

# Коливання і хвилі

## МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з фізики  
для студентів технічних спеціальностей  
денної і заочної форм навчання

Обговорено і рекомендовано на засіданні  
кафедри інформаційно-вимірювальних тех-  
нологій, метрології та фізики  
протокол №5 від 15.01.2014 р.

Коливання і хвилі. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з фізики для студентів технічних спеціальностей денної і заочної форм навчання /Укл.: Ушаков В.Г. – Чернігів: ЧНТУ, 2014. – 50 с.

Укладач: Ушаков Віктор Григорович, кандидат технічних наук, старший викладач

Відповідальний за випуск: Приступа А. Л., завідувач кафедри інформаційно-вимірювальних технологій, метрології та фізики, кандидат технічних наук, доцент

Рецензент: Грицюк В.Ю., кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної і прикладної механіки Чернігівського національного технологічного університету

©ЧНТУ, 2014

© ІВТМФ, 2014

## ЗМІСТ

Вступ .....	4
1 Лабораторна робота № 21 Визначення прискорення вільного падіння за допомогою оборотного маятника .....	5
2 Лабораторна робота № 22 Вивчення вільних коливань в коливальному контурі .....	12
3 Лабораторна робота № 23 Вивчення вимушених коливань механічної системи .....	23
4 Лабораторна робота № 24 Вивчення коливань струни .....	29
5 Лабораторна робота № 25 Визначення швидкості поширення звуку у повітрі .....	37
Рекомендована література .....	49
Додаток А – Обробка результатів вимірювань .....	50

## ВСТУП

*Коливання* відносяться до *періодичних* процесів, тобто процесів, які повторюються у часі. Коливання властиві усім явищам природи: пульсує випромінювання зірок, всередині яких відбуваються циклічні ядерні реакції; з високим ступенем періодичності обертаються планети Сонячної системи; рух Місяця спричиняє періодичні приливи та відливи на Землі; вітер збуджує коливання та хвилі на поверхні водоймищ і т.д.

В фізиці окремо виділяються коливання *механічні*, *електромагнітні* та їх комбінації. Це обумовлено тією виключною роллю, яку відіграють механічні та електромагнітні взаємодії в масштабах, характерних для життєдіяльності людини. Коливання густини і тиску повітря сприймаються нами як *звук*, а вельми швидкі коливання електричного та магнітного полів – як *світло*. За допомогою звукових та світлових хвиль ми одержуємо майже 90% прямої інформації про оточуючий світ.

В техніці коливання виконують або певні функціональні обов'язки (коесо, маятник, коливальний контур, генератор коливань тощо), або виникають як неминуче проявлення фізичних властивостей системи (вібрації машин і споруд, різноманітні збудження і нестійкості у роботі приладів та механізмів тощо), а отже можуть відігравати як позитивну, так і негативну роль.

В коливальних та хвильових процесах різної фізичної природи виявляються спільні закономірності, які описуються однаковими фізичними і математичними моделями, рівняннями і досліджуються спільними методами.

Вивчаючи коливання різноманітної фізичної природи, виникло впевнення про можливість спільного підходу до них, що базується на властивостях і закономірностях коливальних процесів взагалі. В результаті з'явилася *теорія коливань і хвиль*. Теорія коливань і хвиль встановлює загальні властивості коливальних і хвильових процесів у реальних системах незалежно від природи конкретної системи, а також визначає вплив природи конкретної системи – фізичної, електромагнітної, хімічної тощо – на її параметри і коливальні (хвильові) характеристики. Завдяки спільності закономірностей результати, одержані при дослідженні коливань, наприклад, в механіці, можуть бути застосовані також в оптиці або в радіотехніці.

Коливальні і хвильові процеси зустрічаються майже в усіх областях фізичних явищ, тому вивчення їх має велике значення для формування базової інженерно-технічної освіти.

## 1 Лабораторна робота № 21

### ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ ВІЛЬНОГО ПАДІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

Прилади і приладдя:

- 1) оборотний маятник;
- 2) секундомір;
- 3) спеціальна опорна призма;
- 4) міліметрова лінійка довжиною 30...50 см.

Метою лабораторної роботи є вивчення властивостей фізичного маятника, а також застосування оборотного маятника (маятника Бесселя) для вимірювання прискорення земного тяжіння.

#### 1.1 Теоретичні відомості

##### 1.1.1 Фізичний маятник

Фізичним маятником називають будь-яке тверде тіло, яке під дією сили тяжіння може вільно коливатися навколо нерухомої горизонтальної осі підвісу (рисунок 21.1).

При малих кутах відхилення фізичний маятник здійснює коливання, близькі до гармонічних. Знайдемо період цих коливань, розглядаючи кут відхилення маятника від положення рівноваги як функцію часу:  $\alpha = \alpha(t)$ .

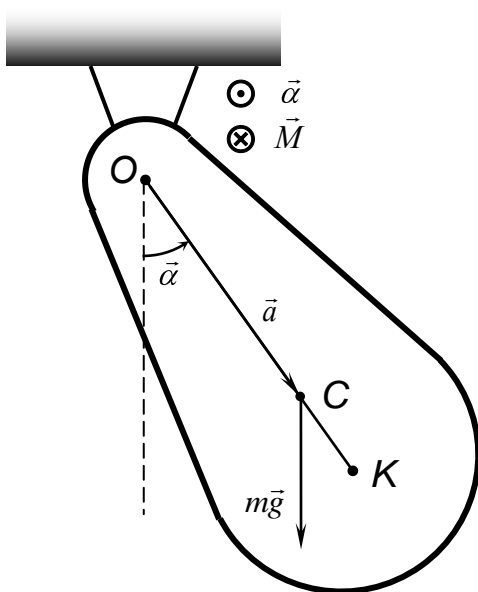


Рисунок 21.1 – Фізичний маятник

Протягом малого інтервалу часу рух маятника можна розглядати як обертальний рух тіла навколо осі підвісу. Тому скористаємось основним рівнянням динаміки обертального руху:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}, \quad (21.1)$$

де  $\vec{\varepsilon}$  – кутове прискорення маятника;  $\vec{M}$  – момент сили тяжіння відносно осі підвісу,  $J$  – момент інерції маятника відносно осі підвісу.

Величини у формулі (21.1) запишемо у такому вигляді: кутове прискорення

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d^2 \vec{\alpha}}{dt^2}, \text{ де } \vec{\alpha} \text{ – кут відхилення маятника}$$

від положення рівноваги; момент сили тяжіння  $\vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g}$ , де  $\vec{a}$  – радіус-

## Коливання і хвилі

вектор, проведений від осі підвісу  $O$  до центра мас (центра тяжіння)  $C$  маятника. Якщо розглядати  $\vec{\alpha}$  і  $\vec{M}$  як аксіальні вектори, легко зрозуміти, що у будь-якому положенні маятника вони направлені протилежно за напрямком (за винятком положення рівноваги, коли  $\vec{\alpha}$  та  $\vec{M}$  одночасно дорівнюють нулю). Це означає, що момент сили тяжіння завжди намагається зменшити кут відхилення  $\vec{\alpha} t$ , тобто повернути маятник до положення рівноваги. Тому проекції векторів  $\vec{\alpha}$  та  $\vec{M}$  на вісь підвісу завжди мають протилежні знаки. При коливаннях маятника у площині *рисунка 21.1* вісь підвісу проходить через точку  $O$  перпендикулярно до площини *рисунка*, вектори  $\vec{\alpha}$  і  $\vec{M}$  спрямовані вздовж осі. Якщо у певний момент часу проекція  $\vec{\alpha}$  на вісь підвісу додатна, то проекція  $\vec{M}$  у цей самий момент буде від'ємною, і навпаки:

$$M = -mga \cdot \sin \alpha .$$

Під час коливань маятника обидва вектори  $\vec{M}$  та  $\vec{\alpha}$  синхронно змінюються за величиною і напрямом.

Враховуючи сказане, рівняння (21.1) далі будемо розглядати у скалярній формі, в проекціях на вісь підвісу:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mga \cdot \sin \alpha . \quad (21.2)$$

За умови малих коливань (при малих кутах відхилення)  $\sin \alpha \approx \alpha$ , де  $\alpha$  вимірюється у радіанах, рівняння (21.2) спрощується і після очевидних перетворень набуває вигляду:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mga}{J} \alpha = 0 ,$$

або

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0 , \quad (21.3)$$

де  $\omega_0^2 = \frac{mga}{J}$  – стала величина.

Рівняння (21.3) – це добре відоме з курсу математики диференціальне рівняння гармонічних коливань, розв'язок якого у загальному випадку має вигляд:

$$\alpha t = A \cos \omega t + \varphi . \quad (21.4)$$

Таким чином, при малих коливаннях кут відхилення маятника від положення рівноваги (кут відхилення маятника від вертикалі)  $\alpha t$  буде змінюватись за законом (21.4), тобто фізичний маятник буде здійснювати гармонічні коливання з частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}} \quad (21.5)$$

## Коливання і хвилі

Стала величина  $\omega_0$  – є циклічна частота коливань маятника в ідеальних умовах (при відсутності сил тертя та інших сил, крім сили тяжіння) і називається *власною частотою* коливань фізичного маятника. З формули (21.5) видно, що власна частота залежить лише від властивостей фізичного маятника – його форми, розміру, розподілу маси і не залежить від *амплітуди*  $A$  та *початкової фази*  $\varphi$  коливань. Амплітуда і початкова фаза коливань визначаються *початковими умовами руху*: *початковим положенням* і *початковою швидкістю*, тобто залежать від того, як збуджуються коливання маятника, а власна частота коливань  $\omega_0$  визначається виключно характеристиками маятника і не залежить від початкових умов. Відповідно, період власних коливань фізичного маятника:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (21.6, \text{ а})$$

З формули (21.6) легко одержати період  $T_{0M}$  власних коливань *математичного* маятника. Для математичного маятника відстань  $a$  дорівнює довжині його підвісу  $l$ , а момент інерції – як момент інерції матеріальної точки –  $J = ml^2$ . Отже

$$T_{0M} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (21.6, \text{ б})$$

З порівняння формул (21.6, а) та (21.6, б) видно, що при довжині математичного маятника:

$$L_{зв} = \frac{J}{ma} \quad (21.7)$$

період його коливань буде дорівнювати періоду коливань відповідного фізичного маятника. Величина  $L_{зв}$  називається *зведеною довжиною фізичного маятника*.

Покажемо, що для будь-якого фізичного маятника виконується умова  $L_{зв} > a$ . За теоремою Гюйгенса–Штейнера, момент інерції  $J$  фізичного маятника відносно осі підвісу

$$J = J_0 + ma^2, \quad (21.8)$$

де  $J_0$  — момент інерції маятника відносно осі, яка проходить через його центр мас паралельно осі підвісу. З врахуванням (21.8) формула (21.7) набуває вигляду:

$$L_{зв} = \frac{J_0}{ma} + a, \quad \text{тобто} \quad L_{зв} > a. \quad (21.9)$$

Далі, на продовженні прямої  $OC$  (рисунок 21.1) знайдемо точку  $K$ , віддалену від осі коливань на відстань  $OK = L_{зв}$ . Точка  $K$  називається *центром коливань* фізичного маятника. Якщо всю масу фізичного маятника зосередити у його центрі коливань (тобто у точці  $K$ ), то період коливань утвореного таким чином

математичного маятника співпадає з періодом коливань даного фізичного маятника.

Тепер перевернемо маятник і підвісимо його у точці  $K$  так, щоб нова вісь підвісу була паралельна попередній. Знайдемо зведену довжину  $L_K$  нового маятника. Враховуючи (21.7) – (21.9), дістанемо:

$$KC = L_{зв} - a = \frac{J_0}{ma};$$

$$L_K = \frac{J_1}{m \cdot (KC)} = \frac{J_0}{m \cdot (KC)} + KC = \frac{J_0}{m(L-a)} + L_{зв} - a = L_{зв}.$$

Таким чином, точки  $K$  та  $O$  є *спряженими*, або *взаємними*. Це означає, що при переміщенні осі підвісу у центр коливань попередня точка підвісу стає новим центром коливань і період коливань маятника не змінюється (теорема Гюйгенса). Така властивість оборотності точки підвісу і центра коливань фізичного маятника використовується у так званому *оборотному маятнику*, за допомогою якого вимірюють прискорення сили тяжіння.

*Оборотним* називається маятник, який має дві паралельні одна до одної опорні призми, за які його можна по черзі підвішувати (рисунк 21.2). Вздовж маятника можна переміщати і закріплювати на ньому важкі вантажі. Переміщенням вантажів домагаються того, аби при підвішуванні маятника за будь-яку з призм період його коливань став однаковий. У цьому випадку відстань між опорними ребрами призм дорівнюватиме зведеній довжині  $L_{зв}$  маятника. Вимірявши період  $T_0$  коливань і відстань  $L_{зв}$ , можна за формулою (21.6, а) знайти прискорення вільного падіння  $g$ . Однак точно виміряти  $g$  таким способом досить важко, оскільки домогтися повного збігу періодів коливань не вдається.

### 1.1.2 Метод вимірювань

Прягих експериментальних методів вимірювання прискорення вільного падіння не існує. Найбільш точні вимірювання виконуються за допомогою непрямих методів. Багато з них засновані на використанні формули (21.6, а), з якої видно, що період коливань фізичного маятника залежить від  $g$ . Масу маятника і період його коливань можна виміряти з дуже високою точністю, але точно виміряти момент інерції не вдається. Зазначеного недоліку позбавлений метод оборотного маятника (метод Бесселя), який дозволяє вилучити момент інерції з розрахункової формули.

