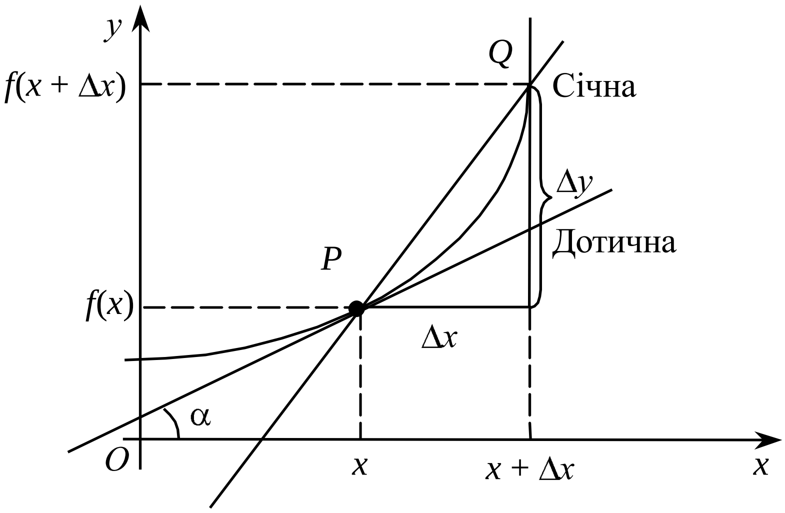


Рисунок 5.1 – Геометричний зміст похідної

Значення похідної в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці x_0 і дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до додатного напряму осі OX :

$$f'(x_0) = tg\varphi = k$$

де k - ***кутовий коефіцієнт дотичної*** до графіка функції.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ - ***рівняння дотичної*** до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0.

Фізичний зміст похідної

Якщо $S = S(t)$ - залежність пройденого шляху від часу, то:

1. $V = S'(t)$ - швидкість прямолінійного руху;
2. $a = V'(t)$ - прискорення прямолінійного руху.

Похідні основних елементарних функцій

1) $c' = 0, c$ - стала

10) $(\cos x)' = -\sin x$
$(\cos kx)' \; k\sin kx$

2) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$x' = 1, \quad (x^2) = 2x$

1 1) $(\sin x)' = \cos x$
$(\sin kx)' \; k\cos kx$

3) $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$

12) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(tgkx)' = \frac{k}{\cos^2 kx}$$

4) $$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

13) $$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(ctgkx)' = -\frac{k}{\sin^2 kx}$$

5) $$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6) $$(a^x)' = a^x \ln a \quad a > 0, a \neq 1$$

14) $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

7) $$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{kx})' = ke^{kx}$$

$$(\arcsin kx)' = \frac{k}{\sqrt{1-(kx)^2}}$$

15) $$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

8) $$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad a > 0, a \neq 1$$

$$(\arccos kx)' = -\frac{k}{\sqrt{1-(kx)^2}}$$

9) $$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(arcctgkx)' = -\frac{k}{1+(kx)^2}$$

16) $$(\mathrm{arc}tgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arc}tgkx)' = \frac{k}{1+(kx)^2}$$

Основні правила диференціювання функцій, заданих аналітично

Нехай C- стала і u та v - диференційовані функції. Тоді:

1. ***Похідна алгебраїчної суми*** двох диференційованих функцій дорівнює відповідній алгебраїчній сумі похідних цих функцій:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

2. ***Похідна добутку*** двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і першої функції на похідну другої функції:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

3. ***Сталий множник*** можна винести за знак похідної:

$$(Cu)' = C \cdot u'$$

де C - константа (число).

4. ***Похідна частки*** двох диференційованих функцій дорівнює дробу, знаменником якого є квадрат знаменника цього дробу, а чисельником - різниця між добутком похідної чисельника на знаменник і добутком чисельника на похідну знаменника:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

5. ***Похідна складеної функції*** дорівнює добутку похідної функції $y = f(u)$ за проміжним аргументом u на похідну проміжного аргументу за x. Якщо $y = f(u(x))$, то $y' = f'_u \cdot u'_x$

Приклад: Знайти похідну функції $y = 2\cos 3x$.

Розв'язання. Функція $y = 2\cos 3x$ - складена: $u(x) = 3x; f(u) = 2\cos u$.

$y' = f'_u \cdot u'_x, y' = 2(-\sin 3x) \cdot (3x)' = 2 \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 = -6\sin 3x$.

Окремі випадки:

1. Нехай функція $y = f(x)$ є показниковою:

$y = a^{v(x)}$, тобто $u(x) = \alpha$.

Тоді

$y' = a^{v(x)} \ln a \cdot v'(x)$.

2. Нехай функція $y = f(x)$ є степеневою,

$y = (u(x))^a$, тобто $v(x) = \alpha$.

Тоді

$y' = a(u(x))^{a-1} u'(x)$.

3. Логарифмічне диференціювання

Якщо функція $y = f(x)$ являє собою добуток кількох множників, то перш ніж диференціювати її, можна прологарифмувати цю функцію.

Приклад: Знайти y', якщо $y = \sqrt[5]{\sin x}\,\mathrm{tg}^2 x \sqrt[4]{\cos x}$.

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння:

$$\ln y = \ln(\sqrt[5]{\sin x}\,\mathrm{tg}^2 x\sqrt[4]{\cos x}) \Rightarrow$$
$$\ln y = \frac{1}{5}\ln\sin x + 2\ln \mathrm{tg}x + \frac{1}{4}\ln\cos x \Rightarrow$$
$$\ln y = \frac{1}{5}\ln\sin x + 2\ln\sin x - 2\ln\cos x + \frac{1}{4}\ln\cos x \Rightarrow$$

$$\ln y = \frac{11}{5}\ln\sin x - \frac{7}{4}\ln\cos x.$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності:

$$(\ln y)' = \left(\frac{11}{5}\ln\sin x - \frac{7}{4}\ln\cos x\right)' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{11}{5}\frac{1}{\sin x}(\cos x) - \frac{7}{4}\frac{1}{\cos x}(-\sin x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = y\left(\frac{11}{5}\mathrm{ctg}x + \frac{7}{4}\mathrm{tg}x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt[5]{\sin x}\cdot \mathrm{tg}^2 x\cdot\sqrt[4]{\cos x}\cdot\left(\frac{11}{5}\mathrm{ctg}x + \frac{7}{4}\mathrm{tg}x\right).$$

Приклад: Знайти y', якщо $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$.

Розв'язання. 1) $\ln y = \ln(x^2+1)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x\ln(x^2+1)$.

2) $\dfrac{y'}{y} = \cos x\ln(x^2+1) + \sin x\dfrac{2x}{x^2+1}$.

3) $y' = y\left[\cos x\ln(x^2+1) + \dfrac{2x\sin x}{x^2+1}\right] =$

$$= (x^2+1)^{\sin x}\left[\cos x\cdot\ln(x^2+1) + \frac{2x\sin x}{x^2+1}\right] =$$

$$= (x^2+1)^{\sin x - 1}\left[(x^2+1)\cos x\ln(x^2+1) + 2x\sin x\right].$$

Похідні функцій, заданих неявно та параметрично

Для знаходження похідної функції, ***заданої неявно*** рівнянням $F(x,y)=0$, достатньо продиференціювати обидві частини рівняння, розглядаючи y як складену функцію від x, а потім зі здобутого рівняння знайти похідну y'.

Приклад: Знайти похідну функції y, задану неявно рівнянням $xy + \sin y = 0$.

Розв'язання

$$(xy + \sin y)' = 0'$$

$$y + xy' + y'\cos y = 0$$

$$y'(x + \cos y) = -y$$

Отже, $y' = \dfrac{-y}{x + \cos y}$.

Функція може бути задана ***параметрично*** у вигляді

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ де t - параметр.

Нехай функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ диференційовані в деякому околі точки t_0 і $x'(t) \neq 0$ для всіх t з цього околу. Тоді $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$

Приклад: Знайти похідну функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 1 - \sqrt{t} \end{cases}$

Розв'язання. Використаємо формулу $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y'_t = -\frac{1}{2\sqrt{t}}, x'_t = -2t, y'_x = \frac{-1}{2\sqrt{t}(-2t)} = \frac{1}{4t\sqrt{t}}$$

Похідні вищих порядків

Похідною другого порядку функції $y = f(x)$в точці х називається похідна від функції $f'(x)$ (похідна від похідної першого порядку цієї функції), тобто

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Позначення похідної другого порядку y'', $f''(x), \dfrac{\partial^2 y}{dx^2}, \dfrac{\partial^2 f}{dx^2}$

Приклад: Знайти похідну другого порядку функції $y = 3x^5 + 2$.

Розв'язання. $y' = (3x^5 + 2)' = 3 \cdot 5x^4 + 0 = 15x^4, y'' = (15x^4)' = 15 \cdot 4x^4 = 60x^3$.

Похідною n***-го порядку*** функцій $y = f(x)$ називається похідна функції $f^{(n-1)}(x)$ (похідна від похідної $(n-1)$-го порядку), тобто

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Позначення похідної n-го порядку: $y^n; f^n(x); \frac{d^2y}{dx^2}; \frac{d^2f}{dx^2}$

Приклад: Знайти похідну 3-го порядку функції $y = 3x^2 - 2x + 1$.

Розв'язання. $y' = \left(3x^2 - 2x + 1\right)' = 3\cdot 2x - 2\cdot 1 + 0 = 6x - 2$

$y'' = \left(6x - 2\right)' 6\cdot 1 - 0 = 6$ $\quad\quad$ $y''' = (6)' = 0$

Диференціал функції однієї змінної
Означення диференціала функції, його геометричний зміст

Нехай функція $y = f(x)$ диферениийовна на відрізку $[a,b]$. За означенням похідної функції $y = f(x)$ в точці x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

Оскільки $\Delta x \to 0$. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + a$, де a - нескінченно мала величина.

Маємо: $\Delta f = f'(x) \cdot \Delta x + a \cdot \Delta x$

Величину $f'(x) \cdot \Delta x$ (при $\Delta x \to 0$) називають диференціалом функції $y = f(x)$ і позначають $df(x)$ або dy.

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x називається добуток похідної функції в цій точці на приріст аргументу: $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ або $dy = f'(x) \cdot dx$

Диференціал функції $y = f(x)$, що відповідає значенню x і Δx, є ***приростом ординати дотичної*** до графіка функції $y = f(x)$ в точці x.

Диференціал $df(x)$ є *лінійним наближенням (апроксимацією) до приросту* функції: $\Delta f(x) \approx df(x)$. Наскільки менше $|\Delta x|$, настільки краще наближення (апроксимація) (рисунок 5.2).

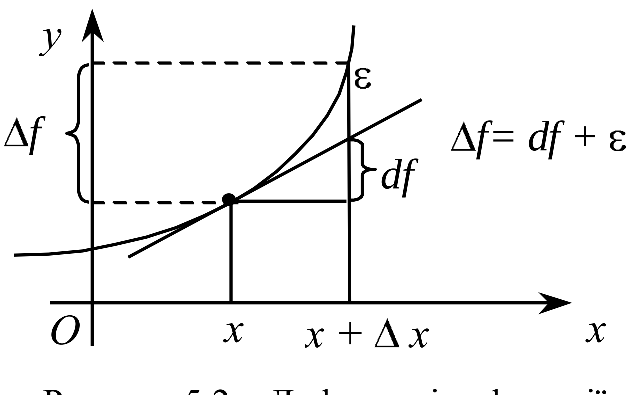


Рисунок 5.2 – Диференціал функції

Диференціали вищих порядків

Диференціалом 2-го порядку функції $y = f(x)$ в точці x: називається вираз $d\ \ dy\ \ = d^2 y$ (диференціал від диференціала 1-го порядку функції в цій точці) $d^2 y = f''\ \ x\ \ dx^2$

Диференціалом n***-го порядку*** функції $y = f(x)$ в точці x: називається вираз $d\ \ d^{n-1} y\ \ = d^n y$ (диференціал від диференціала $\ n-1\ $ -го порядку функції в цій точці) $d\ \ d^{n-1} y\ \ = f^{\ \ n}\ \ \ x\ \ dx^n$.

Приклад: Знайти диференціал 3-го порядку функції
Розв'язання. Диференціал 3-го порядку функції знайдемо за формулою
$y = x^3 + e^{-2x}$

$$d^3 y = y^{\ 3}\ dx^3$$

$$y'\ \ x^3 + e^{-2x}\ \ ' = 3x^2 + e^{-2x}\ \ -2x\ \ ' = 3x^2 - 2e^{-2x}$$

$$y'' = (3x^2 - 2e^{-2x})' = 6x + 4e^{-2x},\ y''' = 6 - 8e^{-2x}$$

Отже, $d^3 y = \ \ 6 - 8e^{-2x}\ \ dx^3$.

Правила знаходження диференціала

1. Диференціал суми двох диференційовних функцій u і v дорівнює сумі диференціалів цих функцій: $d\ \ u+v\ \ = du + dv$.
2. Диференціал добутку двох диференційовних функцій u і v визначається за формулою $d\ \ uv\ \ = vdu + udv$.
3. Диференціал частки двох диференційовних функцій u і v визначається за формулою $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$
4. Диференціал складеної функції. Нехай $y = f(u), u = \varphi\ \ x$, тобто $y = f\ \ \varphi\ \ x$. Тош\ $dy = f'\ \ u\ \ \cdot \varphi'\ \ x\ \ dx$.

Застосування диференціала до наближених обчислень

У наближених обчисленнях використовується рівність
$f\ \ x_0 + \Delta x\ \ \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

Приклад: Обчислити наближено $\sqrt[3]{1{,}012}$.

Розв'язання

Використаємо рівність $f\ \ x_0 + \Delta x\ \ \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

$$x_0 = 1, \Delta x = 0{,}012, f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f'\ \ x\ \ = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}, f\ \ x_0\ \ = f(1) = 1, f'\ \ x_0\ \ = f'(1) = \frac{1}{3}$$

Отже, $\sqrt[3]{1,012} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,012 \approx 1,004$.

Відповідь. $\sqrt[3]{1,012} \approx 1,004$.

Основні теореми диференціального числення. Дослідження функцій та побудова їх графіків

Правило Лопіталя

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$:

1. диференційовні в деякому околі точки a і в цьому околі $g'(x) \neq 0$
2. одночасно є нескінченно малими або нескінченно великими в точці a
3. існує границя відношення похідних цих функцій $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Тоді існує

границя відношення цих функцій $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \quad \textit{або} \quad \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Приклад: За правилом Лопіталя знайти $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^2}{x - \sin x}$

Розв'язання

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x - \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(2x)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sin x} = \infty$$

ЗАСТОСУВАННЯ ПРАВИЛА ЛОПІТАЛЯ ДЛЯ РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ВИДУ $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$

I. Невизначеність $[0 \cdot \infty]$

за допомогою перетворень зводиться до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а далі застосовується правило Лопіталя.

Знайти границю $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)\psi(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0, \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = \infty$.

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)\psi(x)=[0\cdot\infty]\underset{\substack{\text{Залежно від } f(x),\varphi(x)\\ \text{і можливості подальшого спрощення}}}{=}\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}=\left[\dfrac{0}{0}\right];\\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right].\end{cases}$$

Приклад: Знайти: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n e^{-x}(n>0)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n e^{-x}=[\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)(n-m+1)}{e^x}=0$$

якщо $x\to+\infty$, то степенева функція зростає повільніше, ніж будь-яка інша показникова функція

II. Невизначеність $[\infty-\infty]$

за допомогою перетворень зводиться до невизначеності виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Знайти $\lim\limits_{x\to a}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{\varphi(x)}\right)$, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$.

$$\lim_{x\to a}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{\varphi(x)}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\varphi(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{\varphi(x)}}\ .$$

Приклад: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x\sin x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0\ .$$

III. Невизначеність $[1^\infty]$

За допомогою перетворень зводиться до $[\infty\cdot 0]$.

Знайти $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$, де $\lim\limits_{x\to a}u(x)\Rightarrow 1, \lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$.

$$\lim_{x\to a}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to a}e^{v(x)\ln u(x)}=\lim_{x\to a}e^{v\ln[1+(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to a}v(x)(u(x)-1)}=e^{[\infty\cdot 0]}\ .$$

Приклад: Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\cdot(\operatorname{tg}x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-1\right)}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos 2x}\left(\frac{\sin x-\cos x}{1}\right)\sqrt{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x+\sin x)\sqrt{2}}{-\sin 2x\cdot 2}}=e^{\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}}{-2}}=e^{-1}.$$

IV. Невизначеність $[\infty^0]$, $[0^0]$

За допомогою перетворень зводяться до невизначеності виду $[\infty\cdot 0]$.

Знайти $\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a}u(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to a}v(x)=0$,

$$\lim_{x\to a}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to a}e^{v\ln u}=e^{\lim\limits_{x\to a}v\ln u}=e^{[0\cdot\infty]}.$$

Приклад: Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=[\infty^0]=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln n}=e^0=1$

Приклад: Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=[0^0]=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\ln n}{n}}=e^0=1$.

Зауваження. Часто границі обчислюють, комбінуючи різні методи — застосування шкали еквівалентностей та правила Лопіталя.

Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. **Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку (a, b) і в деякій точці C цього проміжку (a, b) набуває найбільшого або найменшого значення. Якщо в точці $x = C$ існує похідна, то $f'(C) = 0$.**

Геометрична інтерпретація теореми Ферма. Геометрично теорема Ферма означає, що в точках, де функція набуває найбільшого та найменшого значень, дотичні є горизонтальними (рисунок 5.3).

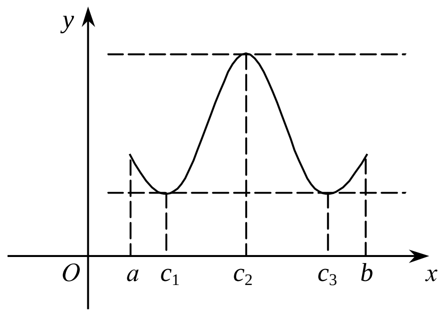


Рисунок 5.3 – Теорема Ферма

***Зауваження*.** Якщо найбільше значення досягається на кінцях відрізка $[a, b]$, то похідна в цій точці не повинна перетворюватися на нуль. У цій точці не повинно бути горизонтальної дотичної (рисунок 5.4).

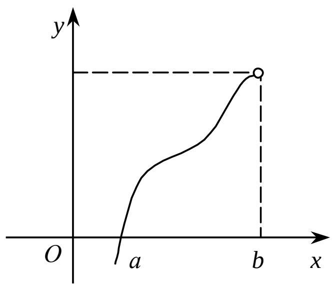


Рисунок 5.4 – Частинний випадок

ТЕОРЕМА РОЛЛЯ

Теорема Ролля. **Нехай задано функцію *f*(*x*), неперервну на відрізку [*a*, *b*] і диференційовну на інтервалі (*a*, *b*). Тоді якщо *f*(*a*) = *f*(*b*), то всередині відрізка [*a*, *b*] знайдеться точка ξ (*a* < ξ < *b*), така що**

$$f'(\xi) = 0.$$

Геометрична інтерпретація теореми Ролля: **якщо виконуються умови теореми Ролля, то знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична паралельна осі абсцис. У цій точці похідна й дорівнює нулю (на рисунку 5.5 4 таких точок три).**

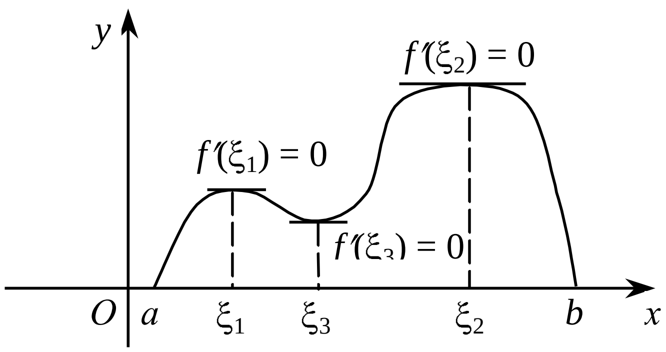


Рисунок 5.5 –Теорема Ролля

У точках ξ_1, ξ_2, ξ_3 дотична завжди горизонтальна, оскільки $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$.

Формулювання теореми Ролля в разі, коли $f(a) = f(b) = 0$:

Якщо функція *f*(*x*) неперервна на відрізку [*a*, *b*], що визначається її коренями, і диференційовна усередині такого відрізка, то обов’язково між коренями функції знайдеться хоча б один корінь її похідної.

Зауваження. Якщо порушується хоча б одна з умов теореми Ролля, то може не бути точки, в якій похідна функції дорівнює нулю.

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА

Теорема Лагранжа **(про скінченні прирости функції). Нехай задано функцію *f*(*x*), неперервну на відрізку [*a, b*] і диференційовну на інтервалі (*a* і *b*). Тоді знайдеться точка ξ (*a* < ξ < *b*), така що похідна *f*′(*x*) функції в цій точці *f*′(*x*) дорівнюватиме відношенню** $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$**:**

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа. На інтервалі (*a*, *b*) знайдеться хоча б одна точка ξ, в якій дотична є паралельною хорді *AB*, що сполучає кінці дуги функції *f*(*x*) на відрізку [*a*, *b*] (рисунок 5.6).

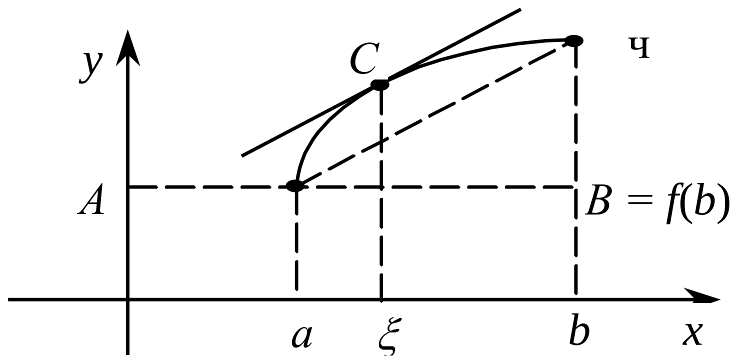


Рисунок 5.6 – Теорема Лагранжа

ТЕОРЕМА КОШІ

Теорема Коші **(про кінцеві прирости двох функцій). Нехай на відрізку [*a, b*] задано дві функції *f*(*x*) і φ(*x*). Якщо ці функції неперервні на відрізку [*a, b*] і диференційовні на інтервалі (*a, b*), причому** $\varphi(x)\neq 0$ **не перетворюється на нуль, то на інтервалі (*a, b*) існує точка ξ (*a* < ξ < *b*), така що**

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \qquad (5.1)$$

Геометрична інтерпретація

Нехай рівняння

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=f(t),\ t\in[a;\,b] \end{cases}$$

є рівнянням кривої, де на функції $\varphi(t)$ і $f(t)$ накладено умови теореми Коші (рисунок 5.7).

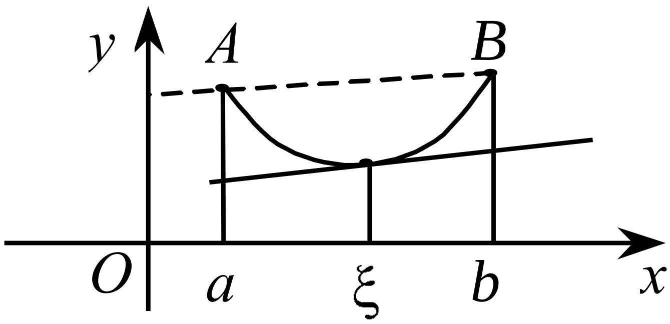


Рисунок 5.7 – Теорема Коші

Тоді $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ є кутовим коефіцієнтом хорди, що сполучає точки $A(\varphi(a), f(a))$ і $B(\varphi(b); f(b))$ кривої, а кутовим коефіцієнтом дотичної до кривої (5.1) у точці $t=\xi,\ a<\xi<b$ є відношення $\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$. Отже, теорема Коші стверджує існування точки ξ, в якій дотична до кривої (5.1) паралельна хорді, що сполучає кінці цієї кривої.

Приклад: Чи задовольняє функція $f(x)=3x^2-1$ умови теореми Ферма на відрізку [1; 2]?

Розв'язання. Функція $f(x)$ не задовольняє умову теореми Ферма, оскільки вона монотонно зростає на відрізку [1; 2], набуваючи найбільшого значення при x = 2 і найменшого при x = 1. Отже, не можна стверджувати, що $f'(1)=f'(2)=0$. Справді, $f'(1)=6$ і $f'(2)=12$.

Приклад: Перевірити, що функції $f(x)=x^2-2x+3$ і $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ задовольняють умови теореми Коші на відрізку [1; 4] і знайти відповідне значення ξ.

Розв'язання. Задані функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні всюди, а отже, і на відрізку
[1; 4]; їх похідні $f'(x)=2x-2$ і $g'(x)=3x^2-14x+20$ є скінченними. Окрім того, $g'(x)$ не перетворюється на нуль при жодному дійсному x.

Таким чином, можемо застосувати формулу Коші:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\ \text{тобто}\ \frac{11-2}{27-9}=\frac{2\xi-2}{3\xi^2-14\xi+20}\ (1<\xi<4).$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо значення ξ_1 та ξ_2. перевіряємо, чи лежать вони на заданому відрузку [1; 4].

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Нехай функція $f(x)$ має n похідних у точці x_0.

Означення. Многочлен

$$T(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

називається *многочленом Тейлора функції f(x) у точці* x_0.

Теорема. **Нехай функція $f(x)$ має в ε-околі точки x_0 $(n+1)$ похідну. Тоді для будь-якої точки x із цього околу знайдеться точка c, розміщена між точками x і x_0, для якої справджується рівність:**

$$f(x) = Ф(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad (5.2)$$

де $T(x)$ — n-й многочлен Тейлора функції $f(x)$ у точці x_0.

Беручи у формулі (5.2) $x_0 = 0$, дістанемо ***формулу, яку називають формулою Маклорена***:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

де c — точка, розміщена між 0 і x.

Приклад: Розкласти за формулою Тейлора функцію $y = e^x$ у т. $x_0 = 0$.

Розв'язання. Обчислимо:

$$y = e^x, \quad y(0) = 1;$$
$$y' = e^x, \quad y'(0) = 1;$$
$$y'' = e^x, \quad y''(0) = 1.$$

Далі за формулою Тейлора (2) маємо:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \ 0 < \theta < 1.$$

Зокрема, при $x = 1$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \ 0 < \theta < 1.$$

У цьому розкладі залишковий член прямує до нуля при $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} = 0.$$

Можна записати: $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

Цей вираз називають рядами і позначають так:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+...=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Зростання та спадання функції, достатня умова

Функція $y=f(x)$ називається **зростаючою на інтервалі** a,b якщо більшому значенню аргументу з цього інтервалу відповідає більше значення функції, тобто якщо з нерівності $x_2>x_1$ випливає нерівність $f\ \ x_2\ >f\ \ x_1$.

Функція $y=f(x)$ називається **спадною на інтервалі** a,b **,** якщо більшому значенню аргументу з цього інтервалу відповідає менше значення функції, тобто якщо з нерівності $x_2>x_1$, випливає нерівність $f\ \ x_2\ <f\ \ x_1$.

Достатня умова зростання (спадання) функції

Якщо в кожній точці інтервалу a,b $f'\ x\ >0$, то функція $y=f(x)$ зростає на цьому інтервалі.

Якщо в кожній точці інтервалу a,b $f'\ x\ <0$, то функція $y=f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

Екстремуми функцій, необхідна та достатня умови

Точка x_0 називається точкою **локального максимуму функції** $y=f(x)$**,** якщо існує такий окіл точки x_0, для всіх точок x якого виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$.

Точка x_0 називається точкою **локального мінімуму функції** $y=f(x)$**,** якщо існує такий окіл точки x_0, для всіх точок x якого виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$.

Точки максимуму $x\max$ і точки мінімуму $x\min$ називаються **точками екстремуму**. Значення функції в точках максимуму $y\max$ та мінімуму $y\min$ називається екстремумами (максимумом і мінімумом) функції.

Критичні точки - це внутрішні точки області визначення функції, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує.

Необхідна умова екстремуму

Точка x_0 є точкою екстремуму функції $y=f(x)$, якщо похідна функції в цій точці дорівнює нулю або не існує .

Достатня умова екстремуму

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0 і похідна $f'(x)$ функції змінює знак в цій точці, то x_0 - точка екстремуму функції $y=f(x)$:

- у точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з "$+$" на "$-$" (x_0 - точка максимуму)

- у точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з "$-$" на "$+$" (x_0 - точка мінімуму)

Алгоритм дослідження функції $y=f(x)$ на зростання (спадання) та екстремуми.

1. Знайти область визначення та інтервали, на яких функція неперервна.
2. Знайти похідну $f'(x)$.
3. Знайти критичні точки:

   $f'(x)=0$,

   $f'(x)$ не існує.

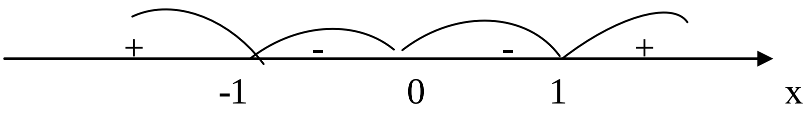
4. Позначити критичні точки на області визначення функції, розбити цими точками область визначення на інтервали. Знайти знак похідної на кожному інтервалі.
5. Знайти проміжки зростання $(f'(x)>0)$ та проміжки спадання $(f'(x)<0)$.
6. Визначити точки екстремуму $x_{\max}$ і $x_{\min}$. Знайти $y_{\max}$ і $y_{\min}$

Приклад: Дослідити функцію $f(x)=3x^5-5x^3+1$ на зростання (спадання) та екстремуми.

Розв'язання

$$f(x)=3x^5-5x^3+1$$

1. $D(f):\ (-\infty;+\infty)$;
2. $f'(x)=15x^4-15x^2$
3. $f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x^2-1)=0$



4. $f(x)$ зростає при $x\in(-\infty;-1)$; $(1;\infty)$; $f(x)$ спадає при $x\in(-1;1)$
5. $x_{\max}=-1, y_{\max}=f(-1)=3\cdot(-1)^5-5(-1)^3+1=-3+5+1=3$

   $x_{\min}=1, y_{\min}=f(1)=3\cdot 1^5-5\cdot 1^3+1=-1$

Опуклість, угнутість кривих та точки перегину функції

Крива $y = f(x)$ називається ***опуклою*** на інтервалі a,b, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі (рисунок 5.8).

Крива $y = f(x)$ називається ***угнутою*** на інтервалі a,b, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі (рисунок 5.8).

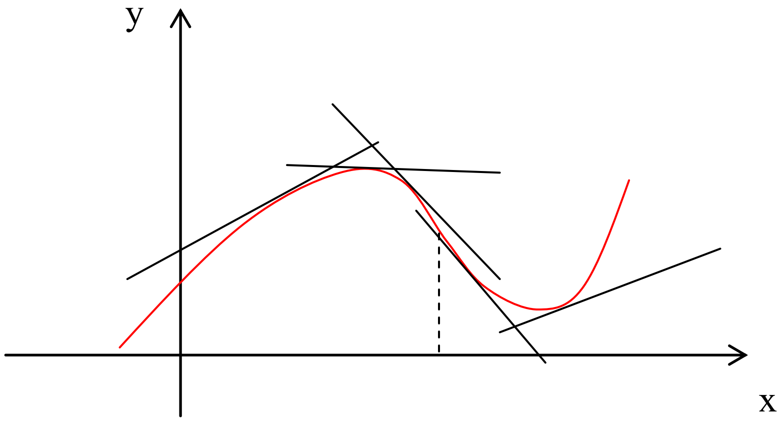


Рисунок 5.8 – Опуклість та угнутість кривої

Точка кривої $y = f(x)$ називається ***точкою її перетину***, якшо вона відділяє її опуклу частину від угнутої.

Достатні умови опуклості на угнутості функції

Якщо в кожній точці інтервалу a,b $f''(x) > 0$, то на інтервалі a,b графік функції $f(x)$ напрямлено опуклістю вниз ***(опуклий)***

Якщо в кожній точці інтервалу a,b $f''(x) < 0$- то на інтервалі a,b графік функції $f(x)$ напрямлено опуклістю вгору ***(угнутий)***

Необхідна умова існування точки перегину

У точках перегину функції $y = f(x)$ її друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує.

Достатня умова існування точки перегину

Якщо функція $y = f(x)$ має першу і другу похідну на інтерваїлі a,b і її друга похідна змінює знак при переході через точку $x_0 \in a,b$, то точка x_0 є точкою перегину функції $y = f(x)$.

Алгоритм дослідження функції $y = f(x)$ на опуклість, угнутість і точки перегину

1. Знайти область визначення і інтервали, на яких функція неперервна.
2. Знайти другу похідну $f''(x)$.
3. Знайти внутрішні точки області визначення, в яких $f''(x) = 0$ або не існує.
4. Позначити одержані точки на області визначення, знайти знак другої похідної функції на кожному інтервалі, на які розвивається область визначення.

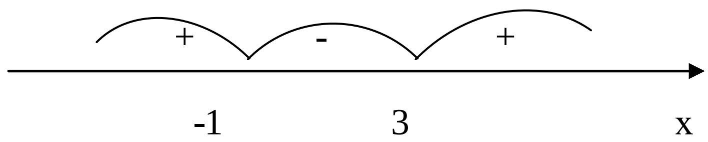
5. Записати потрібний результат дослідження (інтервали опуклості, угнутості і точки перегину).

Приклад: Знайти проміжки опуклості, угнутості та ТОЧКИ перегину функції $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 1$.

Розв'язання. Функція неперервна в кожній точці своєї області визначення.

1. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 18x$ $f''(x) = 12x^2 - 24x - 18$
2. $f''(x) = 12x^2 - 24x - 18 = 0$

$x_1 = -1, x_2 = 3$



3. Графік функції $f(x)$ опуклий при $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$; угнутий при $x \in (-1, 3)$
4. Точки перегину: x =-1 і x = 3.