Припустимо, що періоди коливань маятника при підвішуванні за першу та другу призми не співпадають. Тоді з (21.6, а) та (21.8) маємо:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma_1^2}{mga_1}}; \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma_2^2}{mga_2}},$$



звідки, вилучаючи  $J_0$ , одержимо робочу формулу для розрахунку прискорення вільного падіння  $g$ :

$$g = 4\pi^2 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2} = 4\pi^2 L \frac{a_1 - a_2}{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2}. \quad (21.10)$$

Тут ми врахували, що  $a_1 + a_2 = L$ , де  $L$  – відстань між ребрами опорних призм маятника,  $a_1$  і  $a_2$  – відстані від осей підвісу (ребер опорних призм) до центра мас маятника у першому та другому положеннях. Формула Бесселя (21.10) дозволяє достатньо просто і точно визначати прискорення сили тяжіння при наближеній рівності періодів коливань.

Слід ще раз зауважити, що рівняння (21.3) і, відповідно, формули (21.4), (21.5), (21.6, а), (21.6, б), (21.10) прийнятні лише за умови малих кутів відхилення маятника від положення рівноваги. Наприклад, розрахункова похибка обчислення періоду коливань маятника за формулами (21.6, а) та (21.6, б) не перевищує 0,05% при максимальних кутах відхилення  $\alpha \sim 5^\circ$  і зростає до 1% при  $\alpha_{\min} \sim 23^\circ$ .

## 1.2 Експериментальна частина

### 1.2.1 Опис маятника

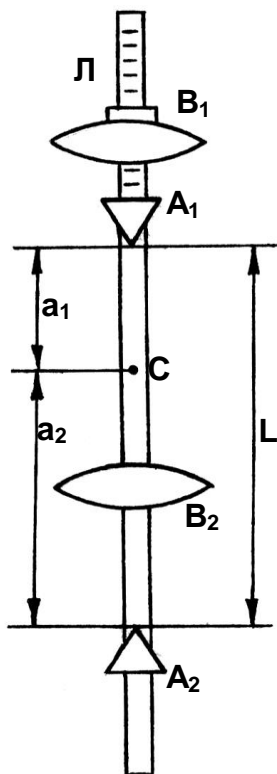


Рисунок 21.2 – Будова маятника Бесселя

Існують різноманітні конструкції оборотних маятників. У даній роботі застосовується оборотний маятник, зображений на *рисунку 21.2*. Маятник складається із сталюгого стержня довжиною трохи більше метра, на якому жорстко закріплені опорні сталеві призми  $A_1$  і  $A_2$  та сталева чечевиця  $B_2$ , розташована між призмами. Другу сталеву чечевицю  $B_1$ , що знаходиться на одному з кінців стержня, можна пересувати та закріплювати у різних положеннях, які фіксуються за допомогою поділок, нанесених на кінці стержня. При пересуванні рухомої чечевиці у нове положення змінюється як момент інерції маятника так і розташування його центра мас відносно осей підвісу, а отже і періоди коливань. В оборотному маятнику опорні призми слід розміщувати асиметрично відносно його центра мас  $C$ , так щоб виконувалася умова:  $1,5 < \frac{a_1}{a_2} < 3$ . Цим забез-

печуються оптимальні умови експерименту, при яких скорочується час вимірювання періоду і зменшується вплив сил тертя.

### 1.2.2 Порядок виконання вимірювань

1. Підвісити маятник за опорну призму  $A_1$ . При цьому рухома чечевиця  $B_1$  буде у верхньому положенні. Закріпити рухому чечевицю  $B_1$  на 4-й або 5-й поділці лінійки.
2. Виміряти період коливань  $T_1$  маятника в першому положенні. Для цього відхилити маятник на невеликий кут  $\alpha \sim 10^\circ \dots 15^\circ$  і відпустити. Спостерігаючи коливання маятника, ввімкнути секундомір у той момент, коли маятник буде знаходитись в одному з крайніх положень, і виміряти час  $n=50$  повних коливань. Результат записати у таблицю 21.1.

Таблиця 21.1 – Зразок таблиці

№ дослідів	$X$ , см поділка лінійки	$n$ , кількість періодів	$t_{A1}$ , с	$t_{A2}$ , с	$T_{A1}$ , с	$T_{A2}$ , с	$a_1$ , см	$a_2$ , см
1								

3. Перевернути маятник і підвісити його за опорну призму  $A_2$ . Виміряти період коливань  $T_2$  маятника у другому положенні згідно п.2.
4. Розташувати маятник на столі у горизонтальному положенні на ребрі спеціальної сталеві призми-підставки і, пересуваючи його “вліво – вправо” домогтися рівноваги. Зрозуміло, що у положенні рівноваги центр мас  $C$  маятника знаходиться точно над ребром призми-підставки. За допомогою міліметрової лінійки виміряти відстань між ребром опорної призми  $A_1$  маятника та ребром призми-підставки, тобто відстань  $a_1$  (дивись *рисунок 21.2*). Тепер відстань  $a_2$  легко розрахувати з співвідношення  $a_2 = L - a_1$ , де  $L$  – відстань між призмами  $A_1$  і  $A_2$ , яка вказана на нерухомій чечевиці маятника.
5. Повторити вимірювання *пп. 1 – 4*, закріпивши рухому чечевицю у новому положенні. Підвішуючи маятник по черзі за кожну опорну призму, продовжити вимірювання періодів коливань для 5...6 положень рухомої чечевиці в інтервалі від 4-ї до 12-ї сантиметрової поділки лінійки.

### 1.3 Обробка результатів вимірювань

1. На міліметровому папері побудувати графіки залежностей  $T_1 = T_1 X$  та  $T_2 = T_2 X$ . При цьому, для зручності точки, які відповідають значенням залежностей  $T_1 = T_1 X$  та  $T_2 = T_2 X$  слід наносити на графік різними позначками, наприклад, ( $\bullet$  і  $\blacktriangledown$  або  $+$  і  $\times$ , або  $\square$  і  $\Delta$  тощо).
2. Знайти на графіку точку перетину кривих і відповідне положення  $X_0$  рухомої чечевиці. Очевидно, при закріпленні рухомої чечевиці у цьому положенні періоди коливань маятника в обох положеннях повинні практично збігатися. Аби впевнитись у цьому, рухому чечевицю закріплюють у положенні  $X_0$  і

## Коливання і хвилі

повторюють вимірювання згідно *пп. 1 – 3 розділу 2.2* для  $n=100$  коливань. Вимірювання *п.4 розділу 2.2* у даному випадку виконувати не треба, оскільки при  $T_1 = T_2$  формула (21.10) спрощується і набуває вигляду:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}. \quad (21.11)$$

3. Користуючись даними таблиці, обчислити за формулою (21.10) величину прискорення вільного падіння для 4...5 положень рухомої чечевиці, включаючи і  $X = X_0$ .
4. Розрахувати абсолютну та відносну похибки вимірювань прискорення вільного падіння  $g$ . Записати кінцевий результат. Зробити висновки.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які коливання називаються гармонічними? Назвіть основні характеристики гармонічних коливань.
2. Що таке фізичний маятник?; математичний маятник? Чому дорівнюють частота і період власних коливань кожного з них?
3. Виведіть диференціальне рівняння коливань фізичного маятника. При яких припущеннях воно виводиться?
4. Що таке власна частота фізичного маятника? Від яких властивостей маятника вона залежить?
5. Від чого залежать амплітуда і початкова фаза коливань маятника?
6. Сформулюйте теорему Гюйгенса–Штейнера. Відносно якої осі момент інерції маятника мінімальний? Чи буде маятник здійснювати коливання відносно такої осі?
7. Яка будова оборотного маятника? У чому полягає метод Бесселя?
8. Виведіть формулу для визначення прискорення вільного падіння методом Бесселя.
9. Як на практиці можна визначити положення центра мас фізичного маятника?
10. Що називається зведеною довжиною і центром коливань фізичного маятника?
11. Як з формули періоду власних коливань фізичного маятника одержати відповідну формулу для математичного маятника?
12. Які точки у фізичному маятнику є оборотними? В чому полягає ця їх властивість? Сформулюйте і доведіть теорему Гюйгенса.

## 2 Лабораторна робота № 22

### ВИВЧЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ В КОЛИВАЛЬНОМУ КОНТУРІ

Прилади і приладдя:

- 1) електронно-променевий осцилограф;
- 2) генератор імпульсів;
- 3) котушка індуктивності, набір конденсаторів, магазин опорів Р-33.

Мета роботи – дослідження вільних затухаючих коливань в  $LRC$ -контурі і визначення основних характеристик контура.

#### 2.1 Теоретичні відомості

##### 2.1.1 Коливальний контур

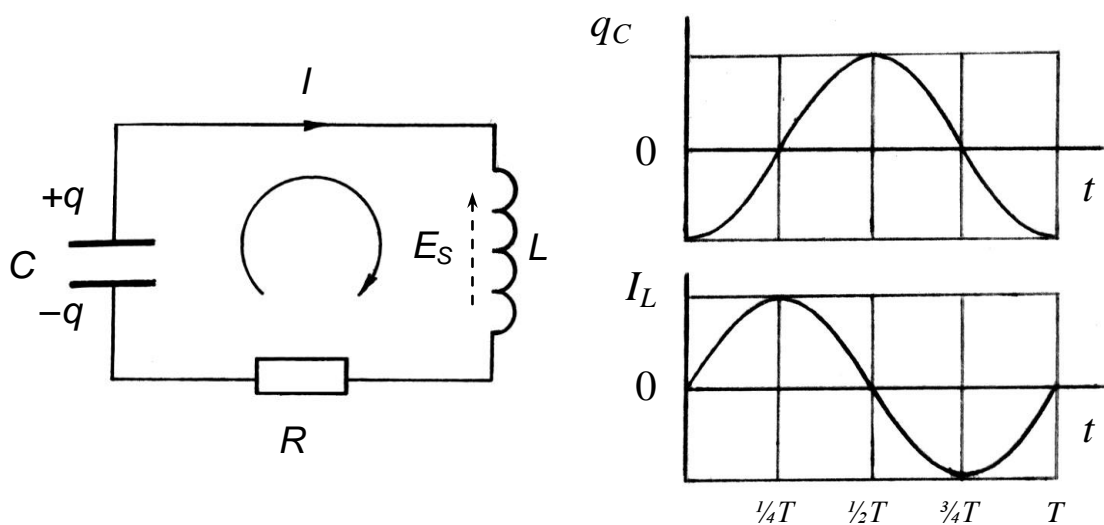
Коливання, збуджені у будь-яких реальних коливальних системах, в яких не відбувається припливу енергії ззовні, поступово згасають внаслідок переходу енергії коливань – механічних, електричних – у інші форми енергії, наприклад у теплоту. У механічних системах такі втрати енергії спричинені наявністю внутрішніх сил тертя. В електричних системах, наприклад, у коливальному контурі, коливання електричного струму будуть згасати через наявність омичного опору, на якому електромагнітна енергія переходить у джоулеву теплоту, а також внаслідок часткового випромінювання електромагнітної енергії в оточуючий простір. Практично в земних умовах через неминучу присутність вказаних факторів у системах, ізольованих від впливу зовнішнього середовища, завжди відбувається поступове перетворення енергії впорядкованого процесу (коливань) в енергію неупорядкованого процесу – в енергію теплового (хаотичного) руху молекул.

Коливальний контур – один з основних елементів радіотехніки – це електричне коло, яке складається з послідовно з'єднаних котушки індуктивності  $L$ , резистора з омичним опором  $R$  і конденсатора ємністю  $C$ . У реальній схемі роль резистора виконує омичний опір котушки індуктивності. За певних умов у коливальному контурі можуть збуджуватися коливання електричних і пов'язаних з ними магнітних величин. Якщо після збудження коливань контур відключити від зовнішніх джерел енергії, то подальші процеси в ньому будуть протікати виключно за рахунок початкового запасу електромагнітної енергії. Коливання, які здійснюються у ізольованому від зовнішніх джерел енергії коливальному контурі, називаються *вільними*. Розрізняють лінійні і нелінійні коливальні контури. У лінійному коливальному контурі величини  $L$ ,  $C$  та  $R$  залишаються сталими незалежно від амплітуди коливань, а отже і період коливань у лінійному контурі не залежить від амплітуди коливань.

## Коливання і хвилі

З'ясуємо поетапно, яким чином у коливальному контурі утворюються і підтримуються електричні коливання.

Спочатку розглянемо *контур Томсона* – ідеальний коливальний контур (рисунк 22.1, а), в якому електричний опір  $R=0$ , отже і втрати енергії на нагрівання провідників відсутні. Припустимо, що у початковий момент часу  $t=0$  верхня обкладинка конденсатора заряджена позитивно, нижня – негативно, і струм у колі відсутній, тобто вся енергія контуру зосереджена у електричному полі конденсатора. Внаслідок різниці потенціалів між обкладинками конденсатор починає розряджатися і у контурі з'явиться і почне зростати електричний струм, який буде протікати через котушку  $L$  в напрямку від позитивної до негативної обкладинки конденсатора (на *рисунку 22.1, а* – за стрілкою годинника). Зростання струму веде до виникнення у котушці *ерс* самоіндукції  $E_S$ , яка згідно з правилом Ленца протидіє зростанню струму. На цьому етапі заряд та напруга на конденсаторі, а отже і енергія електричного поля в ньому зменшуються. Однотимчасно з цим збільшення величини струму веде до зростання енергії магнітного поля у котушці. Перший етап закінчиться у той момент, коли конденсатор повністю розрядиться, сила струму в контурі досягне максимуму, і запас енергії контуру повністю зосередиться в магнітному полі котушки.