Найбільше і найменше значення функції, неперервної на відрізку

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку і має на ньому скінченне число критичних точок, то вона набуває свого *найбільшого і найменшого значення на цьому відрізку або в критичних точках*, які належать цьому відрізку, або на кінцях відрізка.

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції; неперервної на відрізку

1. Знайти похідну $f'(x)$
2. Знайти критичні точки: а) $f'(x) = 0$, б) $f'(x)$ не існує.
3. Вибрати критичні точки, які належать цьому відрізку.
4. Обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка.
5. Вибрати з них найменше і найбільше.

Приклад: Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 2$ при $x \in [1;3]$.

Розв'язання

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 2$, $x \in [1;3]$

1. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$
2. $f'(x) = 0$, $x^2 + 2x - 8 = 0$

$x_1 = -4, x_2 = 2$

3. $x_1 = -4 \notin [1;3]$
4. $f(1) = -18$, $f(2) = -26$, $f(3) = -16$ $f(1) = 2, f(2) = -6, f(3) = 4$
5. $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(3) = -16$, $\min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = -26$

Асимптоти до кривої графіка функції

Асимптотою кривої називають пряму (або криву) лінію, до якої необмежено наближається графік функції, але не перетинає її. Асимптоти бувають горизонтальні, вертикальні і похилі.

1. ***Вертикальні асимптоти***. Якщо функція $y = f(x)$ має в точці розрив другого роду й існує хоча б одна із нескінченних односторонніх границь функції в точці x_0 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, то пряму $x = x_0$ називають *вертикальною асимптотою кривої* $y = f(x)$.
2. ***Похилі асимптоти***. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в інтервалі $a;+\infty$ або в інтервалі $-\infty;a$.

   Пряму $y = kx + b$ називатимемо похилою асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо виконується умова: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f \;\; x - kx - b = 0$.

   Теорема. Крива $y = f(x)$ тоді і тільки тоді мас асимптоту $y = kx + b$, коли існують скінченні границі

   $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}, b = \lim\limits_{x\to+\infty} \;\; f(x) - kx$
3. ***Горизонтальні асимптоти***. Якщо в похилій асимптоті $y = kx + b$ функції $y = f(x)$ маємо $k = 0$, то таку похилу асимптоту називають горизонтальною асимптотою функції: $y = b$.

   Для того, щоб пряма $y = b$ ***була горизонтальною асимптотою*** функції $y = f(x)$, необхідно і достатньо, щоб існувала скінченна границя

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$$

Приклад: Знайти асимптоти функції $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Розв'язання

1. Знайдемо одну із односторонніх границь функції в точці $x = -1$:

$$\lim_{x\to-1+} f(x) = \lim_{x\to-1+} \frac{x-1}{x+1} = \left[\frac{-2}{+0}\right] = -\infty$$

$x = -1$ - точка розриву другого роду заданої функцій

Отже, $x = -1$ - *вертикальна* асимптота.

2. Знайдемо похилу асимптоту $y = kx + b$, використавши формули

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x\to+\infty} \;\; f(x) - kx$$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{(x+1)x} = 0, b = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$$

Оскільки $k = 0$, то $y = 1$ - *горизонтальна* асимптота.

Загальна схема дослідження функції $y = f(x)$

Перший етап (використання властивостей заданої функції)

1. Область визначення функції $y = f(x)$	$D(f)$
2. Парність, непарність і періодичність	$f(x)$ - парна, якщо $\begin{cases} D(f) \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$ - *симетрична відносно Ох;* $f(x)$ - непарна, якщо $\begin{cases} D(f) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$ - *симетрична відносно початку координат;* $f(x)$ - періодична, якщо $f(x+T) = f(x)$
3. Точки перетину графіка з осями координат	з віссю ox: з рівняння $y = f(x)$ знаходять x, з віссю oy $x = 0$, знаходять значення $y = f(x)$
4. Точки розриву. Асимптоти графіка функції $y = f(x)$	*Вертикальні асимптоти* - у точках нескінченного розриву 2-го роду функції $y = f(x)$. *Похилі асимптоти:* $y = kx + b$, де $k \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}; b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ f(x) - kx$

Другий етап (використання похідної першого порядку)

5. Знайти похідну та критичні точки функції $y = f(x)$	$f' \ x$ $f' \ x \ = 0$ або $f' \ x$ не існує
6. Проміжки зростання, спадання	$f' \ x \ > 0$ - зростає, $f' \ x \ < 0$ - спадає
7. Точки екстремуму функції $y = f(x)$	Якщо $f' \ x$ змінює знак при переході через x_0 з "$+$" на "$-$" то $x_0 = x_{\max}$. якщо з "$-$" на "$+$" то $x_0 = x_{\min}$

Третій етап (використання похідної другого порядку)

8. Знайти другу похідну та критичні точки другого роду	$f''(x)$ $f''(x) = 0$ або $f''(x)$ не існує
9. Проміжки опуклості, угнутості	$f''(x) < 0$ - угнута $f''(x) > 0$ - опукла
10. Точки перетну і значення функції в цих точках	якщо $f''(x)$ змінює знак при переході через x_0, то x_0 - точка перегину

Приклад: $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$.

1) $D(y): x\neq 0$, тобто $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) Точки перетину графіка з координатними осями. При $y=0:\ \frac{x}{2}+\frac{2}{x}=0$ $\Rightarrow$ $\frac{x^2+4}{2x}=0$, звідки $x^2+4\neq 0$, тобто з віссю Ox графік не перетинається. Зважаючи на те, що $x\neq 0$, робимо висновок, що графік не перетинає вісь Oy.

3) Функція не періодична, вона непарна бо $y(-x)=-\frac{x}{2}-\frac{2}{x}=-\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=$

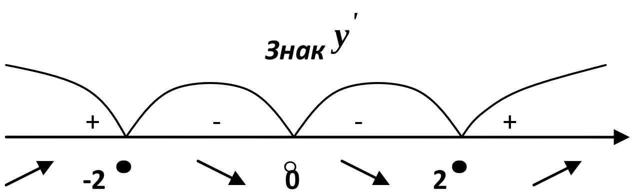
$=-y(x)$. Тому її графік є симетричним відносно початку координат.

1) В точці $x=0$ функція має розрив ІІ-го роду, тому що $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=\ =\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\frac{x^2+4}{2x}=\pm\infty$.

Отже, пряма $x=0$ - вертикальна асимптота.

5) Знайдемо $y'=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}$. Розв'яжемо рівняння $y'=0:$ $\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}=0$, $\frac{2}{x^2}=\frac{1}{2}$,

$x^2=4$, звідки $x_1=2,\ x_2=-2$ - критичні точки функції. Похідна не існує при $x=0\notin D(y)$.



Функція зростає на інтервалах $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$; функція спадає на інтервалі $(-2;2)$.

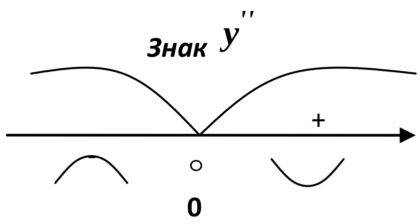
$x=-2$ - точка максимуму функції, а $x=2$ - точка мінімуму.

Обчислимо $y_{max}=y(-2)=-1-1=-2$,

$y_{min}=y(2)=1+1=2$.

Отже, $A_1(-2;-2)$, $A_2(2;2)$ - екстремальні точки.

6) Знайдемо $y''=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}\right)'=\frac{4}{x^3}$.



Зважаючи на те, що $y''=\dfrac{4}{x^3}\neq 0$ робимо висновок, що точок перегину графік функції не має.

Функція вгнута на інтервалі $(0;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;0)$.

7) Вертикальну асимптоту ми вже знайшли: $x=0$. Знайдемо похилу асимптоту.

Обчислимо $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}$,

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}=0.$$

Тоді пряма $y=\dfrac{x}{2}$ - похила асимптота.

8) Побудуємо графік (рисунок 5.9).

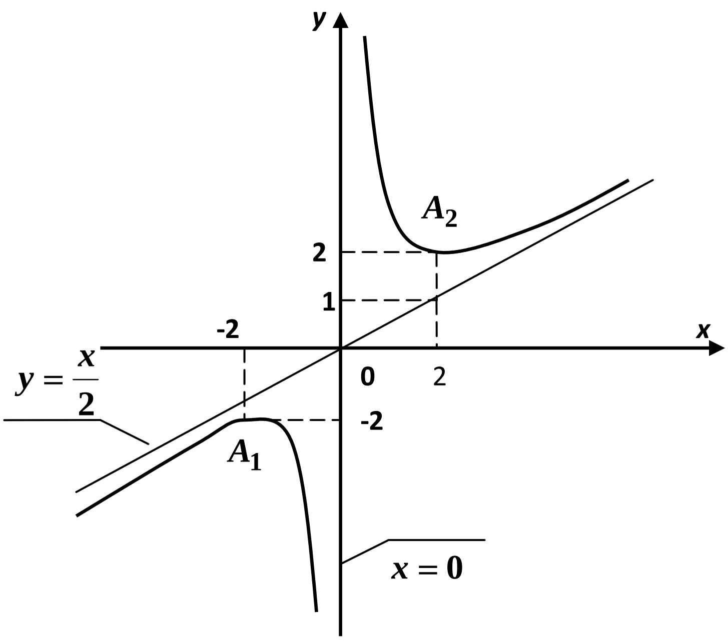


Рисунок 5.9 – Графік функції

Застосування знань та вмінь з теми в економіці

Приклад: Функція доходу від ціни фірми $TR=-5p^2+100p$. Визначте, яким буде граничний дохід фірми при ціні 2 грн., 5 грн., 10 грн.

Розв'язання. Знайдемо граничний дохід:

$MR = TR'(p) = -10p + 100$.

Визначимо граничний дохід при різних значеннях ціни:

$MR(2) = 80$, $MR(5) = 50$, $MR(10) = 0$.

Отже, при ціни 2 грн. додатковий дохід буде складати 80 грн., при ціні 5 грн. – 50 грн., при ціні 10 грн. – 0 грн.

Приклад: Функція витрат підприємства $TC(Q) = 2Q^2 + 3Q + 4$. Визначте граничні витрати, якщо обсяг виробництва буде 50, 100, 150 одиниць.

Розв'язання. Знайдемо граничні витрати: $MC = TC'(Q) = 4Q + 3$.

Визначимо граничні витрати при різних обсягах виробництва:

$MC(50) = 203$, $MC(100) = 403$, $MC = 603$.

Отже, додаткові витрати на виробництво 50-ої одиниці продукції складають 203 грн., 100-ї од. – 403 грн., 150-ї – 603 грн.

РОЗДІЛ 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Функції багатьох змінних

Диференційованість функцій багатьох змінних

Поняття про функції багатьох змінних

Упорядкований набір n дійсних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ називають точкою і позначають $X = x_1, x_2, ..., x_n$.

Відстань між точками $X = x_1, x_2, ..., x_n$ і $Y = y_1, y_2, ..., y_n$ подається у вигляді $p(x, y) = \sqrt{x_1 - y_1 {}^2 + x_2 - y_2 {}^2 + ... + x_n - y_n {}^2}$ (6.1).

N***-вимірним евклідовим простором*** R^n називається сукупність найрізноманітніших упорядкованих точок $x_1, x_2, ..., x_n$, відстань між якими визначається за формулою (6.1). Число n називається розмірністю цього простору.

Функцією багатьох змінних $Z = f \ x_1, x_2, ..., x_n$ називається закон, який кожній точці $X = x_1, x_2, ..., x_n$ множини D простору R^n ставить у відповідність одне і тільки одне дійсне число $Z \in E \subset R^n$.

Множина D - область визначення функції,

E - область значень функції.

Функцією двох змінних $Z = f \ x_1, x_2$ називається закон, який кожній парі чисел x_1, x_2 деякої множини $D \subset R^n$ ставить у відповідність єдине дійсне число Z .

Наприклад, функція витрат виробництва є функцією двох змінних: матеріальних затрат x_1 і витрат x_2 на оплату робочої сили $Z = f \ x_1, x_2$.

Приклад: Знайти область визначення функції $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - y^2 + 16}}$

Розв'язання

$$D(f): -x^2 - y^2 + 16 > 0$$
$$x^2 + y^2 < 16 .$$

Графіком лінії $x^2 + y^2 = 16$ є коло з центром у початку координат і радіусом рівним 4.

Областю визначення заданої функції є множина точок площини, які розміщені всередині цього кола.

Способи задання функцій багатьох змінних. Лінії рівня

Способи задання функції: аналітично (у вигляді формули); таблично; графічно.

Геометрично зображати функцію двох змінних можна за допомогою ліній рівня.

Лініями рівня функції $z = f(x, y)$ називаються криві лінії l, що лежать у площині xOy і мають рівняння $f(x, y) = C$, де C - стала.

Щоб знайти лінії рівня функції $Z = f(x, y)$, потрібно придати цій функції постійні значення $C_1, C_2, ...,$ тоді отримаємо лінії рівня $f(x, y) = C_1,\ f(x, y) = C_2, ...,$ за взаємним розміщенням яких можна отримати уявлення про графік функції, тобто про форму поверхні.

Прикладом ізоліній є паралелі та меридіани.

Приклад:

1. Побудуємо лінії однакового рівня функції $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$. При C=0 маємо $0 = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$, тобто $x^2+y^2=10^2$ (коло з радіусом r=10, рисунок 6.1).

При C=6 отримуємо $6 = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$ тобто $x^2+y^2=8^2$. Отже лінією рівня, яка відповідає константі C=6, є коло з радіусом r = 8.

При C=8 отримуємо ізолінію (неявну функцію y від x) $x^2+y^2=6^2$.

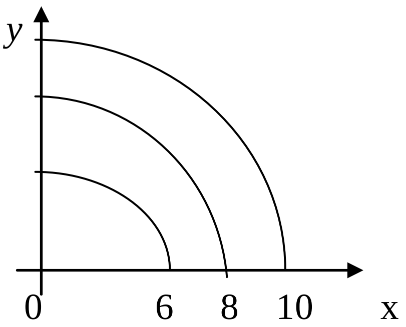


Рисунок 6.1 – Лінії рівня

Границя та неперервність функції двох змінних

Число B називається границею функції $z = f(x, y)$ при $x \to x_0, y \to y_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що в разі виконання нерівності $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$, справджується нерівність $\left| f(x, y) - B \right| < \varepsilon : \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = B$

Основні теореми про границі функцій однієї змінної залишаються правильними і у випадку функцій багатьох змінних.

Теорема 1. Якщо функція $f(x, y)$ має границю при $x \to x_0, y \to y_0$, то така границя єдина.

Теорема 2. Якщо функція $f(x, y)$ має границю при $x \to x_0, y \to y_0$, то вона обмежена в деякому околі точки $f(x_0, y_0)$.

Теорема 3. Якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=b, \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} g(x,y)=c$, то виконуються рівності:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)+g(x,y) \;=b+c$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)g(x,y)=b\cdot c$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} \dfrac{f(x,y)}{n(x,y)}=\dfrac{b}{c}, c\neq 0$

Функція двох змінних $z=f(x,y)$ називається ***неперервною в точці*** $M_0(x_0,y_0)$, якщо існує границя функції в цій точці і виконується рівність

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

Функція двох змінних $z=f(x,y)$ називається ***неперервною в області***, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Частинний та повний прирости функції багатьох змінних, частинні похідні

Нехай функція двох змінних $z=f(x,y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0,y_0)$. Надамо x та y приростів $\Delta x_0, \Delta y_0$ так, щоб точка $P_0(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ не виходила за межі зазначеного околу, тоді й точки $K(x_0+\Delta x, y_0)$, $M(x_0, y_0+\Delta y)$ також потраплять у цей окіл.

Різницю $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\Delta \mathrm{z}$ називають ***повним приростом функції*** $z=f(x,y)$ в точці (x_0,y_0).

Різницю $f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)=\Delta_x \mathrm{z}$ називають ***частинним приростом*** функції $z=f(x,y)$ за змінною x.

Різницю $f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\Delta_y \mathrm{z}$ - ***частинним приростом*** за у цієї функції.

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y}{\Delta x}=z'_x$,то її називають ***частинною похідною*** функції $z=f(x,y)$ за змінною x і позначають $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ або $f'_x(x,y), z'_x$.

Аналогічно визначається і позначається частинна похідна за змінною y

$$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=z'_y$$

Похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ називаються ***похідними першого порядку.***

Правило знаходження частинних похідних першого порядку

Для знаходження частинної похідної $\frac{\partial f}{\partial x}$ функції $z = f(x, y)$ користуються відомими формулами і правилами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи змінну y сталою; при обчисленні $\frac{\partial f}{\partial y}$ сталою вважають змінну x.

Приклад: Знайти частинні похідні першого порядку функції $Z(x, y) = x^2y - 3y^2 + 5x$.