а) – схема коливального контуру;

б) – залежності від часу заряду  $q_C(t)$  та сили струму  $I_L(t)$

Рисунок 22.1 – Коливальний контур

Відтак почнеться другий етап, протягом якого струм у контурі, зберігаючи попередній напрямок, буде спадати. Тепер присутність індуктивності у контурі веде до того, що струм не може припинитися одразу після розряду конденсатора – його буде підтримувати *ерс* самоіндукції в котушці, напрям дії якої зміниться на протилежний і буде збігатися з напрямком струму. Цей струм почне заряджати конденсатор у протилежному напрямку (перезарядка конденсатора), і різниця

потенціалів, яка утвориться на його обкладинках, поступово зменшуватиме силу струму в контурі до нуля. Наприкінці другого етапу струм у контурі припиниться, заряд і напруга на конденсаторі знов стануть максимальні, але протилежні за знаком до початкових значень, а енергія контуру знов зосередиться в електричному полі конденсатора.

На третьому і четвертому етапах повторюється та сама послідовність процесів, але у зворотному напрямі, в результаті чого система повернеться у початковий стан, завершивши один цикл коливань. Таким чином у контурі виникають незатухаючі коливання заряду (напруги) на конденсаторі і сили струму в котушці (рисунки 22.1, б), які супроводжуються періодичними взаємними перетвореннями енергії електричного поля конденсатора і магнітного поля котушки індуктивності.

У реальному коливальному контурі омичний опір  $R \neq 0$  – оскільки завжди існує електричний опір котушки, резисторів, з'єднувальних провідників. При протіканні електричного струму через опір на ньому виділяється тепло. Це означає, що в реальному коливальному контурі початковий запас енергії електричного і магнітного полів буде поступово перетворюватись у теплоту і розсіюватись в оточуюче середовище. Тому вільні коливання, збуджені в реальному коливальному контурі, будуть поступово згасати з часом.

Підкреслимо: затухання коливань відбувається внаслідок незворотного процесу переходу початкового запасу електромагнітної енергії контуру в інші форми енергії. В електричних колах ці втрати енергії пов'язані переважно з нагріванням провідників внаслідок протікання струму (омичні втрати), а при високих частотах також з випромінюванням електромагнітних хвиль в оточуючий простір (втрати на випромінювання).

### 2.1.2 Рівняння коливань в контурі

Розглянемо детальніше процеси у реальному коливальному контурі (рисунки 22.2). Оскільки в діючому контурі будуть змінюватись з часом за величиною і напрямом (знаком) усі основні величини – заряд на обкладинках конденсатора  $q = q(t)$ , напруга на конденсаторі  $U_C = U_C(t)$ , сила струму  $I = I(t)$ , спад напруги на опорі  $U_R = U_R(t)$ , ерс самоіндукції в котушці  $E_S = E_S(t)$  – будь-яку з цих величин можна розглядати як невідому функцію при складенні диференціального рівняння. Наприклад, будемо розглядати у якості невідомої функції залежність від часу заряду на конденсаторі  $q = q(t)$ .

Застосуємо для контуру друге правило Кірхгофа:

$$U_C + U_R = E_S. \quad (22.1)$$

Аби уникнути помилок у знаках величин при подальших перетвореннях рівняння (22.1), слід додержуватись такого порядку. Спочатку вибрати довільно напрям обходу контуру – на рисунку 22.2 вибраний напрям (за стрілкою годинника) показано стрілкою. Умовимося надалі для будь-якого моменту часу  $t$ :

## Коливання і хвилі

- під величиною і знаком функції  $q = q(t)$  розуміти заряд на тій обкладинці конденсатора, яка зустрінеться першою, якщо проходити конденсатор в обраному напрямку (на *рисунку 22.2* такою є обкладинка 1);
- під величиною і знаком напруги на конденсаторі  $U_C$  розуміти різницю потенціалів між першою і другою обкладинками конденсатора, якщо проходити конденсатор в обраному напрямку (тобто у нашому випадку,  $U_C = \varphi_1 - \varphi_2$ );
- вважати додатним струм, якщо він протікає в обраному напрямку обходу, і від'ємним – у протилежному випадку.

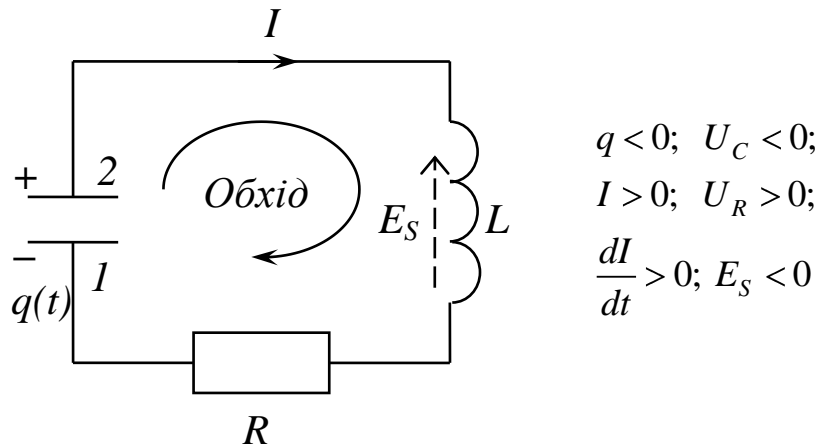


Рисунок 22.2 – Вибір знаків величин при складенні рівняння коливань у контурі

При виконанні таких умов у будь-який момент часу знаки алгебраїчних величин  $I(t)$  та  $dq$  у співвідношенні  $I = \frac{dq}{dt}$  будуть завжди однакові, що забезпечить узгодженість знаків і в усіх інших співвідношеннях, потрібних для перетворень рівняння (22.1), а саме:

$$U_C = \frac{q}{C}; \quad U_R = IR; \quad E_S = -L \frac{dI}{dt}. \quad (22.2)$$

Після підстановки співвідношень (22.2) у рівняння (22.1) і очевидних перетворень одержимо диференціальне рівняння затухаючих коливань в контурі:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \quad (22.3)$$

де  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – власна частота коливань у контурі;  $\beta = \frac{R}{2L}$  – коефіцієнт затухання коливань.

## Коливання і хвилі

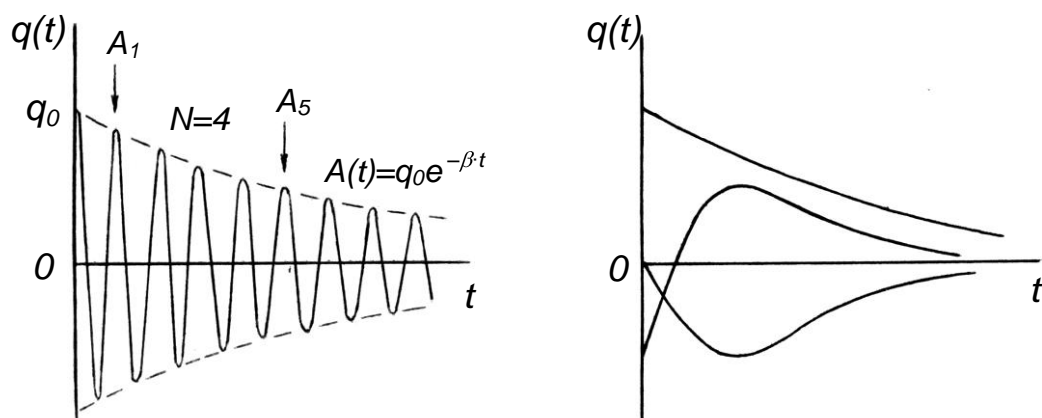
Відмітимо, що користуючись співвідношеннями (22.2), легко одержати аналогічні диференційні рівняння і для величин:  $U_C = U_C t$ ,  $I = I t$ ,  $U_R = U_R t$ ,  $E_S = E_S t$ .

Розв'язок рівняння (22.3) при умові малого затухання ( $\beta < \omega_0$ ) має вигляд:

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (22.4)$$

де  $q_0$  – амплітуда заряду на конденсаторі у початковий момент часу;  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – циклічна частота *затухаючих* коливань у контурі;  $\varphi$  – початкова фаза коливань. Значення величин  $q_0$  та  $\varphi$  визначаються *початковими умовами* – станом системи у початковий момент часу:  $U_0 = U_C 0$  та  $I_0 = I 0$ .

Графік залежності (22.4) показаний на *рисунку 22.3, а*. Множник  $q(t) = q_0 e^{-\beta t}$  перед тригонометричною функцією в (22.4) розглядається як амплітуда коливань заряду на конденсаторі у будь-який момент часу  $t$  (пунктирна лінія на рисунку):



а) – у випадку малого затухання;

б) – у випадку великого затухання

Рисунок 22.3 – Загальний вигляд розв'язку рівняння затухаючих коливань

Тобто амплітуда коливань заряду на обкладинках конденсатора

$$A(t) = q_0 e^{-\beta t} = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (22.4, a)$$

Отже при малому затуханні в контурі відбувається коливальний розряд конденсатора з монотонно спадаючою амплітудою. За інтервал часу  $\tau = \frac{1}{\beta}$  амплітуда коливань зменшується у  $e$  разів. Стала величина  $\tau$  є однією з характеристик контуру і називається *часом релаксації* (часом затухання). За формулою (22.4, а) легко підрахувати, наприклад, що через інтервал часу  $\Delta t = 3\tau$  амплітуда



## Коливання і хвилі

залишкових коливань у контурі не перевищуватиме 5% від початкового значення, а для інтервалу часу  $\Delta t = 5\tau$  – відповідно 1% від початкового значення.

Період затухаючих коливань  $T_1$ <sup>1)</sup> визначається за формулою:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}, \quad (22.5, \text{ а})$$

яка при  $\beta \rightarrow 0$ , тобто при  $\beta \ll \omega_0$ , перетворюється у формулу Томсона, за якою визначають період власних коливань у ідеальному коливальному контурі:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (22.5, \text{ б})$$

З формули (21.5, а) видно, що зростання  $\beta$  від нуля до  $\omega_0$  веде до зростання періоду затухаючих коливань  $T_1$  і при  $\beta \rightarrow \omega_0$  він стає нескінченно великим. Це означає, що процес у контурі втрачає періодичність, тобто стає *аперіодичним*. Аперіодичний характер процесів у контурі залишається і за умови  $\beta > \omega_0$  (велике затухання). Розв'язок рівняння (22.3) при умові великого затухання має вигляд:

$$q(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (22.6)$$

де  $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$  – корені характеристичного рівняння, які у даному випадку будуть обидва дійсні і від'ємні. Довільні константи  $C_1$  і  $C_2$  визначаються початковими умовами, а саме зарядом  $q_0 = q(0)$  на конденсаторі і силою струму  $I_0 = I(0)$  у початковий момент часу  $t=0$ . На *рисунку 22.3, б* наведені графіки можливих процесів аперіодичного розряду конденсатора при різних початкових умовах.

Порівнюючи вирази (22.4) і (22.6), бачимо, що характер процесу розряду конденсатора у контурі – періодичний або аперіодичний – повністю визначається співвідношенням між величинами  $\beta$  і  $\omega_0$ , які, в свою чергу, залежать від значень  $L$ ,  $C$  та  $R$ .

Критичне значення коефіцієнта затухання, при якому характер процесів у контурі змінюється з періодичного на аперіодичний, відповідає умові  $\beta_{\text{кр}} = \omega_0$ , звідки легко визначити і відповідний критичний опір контуру:

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (22.7)$$

<sup>1)</sup> До затухаючих коливань поняття *періоду* і *частоти* у точному розумінні є непридатні. Однак при малому затуханні можна умовно користуватись поняттям періоду  $T_1$ , як інтервалом часу між двома послідовними максимумами (однакового знаку) змінної величини (струму, напруги, відхилення маятника, тощо).

Якщо омичний опір у контурі  $R < R_{кр}$ , процеси у контурі мають коливальний характер; при  $R \geq R_{кр}$  процеси у контурі аперіодичні.

Поряд з  $\beta$  і  $\tau$  важливими характеристиками будь-якої коливальної системи з затуханням є також логарифмічний декремент коливань і добротність контуру, якими часто користуються на практиці.

Логарифмічний декремент коливань  $\theta$ , за означенням, дорівнює натуральному логарифму відношення амплітуд затухаючих коливань для двох послідовних моментів часу, поділеному на кількість періодів  $N$ , яка відповідає інтервалу між цими моментами <sup>2)</sup>. За даним означенням, враховуючи залежність (22.4, а), одержимо:

$$\theta = \frac{1}{N} \ln \frac{A(t)}{A(t + NT_1)} = \frac{1}{N} \ln \frac{q_0 e^{-\beta \cdot t}}{q_0 e^{-\beta(t + NT_1)}} = \beta T_1. \quad (22.8)$$

Отже коефіцієнт затухання  $\beta$ , час релаксації  $\tau$  і логарифмічний декремент  $\theta$  різним чином характеризують зміну з часом амплітуди затухаючих коливань.

Разом з тим у техніці якість коливальної системи часто оцінюють її *добротністю*. Добротність системи характеризує зміну з часом енергії  $W$   $t$  затухаючих коливань. Беручи до уваги, що енергія коливань у будь-який момент часу пропорційна квадрату амплітуди коливань і враховуючи залежність (22.4, а), одержимо:

$$W(t) = W_0 \cdot e^{-2\beta \cdot t}, \quad (22.9)$$

де  $W$   $t$  та  $W_0$  – відповідно запас енергії системи у момент часу  $t$  та у початковий момент  $t = 0$ .

Відносне зменшення енергії коливальної системи (контур) протягом одного періоду, тобто від моменту часу  $t$  до моменту  $t + T_1$  дорівнює:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W(t) - W(t + T_1)}{W(t)} = 1 - e^{-2\beta T_1}.$$

Оскільки за один період фаза коливань змінюється на  $2\pi$  радіан, то відносне зменшення енергії контуру за час, протягом якого фаза коливань змінюється на  $1$  *радіан*, дорівнюватиме величині:

$$d = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W}.$$

<sup>2)</sup> При від'ємних значеннях  $\theta$  цей коефіцієнт називається *логарифмічним інкрементом*; у таких випадках амплітуда відповідних коливань експоненціально збільшується з часом.

Величину  $d$  в радіотехніці іноді називають *затуханням контуру* (не плутати з коефіцієнтом затухання  $\beta$ ), а обернену до неї величину – *добротністю контуру*.

Отже добротністю коливальної системи (контуру)  $Q$ , за означенням, називається величина:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\beta T_1}} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\theta}}. \quad (22.10)$$

У тих випадках, коли  $\beta \ll \omega_0$  величина у показнику експоненти буде набагато менша від одиниці:  $\theta = \beta T_1 \approx \beta T_0 \ll 1$ , можна скористатись відомим наближенням:  $e^{-\alpha} \approx 1 - \alpha$ , і формула (22.10) спрощується:

$$Q \cong \frac{\pi}{\theta} \cong \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (22.10, a)$$

## 2.2 Експериментальна частина

### 2.2.1 Опис установки

Блок-схема експериментальної установки зображена на *рисунку 22.4*. Установка складається з панелі, на якій закріплені котушка індуктивності  $L$  і конденсатори  $C$  з відомими ємностями, а також магазина опорів  $R$ , генератора імпульсів  $\Gamma I$  та електронного осцилографа  $EO$ . Сигнал з виходу генератора надходить безпосередньо на клемми «+» та «-», розташовані на панелі. Генератор

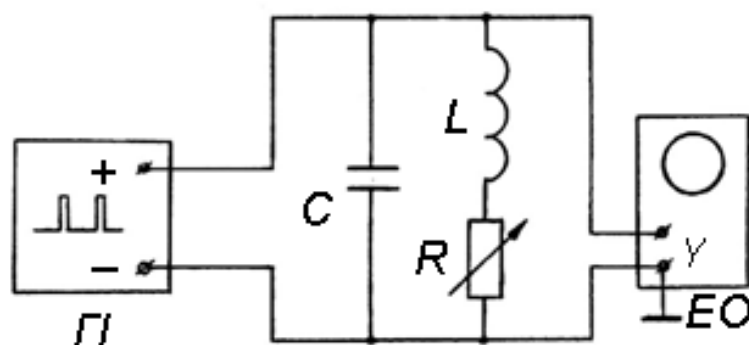


Рисунок 22.4 – Схема вимірювальної установки для дослідження коливань в контурі

імпульсів формує однополярні імпульси напруги (імпульси запуску), які подаються на контур з інтервалом  $0,02$  с. Імпульс запуску заряджає конденсатор  $C$ , надаючи контуру початковий запас енергії. Після кожного імпульсу запуску вихід генератора автоматично відключається від коливального контуру, а у контурі починаються вільні затухаючі коливання, для спостереження яких використовують осцилограф. Підключення осцилографа до контуру практично не впливає на процеси у контурі, оскільки вхідний опір осцилографа дуже великий ( $\approx 0,5$  МОм) порівняно з критичним опором контуру.

Параметри контуру –  $R$ ,  $L$ ,  $C$  – слід вибирати так, щоб протягом інтервалу часу між двома послідовними імпульсами запуску, тобто до надходження на-

ступного імпульсу, коливання, збуджені попереднім імпульсом, встигли затухнути майже повністю. Оскільки інтервал між імпульсами запуску дорівнює  $0,02\text{ с}$ , такі вимоги, згідно (22.4, а), будуть виконані з точністю до 1 % при умові:  $5\tau < 0,02\text{ с}$ , тобто  $\tau < 4\text{ мс}$ .

Для спостереження затухаючих коливань при різних значеннях  $\beta$  використовується магазин резисторів Р-33. Слід зауважити, що у будь-якому випадку  $\beta$  залежить як від опору магазину резисторів, так і від омичного опору котушки індуктивності і з'єднувальних провідників, який не завжди відомий.

Частоту власних коливань у контурі можна змінювати, використовуючи різні конденсатори, а також їх паралельне або послідовне з'єднання.

### 2.2.2 Виконання роботи

*При підготовці до роботи рекомендується повторити порядок вимірювань амплітуди і періоду імпульсів за допомогою осцилографа (дивись [3], лабораторна робота № 14).*

1. Скласти схему коливального контуру (рисунки 22.4), після чого одержати дозвіл на виконання роботи від керівника занять.
2. Підготувати осцилограф до вимірювань: перевірити його калібрування і в разі необхідності вдатися до корегування. Після закінчення перевірки встановити тривалість горизонтальної розгортки осцилографа (ступінчастий перемикач «ВРЕМЯ/ДЕЛ») у положення «0,5 ms» або «1 ms» і одержати на екрані горизонтальну світлову лінію від генератора розгортки.
3. Встановити на магазині опорів ступінчасті перемикачі усіх розрядів (декад) у нульові положення. При цьому опір магазину  $R = 0$  і опір контуру дорівнює лише омичному опору  $R_0$  котушки індуктивності і з'єднувальних провідників.
4. Підключити генератор імпульсів до мережі живлення, а осцилограф – до коливального контуру (клеми «+» та «-» на макеті). За допомогою регуляторів режиму розгортки домогтися появи на екрані осцилографа зображення нерухомої осцилограми затухаючих коливань. Встановити осцилограму симетрично відносно горизонтальної осі екрану, після чого відрегулювати остаточно горизонтальний і вертикальний масштаби зображення, зручні для вимірювань.
5. Виміряти амплітуди 4...5 послідовних коливань, починаючи з будь-якої, крім стартової (стартова амплітуда коливань може бути дещо спотворена імпульсом запуску). Результати вимірювань записати у таблицю.
6. Виміряти період  $T_1$  відповідних затухаючих коливань. Для зменшення похибки вимірювання періоду треба визначити по осцилограмі час 6...8 повних коливань і поділити його на кількість періодів. Результати вимірювань записати у таблицю 22.1.

Таблиця 22.1 – Зразок таблиці

№	$R$ , Ом	$C$ , мкФ	$T_1$ , мс	Амплітуда, В					Декремент $\theta_{jk}$			$\theta_{cp}$
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	1	2	3	
1												

7. За даними вимірювань п.6 оцінити *індуктивність* контуру. При цьому можна вважати опір контуру  $R_0$  достатньо малим і розраховувати  $L$  за формулою Томсона (формула 22.5, б). Користуючись одержаною величиною  $L$  і відомою ємністю  $C$ , оцінити за формулою 22.7 критичний опір контуру  $R_{кр}$ .
8. Повторити 4...5 разів вимірювання пп.5, 6, збільшуючи щоразу опір контуру за допомогою магазину опорів. Щоразу після встановлення нового значення опору контуру необхідно перевірити, чи розташована осцилограма симетрично відносно горизонтальної осі екрану і при необхідності скорегувати її положення. В усіх випадках опір контуру не повинен перевищувати  $R_{кр}$  і має бути таким, щоб на екрані осцилографа спостерігалась достатня для вимірювань кількість коливань. Вибрані значення опорів магазину  $R$  і відповідні результати вимірювань записати у таблицю.
9. Оцінити експериментально  $R_{кр}$ , для чого поступово збільшувати опір контуру і спостерігати зміну кривої коливань до втрати нею коливального характеру. Порівняти одержане значення критичного опору з результатом розрахунку п.7.
10. За вказівкою викладача, повторити вимірювання пп.5, 6 при  $R = 0$ , змінивши величину ємності у контурі. Проаналізувати, як впливає зміна ємності на характеристики коливального процесу в контурі та його критичний опір.

### 2.3 Обробка результатів вимірювань

1. Для кожного значення  $R$  магазину опорів за формулою (22.8) тричі підрахувати величину логарифмічного декременту коливань  $\theta_{jk}$ , вибираючи для розрахунку будь-яку пару з одержаних п'яти амплітуд, наприклад,  $\theta_{13}$  розраховується через  $A_1$  і  $A_3$ ,  $\theta_{25}$  – через  $A_2$  і  $A_5$  і т.д. Середнє значення  $\theta_{cp}$  записати в окрему колонку таблиці.
2. Побудувати на міліметровому папері графік залежності середнього значення декременту від опору  $R$  магазину опорів:  $\theta_{cp} = f R$ .
3. Оцінити неврахований омичний опір  $R_0$  котушки і провідників шляхом екстраполяції одержаної графічної залежності до точки перетину її з віссю абсцис, координата якої, очевидно, повинна дорівнювати  $-R_0$ .
4. Проаналізувати результати роботи. Зробити висновки.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке коливальний контур? контур Томсона? Які процеси відбуваються при вільних коливаннях в ідеальному контурі? в реальному контурі?
2. Як виводиться диференціальне рівняння коливань у реальному контурі? Який вигляд має розв'язок цього рівняння за умов малого та великого затування?
3. Покажіть, що диференціальні рівняння для величин  $U_C = U_C t$ ,  $I = I t$ ,  $U_R = U_R t$ ,  $E_S = E_S t$  мають такий самий вигляд, як і для  $q = q t$ .
4. За якою залежністю від часу змінюється енергія електричного поля у коливальному контурі? енергія магнітного поля? повна енергія контуру?
5. Що таке коефіцієнт затування? час релаксації? логарифмічний декремент коливань? Доведіть співвідношення між цими величинами.
6. Що таке критичний опір коливального контуру? Як змінюється період затуваючих коливань у контурі при зростанні омичного опору контуру від нуля до  $R_{кр}$ ? Побудуйте наближений графік цієї залежності.
7. Який вигляд має графік залежності логарифмічного декременту коливань від омичного опору контуру? Як за даними експериментальних вимірювань логарифмічного декременту коливань оцінити омичний опір котушки індуктивності, якщо він невідомий?
8. Що таке добротність контуру? Як виразити добротність через логарифмічний декремент коливань? через величини  $R, L, C$  якщо відомо, що  $R \ll R_{кр}$ ?
9. Як знайти омичний опір контуру через добротність  $Q$  та  $R_{кр}$ , якщо  $R \ll R_{кр}$ ?
10. Покажіть, що при незмінних  $L$  та  $C$  величини  $\frac{1}{T_1^2}$  та  $R^2$  залежать одна від одної лінійно. Як по графіку цієї залежності знайти  $R_{кр}$ ?
11. Покажіть, що при незмінних  $L$  і  $C$  величини  $\frac{1}{\theta^2}$  та  $\frac{1}{R^2}$  залежать одна від одної лінійно. Як по графіку цієї залежності знайти  $R_{кр}$ ?
12. Позначимо через  $N_e$  кількість коливань, які відбуваються у контурі за інтервал часу, протягом якого амплітуда коливань зменшується у  $e$  разів, тобто за час релаксації  $\tau$ . Як виразити через  $N_e$  логарифмічний декремент коливань і добротність контуру?

### 3 Лабораторна робота № 23

#### ВИВЧЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Прилади і приладдя:

- 1) лабораторна установка зі сталюю лінійкою та електромагнітом;
- 2) вимірювальний механізм;
- 3) звуковий генератор.

Мета роботи полягає у дослідженні вимушених коливань механічної системи, вивченні явища резонансу, визначенні резонансних властивостей та основних характеристик системи за допомогою експериментально одержаної резонансної кривої.

Резонанс відіграє величезну роль у природних явищах, у фундаментальних і прикладних наукових дослідженнях, у технічній інженерії, технічних засобах вимірювань, обробки та перетворювання інформації тощо. Резонансні методи вимірювань різноманітних фізико-технічних величин широко розповсюджені і належать до найбільш чутливих і точних. У радіотехніці завдяки резонансу можна відокремити сигнали однієї (потрібної) радіо- або телестанції від решти інших. Разом з тим резонанс споруд, машин та механізмів, літальних апаратів може стати причиною руйнування та катастроф.

#### 3.1 Теоретичні відомості

Як відомо (дивись лабораторну роботу №22), коливання, збуджені у будь-яких реальних коливальних системах, *ізолюваних* від впливу зовнішнього середовища, поступово згасають внаслідок переходу енергії коливань – механічних, електричних – в інші форми енергії, наприклад у теплоту, випромінювання тощо. Для підтримування коливань системи на певному рівні необхідно компенсувати втрати енергії, обумовлені дією *внутрішніх* факторів опору. Цього можна досягти різними способами. Зокрема, для підтримування коливань у механічних системах достатньо діяти на них *зовнішньою* періодичною силою, а у електричному колі – підключити коло до зовнішнього джерела змінної *ерс*. У таких умовах коливальна система вже не буде ізолюваною від зовнішнього оточення і теплові втрати енергії системи можна відновлювати за рахунок надходження енергії ззовні. Коливання системи, які здійснюються під впливом зовнішньої періодичної сили (*ерс*), називають *вимушеними*, а зовнішню силу (*ерс*) – *примусовою*. Характер вимушених коливань визначається як примусовою силою (*ерс*), так і властивостями самої системи.