Розв'язання. Знайдемо частинну похідну за змінною x, вважаємо, що y - стала: $f'_x = y \cdot 2x - 0 + 5 = 2xy + 5$.

Знайдемо частинну похідну за змінною y, вважаємо, що x - стала: $f'_x = x^2 - 6y + 0 = x^2 - 6y$.

Приклад: Знайти значення частинної похідної за змінною x в точці (3,7) функції $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Знайдемо частинну похідну за змінною x, вважаємо, що y - стала:

$$f'_x = 1 + 0 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x^2 + y^2)'_x = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \; f'_x(3;4) = 1 - \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

Частинні похідні вищих порядків функції двох змінних, повний диференціал

Нехай функція $z = f(x, y)$ має в області D частинні похідні першого порядку.

Частинною похідною другого порядку функції $Z = f(x, y)$ за змінною x називають частинну похідну за змінною x від частинної похідної першого порядку за змінною x: $z''_{xx} = (z'_x)'_x$ або $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial Z}{\partial x})$

Частинною похідною другого порядку функції $Z = f(x, y)$ за змінною y називають частинну похідну за змінною y від частинної похідної першого порядку за змінною y:

і $z''_{yy} = (z'_y)'_y$ або $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$

Мішаною частинною похідною другого порядку функції $Z = f(x, y)$ називають частинну похідну за змінною x від частинної похідної першого порядку за змінною y або частинну похідну за змінною у від частинної похідної першого порядку за змінною x:

$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (z'_y)'_x$ або $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$

Якщо дві ***мішані похідні однакового порядку***, що відрізняються лише порядком диференціювання, неперервні в деякій точці, то їх значення в цій точці ***збігаються.*** *Тобто м*ішані частинні похідні другого порядку функції $Z = f(x,y)$ рівні, тобто $z''_{xy} = z''_{yx}$

Частинною похідною порядку $m \in N$ називають частинну похідну першого порядку за будь-якою змінною від будь-якої похідної $m-1$ порядку.

Приклад: Знайти мішані частинні похідні другого порядку функції $z = \cos\ x^2 + y^2$.

Розв'язання. Мішану похідну другого порядку знайдемо за формулою

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = -\sin\ x^2 + y^2\ \cdot\ x^2 + y^2\ '_y = -2y\sin\ x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \ -2y\sin\ x^2 + y^2\ '_x = -2y\cos\ x^2 + y^2\ \cdot\ x^2 + y^2\ '_x = -4xy\cos\ x^2 + y^2$$

Повним диференціалом функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається сума добутків частинних похідних цієї функції на прирости відповідних незалежних змінних:

$$d(f) = f'_{x_1}dx_1 + f'_{x_2}dx_2 + ... + f'_{x_n}dx_n$$

Диференціал функції двох змінних $Z = f(x,y)$ дорівнює $dz = z'_x dx + z'_y dy$

$$dx = \Delta x, dy = \Delta y$$

Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних до наближених обчислень

Для наближених обчислень використовують рівність

$$f\ \ x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_n^0 + \Delta x_n\ \approx f\ \ x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\ + df\ \ x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$$

Приклад: Обчислити наближено $\sqrt{\ 4{,}05\ ^2 +\ 3{,}07\ ^2}$.

Розв'язання

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y \quad x_0 = 4, y_0 = 3, \quad \Delta x = 0{,}05, \Delta y = 0{,}07$$

$$f(4,3) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \quad \Delta f\ \ x,y\ \approx df\ \ x,y\ = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Delta f(4,3) \approx \frac{4 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 0{,}07}{5} \approx 0{,}08$$

Отже, $\sqrt{\ 4{,}05\ ^2 +\ 3{,}07\ ^2} \approx 5 + 0{,}08 \approx 5{,}08$.

Похідна за напрямом. Градієнт

Нехай функція $Z = f(x,y)$ визначена в деякому околі точки $P_0\ \ x_0, y_0\ $, l - деякий промінь з початком у точці $\ x_0, y_0\ , P\ \ x, y\ $ - точка на цьому промені, яка належить околу точки $\ x_0, y_0\ , \Delta l$ - довжина відрізка P_0P.

Якщо існує $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{f(x,y) - f(x_0, y_0)}{\Delta l}$, то ця границя називається ***похідною функції*** $Z = f(x,y)$ ***за напрямом*** l у точці $P_0\ \ x_0, y_0\ $ і позначається $\dfrac{\partial z}{\partial l}$.

Зокрема $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ - похідна функції $Z = f(x,y)$ за додатним напрямом осі x, а $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ - похідна функції $Z = f(x,y)$ за додатним напрямом осі y.

Похідна за напрямом y характеризує ***швидкість зміни функції*** $Z = f(x,y)$ у точці $P_0\ \ x_0, y_0\ $ за напрямом.

Теорема. Якщо функція $Z = f(x,y)$ має в точці $P_0\ \ x_0, y_0\ $ неперервні частинні похідні, то в цій точці існує похідна $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ за будь-яким напрямом $I = \ \cos\alpha, \cos\beta\ $, причому

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z_0\ \ x_0, y_0}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z_0\ \ x_0, y_0}{\partial x}\cos\beta$$

Приклад: Знайти похідну функції $z = x\sin\ \ x + y\ $ у точці $M\ \ 1{,}1\ $ за напрямом $l = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin\ \ x + y\ \ x\cos(x+y), \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial z_0\ \ x_0, y_0}{\partial x} = \sin 2 + \cos 2, \frac{\partial z_0\ \ x_0, y_0}{\partial y} = \cos 2$$

Тоді $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \ \sin 2 + \cos 2\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos 2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sin 2}{\sqrt{2}}$

Градієнтом функції $Z = f(x,y)$ в точці $M\ \ x, y\ $ називається вектор, координати якого дорівнюють відповідним частинним похідним $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, взятим в точці $M\ \ x, y\ $ і позначається $gradZ = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}; \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$

Градієнт функції $Z = f(x, y)$ у точці x_0, y_0 ***вказує*** напрям найбільшої швидкості зміни функції в цій точці, а величина цієї найбільшої швидкості дорівнює довжині вектора-градієнта $|gradZ|$

Приклад: Нехай $u = x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_3^2 x_1, M_0 \;\; 1;-1;2$.

Знайти $gradu \;\; M_0$.

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_3^2, \frac{\partial u}{\partial x_2} = -3x_2, \frac{\partial u}{\partial x_3} = 4x_1 x_3$$

$$\frac{\partial u \;\; M_0}{\partial x_1} = 10, \frac{\partial u \;\; M_0}{\partial x_2} = 3, \frac{\partial u \;\; M_0}{\partial x_3} = 8$$

Отже, $gradu \;\; M_0 \;\; = \;\; 10;3;8$.

Дослідження функції багатьох змінних на екстремум, умовний екстремум

Поняття екстремуму функції двох та більше змінних.

Необхідні умови існування екстремуму функції багатьох змінних

Якщо функція $Z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки M_0, неперервна в цій точці і для довільної точки M цього околу виконується нерівність $f \;\; M_0 \;\; < f \;\; M$, то точка M_0 називається ***точкою локального мінімуму*** функції.

Якщо функція $Z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки M_0, неперервна в цій точці і для довільної точки M цього околу виконується нерівність $f \;\; M_0 \;\; > f \;\; M$, то точка M_0 називається ***точкою локального максимуму*** функції.

Точки максимуму і мінімуму називаються ***точками екстремуму функції***

Максимуми та мінімуми (значення функції в точках екстремуму) називаються ***екстремумами функції***.

Теорема *(необхідна умова існування екстремуму функції багатьох змінних).*

Якщо функція $Z = f \;\; x_1, x_2, ..., x_n$ має екстремум в точці $M \;\; x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$, то кожна частинна похідна першого порядку функції дорівнює нулю або не існує в цій точці: $\frac{\partial Z}{\partial x_i} = 0, \; i = \overline{1, n}$

Точки, в яких функція визначена, а її частинні похідні дорівнюють нулю або не існують, називаються ***критичними точками*** цієї функції (або точками підозрілими на екстремум).

Достатні умови існування екстремуму функції двох змінних

Теорема *(достатні умови існування екстремуму функції двох змінних).*

Нехай в околі критичної точки $M_0\ x_0, y_0$ функція $Z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку включно:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f\ \ x_0, y_0}{\partial x^2}, a_{22} = \frac{\partial^2 f\ \ x_0, y_0}{\partial y^2}, a_{12} = \frac{\partial^2 f\ \ x_0, y_0}{\partial x \partial y}$$

1. $f(x, y)$ має максимум в точці M_0, якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 > 0, a_{11} < 0$
2. $f(x, y)$ має мінімум в точці M_0, якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 > 0, a_{11} > 0$
3. $f(x, y)$ не має екстремуму, якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 < 0$
4. Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 0$, то потрібно використовувати іншу достатню ознаку.

Алгоритм знаходження екстремуму функцій двох змінних $u = f(x, y)$

1. Знайти частинні похідні першого порядку: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$
2. Знайти критичні точки. Для цього частинні похідні першого порядку прирівняти до нуля й розв'язати одержану систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$
4. Знайти значення частинних похідних другого порядку в критичних точках:
$$a_{11} = \frac{\partial^2 u\ \ x_0, y_0}{\partial x^2}, a_{22} = \frac{\partial^2 u\ \ x_0, y_0}{\partial y^2}, a_{12} = \frac{\partial^2 u\ \ x_0, y_0}{\partial x \partial y}$$
(в частинні похідні другого порядку замість x та y підставити координати критичної точки).
5. Для кожної критичної точки обчислити вираз $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2$ і зробити висновок згідно з теоремою про достатні умови існування екстремуму функції двох змінних.

Приклад: Знайти екстремуми функції $u_{\max}, u_{\min}$ $u = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$

Розв'язання

1. Знайдемо частинні похідні першого порядку: $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x - 3x^2; \frac{\partial u}{\partial y} = 6y - 4$

2. Критичні точки: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0; \end{cases} \begin{cases} 6x - 3x^2 = 0, \\ 6y + 4 = 0; \end{cases} \begin{cases} y = -\dfrac{2}{3} \\ x_1 = 0; x_2 = 2 \end{cases}$

$\left(0; -\dfrac{2}{3}\right), \left(2; -\dfrac{2}{3}\right)$ - критичні точки.

3. Частинні похідні другого порядку:

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 6 - 6x, \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 6, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$

а) у точці $\left(0; -\dfrac{2}{3}\right)$ маємо: $a_{11} = 6; a_{22} = 6; a_{12} = 0$;

$a_{11} a_{22} - {a_{12}}^2 = 36 > 0, a_{11} = 6 > 0$

Отже, $\left(0; -\dfrac{2}{3}\right)$ є точкою мінімуму.

$u_{\min} = 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot \left(\dfrac{-2}{3}\right)^2 - 0^3 + 4 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{3} - \dfrac{8}{3} = -\dfrac{4}{3}$

б) у точці $\left(2; -\dfrac{2}{3}\right)$ маємо: $a_{11} = -6; a_{22} = 6; a_{12} = 0$

$a_{11}; a_{22} - {a_{12}}^2 = -36 < 0$

Отже, в точці $\left(2; -\dfrac{2}{3}\right)$ екстремуму немає.

Таким чином, $\left(0; -\dfrac{2}{3}\right)$ - точка мінімуму, $u_{\min} = -\dfrac{4}{3}$.

Знаходження умовного екстремуму функції двох змінних методом множників Лагранжа

Екстремум функції $u = f(x, y)$ при виконанні умови $\varphi(x, y) = 0$ називають ***умовним екстремумом*** функції двох змінних.

Алгоритм знаходження умовного екстремуму функції двох змінних $u = f(x, y)$ методом Лагранжа

1. Записати функцію Лагранжа вигляду

$$L\ x, y\ = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

2. Знайти частинні похідні першого порядку: L'_x, L'_y, L'_λ.

3. Знайти критичні точки. Для цього потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$$

4. Знайти частинні похідні $L''_{xx}, L''_{yy}, L''_{xy}, \varphi'_x, \varphi'_y$

5. Для кожної критичної точки знайти:

а) значення частинних похідних в критичній точці M_k:

$L''_{xx}(\mathrm{M}_k), L''_{yy}(\mathrm{M}_k), L''_{xy}(\mathrm{M}_k), \varphi'_x(\mathrm{M}_k), \varphi'_y(\mathrm{M}_k)$

б) обчислити визначник

$$\Delta(M_k) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_k) & \varphi'_y(M_k) \\ \varphi'_x(M_k) & L''_{xx}(M_k) & L''_{xy}(M_k) \\ \varphi'_y(M_k) & L''_{xy}(M_k) & L''_{yy}(M_k) \end{vmatrix}$$

в) визначити, чи M_k є точкою екстремуму (якщо $\Delta\ M_k\ > 0$, тоді точка M_k є точкою максимуму; якщо $\Delta\ M_k\ < 0$, тоді точка M_k є точкою мінімуму).

6. Знайти $u_{\max}, u_{\min}$.

Приклад: Знайти екстремум функції $u = 5 - 3x - 4y$ за умови $x^2 + y^2 = 25$.

Розв'язання

1. Запишемо функцію Лагранжа: $L\ \ x, y\ = 5 - 3x - 4y + \lambda\ \ x^2 + y^2 - 25$
2. Частинні похідні першого порядку: $L'_x = -3 + 2\lambda x, L'_y = -4 + 2\lambda y, L'_\lambda = x^2 + y^2 - 25$
3. Критичні точки: $\begin{cases} -3 + 2\lambda x = 0 \\ -4 + 2\lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2\lambda} \\ y = \dfrac{2}{\lambda} \\ \left(\dfrac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \dfrac{1}{2}, \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}; x_1 = 3, x_2 = -3; y_1 = 4, y_2 = -4$

Точки $M_1\ \ 3,4$ (при $\lambda = \dfrac{1}{2}$) та $M_2\ \ -3,-4$ (при $\lambda = -\dfrac{1}{2}$) є критичними точками.

4. $L''_{xx} = 2\lambda, L^{\eta}_{yy} = 2\lambda, L''_{xy} = 0, \varphi'_x = 2x, \varphi'_y = 2y$.

а) при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ у точці $M_1\ \ 3,4$ маємо:

$L''_{xx}(\mathrm{M}_1) = 1, L''_{yy}(\mathrm{M}_1) = 1, L''_{xy}(\mathrm{M}_1) = 0, \varphi'_x(\mathrm{M}_1) = 6, \varphi'_y(\mathrm{M}_1) = 8$

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&6&8\\6&1&0\\8&0&1\end{vmatrix}=-64-36=-100<0$$

Отже, $M_1\ 3,4$ - точка умовного мінімуму, $u_{\min}=5-9-16=-20$;

б) при $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ у точці $M_2\ -3,-4$ маємо:

$L''_{xx}(\mathrm{M}_2)=-1, L''_{yy}(\mathrm{M}_2)=-1, L''_{xy}(\mathrm{M}_2)=0, \varphi'_x(\mathrm{M}_2)=-6, \varphi'_y(\mathrm{M}_2)=-8$

$$\Delta\ M_2\ =\begin{vmatrix}0&-6&-8\\-6&-1&0\\-8&0&-1\end{vmatrix}=64+36=100>0$$

Отже, $M_2\ -3,-4$ - точка умовного максимуму, $u_{\max}=5+9+16=30$.

Таким чином, $M_2\ -3,-4$ - точка умовного максимуму, $u_{\max}=30$; $M_1\ 3,4$ - точка умовного мінімуму, $u_{\min}=-20$.

Визначення параметрів функціональної залежності методом найменших квадратів

Нехай $x_1,x_2,...,x_n$ - послідовність значень незалежної змінної;

$y_1,y_2,...,y_n$ - послідовність відповідних значень залежної змінної.

Необхідно дібрати пряму, яка „найточніше" відбивала б залежність між x і y.

Якщо між величинами X та Y існує лінійна функціональна залежність $Y=aX+b$, то параметри a,b за методом найменших квадратів можна знайти за формулами

$$a=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)-n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2-n\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$$

$$b=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2-n\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$$

Приклад: Методом найменших квадратів знайти пряму, якою подається залежність величини *y* від величини *x* для заданої сукупності спостережень (таблиця 6.1):

Таблиця 6.1 – Вихідні дані

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_i	50	40	65	55	45	42	56	60	64	65
X_i	90	75	120	100	80	78	110	115	115	125

Розв'язання. Нехай залежність описується прямою лінією:

$Y = b_0 + b_1 X$,

де Y — залежна змінна; X — незалежні змінна.

Розрахункові значення витрат на одиницю продукції можна знайти, скориставшись такою моделлю: $\widehat{Y} = \widehat{b}_0 + \widehat{b}_1 X$.