У математиці доведено, що періодичну функцію будь-якої (не синусоїдальної) форми можна розкласти у ряд Фур'є, тобто подати як суму тригонометричних функцій (синус і косинус). Отже, для дослідження властивостей коливальної системи під дією примусової періодичної сили (*ерс*) довільної форми тре-

ба насамперед з'ясувати, як реагуватиме система на вплив зовнішньої сили, яка змінюється за гармонічним законом (синуса або косинуса).

Розглянемо тіло масою  $m$ , прикріплене до пружини, яке, рухаючись поступально, здійснює коливання вздовж осі  $X$ . Переміщення тіла від положення рівноваги позначимо  $\vec{x}(t)$ . Будемо вважати, що тіло рухається під дією трьох сил:

- пружної сили  $\vec{F}_{\text{пр}} = -k\vec{x}$ , яку створює деформована пружина;
- сили тертя (опору), яка існує у будь-якій реальній механічній системі і за напрямом протилежна напрямку руху тіла. Домовимося надалі розглядати лише такі сили опору, які змінюються пропорційно швидкості руху тіла:  $\vec{F}_{\text{оп}} = -r\vec{v}$ , де  $r$  – коефіцієнт опору рухові тіла у даному середовищі. Така залежність сили опору від швидкості справедлива при малих швидкостях руху тіл у газі або рідині;
- зовнішньої примусової сили, яка змінюється за гармонічним законом:  $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega t$ .

У будь-який момент часу другий закон Ньютона для тіла маси  $m$  має вигляд:

$$m\vec{a} = -k\vec{x} - r\vec{v} + \vec{F}_0 \cos \omega t.$$

Переходячи до проекцій на вісь  $X$  і виконавши очевидні перетворення, це рівняння зводиться до вигляду <sup>1)</sup>:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (23.1)$$

де  $\beta = \frac{r}{2m}$  – коефіцієнт затухання коливань;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – власна частота коливань системи;  $f_0 = \frac{F_0}{m}$  – зведена сила (має розмірність прискорення).

Частинний розв'язок диференційного рівняння (23.1), який описує вимушені коливання тіла в у сталому режимі, тобто після завершення початкового процесу розкачки системи, має вигляд:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \psi). \quad (23.2)$$

Як бачимо, сталі вимушені коливання зміщення  $x(t)$  тіла відбуваються з частотою  $\omega$  зовнішньої примусової сили і відрізняються від неї за фазою на величину  $\psi$ .

<sup>1)</sup> Легко показати, що диференційне рівняння, яке описує коливання заряду на обкладинці конденсатора у коливальному контурі з параметрами  $L$ ,  $C$ ,  $R$  під дією зовнішньої гармонічної  $e_{\text{рс}}$ , має також вигляд (23.1).





$$A_p = A(\omega_p) = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (22.6)$$

Як свідчить формула (23.5), при дуже малому затуханні  $\beta \ll \omega_0$  резонансна частота майже не відрізняється від частоти власних коливань системи.

Кількісною характеристикою резонансних властивостей системи може бути відношення резонансної амплітуди  $A_p$  до *статичного зміщення*  $A_{ст}$ , тобто зміщення тіла під дією сталої сили величиною  $F_0$ . Величину статичного відхилення легко одержати з формули (23.3) при  $\omega \rightarrow 0$ . Відношення

$$\frac{A_p}{A_{ст}} = Q \quad (23.7)$$

називається *добротністю* коливальної системи. При умові  $\beta^2 \ll \omega_0^2$  формула (23.7) за допомогою співвідношень (23.3), (23.6) легко перетворюється до вигляду

$$Q \cong \frac{\pi}{\beta T_0} \cong \frac{\pi}{\theta}, \quad (23.8)$$

де  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  – період власних коливань системи;  $\theta \approx \beta T_0$  — *логарифмічний декремент коливань*, який, поряд з добротністю, розглядається як характеристика властивостей коливальної системи<sup>3)</sup>. Для систем з малим затуханням, тобто при  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ , одержимо  $\theta \ll 1$  та  $Q \gg 1$ . Такі значення декременту та добротності притаманні коливальним системам з високими резонансними якостями.

Резонансна крива у цих умовах має вузький і високий максимум.

Для експериментального визначення добротності системи формула (23.7) у більшості випадків непридатна через труднощі, пов'язані з неможливістю точного вимірювання величини  $A_{ст}$ , яка зазвичай є дуже малою. На практиці добротність визначають по графіку залежності  $A$  від  $\omega$  – резонансній кривій. Позначимо на графіку (рисунки 23.1) через  $\Delta\omega$  ширину резонансної кривої на рівні  $A = \frac{A_p}{\sqrt{2}} \cong 0,707 A_p$ . При такій амплітуді енергія коливань системи вдвічі менша порівняно з її енергією у стані резонансу (енергія пропорційна квадрату амплітуди). Можна показати, що при умові малого затухання величина  $\Delta\omega$  пов'язана з коефіцієнтом затухання системи співвідношенням

$$\Delta\omega \cong 2\beta, \quad (23.9)$$

<sup>3)</sup> Фізичний зміст понять добротності  $Q$  та логарифмічного декременту коливань  $\theta$  розглядається також в [3], лабораторна робота № 22.

а з добротністю системи – співвідношенням

$$Q = \frac{\omega_p}{\Delta\omega} \cong \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \quad (23.10)$$

### 3.2 Експериментальна частина

#### 3.2.1 Опис установки

Лабораторна установка (рисунки 23.2) для дослідження резонансу в механічній системі складається із сталюї лінійки  $L$ , жорстко закріпленої з одного кінця і розташованої між полюсами електромагніта  $EM$ , який живиться від генератора змінного струму  $G$  з плавним регулюванням частоти. Зовнішня сила, яка спричиняє вимушені коливання лінійки, створюється дією на лінійку змінного магнітного поля електромагніта. Затухання у системі обумовлене опором повітря під час руху лінійки і розсіюванням енергії у матеріалі лінійки. Амплітуду коливань вимірюють за допомогою вимірювального пристрою  $BP$ , оздобленого шкалою ноніуса, що забезпечує точність вимірювань до  $0,1 \text{ мм}$ .

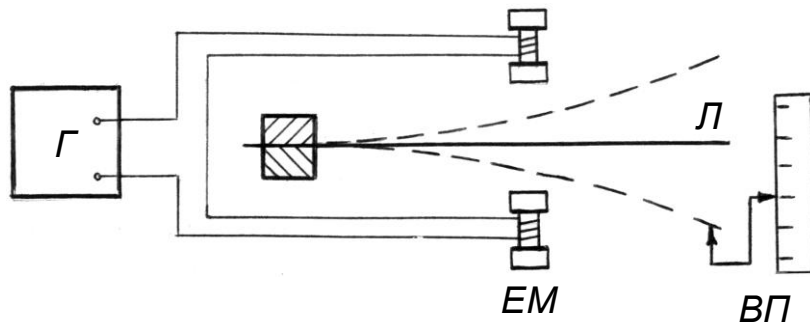


Рисунок 23.2 – Будова установки для дослідження вимушених коливань механічної системи

#### 3.2.2 Порядок виконання роботи

1. Встановити довжину вільної частини лінійки (за вказівкою викладача) такою, щоб резонансна частота  $\nu_p$  була у межах  $23 \dots 25 \text{ Гц}$ .
2. Ретельно виміряти по шкалі вимірювального пристрою і записати відлік  $x_0$ , який відповідає положенню лінійки у стані рівноваги (нульовий відлік).
3. Підключити електромагніт до виходу «600 Ом» генератора.
4. Підключити генератор до мережі живлення і дати прогрітися 2 – 3 хвилини.
5. Плавно змінюючи частоту генератора і спостерігаючи коливання лінійки, визначити і записати резонансну частоту  $\nu_p$ . При цьому слід відрегулювати рівень сигналу на виході генератора так, щоб амплітуда коливань лінійки в резонансі була максимально можливою і у той же час лінійка не торкалася полюсів електромагніта.

6. Встановити частоту генератора на  $1 \dots 2$  Гц нижче за  $\nu_p$ . Збільшуючи з малим кроком частоту генератора, виміряти відхилення лінійки в залежності від частоти в інтервалі плюс-мінус  $1 \dots 2$  Гц відносно  $\nu_p$ . Результати вимірювань записати у таблицю.
7. Повторити вимірювання *n*. 5 не менше  $2 \dots 3$  разів, приділяючи особливу увагу вимірюванням поблизу резонансної частоти.

### 3.3 Обробка результатів вимірювань

1. За одержаними даними розрахувати і записати у таблицю амплітуди коливань лінійки у залежності від частоти:  $A \nu_i = x_i - x_0$ .
2. Побудувати на міліметровому папері резонансну криву – графік залежності  $A \nu$ . Для цього доцільно нанести спочатку на графік точки, одержані в усіх дослідах, після чого провести оптимальну резонансну криву, ігноруючи “підозрілі” точки, які могли з’явитися внаслідок нестабільності в роботі установки і помилок відліку частоти.
3. Користуючись графіком, визначити ширину резонансної кривої  $\Delta \nu$ , після чого розрахувати основні характеристики системи: коефіцієнт затухання  $\beta$ , логарифмічний декремент коливань  $\theta$ , добротність  $Q$ , а також частоту та період  $T_0$  власних коливань системи і статичне відхилення  $A_{ст}$  – формули (23.7) – (23.10).
4. Зробити висновки.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які коливання називають вимушеними? Виведіть диференціальне рівняння вимушених коливань: а) для механічної системи; б) для коливального контуру.
2. У чому полягає явище резонансу? Наведіть і поясніть кілька прикладів, які свідчать про позитивну або негативну роль резонансу в науково-технічній практиці.
3. Як, користуючись залежністю (23.3), одержати формули (23.5) і (23.6) для резонансної частоти  $\omega_p$  та резонансної амплітуди  $A_p$ ?
4. Покажіть на одному графіку наближений вигляд амплітудних характеристик  $A \omega$  системи для двох значень коефіцієнта затухання  $\beta_1 < \beta_2 < \omega_0$ .
5. Що таке добротність коливальної системи? Який фізичний зміст добротності? Покажіть, що при умові  $\beta \ll \omega_0$  добротність  $Q \gg 1$ , а формула (23.7) перетворюється у формулу (23.8).
6. При якій умові добротність системи  $Q = 1$ ? Як виглядає при цьому амплітудна характеристика  $A \omega$  системи? Чому дорівнює у цьому випадку  $\omega_p$ ?

## 4 Лабораторна робота № 24

### ВИВЧЕННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ

Прилади і приладдя:

- 1) стальна струна на підставці;
- 2) електромагніт;
- 3) звуковий генератор;
- 4) випрямляч;
- 5) набір тягарців.

Мета лабораторної роботи полягає у дослідженні стоячих хвиль на струні та експериментальній перевірці справедливості основних теоретичних співвідношень для таких хвиль.

#### 4.1 Теоретичні відомості

Процес поширення коливань у пружному середовищі називається механічною хвилею. Струна являє собою одновимірне пружне середовище. Якщо натягнуту між двома точками струну вивести з положення рівноваги, то вона здійснюватиме коливання різного роду. Хвилі, поширюючись вздовж струни у протилежних напрямках, будуть відбиватися від її кінців (місць закріплення струни). Виникає, взагалі кажучи, нерегулярна і складна картина коливань, яка утворюється суперпозицією біжучих хвиль, що розповсюджуються вздовж струни у протилежних напрямках, багаторазово відбиваючись від точок закріплення. При цьому у точках закріплення струни завжди спостерігається утворення вузлів (відсутність коливань). Можна, однак, помітити, що у тих випадках, коли на струну буде діяти зовнішня періодична сила, при деяких певних частотах картина коливань стабілізується і стає нерухомою у поздовжньому напрямку – на струні утворюються стоячі хвилі. Вони і будуть вивчатися у даній роботі.

Розглянемо процес утворення стоячих хвиль докладніше.

Направимо вісь  $X$  системи координат вздовж струни, довжина якої  $L$ , і домовимося відраховувати координати точок струни від її лівого кінця. Тоді координати точок закріплення струни дорівнюватимуть  $x=0$  та  $x=L$ . Як відомо, рівняння біжучих хвиль, які поширюються вздовж осі  $X$  у додатному  $\psi_+(x,t)$  та від'ємному  $\psi_-(x,t)$  напрямках, мають вигляд:

$$\psi_+(x,t) = A_+ \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (24.1, \text{ а})$$

та

$$\psi_-(x,t) = A_- \cos(\omega t + kx + \beta), \quad (24.1, \text{ б})$$

де  $\psi(x,t)$  – зміщення від свого положення рівноваги частинки пружного середовища, яка здійснює коливання під час проходження хвилі;  $x$  – координата частинки у положенні рівноваги;  $t$  – момент часу, що розглядається;  $A_+$  та  $A_-$  –

## Коливання і хвилі

амплітуди хвиль;  $\omega$  — циклічна частота хвилі;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — хвильове число;  $\alpha, \beta$  — початкові фази хвиль. У будь-якій точці пружного середовища (струни) відбувається додавання коливань, збуджених хвилями  $\psi_+$  і  $\psi_-$ , з врахуванням амплітуди та фази кожного коливання. Якщо позначити через  $\psi(x, t)$  відхилення частинок середовища від положення рівноваги, обумовлене дією обох хвиль у різних точках струни, то, очевидно,

$$\psi(x, t) = \psi_+(x, t) + \psi_-(x, t), \quad (24.2)$$

де аргументи  $(x, t)$  в усіх функціях відповідають вибраній точці спостереження.

Вигляд рівняння для функції  $\psi(x, t)$  залежить від умов, які повинні виконуватись у точках закріплення струни — граничних умов. Виконання тих чи інших граничних умов забезпечується правильним вибором значень  $\alpha, \beta$  — початкових фаз хвиль у рівняннях (24.1). Будемо вважати, що амплітуди для прямої і зворотної біжучих хвиль будуть однакові:  $A_+ = A_- = A_0$ . У разі жорсткого закріплення струни в точці  $x = 0$  у будь-який момент часу зміщення струни відсутнє (вузлова точка), отже першою граничною умовою буде:

$$\psi(0, t) = 0.$$

З фізичної точки зору така умова означає, що коливання, збуджені біжучими хвилями (24.1, а) і (24.1, б) у вузловій точці додаються з протилежними знаками (віднімаються). Інакше кажучи, початкові фази хвиль  $\psi_+$  і  $\psi_-$  у вузловій точці повинні відрізнятись між собою на  $\pi$  радіан, тобто  $\beta = \alpha + \pi$ . Підставивши (24.1, а) і (24.1, б) у рівняння (24.2) і врахувавши вказаний зв'язок між початковими фазами, дістанемо:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A_0 \cos(\omega t - kx + \alpha) + A_0 \cos(\omega t + kx + \alpha + \pi) = \\ &= A_0 \cos(\omega t - kx + \alpha) - A_0 \cos(\omega t + kx + \alpha), \end{aligned}$$

звідки після перетворень  $\left( \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2} \right)$  одержимо рівняння *стоячої хвилі*:

$$\psi(x, t) = -2A_0 \sin kx \cdot \sin(\omega t + \alpha). \quad (24.3)$$

Величину  $A(x) = |-2A_0 \sin kx|$  в рівнянні (24.3) можна розглядати як залежність амплітуди коливань точок струни від координати  $x$ . Бачимо, що амплітуда стоячої хвилі  $A(x)$  у різних точках струни не змінюються з часом і залежить лише від координати точки спостереження. Координати решти вузлових точок, крім  $x = 0$ , легко визначити з умови  $A(x) = 0$ . Поряд з *вузлами* стоячої хвилі розрізняють також і *пучності* — точки, в яких амплітуда коливань максимальна. Координати пучностей стоячої хвилі можна знайти з умови  $A(x) = 2A_0$ .

## Коливання і хвилі

Рівняння (24.3) описує стоячі хвилі, які виникають у необмеженій струні:  $0 \leq x < \infty$ . Як бачимо, у такому випадку ніяких обмежень на частоту (довжину хвилі) немає, тобто у необмеженому середовищі можуть утворюватись стоячі хвилі будь-якої частоти (довжини хвилі).

Розглянемо тепер струну *обмеженої довжини*  $L$ , закріплену жорстко з обох кінців. У цьому випадку  $0 \leq x \leq L$ , і для одержання рівняння стоячих хвиль треба врахувати граничну умову також і у точці  $x = L$  (другу граничну умову). У нашому випадку – жорстке закріплення струни – друга гранична умова має вигляд  $\psi(L, t) = 0$ , яка зводиться до вимоги  $A L = |2A_0 \sin kL| = 0$ , або  $\sin kL = 0$ . Розв'язавши останнє рівняння, знайдемо усі значення хвильового числа  $k$ , при яких задовольняються обидві граничні умови:

$$k_n = \frac{\pi}{L} n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (24.4)$$

а також відповідні значення довжин хвиль:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (24.5)$$

і частот власних коливань

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n}, \quad (24.6)$$

де  $v$  – швидкість поширення біжучих хвиль.

Співвідношення (24.5 і 24.6) вказують на те, що на струні обмеженої довжини  $L$  можуть утворюватися лише стоячі хвилі з певними значеннями частоти (довжини хвилі). Це означає, що струна буде відгукатися – *резонувати* – лише на певні, вибіркові частоти, значення яких залежать від довжини струни  $L$  і швидкості поширення хвиль. Такі частоти називають *власними частотами* струни (резонатора), а відповідні коливання – *власними коливаннями* або *власними модами*. Рівняння власних коливань струни легко одержати, підставивши (24.4) у (24.3):

$$\begin{aligned} \psi_n(x, t) &= 2A_0 \sin k_n x \cdot \sin(\omega_n t + \alpha) = \\ &= 2A_0 \sin \frac{\pi n}{L} x \cdot \sin(\omega_n t + \alpha). \end{aligned} \quad (24.7)$$

Той чи інший вигляд рівняння власних коливань суттєво залежить від граничних умов, які у випадку струни визначаються способом закріплення її на кожному кінці – жорстке або вільне закріплення. При жорсткому закріпленні струни на відповідній границі буде утворюватись вузол, а при вільному закріпленні – пучність стоячої хвилі. Вигляд рівняння стоячих хвиль, подібного (24.5),

## Коливання і хвилі

а отже і значення власних (резонансних) частот для даної струни, у кожному окремому випадку повністю визначаються граничними умовами <sup>1)</sup>.

Для обчислення власних частот коливань струни треба знати швидкість поширення біжучих хвиль вздовж струни (дивись формулу 24.6). Цю швидкість можна визначити за формулою

$$v = \sqrt{\frac{F}{\tau}}, \quad (24.8)$$

де  $F$  – сила натягу струни;  $\tau$  — лінійна густина струни. Об'єднуючи формули (24.5), (24.6) та (24.8), дістанемо значення власних частот коливань струни:

$$v_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\tau}}. \quad (24.9)$$

Найнижча частота  $v_1$  власних коливань струни, яка відповідає значенню  $n=1$ , називається *основним тоном* (*основною гармонікою*). Усі інші власні частоти, які відповідають значенням  $n > 1$ , називають *вищими гармоніками*, або *обертонами*. З формули (24.9) видно, що частота основного тону залежить від довжини, сили натягу, матеріалу та діаметра струни, а частоти вищих гармонік будуть кратні основній частоті.

Розподіли амплітуд коливань точок струни для основного тону та для двох перших обертонів показано на *рисунок 24.1*.

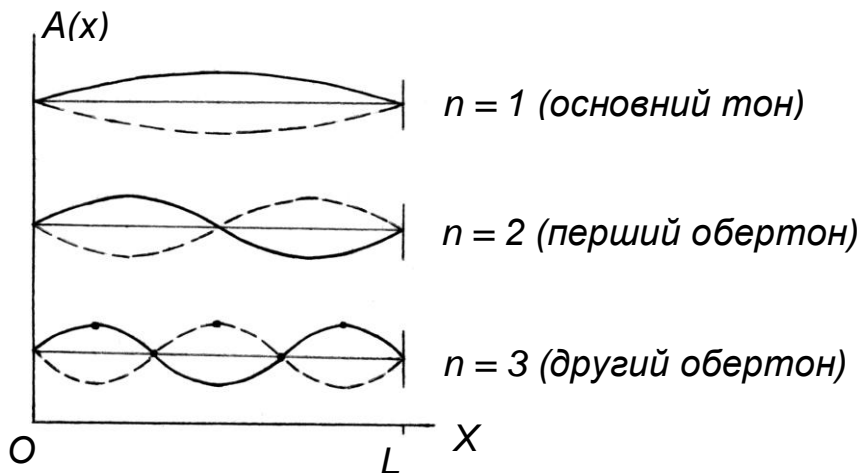


Рисунок 24.1 – Розподіл амплітуд коливань точок струни для основного тону і для двох перших обертонів при жорсткому закріпленні струни з обох кінців

З рисунка видно, що стоячі хвилі на струні мають такі основні властивості:

<sup>1)</sup> Аналогічні міркування будуть справедливі, якщо розглянути утворення звукових стоячих хвиль всередині наповненої повітрям труби (наприклад, органної) при закритому або відкритому кінці труби. Оскільки звукові хвилі у повітрі – це *поздовжні* хвилі, то на твердій стінці закритого кінця труби утворюється *вузол* зміщення частинок повітря, а на відкритому кінці труби – *пучність*.



- форма струни у будь-який момент часу являє собою синусоїду, відхилення якої від положення рівноваги змінюється з часом, а амплітуда лишається сталою;
- відстань між сусідніми вузлами (пучностями) стоячої хвилі дорівнює половині довжини біжучої хвилі;
- усі точки струни, які розташовані між двома суміжними вузлами, коливаються в однаковій фазі, але з різними амплітудами;
- точки струни, які розташовані по різні боки від вузла, коливаються у протилежних фазах, тобто при переході через вузол фаза коливань змінюється на  $\pi$  радіан.

Насправді часто відбуваються складніші коливання струн, наприклад, коливання струн музичних інструментів. Проте ці складні коливання завжди можна розкласти на певну кількість простіших власних коливань – гармонік, які відрізняються між собою не тільки частотами, а й співвідношенням амплітуд окремих гармонік. Висота тону музичного інструмента, яка сприймається на слух, визначається частотою основної гармоніки, а *тембр* (забарвлення) звуку – набором і співвідношенням амплітуд вищих гармонік.

## 4.2 Експериментальна частина

### 4.2.1 Опис установки

У роботі досліджуються коливання гнучкої однорідної сталеві струни, натягнутої між двома нерухомими точками. Схема експериментальної установки зображена на *рисунку 24.2*. На масивній металевій підставці *П* встановлені ізольовані упори *1* і *2*, відстань між якими можна змінювати і контролювати за допомогою масштабної лінійки. Стальна струна розташована між полюсами електромагніта *ЕМ* і кріпиться до упорів. Один кінець струни закріплено жорстко у нерухомому упорі *1*, другий – проходить крізь отвір рухомого упору *2* і блок, розміщений на підставці. Силу натягу струни створює тягар, підвішений до кінця струни, перекинута через блок. По струні проходить змінний струм від звукового генератора *ЗГ*, частоту якого можна плавно змінювати.

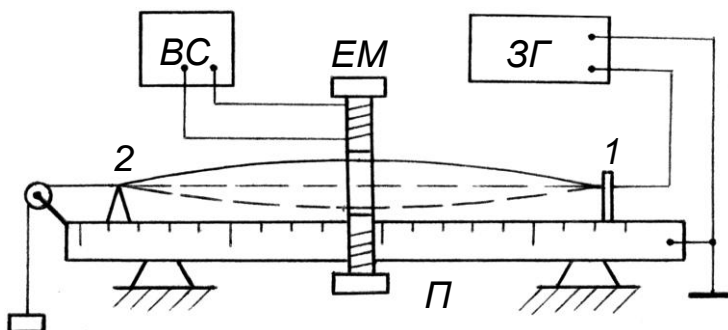


Рисунок 24.2 – Загальний вигляд установки для дослідження стоячих хвиль на струні

Цей струм взаємодіє з постійним магнітним полем електромагніта, який можна пересувати вздовж підставки так, щоб поле електромагніта зосередити в області пучності утвореної стоячої хвилі. Котушки електромагніта живляться від випрямляча ВС-24М. Таким чином, у місці розташування електромагніта на ділянку струни діятиме пе-

ріодична сила (сила Ампера), яка і збуджує коливання заданої частоти.

## Коливання і хвилі

Мета лабораторної роботи полягає у експериментальній перевірці справедливості формули (24.9).

### 4.2.2 Порядок виконання роботи

1. Виміряти мікрометром діаметр струни і розрахувати її лінійну густину  $\tau$ . Матеріал струни – сталь.
2. За допомогою рухомого упору встановити робочу довжину струни  $L_1$  у межах  $90 \dots 110$  см, а також силу натягу струни  $F_1$ , використовуючи для цього тягарці масою  $m = 100 \dots 200$  г.
3. Розрахувати частоту  $\nu_1$  основного тону і частоти  $\nu_2$  та  $\nu_3$  двох перших обертонів коливань струни відповідно до обраних значень  $L_1$  і  $F_1$ .

*Увага! Перед включенням приладів встановити регулятори напруги приладів у нульові положення і перевірити, щоб струна була підключена до виходу « 5 Ом » звукового генератора.*

4. З дозволу керівника занять підключити до мережі живлення випрямляч та звуковий генератор і дати прогрітися  $2 \dots 3$  хвилини.
5. Встановити на виході випрямляча ВС-24М напругу  $5 \dots 10$  В, а регулятор виходу  $3Г$  перевести у середнє положення, після чого перевірити, чи залишилась струна посередині зазору між полюсами  $EM$ , не торкаючись жодного з них. У разі "захоплення" струни магнітом слід дещо зменшити напругу на виході випрямляча, а також ретельніше відрегулювати положення струни у зазорі.
6. Плавнo змінюючи частоту генератора поблизу значення  $\nu_1$ , розрахованого у п.3, домогтися резонансу на основній частоті. При вимірюванні основної частоти електромагніт слід встановити у середній частині струни.
7. Визначити частоти двох перших обертонів, повторюючи вимірювання, аналогічні п.6, поблизу значень  $\nu_2$  та  $\nu_3$ , розрахованих у п.3. При цьому слід звертати увагу на те, щоб електромагніт під час вимірювань був розташований поблизу пучності стоячої хвилі. Одержані теоретичні та експериментальні значення частот  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  та  $\nu_3$  записати у таблицю 24.1.

Таблиця 24.1 – Експериментальні результати вимірювань характеристик стоячих хвиль (зразок)

№	L, см	F, Н	$\nu_1, Гц$		$\nu_2, Гц$		$\nu_3, Гц$		$\nu_1 : \nu_2 : \nu_3$	
			теор.	експ.	теор.	експ.	теор.	експ.	теор.	експ.
1	( $L_1$ )	( $F_1$ )							1:2:3	
2	( $L_2$ )	( $F_1$ )								
3	( $L_2$ )	( $F_2$ )								
4	( $L_1$ )	( $F_2$ )								

8. Не змінюючи маси тягарця (сили натягу  $F_1$ ), встановити нову довжину струни  $L_2$ , змінивши попередню довжину на  $10...15$  см. Повторити вимірювання *пп. 6, 7*.
9. Не змінюючи довжини  $L_2$  струни, встановити нову силу натягу  $F_2$ , змінивши масу тягарця на  $50...100$  г. Повторити вимірювання *пп. 6, 7*.
10. Не змінюючи маси тягарця (сили натягу  $F_2$ ), встановити початкову довжину  $L_1$  струни, після чого повторити вимірювання *пп. 6, 7*.