Щоб оцінити параметри моделі $\widehat{b}_0$ і $\widehat{b}_1$ методом 1МНК, запишемо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} n\widehat{b}_0 + \widehat{b}_1 \sum_{i=1}^{10} x_i = \sum_{i=1}^{10} y_i ; \\ \widehat{b}_0 \sum_{i=1}^{10} x_i + \widehat{b}_1 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i y_i . \end{cases}$$

Коефіцієнти для цих рівнянь системи знаходимо за таблицею 6.2:

Таблиця 6.2 – Додаткові обчислення

№ п/п	Y_i	X_i	X_i^2	$X_i Y_i$
1	50	90	8100	4500
2	40	75	5625	3000
3	65	120	14400	7800
4	55	100	10000	5500
5	45	80	6400	3600
6	42	78	6084	3276
7	56	110	12100	6160
8	60	115	13225	6900
9	64	115	13225	7350
10	65	125	15625	8125
Σ	542	1008	104784	56221

$$\begin{cases} 10\widehat{b}_0 + 1008\widehat{b}_1 = 542 \\ 1008\widehat{b}_0 + 104784\widehat{b}_1 = 56221. \end{cases}$$

Розв'язком системи є параметри $\widehat{b_0} = 3{,}8$; $\widehat{b_1} = 0{,}5$.

Економетрична модель має вигляд

$$y = 3{,}8 + 0{,}5x$$

Визначення параметрів параболічної функціональної залежності

Якщо між величинами X та Y існує параболічна функціональна залежність $Y = aX^2 + bX + c$, то параметри a, b, c можна знайти як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} a\sum_{k=1}^{n} x_k^4 + b\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + c\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + b\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + c\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k + cn = \sum_{k=1}^{n} y_k \end{cases}$$

Приклад: Застосовуючи метод найменших квадратів, скласти рівняння параболи, яка проходить найближче до точок

x_i	16	17	18	19	20	21	22
y_i	28	15	6	1	0	3	10

Розв'язання. Коефіцієнти параболи $Y = aX^2 + bX + c$ знаходимо із системи рівнянь. Допоміжні обчислення подаємо в таблиці 6.3:

Таблиця 6.3 – Допоміжні обчислення

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 y_i$
	16	28	448	256	4096	65536	7168
	17	15	255	289	4913	83521	4335
	18	6	108	324	5832	104976	1944
	19	1	19	361	6859	130321	361
	20	0	0	400	8000	160000	0
	21	3	63	441	9261	194481	1323
	22	10	220	484	10648	325256	4840
$\sum_{i=1}^{7}$	133	63	1113	2555	49609	973091	19971

Маємо: $\begin{cases} a\cdot 973091 + b\cdot 49609 + c\cdot 2555 = 19971 \\ a\cdot 49609 + b\cdot 2555 + c\cdot 63 = 1113 \\ a\cdot 2555 + b\cdot 133 + c\cdot 7 = 63 \end{cases}$.

Звідси $a = 2, b = -79, c = 780$

Отже, $Y = 2X^2 - 79X + 780$ - шукана парабола.

Застосування знань та вмінь з теми в економіці

Економічний зміст частинних похідних

Розглянемо в якості прикладу функцію Кобба-Дугласа:

$y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, де ***K*** -об'єм фондів, ***L*** - число працівників, якщо $(\alpha + \beta) > 1$, то темпи росту обсягу продукції вищі за темпи росту виробничих ресурсів, а якщо $(\alpha + \beta) < 1$, то, навпаки, темпи росту продукції нижчі за темпи росту ресурсів.

Також:

α - еластичність випуску по фондах;

β - еластичність випуску з праці;

y'_L - це гранична продуктивність праці,

y'_K - це гранична фондовіддача.

Приклад: Виробнича функція є функцією Кобба-Дугласа. Щоб збільшити випуск продукції на 5% треба збільшити фонди на 10% або чисельність робітників на 15% (це означає, що $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$). Один робітник виготовляє продукцію на 2000 грн., а всього робітників 1000. Основні фонди оцінювались в 4 млн.грн. Записати виробничу функцію.

*Розв'язування. Е*ластичність випуску продукції з праці:

Запишемо функцію Кобба-Дугласа:

$y = A\cdot K^{\frac{1}{2}}\cdot L^{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ - це менше одиниці, отже темпи росту продукції нижчі за темпи росту ресурсів.

Підставимо у це рівняння дані з умови задачі:

$2000\cdot 1000 = A(4000000)^{\frac{1}{2}}(1000)^{\frac{1}{3}}$,

Звідси $A = 100$.

Тоді виробнича функція матиме вигляд:

$y = 100\cdot K^{\frac{1}{2}}\cdot L^{\frac{1}{3}}$.

Приклад: Мале підприємство виробляє товари виду ***A*** і ***B.*** Загальні щоденні витрати на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** задаються функцією:

$V = 450 - 12x - 6y + 2x^2 + 3y^2$.

Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B*** , при яких загальні витрати підприємства будуть мінімальними.

Розв'язування. Дослідимо на екстремум задану функцію. Для цього знайдемо чатисні похідні:

$V'_x = -12 + 4x$,

$V'_y = -6 + 6y$.

Прирівняємо до нуля частинні похідні та запишемо їх у систему:

$$\begin{cases} -12 + 4x = 0, \\ -6 + 6y = 0 \end{cases}$$

Звідси, $x = 3$, $y = 1$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$A = V'' = 4$,

$B = V'' = 0$,

$C = V'' = 6$.

$D = AC - B^2 = 24 > 0$, оскільки A>0, то у точці (3;1) маємо мінімум.

$V_{\min} = 429$.

Тобто, якщо підприємство буде виробляти 3 од. товару А, 1 од. товару В, то воно буде витрати мінімум грошей, а саме 429 гр.од.

РОЗДІЛ 7. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Невизначений інтеграл

Поняття та властивості невизначених інтегралів

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на проміжку a,b , якщо $F(x)$ диференційовна на a,b і справджується рівність $F'\ x\ = f\ x$.

Сукупність усіх первісних $F(x)+C$ для функції $f(x)$ називається ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ і позначається:

$\int f(x)dx = F(x)+C$, де $f(x)dx$ — підінтегральний вираз,

$f(x)$ - підінтегральна функція, x - змінна інтефування.

Основна теорема інтегрального числення. Усяка неперервна функція має первісну.

Основні властивості невизначених інтегралів

1. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу $d\int f\ x\ dx = f\ x\ dx$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої

$\int dF\ x\ = F\ x\ + C$

3. Сталий множник можна винести за знак інтеграла

$\int Cf\ x\ dx = C\int f\ x\ dx$

де C - стала.

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій за умови, що задані функції мають первісні

$\int\ f_1\ x\ \pm f_2\ x\ \ dx = \int f_1\ x\ dx \pm \int f_2\ x\ dx$

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int 0dx = C$, де C - стала.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$

$\int dx = x + c$

$\int cdx = c\cdot x + c_1$, де c_1, c -сталі;

$\int xdx = \dfrac{x^2}{2} + c$

3. $\int \dfrac{1}{x^a}dx = -\dfrac{1}{a-1\ x^{a-1}} + c$

$\int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x} + c$

4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

5. $\int e^x dx = e^x + c$

$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

7. $\int \cos x dx = \sin x + c$

$\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + c$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + c$

9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + c$

11. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + c$

12. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + c$

13. $\int tgax dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos ax| + c$

14. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c = -\arccos \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c$

15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + c \quad a \neq 0$

$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = arctgx + c = -arcctgx + c$

16. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + c, \ \ a \neq 0$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}^2} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

Методи знаходження невизначених інтегралів

1 ***Метод безпосереднього інтегрування*** базується на основних властивостях невизначеного інтеграла, таблиці інтегралів, а також на рівності $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$, де a і b- сталі

Приклад: $\int(2x^3+3x+\cos x)dx=\int 2x^3dx+\int 3xdx+\int\cos xdx=$

$$=\frac{2\cdot x^{3+1}}{3+1}+\frac{3\cdot x^{1+1}}{1+1}+\sin x+c=\frac{x^4}{2}+\frac{3x^2}{2}+\sin x+c$$

2. ***Метод заміни змінної***. Якщо для знаходження заданого інтегралу зробити заміну $x=\varphi(t)$, тоді має рівність $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Приклад:

$$\int x\sqrt{x-5}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x-5}=t,\\ x-5=t^2, x=t^2+5\\ dx=(t^2+5)dl=2tdt\end{array}\right|=\int(t^2+5)\cdot t\cdot 2tdt=$$

$$=\int 2t^4dt+\int 10t^2dt=2\cdot\frac{t^5}{5}+10\cdot\frac{t^3}{3}+c=\frac{2(\sqrt{x-5})^5}{5}+\frac{10(\sqrt{x-5})^3}{3}+c$$

Приклад:

$$\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x}=\left|\begin{array}{l}\sin x=t\\ dt=(\sin x)\cdot dx=\cos xdx\\ dx=\dfrac{dt}{\cos x}\end{array}\right|=\int\frac{\cos x\dfrac{dt}{\cos x}}{t^2}=$$

$$=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-2+1}}{-2+1}+c=-t^{-1}+c=-\frac{1}{\sin t}+c$$

3. ***Метод інтегрування частинами*** застосовується тоді, коли під знаком інтеграла є добуток функцій. Нехай функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ мають на деякому проміжку неперервні похідні.

Формула інтегрування частинами : $\int udv=u\cdot v-\int v\cdot du$.

При обранні u та dv потрібно врахувати:

1. Якщо підінтегральну функцію записано у вигляді добутку багаточлена на $\ln x, \arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx$ то доцільно покласти за dv цей багаточлен.
2. Якщо підінтегральну функцію записано у вигляді добутку багаточлена на $e^{kx}, \sin kx, \cos kx$, де k - деяке число, то доцільно обирати за u багаточлен.

Приклад:

$$\int x\sin xdx=\left|\begin{array}{ll}u=x, & dv=\sin xdx\\ du=x'dx=dx, & v=\int\sin xdx=-\cos x\end{array}\right|=$$

$$= -x\cos x - \int -\cos x \; dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Інтегрування раціональних дробів

Раціональним дробом називається дріб виду $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - багаточлени відповідно n-го і m-го степеня. Раціональний дріб називається ***правильним***, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника, і ***неправильним***, якщо степінь чисельника більше або дорівнює степеню знаменника.

Інтегрування основних дробів

I. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C,$ де A і C-сталі.

II. $\int \frac{Adx}{x-a}^{\,n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$. де A і C-сталі.

III. $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

Алгоритм знаходження інтегралів виду $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$

1) розкласти знаменник на множники;

2) дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ записати у вигляді суми найпростіших дробів. Для цього використати таку теорему:

Теорема (Ейлера). Нехай $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ правильнии раціональний дріб, знаменник якого записано в такому вигляді

$$Q(x) = (x-a_1)^{\gamma}(x-a_2)^{s}...(x^2+p_1x+q_1)^{n}..., \text{ де } p_1^2 - 4q_1 < 0$$

Тоді цей дріб можна єдиним чином подати як суму найпростіших дробів

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + ... + \frac{A_\gamma}{(x-a_1)^\gamma} + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + ... + \frac{B_s}{(x-a_2)^s} +$$
$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q)^2} + ... + \frac{M_nx+N_n}{(x^2+p_1x+q)^n}$$

3) знайти невідомі коефіцієнти $A_1,...,B_1,...,$ використовуючи ***метод невизначених коефіцієнтів***. Для цього необхідно:

а) домножити на знаменник $Q\;\;x$ обидві частини рівності;

б) розкрити дужки;

в) прирівняти коефіцієнти при відповідних степенях невідомого лівої і правої частин рівності;

г) скласти і розв'язати систему рівнянь, звідки і знайти потрібні коефіцієнти $A_1,...,B_1,...$;

4) замість коефіцієнтів $A_1,...,B_1,...$ підставити їхні значення;

5) знайти інтеграл суми.

Якщо дріб ***неправильний***, то потрібно виділити цілу частину, для чого чисельник дробу потрібно поділити на знаменник (багаточлен на багаточлен).

Приклад: Знайти інтеграл $\int \frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}dx$

Розв'язання

Розкладемо дріб на суму найпростіших:

$$\frac{6x^2-13x+4}{x\ \ x^2-3x+2}=\frac{6x^2-13x+4}{x\ \ x-1\ \ \ x-2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}\Big| \quad x\ \ x-1\ \ \ x-2$$

$$6x^2-13x+4=A\ \ x-1\ \ \ x-2\ \ +Bx\ \ x-2\ \ +Cx\ \ x-1$$

$$6x^2-13x+4=Ax^2-3Ax+2A+Bx^2-2Bx+Cx^2-Cx$$

$$\begin{array}{c|} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\begin{cases} 6=A+B+C \\ -13=-3A-2B-C, \\ 4=2A \end{cases}\begin{cases} B=3 \\ C=1 \\ A=2 \end{cases}$$

$$\int \frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)dx=2\ln|x|+3\ln|x-1|+\ln|x-2|+C$$

Інтегрування найпростіших тригонометричних функцій (таблиця 7.1)

Таблиця 7.1 – Таблиця найпростіших інтегралів

Інтеграл	Підстановка або формула для перетворення виразів перед інтегруванням
$\int F(\sin x)\cos x dx$	$t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x dx$
$\int F(\cos x)\sin x dx$	$t=\cos x \Rightarrow dt=-\sin x dx$
$\int \sin^2 x dx$	$\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\ \ 1-\cos 2x$
$\int \cos^2 x dx$	$\cos^2 x dx=\frac{1}{2}\ \ 1+\cos 2x$
$\int F(\sin x,\cos x)dx$	$t=tg\frac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt\end{cases}$
$\int \sin ax\cos\beta x$	$\sin a\cos\beta=\frac{1}{2}\ \sin\ \ \alpha-\beta\ \ +\sin\ \ \alpha-\beta$
$\int \sin ax\cos\beta x dx$	$\sin a\cos\beta=\frac{1}{2}\ \cos\ \ \alpha-\beta\ \ -\cos\ \ \alpha+\beta$
$\int \cos ax\cos\beta x dx$	$\sin a\cos\beta=\frac{1}{2}\ \cos\ \ \alpha-\beta\ \ +\cos\ \ \alpha+\beta$

Приклад:

$$\int \cos 5x \cdot \cos 7x dx = \int \frac{1}{2}\ \cos 2x + \cos 12x\ \ dx =$$

$$\cos 12x dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{24}\sin 12x + C$$

Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій (таблиця 7.2)

Таблиця 7.2 – Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграл	Підстановка
$\int R(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\, dx$	$ax+b=t^b,\ x=\dfrac{t^n-b}{a},\ dx=\dfrac{nt^{n-1}}{a}dt$
$\int R(x, x^{\frac{m_1}{\rho_1}}, x^{\frac{m_2}{\rho_2}}, ..., x^{\frac{m_n}{\rho_n}}\, dx$	$x=t^k,\ dx=kt^{k-1}$, де $k=НСК(\rho_1,\rho_2,...,\rho_n)$
$\int R(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{\rho_1}}, ..., \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_n}{\rho_n}}\ dx$	$\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де де $k=НСК(\rho_1,\rho_2,...,\rho_n)$
$\int R(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}})dx$	$\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^n$

Приклад:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x\ \ \sqrt[3]{x}+1} = \begin{vmatrix} \sqrt[6]{x}=t, x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{vmatrix} = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{t^6\ \ t^2+1} = 6\int \frac{t^2dt}{t^2+1} =$$

$$=6\frac{t^2+1\ \ -1}{t^2+1}dt = 6\left(\int dt - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) = 6t - 6arctgt + C = 6\sqrt[6]{x} - 6arctg\sqrt[6]{x} + C$$

Приклад:

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \begin{vmatrix} x=a\sin t \\ dx=a\cos tdt \end{vmatrix} = \int \frac{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}{a\sin t}a\cos tdt =$$

$$= \int \frac{a\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\cos tdt = a\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = a\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt = a\int \frac{dt}{\sin t} - a\int \sin tdt =$$

$$= a\ln\left|tg\frac{t}{2}\right| + a\cos t + C = a\ln\left|tg\frac{\arcsin\frac{x}{a}}{2}\right| + a\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + c$$

Визначений інтеграл. Обчислення площ криволінійних фігур
Поняття та означення визначеного інтеграла

Перший підхід

Нехай функція $f(x)$ - неперервна на $a;b$. Розіб'ємо відрізок $a;b$ на n частин точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ і виберемо на кожному відрізку x_{k-1}, x_k будь-яку точку ξ_k і позначимо через Δx_k - довжину відрізка, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $a;b$ називається сума вигляду $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f \;\; \xi_k \;\; \Delta x_k$

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $a;b$ називається границя інтегральної суми за умови, що $a = \max \Delta x_k \to 0$

$$\lim_{\alpha \to 0} \sigma = \int_a^b f(x)dx$$

де a, b - межі інтегрування, $f(x)dx$ - підінтегральний вираз.

Другий підхід

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Нехай функція f(x) для всіх значень аргументу $x \in [a,b]$ є додатною. Тоді інтегральна сума представляє собою сумарну площу прямокутників $S_1, \ldots, S_i, \ldots, S_n$ (рисунок 7.1). Визначений інтеграл у цьому випадку дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої кривими $y=0$, $x=a$, $x=b$ та $y=f(x)$.