### 4.3 Обробка результатів вимірювань

Для перевірки формули (24.9) результати експериментальних вимірювань слід обробити і подати у зручному для порівняння вигляді. У даній роботі зробимо це, склавши на основі даних *таблиці 24.1* дві додаткові таблиці. Як показує формула (24.9), частота будь-якого власного коливання струни  $\nu_n$   $L, F$  прямо пропорційна порядку  $n$  тону, обернено пропорційна довжині  $L$  струни та прямо пропорційна величині  $\sqrt{F}$ , де  $F$  – сила натягу струни. Для порівняння теоретичних і експериментальних результатів у даній роботі пропонується скористатися додатковими (підсумковими) таблицями: (*таблиця 24.2* і *таблиця 24.3*):

*Таблиця 24.2 – Перевірка залежності власних частот струни від довжини струни (зразок)*

№	F, Н	L <sub>2</sub> :L <sub>1</sub>	$\nu_n(L_1) : \nu_n(L_2)$						
			експ.	$\varepsilon, \%$	експ.	$\varepsilon, \%$	експ.	$\varepsilon, \%$	
1	(F <sub>1</sub> )								
2	(F <sub>2</sub> )								

*Таблиця 24.3 – Перевірка залежності власних частот струни від сили натягу струни (зразок)*

№	L, см	$\sqrt{F_2/F_1}$	$\nu_n(F_2) : \nu_n(F_1)$						
			експ.	$\varepsilon, \%$	експ.	$\varepsilon, \%$	експ.	$\varepsilon, \%$	
1	(L <sub>1</sub> )								
2	(L <sub>2</sub> )								

У *таблицях 24.2* і *24.3* величини  $\varepsilon = \frac{V_{\text{експ}} - V_{\text{теор}}}{V_{\text{теор}}} \cdot 100\%$  характеризують відхилення

результатів експерименту від теоретичних розрахунків.

Після заповнення підсумкових таблиць порівняти одержані експериментальні дані з теоретичними, проаналізувати їх разом з даними *таблиці 24.1*.

Зробити висновки.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які хвилі називають звуковими; ультразвуковими; інфразвуковими? В яких середовищах можуть утворюватись і поширюватись поздовжні (або поперечні) звукові хвилі?
2. Назвіть основні характеристики біжучої хвилі. Які існують співвідношення між ними? Як записати рівняння хвилі, яка поширюється у додатному напрямку осі  $X$  ? у від'ємному напрямку осі  $X$  ?
3. Як утворюються стоячі хвилі? Виведіть рівняння стоячої хвилі, яка утворюється у необмеженому середовищі.
4. Як виводиться рівняння стоячих хвиль у обмеженому середовищі (при обмеженій довжині струни)? Що таке власні коливання? Від чого залежить спектр власних частот струни?
5. Від чого залежать висота тону, гучність, тембр звуку? Чому коливання струн музичних інструментів звичайно збуджують щипком, смичком або ударом не в середині струни, а ближче до її кінця?
6. Які виконуються співвідношення між фазами біжучих хвиль: а) у вузлах стоячої хвилі; б) у пучностях? Чи змінюється фаза біжучої хвилі при відбиванні від: а) закріпленого кінця струни; б) незакріпленого кінця струни?
7. Знайдіть спектр власних частот коливань збудженого повітряного стовпа у трубі довжиною  $L$  з одним закритим кінцем. Якою має бути довжина такої труби, аби частота її основного тону дорівнювала  $50 \text{ Гц}$ ? Швидкість поширення звуку в повітрі вважати рівною  $340 \text{ м/с}$ .
8. Нота «ля» першої октави рояля має частоту основного тону  $440 \text{ Гц}$ . Знайти: а) швидкість поширення хвиль на струні, якщо довжина струни  $1,0 \text{ м}$ ; б) силу натягу  $F$  струни, якщо вона виготовлена з сталеві проволочки діаметром  $1,2 \text{ мм}$ .

## 5 Лабораторна робота № 25

### ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ПОШИРЕННЯ ЗВУКУ У ПОВІТРІ

Прилади і приладдя:

- 1) звуковий генератор;
- 2) електронний осцилограф;
- 3) прилад Квінке із закріпленими на ньому телефонами та масштабною лінійкою;
- 4) оптична лава з динаміком, мікрофоном і масштабною лінійкою;
- 5) блок комутації з набором провідників.

Мета лабораторної роботи полягає у ознайомленні з двома методами вимірювання швидкості звуку в повітрі. Вимірювання швидкості поширення звуку в різних середовищах використовуються для визначення багатьох властивостей речовин, таких, як стисливості газів і рідин, модулів пружності твердих тіл, наявності і концентрації домішок у газах та рідинах.

#### 5.1 Теоретичні відомості

Звук – це коливальний рух частинок пружного середовища, який поширюється у вигляді хвиль у газоподібному, рідкому або твердому середовищі.

Людина сприймає звуки в діапазоні від 16 Гц до 20 кГц. Звукові хвилі з частотою нижче 16 Гц називають *інфразвуком*, а вище 20 кГц – *ультразвуком*. Найбільш високочастотні пружні хвилі в діапазоні частот від  $10^9$  до  $10^{12}$  Гц називають *гіперзвуковими*.

При поширенні звукових хвиль у газах відбуваються періодичні зміни тиску в межах  $\pm \Delta p$  відносно тиску  $p_0$  у незбуреному середовищі. Величину  $\Delta p$  називають *звуковим тиском*.

Поширення звукових хвиль супроводжується переносом енергії в тому ж напрямку. Перенос енергії хвилею характеризується *інтенсивністю*, яка дорівнює середній енергії, що переносить хвиля за 1 с через поверхню площею  $1 \text{ м}^2$ , розташовану перпендикулярно до напрямку поширення хвилі. Іntenсивність хвилі залежить від амплітуди  $\Delta p_{\text{max}}$  коливань звукового тиску.

Суб'єктивною характеристикою сприймання звуку людиною, є *гучність звуку*, яка залежить як від інтенсивності хвилі, так і від чутливості вуха людини у даному діапазоні частот. Найбільшу чутливість вуха людини має до звуків з частотами від 1 кГц до 5 кГц.

Джерелом звуку можуть бути будь-які явища, що викликають локальну зміну тиску або механічного напруження у середовищі. Широко розповсюджені джерела звуку у вигляді твердих тіл, що коливаються, – дифузори гучномовців, мембрани телефонів, струни і деки музичних інструментів тощо.

## Коливання і хвилі

Звукові хвилі у тому чи іншому середовищі характеризується у першу чергу швидкістю поширення. Звичайно швидкість звуку при заданих зовнішніх умовах (тиску, температурі) – є величина стала для даного середовища і не залежить від частоти звукової хвилі та її амплітуди. У газах і рідинах процеси поширення звукових хвиль мають зазвичай адіабатичний характер, тобто зміни температури, пов'язані зі стисненнями і розрідженнями середовища у звуковій хвилі, не встигають вирівнюватися протягом одного періоду коливань. За таких припущень для ідеальних газів в умовах, близьких до нормальних, швидкість звуку можна визначити за формулою Лапласа:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho}}, \quad (25.1, \text{ а})$$

де  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  – показник адіабати, тобто відношення теплоємності газу при сталому тиску до його теплоємності при сталому об'ємі;  $p_0$  та  $\rho$  – відповідно середні значення тиску та густини газу.

За допомогою рівняння Менделєєва–Клапейрона формула (25.1, а) легко перетворюється до вигляду:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}, \quad (25.1, \text{ б})$$

де  $R$  – газова стала;  $T$  – абсолютна температура газу;  $M$  – молярна маса газу. Для повітря  $\gamma = 1,4$ . Як свідчать формули (25.1, а) і (25.1, б), швидкість звуку в газах зростає із збільшенням температури і тиску.

У даній лабораторній роботі визначається швидкість звуку у повітрі двома методами, перший з яких – *метод інтерференції* – базується на додаванні гармонічних коливань однакового напрямку та однакової частоти, а другий – *фазовий метод* – на додаванні взаємно перпендикулярних гармонічних коливань однакової частоти.

### 5.2 Додавання гармонічних коливань однакового напрямку та однакової частоти

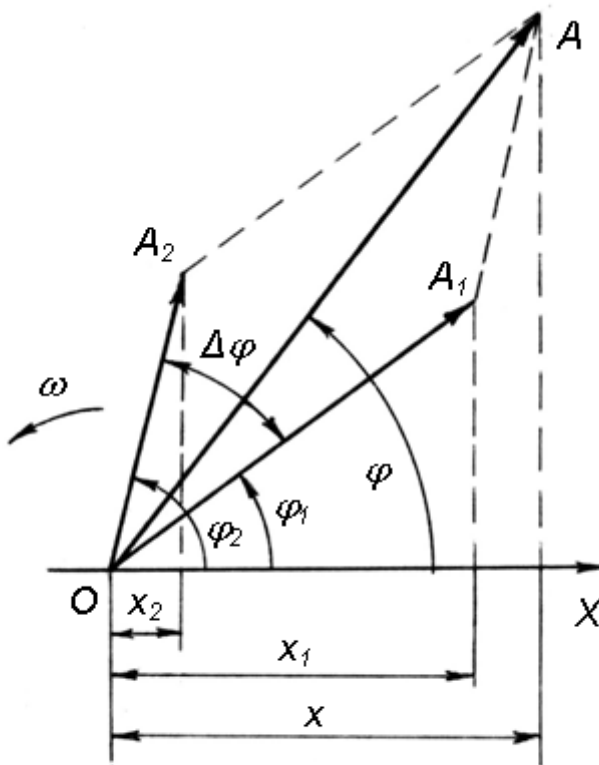
Розглянемо точку, яка бере участь одночасно у двох гармонічних коливаннях однакової частоти  $\omega$  і однакового напрямку. Амплітуди і початкові фази коливань позначимо відповідно  $A_1, A_2$  і  $\varphi_1, \varphi_2$ . Точка рухається уздовж осі  $X$ . Тоді рівняння руху точки, обумовлені кожним коливанням, мають вигляд:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1); \\ x_2(t) &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (25.2)$$

Треба знайти рівняння результуючого руху точки.

Для додавання таких коливань зручно скористатися графічним методом (методом векторних діаграм), який базується на представленні гармонічних коливань у вигляді векторів, побудованих у полярній системі координат.

Направимо полярну вісь  $X$  горизонтально і зобразимо вихідні коливання  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  радіус-векторами  $\vec{A}_1$  і  $\vec{A}_2$ , довжини яких дорівнюють амплітудам, а напрями відносно  $X$  відповідають значенням фаз коливань у певний момент часу. Як правило, векторні діаграми будують для початкового моменту часу  $t = 0$ . У початковий момент фази коливань будуть дорівнювати *початковим* фазам  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  коливань (рисуюнок 25.1). Тепер уявімо, що з плином часу кожний вектор  $\vec{A}_1$  і  $\vec{A}_2$  обертається у площині діаграми у *додатному* напрямку (проти годинникової стрілки) з кутовою швидкістю, яка чисельно дорівнює циклічній частоті  $\omega$  коливань. Тоді у кожний момент часу  $t$  кут між полярною віссю і відповідним радіус-вектором дорівнюватиме значенню фази  $\omega t + \varphi$  коливання, і проєкцію кожного радіус-вектора на вісь  $X$  можна буде записати у вигляді (25.2). Таким чином, кожне гармонічне коливання може бути відображене у вигляді радіус-вектора, який обертається у площині векторної діаграми.



Рисуюнок 25.1 – Векторна діаграма додавання гармонічних коливань однакового напрямку та однакової частоти

Рівнянням результуючого руху  $x(t)$  точки, яка бере участь одночасно у двох коливаннях, буде алгебраїчна сума рівнянь (25.2), тобто:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

а на векторній діаграмі результуючий рух точки відобразиться вектором  $\vec{A}$ , який є векторною сумою векторів:  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ .

Вектор результуючої амплітуди, очевидно, обертається у площині діаграми з тією самою частотою, що й вектори вихідних коливань, тобто результуючий рух точки буде також гармонічним коливанням з частотою  $\omega$ . Рівняння результуючого коливання можна знайти з векторної діаграми, графічно, як проєкцію вектора  $\vec{A}$  на вісь  $X$ :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \tag{25.3}$$

де  $A$  і  $\varphi$  – відповідно амплітуда і початкова фаза результуючого коливання. Значення цих величин легко визначити з *рисунка 25.1*. На основі теореми косинусів, знаходимо *амплітуду*  $A$  результуючого коливання:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (25.4)$$

а з прямокутного трикутника  $AХО$  – *початкову фазу*  $\varphi$  результуючого коливання:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (25.5)$$

Як видно з (25.4), величина амплітуди результуючого коливання залежить від різниці початкових фаз  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  вихідних коливань і може змінюватись у межах

$$|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2.$$

Максимальне значення результуючої амплітуди  $A_{\max} = A_1 + A_2$  досягається за умови

$$\Delta\varphi = 2m \cdot \pi, \quad (25.6, \text{ а})$$

а мінімальне:  $A_{\min} = |A_1 - A_2|$  – відповідно при:

$$\Delta\varphi = (2m + 1) \cdot \pi, \quad (25.6, \text{ б})$$

де  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

### 5.3 Додавання взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти

Розглянемо точку, яка бере участь одночасно у двох *взаємно перпендикулярних* коливаннях однакової частоти  $\omega$ , тобто рухається у площині  $ХОУ$  згідно з рівняннями руху:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi_1); \\ y(t) &= B \cos(\omega t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (25.7)$$

де  $A, B$  і  $\varphi_1, \varphi_2$  – відповідно амплітуди і початкові фази коливань.