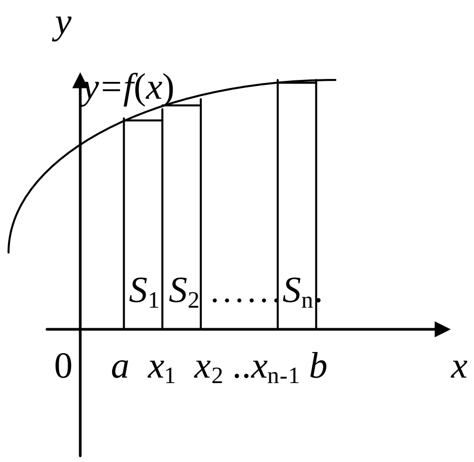


Рисунок 7.1 – Площа криволінійної трапеції

Теорема: Визначений інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ дорівнює приросту первісної на цьому відрізку:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Останню формулу називають **формулою Ньютона-Лейбніца**.

Приклад:

1) $\int_1^2 (3x^2+2x)dx = F(2)-F(1) = (x^3+x^2)\Big|_1^2 = (2^3+2^2)-(1^3+1^2) = 10$;

2) $\int_0^8 x^{1/3}dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} x\sqrt[3]{x}\Big|_0^8 = \frac{3}{4}(16-0) = 12$;

3) $\int_{-1}^0 x(x+1)^{10}dx = \int_0^1 (t-1)t^{10}dt = \int_0^1 t^{11}dt - \int_0^1 t^{10}dt = (\frac{t^{12}}{12} - \frac{t^{11}}{11})\Big|_0^1 =$ (заміна $x+1=t$)

$= \frac{1}{12} - \frac{1}{11} = -\frac{1}{132}$;

4) знайти площу фігури, обмежену графіком функції $y=\sqrt{x}$, віссю абсцис та прямими x=1 , x=9 (рисунок 7.2).

$$S = \int_1^9 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3} \cdot x\sqrt{x}\Big|_1^9 = \frac{2}{3}(27-1) = \frac{52}{3}.$$

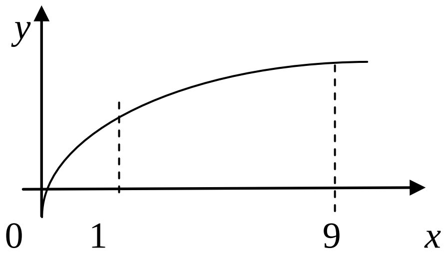


Рисунок 7.2 – Площа фігури

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ монотонна на відрізку $a;b$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $a;b$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Властивості визначених інтегралів

1. Визначений інтеграл є *мірою площі.*

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі криволінійної трапеції.

2. При *переставленні меж інтегрування* визначений інтеграл змінює знак, не змінюючи абсолютної величини:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. Поділ відрізка інтегрування. Нехай точка $c \in a;b$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

4. Знак визначеного інтеграла

a) якщо $f(x)>0$ для $x\in[a;b],a<b,$ то $\int_a^b f(x)dx>0$;

b) якщо $f(x)<0$ для $x\in[a;b],a<b$, то $\int_a^b f(x)dx<0$.

5. Якщо $\varphi(x)>\psi(x)$ для $x\in[a;b],a<b$,то справджується рівність

$$\int_a^b \varphi(x)dx>\int_a^b \psi(x)dx$$

6. Визначений *інтеграл суми* функцій надається як алгебраїчна сума інтегралів.

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

7. *Сталий множник* можна виносити за знак визначеного інтеграла

$$\int_a^b constf(x)dx=const\int_a^b f(x)dx$$

8. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a;b]$ і $a<b$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx$$

Методи обчислення визначених інтегралів

1. ***Формула Ньютона-Лейбніца***

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

Приклад:

$$\int_0^2 (5x^3+6)dx=\left(5\cdot\frac{x^4}{4}+6x\right)\Big|_0^2=\left(\frac{5\cdot 2^4}{4}+6\cdot 2\right)-0=32$$

2. ***Заміна змінної***. Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, а функція $x=\varphi(t)$ неперервно диференційовна функція на $[a;\beta]$, причому $\varphi(a)=a,\varphi(\beta)$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)dt$$

Приклад:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6xdx}{\left(x^2-1\right)^3} = \left| \begin{matrix} x^2-1=t, & t_в = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4} \\ dt = \left(x^2-1\right)' = 2xdx, & t_н = 0^2 - 1 = -1 \\ dx = \frac{dt}{2x} & \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{3}{4}} \frac{6x \cdot \frac{dt}{2x}}{t^3} = 3\int_{-1}^{-\frac{3}{4}} t^{-3}dt = 3 \cdot \frac{t^{-2}}{-2}\Bigg|_{-1}^{-\frac{3}{4}} = -\frac{3}{2t^2}\Bigg|_{-1}^{-\frac{3}{4}} = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\frac{9}{16}} - \frac{1}{1}\right) = -\frac{7}{6}$$

3. **Інтегрування частинами.**

Формула інтегрування частинами: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

Приклад. $\int_{-1}^{0} xe^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x, & dv = e^{2x}dx \\ du = dx, & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| =$

$$= x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Bigg|_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{2x}dx = 0 - \left(-1\right) \cdot \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{2x}\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4e^{2x}}$$

Обчислення визначеного інтеграла з допомогою властивостей підінтегральних функцій

1. Якщо $f(x)$ - парна функція, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

2.Якщо $f(x)$ -непарнафункція,то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

3. Якщо $f(x)$ - періодична функція з періодом *T*, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Застосування визначеного інтеграла для обчислення площ плоских фігур

Якщо на відрізку a,b функція $f(x) \geq 0$, то площа *криволінійної трапеції* обчислюється за формулою $S = \int_a^b f(x)dx$ (рисунок 7.3)

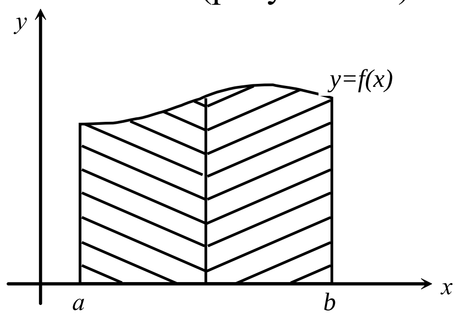


Рисунок 7.3 – Площа криволійної трапеції

Площа, обмежена кривою *B'AB*, має різні знаки по різні боки кожної межі інтегрування *a* (рисунок 7.4).

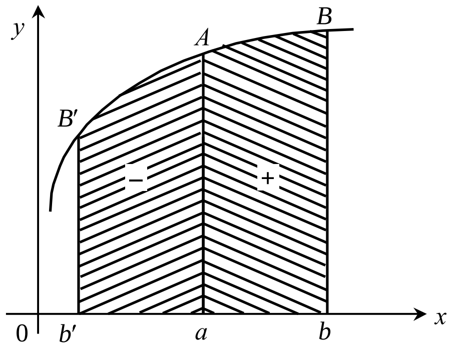


Рисунок 7.4 – Інтегрування потрізні боки кожної межі інтегрування

Площі кривих, розміщених над віссю абсцис, вважаються додатними, а площі кривих, розміщених під віссю абсцис, — від'ємними (рисунок 7.5).

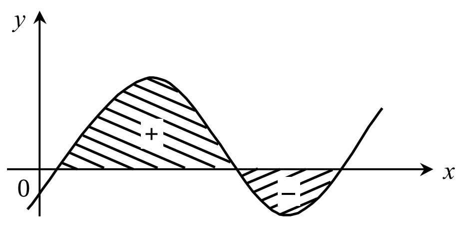


Рисунок 7.5 - Площі кривих, розміщених над та під віссю абсцис

Якщо потрібно обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \geq f_2(x)$) ординатами $x = a$ і $x = b$, то (рисунок 7.6)

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx.$$

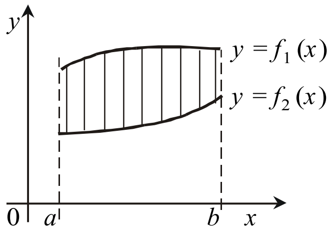


Рисунок 7.6 – Площа кривої обмеженої кривими

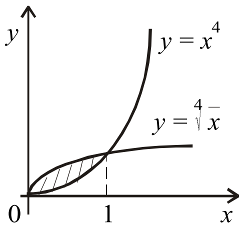
Приклад: Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y=\sqrt[4]{x}$ і $y=x^4$.

Розв'язання. Знаходимо точки перетину кривих:

$$\sqrt[4]{x}=x^4 \Rightarrow x=x^{16},$$

отже,

$$x_1=0\,,\ \ x_2=1.$$



Звідси

$$S=\int_0^1(\sqrt[4]{x}-x^4)dx=\left.\left(\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}-\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1=\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}$$

Застосування визначеного інтеграла для обчислення довжини дуги кривої

1. Криву задано явно.

Якщо функція $y=f(x)$ на відрізку $[a,b]$ має неперервну похідну $f'(x)$, то ***довжина дуги*** обчислюється за формулою

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

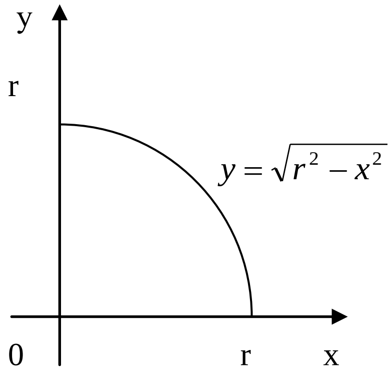
2. Криву задано параметрично: $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta]$; тоді

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

Приклад: Знайти довжину лінії, яка є графіком функції $y=\sqrt{r^2-x^2}$ на відрізку $[0,r]$.

Розв'язання. Використаємо формулу

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$$



$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$l=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=\frac{\pi r}{2}$$

Оскільки задана лінія є четвертинкою кола радіуса r, то отримали відому формулу довжини кола πr.

Застосування визначеного інтеграла для обчислення об'ємів та площ поверхонь тіл обертання

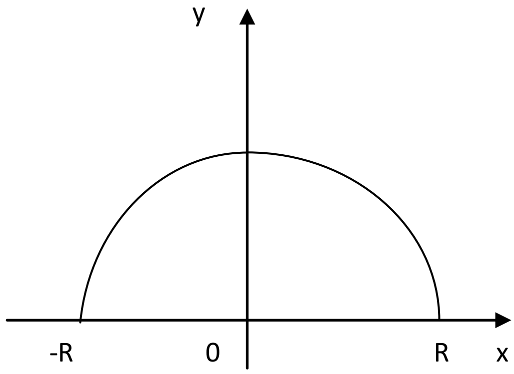
Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то об'єм тіла, яке утворене обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена графіком функції $y=f(x)$, віссю Ox та прямими $x=a, x=b$, обчислюється за формулою

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Аналогічно, об'єм тіла, яке утворене обертанням навколо осі Oy фігури, що обмежена графіком функції $x=\varphi(y)$, віссю Oy та прямими $x=c, x=d$, знаходимо за формулою $V=\pi\int_c^d x^2dy$

Приклад: Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $y=\sqrt{R^2-x^2}, y=0$.

Розв'язання. Зобразимо фігуру, обмежену лініями $y=\sqrt{R^2-x^2}, y=0$. При її обертанні отримуємо кулю радіуса R. Тоді об'єм кулі



$$V=\pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3 \textit{ (куб. од).}$$

Отримали відому формулу для обчислення об'єму кулі.

Якщо функція $y=f(x)$ у кожній внутрішній точці відрізка $[a,b]$ має неперервну похідну $f'(x)$, то ***площу поверхні***, яка отримується при обертанні графіка функції $t=f(x)$ $(a\le x\le b)$ навколо осі Ox, визначають за формулою

$$S_n=2\pi\int_a^b\left|f(x)\right|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Невласні інтеграли

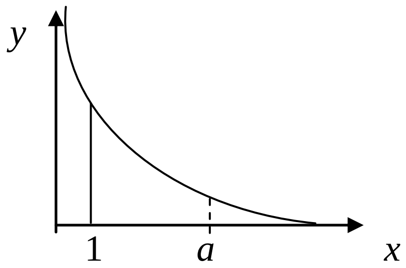
На практиці трапляються визначені інтеграли, задані на нескінченному інтервалі (та визначені інтеграли від необмеженої функції). Такі інтеграли називають **невласними.** Невласний інтеграл обчислюється за допомогою границі.

Приклад:

1. Інтеграл, заданий на нескінченному інтервалі:

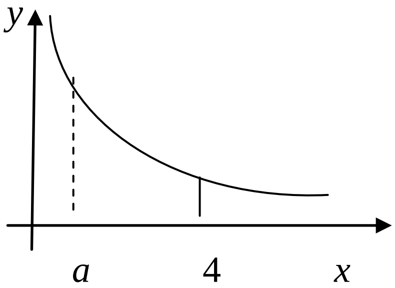
$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to\infty}\int_1^{a}\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{-1}{a}\right)\Bigg|_1^a=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{-1}{a}-\frac{-1}{1}\right)=\lim_{a\to\infty}\frac{a+1}{a}=1;$$



2) Інтеграл від необмеженої функції:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0} \int_a^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_a^4 = 2\cdot\lim_{a\to 0} [\sqrt{4}-\sqrt{a}] = 4.$$



Застосування знань та вмінь з теми в економіці

Приклад: Граничні витрати на продукцію описуються рівнянням $MC = 4x + 20$, x - кількість виробленої продукції. Визначте функцію сукупних витрат, якщо відомо, що сукупні витрати при виробництві 100 одиниць продукції становлять 2000 грн.

Розв'язання. Знайдемо функцію сукупних витрат:

$$TC = \int MC dx = \int (4x+20)dx = 2x^2 + 20x + C.$$

За умовою задачі сукупні витрати при виробництві 100 одиниць продукції становлять 2000 грн., тоді:

$$TC(100) = 2000,$$

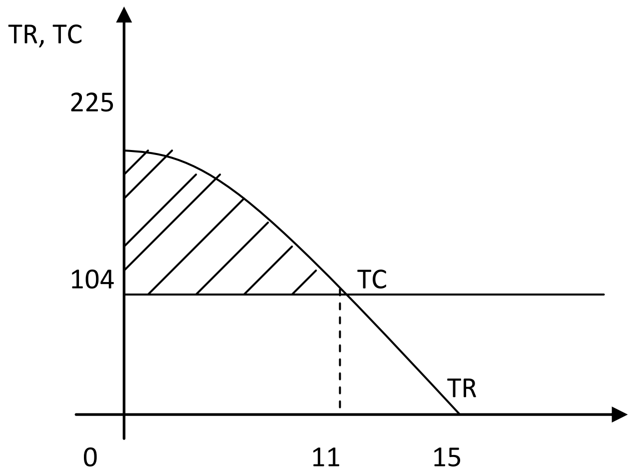
$$2\cdot 100^2 + 20\cdot 100 + C = 2000,$$

$$C = -20000.$$

Отже, $TC = 2x^2 + 20x - 20000$.

Приклад: Сукупні витрати компанії дорівнюють 104 грн. щодня. Функція сукупного доходу фірми описується рівнянням: $TR = -t^2 + 225$, де t – дні, TR – сукупний доход за день. Фірма хоче максимізувати свій дохід. Визначте: скільки часу фірма буде працювати, маючи дохід; скільки при цьому складе її загальний дохід?

Розв'язання. За умовою задачі TR=104. До того часу поки загальний дохід перевищує загальні витрати фірма буде мати дохід. Тоді в точці, де TR=TC фірма не буде мати ні збитків, ні доходу (t=11 днів). Тобто фірма буде працювати 11 днів маючи при цьому дохід



Загальний дохід протягом 11 днів (площа заштрихованої фігури) становить:

$$TR = \int_0^{15}(-t^2 + 225)dt - 104 \cdot 11 - 0,5 \cdot 104 \cdot (15-11) =$$

$$= (225t - \frac{t^3}{3})\Big|_0^{15} - 1144 - 208 = 898 \text{ (грн.)}.$$

Приклад: Знайти обсяг продукції, виробленої за 2 роки, якщо функція має вигляд $f(t) = (1+t)e^{2t}$.

Розв'язання. Обсяг Q виробленої продукції дорівнює

$$Q = \int_0^2 (1+t)e^{2t}dt = \left| \begin{array}{l} u = 1+t \\ dv = e^{2t}dt \\ du = dt \\ v = \frac{1}{2}e^{2t} \end{array} \right| = \frac{1}{2}(1+t)e^{2t}\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 e^{2t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}(3e^4 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4}e^{2t}\Big|_0^2 \approx 66.$$

Отже, обсяг випущеної продукції за заданих умов буде дорівнювати наближено 66 одиниць.

Приклад: Визначте обсяг виробленої продукції за перші 5 годин роботи підприємства за умови, що функцію продуктивності праці задано рівнянням $f(t) = 3t^2 - 2t + 5$.

Розв'язання. $Q = \int_0^5 (3t^2 - 2t + 5)dt = t^3 - t^2 + 5t\Big|_0^5 = 125$ (одиниць продукції).

Тобто протягом перших п'яти годин роботи за даних умов підприємство виробить 125 одиниць продукції.

РОЗДІЛ 8. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, у яке входять незалежна змінна, функція від цієї змінної та похідні різних порядків:

$$F(x,y,y',y'',\ldots)=0$$

Найвищий порядок похідної при цьому називається ***порядком рівняння***.

Приклад: $y' = xy$ - диференціальні рівняння першого порядку;

$y'' + \sin y = 0$ - диференціальні рівняння другого порядку;

$y'''y' - y''y' = 0$ - диференціальні рівняння третього порядку.

Розв'язком диференціального рівняння називають функцію, яка в разі підстановки у рівняння перетворює його у тотожність.

Приклад:

1. Розв'язками диференціального рівняня першого порядку $y'=3x^2$ є функції $y=x^3$, $y=x^3+10$, $y=x^3-3.5,\ldots$

Отже, **загальний розв'язок** цього рівняння має вигляд $y=x^3+C$, де C - довільна стала.

2. Загальним розв'язком рівняння другого порядку $y''=\sin(x)$ є сім'я функцій (кривих) $y= -\sin(x)+C_1x+C_2$, де C_1 та C_2 - довільні сталі. **Частковими** ж розв'язками є, наприклад, функції $y= -\sin(x)+10$, $y= -\sin(x)+2x+1$ тощо.

Крім звичайних диференціальних рівнянь, розглядають також рівняння з частинними похідними (шукана функція залежить від декількох змінних), наприклад:

$$u''_x(x,y)+u'_y(x,y)=2u(x,y)+x+y$$

Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, у яке входить змінна x, функція y та перша похідна $y'(x)$:

$$F(x,y,y')=0 \qquad (8.1)$$

Розглянемо деякі способи розв'язування таких рівнянь.

Диференціальне рівняння вигляду

$$f_1(x)\cdot\varphi_2(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_1(y)dy=0 \qquad (8.2)$$

називається **рівнянням з відокремленими (розділеними) змінними**.

Приклад:

1. Розв'язати диференціальне рівняння $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$.

Виконуємо ділення на вираз $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}$, розділивши тим самим змінні:

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

Почленно інтегруємо:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}\ ,$$

застосовуючи послідовно заміни $1\text{-}x^2=t$ (звідки $-2xdx=dt$; $xdx=(-dt)/2$) та $1\text{-}y^2=u$ (звідки $-2ydy=du$; $ydy=(-du)/2$):

$$-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du\,;$$

$$-\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\int u^{-\frac{1}{2}}du\,;$$

$$C-t^{1/2}=u^{1/2}\,;$$

$$C-\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-y^2}\,;$$

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C\,.$$

Отримано загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння, який є неявною функцією.

2. Розв'язати диференціальне рівняння $y'=7^{x+y}$.

Розділяємо змінні:

$$\frac{dy}{dx}=7^x\cdot 7^y\,;$$

$$7^{-y}dy=7^x dx\,.$$

Інтегруємо праву та ліву частини:

$$-\frac{7^y}{\ln 7}=\frac{7^x}{\ln 7}+C\,.$$

Позначивши сталу ln*C* (тобто, сталу, яка може набувати довільних значеннь) через *C* (ця нова константа також може приймати довільні значення), матимемо:

$$-7^y=7^x+C\,.$$

Отже, загальним розв'язком диференціального рівняння є неявна функція (що залажить від сталої *C*)

$$7^y+7^x=C\,.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}\,;$$

$$\frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{1+x^2}\,;$$

$$arctgy=arctgx+C\,.$$

Отримано загальний розв'язок у неявому вигляді. Перейдемо до розв'язку у вигляді явної функції. Враховуючи той факт, що як стала *C*, так і стала *arctgC*, може набувати довільних значень, отримуємо:

$$arctgy=arctgx+arctgC.$$

Знайшовши тангенс від суми аргументів, одержуємо:

$$y=\frac{x+C}{1-Cx}\ .$$

(загальний розв'язок, записаний у явному вигляді).

Лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$y'=a(x)\cdot y=0 \qquad (8.3)$$

Таке рівняння розв'язують як рівняння із розділеними змінними:

$$\frac{dy}{dx}=-a(x)\cdot y\ ;$$

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \ ;$$

$$\ln y = \ln C + \int -a(x)dx \ ;$$

$$\ln y = \ln C + \ln(e^{-\int a(x)dx}) \ ;$$

$y = C \cdot e^{-\int a(x)dx}$ - загальний розв’язок.

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$y' + a(x) \cdot y = b(x) \tag{8.4}$$

Одним із методів його розв’язування є шукання розв’язку у вигляді

$$y = C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} \ .$$

Приклад: Розв’язати лінійне (неоднорідне) рівняння

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2} \ .$$

Розв’язок однорідного рівняння $y'+2xy=0$ має вигляд

$$y = C \cdot e^{-\int 2xdx} = C \cdot e^{-x^2} .$$

Розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = C(x) \cdot e^{-\int 2xdx} = C(x) \cdot e^{-x^2} ,$$

де $C(x)$ функція від x .

Знайдемо похідну від цього виразу: $y' = C'(x) \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot C(x) \cdot e^{-x^2}$,

і підставимо відшукані значення y та y' в початкове рівняння:

$$(C'(x) \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot C(x) \cdot e^{-x^2}) + 2x \cdot C(x) \cdot e^{-x^2} = 2x \cdot e^{-x^2} \ ;$$

$$C'(x) = 2x \ ;$$

$$dC(x) = 2xdx \ ;$$

$$C(x) = x^2 + C \ .$$

Отримуємо загальний розв’язок

$$y = (x^2 + C) \cdot e^{-x^2} .$$

Приклад: Розв'язати лінійне рівняння першого порядку $2xy'$-y=$3x^2$.

$$y' + \left(\frac{-1}{2x}\right) \cdot y = \frac{3}{2}x$$

Загальним розв'язком однорідного рівняння $y' + \left(\frac{-1}{2x}\right) \cdot y = 0$ є сім'я функцій (або, іншими словами, функція, яка залежить від сталої C)

$$y = C \cdot e^{-\int \frac{-dx}{2x}} = Ce^{\frac{1}{2}\ln x} = C(e^{\ln x})^{\frac{1}{2}} = C\sqrt{x} \ .$$

Знаходимо загальний розв'язок початкового рівняння у вигляді $y = C(x) \cdot \sqrt{x}$. Тоді $y' = C'(x) \cdot \sqrt{x} + C(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Підставляючи y та y' в рівняння, маємо

$$2 \cdot x \cdot C'(x) \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot C(x) \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} - C(x) \cdot \sqrt{x} = 3x^2$$

$$2C'(x)\sqrt{x} = 3x$$

$$2C'(x) = 3x^{1/2}$$

$$2dC(x) = 3x^{1/2}dx$$

$$2C(x) = 2x^{3/2} + C$$

$$C(x) = x\sqrt{x} + C$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння є таким: $y = C(x)\sqrt{x} = x^2 + C\sqrt{x}$.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами – це рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = 0 \ , \qquad (8.5)$$

де p та q - сталі величини.

З метою розв'язування таких рівнянь будують характеристичне рівняння

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

Доведено, що у тому випадку, коли характеристичне рівняння має два різні дійсні корені λ_1 та λ_2, загальний розв'язок диференціального рівняння такий:

$$y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x},$$

де C_1 та C_2 - довільні сталі.

У випадку кратних дійсних коренів $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ характеристичного рівняння загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 \cdot e^{\lambda x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x}$$

Приклад: Розв'язати рівняння $y''+2y'-15y=0$.

Будуємо характеристичне рівняння $\lambda^2+2\lambda-15=0$, звідки $\lambda_1=3$; $\lambda_2=-5$.

Отже, загальний розв'язок є такий: $y = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-5x}$

Приклад: Розв'язати рівняння $y''+2y'+y=0$.

Будуємо характеристичне рівняння $\lambda^2+2\lambda+1=0$, звідки $\lambda_1=\lambda_2=-1$.

Отже, загальний розв'язок:: $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x}$.

Задача Коші

Задачею Коші називається задача знаходження часткового розв'язку диференціального рівняння. Для рівнянь першого порядку задача полягає у знаходженні такої функції, яка

- задовольняє рівнянню $F(x,y,y')=0$;
- проходить через точку $(x_0;y_0)$.

Приклад: Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} (1+y^2)dx = xdy \\ y(1)=0 \end{cases}.$$

Знаходимо загальний розв'язок диференціального рівняння з розділеними змінними:

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x} \;;$$

$arctgy=lnx+lnC$;

$y=tg(ln(Cx))$.

На основі початкової умови $y(1)=0$ визначаємо конкретне значення константи C:

$0=tg(ln(C\cdot 1))$;

$C=1$.

Таким чином, розв'язком задачі Коші є функція $y=tg(lnx)$.

Приклад: Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases}(1+y_2)dx+xydy \\ y(1)=2\end{cases}.$$

Знаходимо загальний розв'язок:

$\frac{dx}{x}=-\frac{y}{1+y^2}dy$ (заміна $y^2=t \Rightarrow 2ydy=dt \Rightarrow ydy=dt/2$);

$\ln x=(-1/2)\ln(1+y^2)+\ln C;$

$\ln[x\cdot(1+y^2)^{\frac{1}{2}}]=\ln C$;

$x\sqrt{1+y^2}=C$;

$x^2\cdot(1+y^2)=C$.

Визначаємо сталу C, виходячи з початкових умов: $1^2(1+2^2)=C$, звідки $C=5$.

Розв'язок задачі Коші, отже, такий: $x^2(1+y^2)=5$.

Застосування знань та вмінь з теми в економіці

Приклад: Нехай попит та пропозиція задані рівняннями відповідно: $Q_P=2p'-6p+9$, $Q_S=12p'+6p-1$, де p - ціна товару. Відомо, що у початковий момент часу ціна товару становить 15 гр.од. Запишіть рівняння залежності ціни від часу.

Розв'язання. Умова рівноваги:

$2p'-6p+9=12p'+6p-1$,

$10p'+p-10=0$,

$10\frac{dp}{dt}=10-p$,

$$\frac{dp}{10-p}=\frac{dt}{10},$$

$$\int\frac{dp}{p-10}=-\int\frac{dt}{10},$$

$$\ln|p-10|=-\frac{t}{10}+\ln|C|,$$

$$\ln\left|\frac{p-10}{C}\right|=-\frac{t}{10},$$

$$\frac{p-10}{C}=e^{-0,1t},$$

$$p=Ce^{-0,1t}+10$$

За умовою задачі у початковий момент часу ціна товару становить 15 гр.од. Тобто,

$$15=C+10,$$

$$C=5$$

Таким чином, $p=5e^{-0,1t}+10$.

РОЗДІЛ 9. РЯДИ

Числові ряди, їх збіжність

Числові ряди. Поняття збіжності ряду. Необхідна умова збіжності числового ряду

Нехай $u_1, u_2, u_3, \ldots, \quad u_n, \ldots$ — деяка нескінченна послідовність чисел. Побудований із цих чисел за допомогою знака «+» символ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (9.1)$$

називається ***нескінченним рядом*** (чи просто *рядом*), а самі числа $u_1, u_2, u_3, \ldots$ — членами ряду; n-ий член u_n — називається ***загальним членом ряду***.

Наприклад, якщо $a_n = \frac{-1^{\;n+1}}{n}$, то ряд буде мати вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{\;n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{-1^{\;n+1}}{n} + \ldots$$

Побудуємо частинні суми ряду:

$$\begin{aligned} &S_1 = u_1; \\ &S_2 = u_1 + u_2; \\ &S_3 = u_1 + u_2 + u_3; \\ &\ldots \\ &S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n; \\ &\ldots \end{aligned} \qquad (9.2)$$

Частинні суми ряду (9.2) утворюють числову послідовність: $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ Надалі основним буде питання про збіжність послідовності частинних сум ряду. Таким чином, поняття ряду вводиться для побудови числових послідовностей спеціального виду — частинних сум ряду. Такі послідовності широко використовуються в математичному аналізі, наприклад, відоме число e можна подати таким рядом $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Числовий ряд називається **збіжним**, якщо існує границя послідовності частинних сум ряду

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \qquad (9.3)$$

При цьому величина S **називається сумою ряду**, а число

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + \ldots + u_{n+k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} \text{ —} \qquad (9.4)$$

залишком ряду. Якщо границя S_n не існує (нескінченна), то ряд називається **розбіжним**.

Приклад: Дослідити збіжність числового ряду

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$ та знайти його суму

Розв'язання. Оскільки дріб $\frac{1}{n(n+1)}$ можна подати у вигляді

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, n\geq 1$$

то частинна сума ряду запишеться так:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$$

$$=1-\frac{1}{n+1} \quad \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$ - скінченна границя.

Отже, заданий ряд збігається та його сума $S=\lim_{n\to\infty} S_n=1$.

Приклад: Нехай ряд задано першими трьома членами $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+$ $+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$. Знайти загальний член ряду і дослідити ряд на збіжність.

Загальний член ряду, як правило, знаходять методом перебирання варіантів, виходячи із аналізу заданих перших членів ряду з наступною перевіркою його правильності.

У даному прикладі чисельник кожного члена дорівнює одиниці, а знаменник є добутком трьох послідовних натуральних чисел. Вважатимемо, що $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Тоді, беручи *n* послідовно таким, що дорівнює 1, 2, 3, ..., дістаємо члени ряду $u_1=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$; $u_2=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$; $u_3=\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}$, чим упевнюємося, що загальний член ряду $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ побудований правильно.

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів u_n можна розкласти на такі дроби:

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\left|\frac{A}{n(n+1)}+\frac{B}{(n+1)(n+2)}\right|=\frac{1}{2n(n+1)}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Часткова сума ряду S_n запишеться тоді так:

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots-\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{4}$. Отже, ряд збігається, його сума $S=\frac{1}{4}$.

У цьому прикладі збіжність ряду було встановлено безпосередньо за означенням, тобто обчислено $\lim_{n\to\infty} S_n=S$. Для переважної більшості рядів обчислити $\lim_{n\to\infty} S_n$ неможливо, тому далі буде наведено такі методи й ознаки, за допомогою яких можна встановити збіжність ряду, не обчислюючи $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Властивсті збіжних рядів

Теорема 1. **Якщо збігається ряд, то збігається його залишок; і навпаки, із збіжності залишку випливає збіжність ряду.**

Наслідок 1. Із розбіжності ряду випливає розбіжність його залишку, і навпаки.

Наслідок 2. Якщо відкинути скінченну кількість перших членів ряду або додати до нього кілька нових членів, то це не вплине на його збіжність.

Теорема 2. **Якщо члени збіжного ряду (9.1) помножити на сталий множник *c*, то його збіжність не порушиться, а сума (9.3) помножиться на це число *c*:**

$$cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n = c \cdot S \qquad (9.5)$$

Теорема 3. **Збіжні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$ можна почленно додавати або віднімати, при цьому ряд $(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ також збігається, а його сума буде $S \pm \sigma$.**

Теорема 4. **Послідовність частинних сум збіжного ряду обмежена. Це твердження випливає зі збіжності послідовності частинних сум ряду.**

Теорема 5. **Якщо ряд збігається, то границя його загального члена прямує до 0, тобто: $\left(\lim_{n\to\infty} S_n = S\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} u_n = 0\right)$.**

Наслідок. Якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, тобто необхідна умова збіжності ряду не виконується, то ряд розбігається.

Приклад: Перевірити виконання необхідної умови збіжності для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n+2}$. Загальний член ряду $u_n = \frac{2n+1}{5n+2}$. Розглянемо $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n}} = \frac{2}{5} \neq 0$. Необхідна умова збіжності ряду не виконується. Ряд розбігається.

Приклад: Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{3n+4}$.

Розв'язання. Перевіримо необхідну умову збіжності ряду: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{3n+4} = \frac{1}{3} \neq 0$$

Отже, ряд розбігається.

Гармонічний ряд. Ряд геометричної прогресії

Гармонічним називається ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Гармонічний ряд розбігається.

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a}}, \alpha \in R$ (*збіжний* при $\alpha > 1$ і *розбіжний* при $\alpha \le 1$).

Нескінченною геометричною прогресією називається ряд вигляду

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$$

де b_1 - перший член прогресії (^ * 0),

q - знаменник прогресії.

При $|q| < 1$ геометрична прогресія *збігається* і її сума $S = \frac{b_1}{1-q}$

При $|q| \ge 1$ геометрична прогресія *розбігається.*

2. Достатні ознаки збіжності для рядів з додатними членами

Розглянемо ряд $\sum_{n \to \infty}^{\infty} = u_n$ з додатними членами $u_n > 0,\ u_2 > 0, \ldots,\ u_n > 0, \ldots$ Частинні суми ряду (9.2) утворюють при цьому монотонно зростаючу послідовність $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$.

Теорема 6 (основна). **Для того щоб ряд з додатними членами збігався, необхідно і достатньо, щоб усі його частинні суми були обмеженими.**

Наслідок. Для того щоб ряд з додатними членами розбігався, необхідно і достатньо, щоб послідовність його частинних сум була необмеженою.

Теорема 7 (ознака порівняння рядів). **Якщо для рядів з додатними членами:**

$$\boldsymbol{u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n}, \qquad (9.6)$$

$$\boldsymbol{v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n} \qquad (9.7)$$

виконується умова $\boldsymbol{v_n \ge u_n}$, то:

а) із збіжності ряду (9.7) випливає збіжність ряду (9.6);

б) із розбіжності ряду (9.6) випливає розбіжність ряду (9.7).

Приклад: Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = \frac{1}{n!} > 0$. Зауважимо, що

$$\left(n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n \ge 1\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n-1} = 2^{n-1}\right) \Rightarrow \left(u_n = \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}} = v_n\right).$$

Ряд порівняння $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ збігається як ряд геометричної прогресії із $q = 0{,}5 < 1$. Значить, за ознакою порівняння (теорема 7) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ — збігається.

Приклад: Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{3^n}$

Розв'язання. Маємо $\frac{\sin^2 n}{3^n} \le \frac{1}{3^n}, n \in N$, бо $\sin^2 n \le 1, n \in N$

Якщо $a_n = \frac{\sin^2 n}{3^n}, b_n = \frac{1}{3^n}, n \in N$, то $a_n \le b_n$

Як еталонний ряд розглянемо геометричну прогресію $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ Оскільки $|q| = \frac{1}{3} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ збіжний. А отже, збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{3^n}$ (згідно з першою ознакою порівняння), що і треба було довести.

Теорема 8 (ознака порівняння в граничній формі). **Якщо для рядів з додатними членами (9.6), (9.7) існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = c$ $(0 < c < +\infty)$, то ряди (9.6) і (9.7) збігаються або розбігаються разом.**

Приклад: Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = \sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}$ являє собою алгебраїчний вираз. Для того щоб цілеспрямовано вибрати ряд порівняння, побудуємо величину, еквівалентну u_n при $n \to \infty$ $u_n = \sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}} \sim \sqrt{\frac{n}{n^3}} = \frac{1}{n} = v_n$. Вибираємо ряд порівняння $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — гармонічний ряд, він є розбіжним. Обчислюємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(n+5)n^2}{n^3+10n+20}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{10}{n^2}+\frac{20}{n^3}}} = 1 \quad (0 < 1 < +\infty)$$

За ознакою порівняння (теорема 8) буде розбіжним і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}.$$

Теорема 9 (ознака Даламбера). **Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами $u_n > 0$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, тоді:**

при $l < 1$ ряд збігається;

при $l > 1$ ряд розбігається;

при $l = 1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Приклад: Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n=\frac{2^n}{n!}>0$. Побудуємо $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\;=\frac{2\cdot 2^n}{n!(n+1)}$ і розглянемо $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n\cdot n!}{(n+1)n!\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$. За ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ збігається.

Приклад: Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$

Розв'язання. Враховуючи, що $a_n=\frac{n}{2^n},a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$, знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$$

За ознакою Даламбера ряд збігається.

***Теорема 10 (ознака Коші (радикальна)).* Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами $u_n>0$ існує границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, тоді:**

при $l<1$ ряд збігається;
при $l>1$ ряд розбігається;
при $l=1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

*Розв'язання.*Загальний член ряду $u_n=\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}>0$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^2=\frac{1}{9}<1.$$

За ознакою Коші (теорема 9) ряд збігається.

***Теорема 11 (ознака Коші (інтегральна)).* Якщо функція $f(x)$ неперервна, додатна і монотонно спадає при $x\geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ і невластивий інтеграл $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ збігаються або розбігаються разом.**

Приклад: Дослідити на збіжність ряд Діріхле (узагальнений гармонічний ряд)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots \qquad (9.8)$$

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n=\frac{1}{n^p}>0$. Побудуємо функцію $f(x)$:

$$u_n=\frac{1}{n^p}=f(n)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^p}.$$

Збіжність інтегралу Діріхле $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ встановлено

$$\left(\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}-\left[\begin{array}{l}\text{збігається при p} > 1;\\ \text{розбігається при p} \le 1\end{array}\right.\right)\Leftrightarrow\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}-\left[\begin{array}{l}\text{збігається при p} > 1;\\ \text{розбігається при p} \le 1\end{array}\right.\right).$$

У частинному випадку при p=1 маємо гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=$ $=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$ який, як тепер встановлено, буде розбіжним.

3. Рекомендації щодо використання ознак збіжності рядів з додатними членами

1. Ознака Даламбера, як правило, дає результати тоді, коли загальний член ряду є відношенням алгебраїчного і трансцендентного виразів або відношенням трансцендентних виразів.

Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, то ознака Даламбера питання про збіжність не вирішує.

2. Радикальна ознака Коші зручна в тому випадку, коли загальний член ряду містить степенево-показниковий вираз.

3. Інтегральна ознака Коші використовується тоді, коли функція загального члена ряду $u_n = f(n) \Rightarrow f(x)$ легко інтегрується.

4. Ознака порівняння рядів може бути використана для рядів з будь-яким загальним членом. При дослідженні ряду за допомогою ознаки порівняння треба вибрати ряд порівняння, збіжність чи розбіжність якого відома. Рядами порівняння зручно вибирати ряд геометричної прогресії (9.6) або ряд Діріхле (10.8).

5. Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, тоді для дослідження збіжності ряду зручно використовувати ознаку порівняння рядів у граничній формі (теорема 3), як це було показано на прикладі.

6. При дослідженні збіжності рядів рекомендується така послідовність дій: 1) встановити тип ряду (знакододатний чи знакозмінний); 2) перевірити виконання необхідної умови збіжності; 3) використати одну із достатніх ознак збіжності.

Приклад: Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$.

Розв'язання.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}=\frac{1^3}{e}+\frac{2^3}{e^2}+\ldots+\frac{n^3}{e^n}+\ldots;\ u_n=\frac{n^3}{e^n}>0\Rightarrow$ ряд знакододатний.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{e^n}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\begin{array}{l}n\sim x\\ n\to\infty\\ x\to+\infty\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'''}{(e^x)'''}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\cdot2\cdot1}{e^x}=0\Rightarrow$

необхідна умова збіжності виконується (ряд може бути як збіжним, так і розбіжним).

3) Використаємо достатню ознаку збіжності Даламбера. Побудуємо $u_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{e^{n+1}};\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot e^n}{e^{n+1}\cdot n^3}=\frac{1}{e}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{e}<1\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$ за ознакою Даламбера збігається.

4.Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів

Ряд називається ***знакозмінним***, якщо він містить нескінченне число як додатних, так і від'ємних членів.

Теорема 12 (Коші). **Якщо збігається ряд із абсолютних величин членів знакозмінного ряду, то збігається і знакозмінний ряд, тобто** $\left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| - \text{збіжний}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \text{збіжний}\right)$**.**

Знакозмінний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***абсолютно збіжним,*** якщо він сам збігається і збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***умовно збіжним***, якщо він сам збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ розбігається.

Зауваження. Якщо знакозмінний ряд збігається абсолютно, то його збіжність зумовлена достатнім спаданням за абсолютною величиною його членів.

Зауваження. Якщо знакозмінний ряд збігається умовно, то його збіжність зумовлена не тільки спаданням за абсолютною величиною його членів, але і взаємною компенсацією додатних і від'ємних членів ряду.

Приклад: Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$ залежно від n може бути як додатним, так і від'ємним. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ — знакозмінний. Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$. Цей ряд буде знакододатним $|u_n| = \frac{|\sin n|}{n^2} > 0$, так що для дослідження його на збіжність можна використати ознаки збіжності знакододатних рядів. Скористаємось ознакою порівняння рядів: $|u_n| = \frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2} = v_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ — ряд порівняння, він збігається, як ряд Діріхле, з p = 2 > 1. Отже, за ознакою порівняння (теорема 7) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$ збігається, а це означає, що за теоремою Коші збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$, причому збігається абсолютно.

5.Знакопочергові ряди. Ознака Лейбніца

Ряд, кожний член якого відрізняється знаком від попереднього, називається **знакопочерговим**. Цей ряд має вигляд:

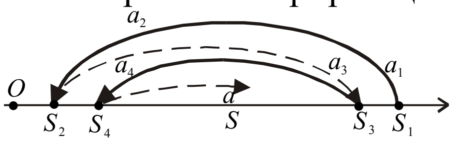
$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n. \qquad (9.9)$$

Загальний член ряду (10.9) $u_n = (-1)^{n-1} a_n$, де $a_n > 0$.

Теорема 13 (Лейбніца). **Якщо члени знакопочергового ряду спадають за абсолютною величиною і границя абсолютної величини загального члена ряду дорівнює нулю, то ряд збігається. Коротко цю теорему можна записати так:** $\left(\begin{cases} a_n > a_{n+1} > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}\right) \Rightarrow \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ — збіжний}\right)$.

Наслідок 1. Знак суми збіжного знакопочергового ряду такий само, як і знак першого члена ряду ($a_1 > 0, S > 0$).

Геометрична інтерпретація



Наслідок 2. Якщо знакопочерговий ряд збігається, то його сума за абсолютною величиною не перевищує першого члена ряду, тобто $|S| < |a_1|$ (0< S <a_1).

Наслідок 3. Якщо при обчисленні суми збіжного знакопочергового ряду обмежитись тільки першими n членами, а всі інші відкинути, то похибка за абсолютною величиною не перевищить першого із відкинутих членів, тобто $|r_n| < |a_{n+1}|$.

Наслідок 4. Якщо для ряду не виконується умова теореми Лейбніца $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається (не виконується необхідна умова збіжності).

Приклад: Дослідити збіжність ряду Лейбніца

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$$

Загальний член ряду $u_n = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{n}$ почергово змінює знак, отже, ряд Лейбніца — знакопочерговий. Обидві умови теореми Лейбніца для цього ряду виконуються:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Таким чином, ряд Лейбніца буде збіжним, але збіжність умовна, бо ряд із абсолютних величин: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармонічний ряд, що розбігається.

Степеневі ряди

Поняття функціонального ряду

Функціональним рядом називається ряд типу

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

де $f_n(x), n \in N$ - функції, визначені в області Ω.

При кожному конкретному значенні x із області визначення функціональний ряд перетворюється на числовий, який може збігатися (розбігатися).

Якщо для $x_0 \in \Omega$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad x_0$ збігається, то кажуть, що функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad x$ збігається в точці x_0.

Якщо в кожній точці $x \in \Omega_1 \subset \Omega$, сії числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad x$ збігаються, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad x$ називається ***збіжним в області*** Ω_1.

Степеневі ряди. Збіжність степеневого ряду

Степеневим називається функціональний ряд, що має вигляд

$$c_0 + c_2 x + c_3 x^2 + ... + c_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

або більш загальний $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad x - x_0 \quad ^n$, де $x_0, c_0, c_1, ..., c_n, ...$ - дійсні числа.

Для будь-якого степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ існує число R таке, що скрізь у середині інтервалу $-R, R$ ряд збігається абсолютно, а для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > R$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ розбігається.

У точках $x = \pm R$ степеневий ряд може як збігатися, так і розбігатися. Число R - половина довжини ***інтервалу збіжності*** $-R, R$ називається ***радіусом збіжності*** ряду степеневого ряду.

Якщо серед коефіцієнтів ряду $c_0, c_1, ..., c_n, ...$ немає нульових, тобто ряд містить усі цілі додатні степені x, то ***радіус збіжності*** $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$ за умови, що ця границя (скінченна або нескінченна) існує.

Приклад: Знайти область збіжності степеневого ряду

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ... + \frac{1}{n}x^n + ...$$

Розв'язання. Маємо $c_n = \frac{1}{n}, c_{c+1} = \frac{1}{n+1}$

Знайдемо радіус збіжності ряду: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

Отже, ряд збігається для значень x, які задовольняють нерівність $-1 < x < 1$.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях проміжку. Якщо $x = 1$, то дістанемо гармонічний ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ...$ який, як відомо, розбігається.

Якщо $x=-1$, то маємо ряд $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-...$ Цей ряд збігається, оскільки виконуються умови ознаки Лейбніца.

Отже, область збіжності степеневого ряду має вигляд $-1,1$

Ряди Тейлора-Маклорена. Розклад функцій у степеневі ряди

Ряд Тейлора.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{\ n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...$$

Нехай

$$S_n(x)=\sum_{k-0}^{n}\frac{f^{\ k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{\ k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

тоді формула Тейлора має вигляд $f(x)=S_n(x)+R_n(x)$. $R_n(x)$ називають ***залишковим членом*** формули Тейлора.

Теорема. Нескінченно диференційовна функція $f(x)$ на інтервалі x_0-R, x_0+R розкладається в ряд Тейлора тоді і тільки тоді, коли на цьому інтервалі виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty}R_n\ \ x\ =0$.

При $x_0=0$ дістаємо так званий ***ряд Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+...$$

Розклад в ряд Маклорена деяких функцій:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+..., x\in R$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\ -1^{\ n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+..., x\in R$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\ -1^{\ n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+..., x\in R$$

$$1+x^{\ a}=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+...+\frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}x^n+..., |x|<1, a\in R/N$$

Застосування знань та вмінь з теми в економіці

Степеневі ряди застосовують для обчислення з довільною точністю значень функцій і значень визначених інтегралів, для яких відповідний невизначений інтеграл „не береться".

Приклад: Обчислити інтеграл $\int_0^e\frac{\sin x}{x}dx$

Розв'язання. Скористаємося формулою розкладу функції $\sin x$ у ряд Маклорена

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$$

Маємо

$$\int_0^e \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^e \frac{1}{x}\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)dx = \int_0^e \left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right)dx =$$

$$= \left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\ldots\right)\Bigg|_0^e = \left(e-\frac{e^3}{3\cdot 3!}+\frac{e^5}{5\cdot 5!}-\frac{e^7}{7\cdot 7!}+\ldots\right)-0=$$

$$= e-\frac{e^3}{3\cdot 3!}+\frac{e^5}{5\cdot 5!}-\frac{e^7}{7\cdot 7!}+\ldots$$

Приклад: Знайти sin1 з точністю до 0,001.

Розв'язання. Запишемо

$$\sin 1 = 1-\frac{1}{3!}1^3+\frac{1}{5!}1^5-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}.$$

Ряд, що написаний справа, є абсолютно збіжним. Оскільки $\frac{1}{5!}\approx 0{,}008(3) > 0{,}001,$ то для знаходження sin1 з точністю до 0,001 досить перших трьох доданків:

$$\sin 1 \approx 1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}=0.842.$$

Помилка, що припускається при цьому, менша, ніж перший відкинутий член (тобто менша, ніж 0,0002). Обчислене мікрокалькулятором значення sin1 наближено дорівнює 0,84147.

Приклад: Обчислити число е з точністю до 0,001.

Розв'язання: Підставляючи х = 1 у формулу (11), отримаємо:

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots.$$

При $n \geq 6$ маємо

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=2\frac{517}{720}\approx 2{,}718.$$

Приклад: Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$.

Розв'язання: Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена, замінюючи x на $-x^2$ у формулі:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots, x \in (-\infty; \infty).$$

Інтегруючи обидві частини попередньої рівності на відрізку, що лежить усередині інтервалу збіжності, отримаємо:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} (1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots) dx = (x - \frac{x^3}{1! 3} + \frac{x^5}{2! 5} - \frac{x^7}{3! 7} + \ldots) \Big|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{1! 3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! 5 \cdot 4^5} - \frac{1}{3! 7 \cdot 4^7} + \ldots$$

Одержали ряд лейбніцевського типу.

Оскільки $\frac{1}{1! 3 \cdot 4^3} = 0{,}0052\ldots > 0{,}001$, а $\frac{1}{2! 5 \cdot 4^5} < 0.001$, то з точністю до 0,001 маємо:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0.245.$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Васильченко І.П. Вища математика для економістів / І.П.Васильченко. - К., 2002. - 454 с.
2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самостійного вивчення дисципліни / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова та ін. - К.: КНЕУ, 1996. - 396 с.
3. Вища математика: Підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. – Тернопіль: Видавництво Карп’юка, 2003 - 480с.
4. Высшая математика для экономистов : Учебник для вузов / Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. Проф. Н.Ш.Кремер. – 2-е издание перераб и дои. – М.: ЮНИТИ, 2004. – 471 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480 с.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2009.-648 с.
7. Дюженкова Л.І. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах: навч. посібник. – К.: Вища школа, 2003.- Ч 2.- 470 с.
8. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / Назієв Е.Х., Владіміров В.М., Миронець О.А. - К. ,1997. - 149 с.
9. Макаренко В.О. Вища математика для економістів : Навч. посібник / Макаренко В.О. – К.: Знання, 2008. – 517 с.
10. Математические методы в экономике / Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — 368 с.
11. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: підручник. – К.: Техніка, 2003.-Ч 2.-600 с.
12. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. -М.: Айрис-Пресс, 2000.-Ч. 1-2.-252 с.
13. Тевяшев А.Д. Вища математика. Загальний курс : Збірник задач і вправ. 2-е вид. доп. і доопрац / А.Д.Тевяшев,О.Г.Литвин. – Х.: Рубікон, 1999. – 320 с.

ЗМІСТ