Знайдемо рівняння траєкторії руху точки у координатній площині. Для цього з рівнянь руху (25.7) треба вилучити час  $t$ . Перетворимо одне з рівнянь, наприклад друге, так:

$$\begin{aligned} \frac{y}{B} &= \cos(\omega t + \varphi_2) = \cos(\omega t + \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1)) = \\ &= \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \sin(\omega t + \varphi_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$



## Коливання і хвилі

Далі, враховуючи, що  $\cos(\omega t + \varphi_1) = \frac{x}{A}$ , легко одержати рівняння траєкторії руху точки:

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad \text{звідки}$$

$$\frac{x^2}{A^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (25.8)$$

Це є відоме з курсу математики рівняння еліпса (рисунки 25.2, а)<sup>1)</sup>. Отже, якщо точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях з однаковими частотами  $\omega$ , то у загальному випадку точка рухається по еліпсу. Причому орієнтація цього еліпса відносно осей  $OX$  та  $OY$  залежить від різниці фаз  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  складових коливань, а сама різниця фаз не змінюється з часом.

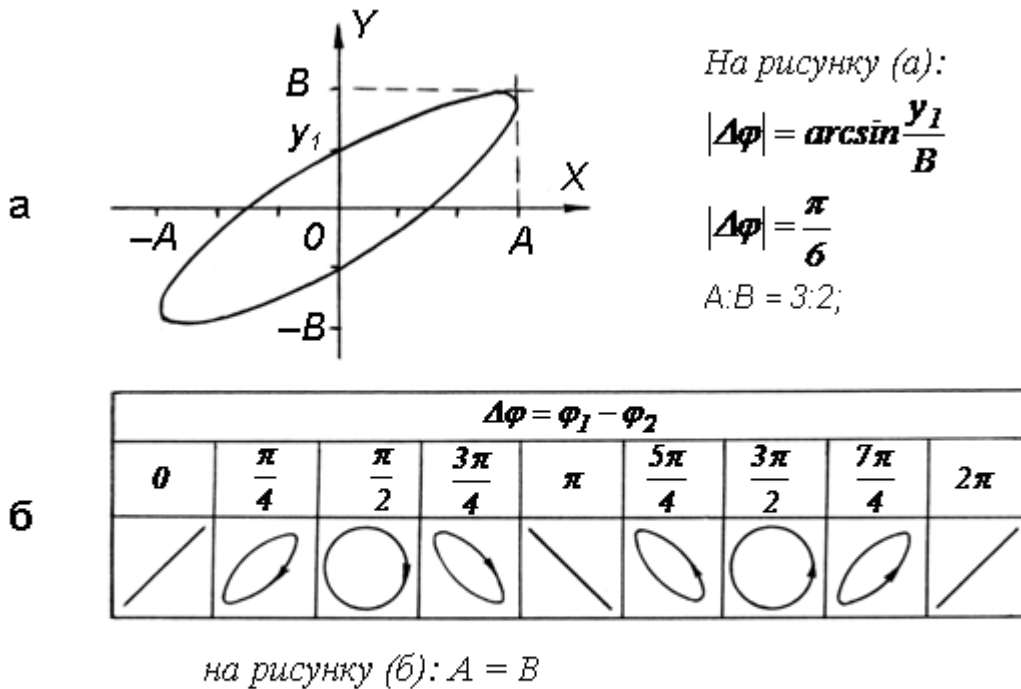


Рисунок 25.2.— Траєкторії руху точки при додаванні взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти

Розглянемо найбільш важливі випадки:

- Нехай різниця фаз вихідних коливань  $\Delta\varphi = 0$ . У цьому випадку формула (25.8) перетворюється у рівняння  $\frac{x}{A} = \frac{y}{B}$ , або  $y = \frac{B}{A}x$ . Отже при додаванні коливань, які відбуваються у *однакових* фазах, траєкторія руху точки є відрізок

<sup>1)</sup> Якщо відношення частот коливань буде дорівнювати відношенню двох невеликих цілих чисел, траєкторія руху точки буде мати вигляд однієї з фігур Ліссажу.

прямої, яка проходить через початок координат, розташована у першому і третьому квадрантах і утворює з віссю  $OX$  кут  $\alpha = \arctg \frac{B}{A}$  (рисунок 25.2, б).

- При різниці фаз  $\Delta\varphi = \pi$  формула (25.8) перетворюється у рівняння  $y = -\frac{B}{A}x$ . Отже при додаванні коливань, які відбуваються у *протилежних* фазах, траєкторія руху точки є відрізок прямої, яка проходить через початок координат, розташована у другому і четвертому квадрантах і утворює з віссю  $OX$  кут  $\alpha = \pi - \arctg \frac{B}{A}$  (рисунок 25.2, б).

- При різниці фаз складових коливань  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$  або  $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$  точка рухається по еліпсу, осі якого збігаються з осями координат, але напрями руху точки вздовж траєкторії у цих випадках протилежні. Якщо до того ж амплітуди вихідних коливань будуть однакові:  $A = B$ , то рівняння траєкторії стане рівнянням кола з центром у початку координат та радіусом, який дорівнює амплітудам коливань (рисунок 25.2, б).

## 5.4 Експериментальна частина

Швидкість  $v$  поширення звуку в повітрі можна визначити, знаючи частоту  $\nu$  коливань і вимірявши довжину звукової хвилі  $\lambda$ , скориставшись відомим співвідношенням:

$$v = \lambda \nu. \quad (25.9)$$

У лабораторних вимірюваннях частота звукової хвилі відома, оскільки дорівнює частоті коливань джерела звуку – звукового генератора. Довжину звукової хвилі визначають як *відстань у напрямі поширення хвилі між двома найближчими точками, які коливаються у однакових фазах* (точніше, з різницею фаз  $\Delta\varphi = 2\pi$ ). Отже, задача визначення швидкості звуку в повітрі зводиться до експериментального визначення довжини звукової хвилі  $\lambda$ .

### 5.4.1 Визначення швидкості звуку у повітрі методом інтерференції

У методі інтерференції довжина звукової хвилі експериментально визначається за допомогою *приладу Квінке* (рисунок 25.3).

Нерухомо закріплена U-подібна металева трубка  $L_1$  сполучена своїми кінцями з другою, рухомою U-подібною трубкою  $L_2$  дещо більшого діаметра так, що другу трубку можна вільно рухати відносно першої. Переміщення рухомої трубки відносно нерухомої контролюється за допомогою масштабної лінійки  $L$ . У точках  $A$  і  $B$  нерухомої трубки зроблені отвори з відгалуженнями, до яких прикріплені однакові телефони  $T$  і  $D$ , перший з яких відіграє роль джерела звуку, а другий – роль детектора.

## Коливання і хвилі

Джерелом звуку служить мембрана телефону  $T$ , на який подається синусоїдальний сигнал (змінний струм) певної частоти від звукового генератора  $ЗГ$ . Проходячи через котушку телефону  $T$ , цей струм примушує коливатися мембрану телефону з такою самою частотою. Утворена звукова хвиля від телефону  $T$  поширюється вздовж трубки відгалуження приладу. У точці  $A$  хвиля ділиться на дві частини, які розходяться у протилежні боки по трубках  $L_1$  та  $L_2$ . Обидві хвилі мають однакову частоту, крім того, у точці  $A$  їхні фази співпадають, тобто різниця фаз коливань у цій точці  $\Delta\varphi_A = 0$ .

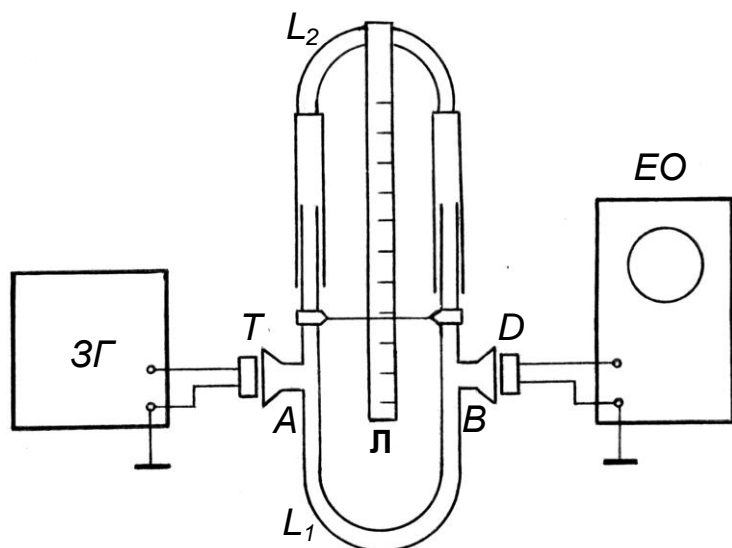


Рисунок 25.3 – Загальний вигляд вимірювальної установки з приладом Квінке

Далі хвилі сходяться у точці  $B$ , де накладаються одна на одну – *інтерферують*. Від точки  $B$  по трубці відгалуження хвилі прямують до телефону  $D$ , який виконує роль детектора коливань. Мембрана детектора буде здійснювати вимушені коливання, обумовлені одночасною дією на неї обох хвиль. Як відомо, звукові хвилі у повітрі – поздовжні, тому напрями коливань в обох хвилях поблизу мембрани детектора збігаються (вони перпендикулярні до площини мембрани). Інакше кажучи, на мембрані детектора відбувається додавання гармонічних коливань

однакового напрямку і однакової частоти (дивись *розділ 1.1*). Результуючі механічні коливання мембрани перетворюються у детекторі в електричний сигнал (змінну напругу) відповідної частоти та амплітуди, який надходить на  $Y$ -вхід електронного осцилографа  $EO$  і відображається на екрані осцилографа вертикальною світною лінією, довжина якої пропорційна амплітуді.

З'ясуємо, за яких умов амплітуда результуючих коливань у детекторі буде максимальна або мінімальна. Для цього, згідно з умовами (25.6, а) і (25.6, б), треба визначити різницю фаз коливань у точці детектування. Оскільки у точці  $A$  фази обох хвиль співпадають  $\Delta\varphi_A = 0$ , різниця фаз хвиль у точці  $B$  буде залежати тільки від різниці шляхів, пройдених кожною хвилею від точки поділу (точки  $A$ ) – до точки накладання (точки  $B$ ), тобто від величини  $\Delta L = L_2 - L_1$ , яка називається *різницею ходу хвиль у точці спостереження*. У випадку, коли різниця ходу хвиль  $\Delta L = \lambda$ , відповідна різниця фаз коливань дорівнюватиме  $\Delta\varphi = 2\pi$ . Беручи до уваги, що різниця фаз  $\Delta\varphi$  у точці спостереження пропорційна різниці ходу  $\Delta L$  хвиль у тій самій точці, легко одержати співвідношення між ними:

## Коливання і хвилі

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda}. \quad (25.10)$$

Порівнюючи (25.10) з (25.6, а) та (25.6, б), дістанемо умови *максимуму* і *мінімуму* амплітуди результуючого коливання у точці спостереження, виражені через довжину хвилі  $\lambda$ :

$$\Delta L^{\max} = 2m \frac{\lambda}{2}; \quad (25.11, \text{ а})$$

$$\Delta L^{\min} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (25.11, \text{ б})$$

де  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

З цих формул видно, що при зміні різниці ходу хвиль на  $\pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots$  (тобто при зміні  $m$  на  $\pm 1, \pm 2, \dots$ ) результат інтерференції хвиль у точці спостереження не зміниться. Таким чином, при поступовому переміщенні рухомої трубки приладу Квінке різниця фаз коливань у точці  $B$  буде плавно змінюватись, а отже буде плавно змінюватись і амплітуда результуючих коливань.

Припустимо, що на початку вимірювань трубки  $L_1$  та  $L_2$  у приладі Квінке займають положення, при якому амплітуда результуючого коливання максимальна, тобто виконується умова (25.11, а). Пересуваючи рухому трубку, знайдемо таке її положення, при якому амплітуда знову досягне максимуму. Зафіксуємо по лінійці відповідну величину переміщення  $\Delta x$  рухомої трубки. Як видно з *рисунка 25.3*, у такому випадку шлях  $L_1$ , пройдений від  $A$  до  $B$  першою хвилею, не зміниться, а шлях  $L_2$  другої хвилі збільшиться на  $2\Delta x$ . Це означає, що різниця ходу хвиль у точці  $B$  збільшилась на таку саму величину:  $2\Delta x$ . З іншого боку, нова різниця ходу повинна відрізнятись від початкового значення на довжину хвилі  $\lambda$ , тобто

$$2\Delta x = \lambda.$$

Враховуючи (25.9), знаходимо швидкість звуку в повітрі:

$$v = 2\Delta x \cdot \nu. \quad (25.12)$$

### 5.4.2 Визначення швидкості звуку в повітрі фазовим методом

При вимірюваннях довжини звукової хвилі фазовим методом використовується додавання взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти.

Схему експериментальної установки наведено на *рисунку 25.4*.

На лаві закріплені на рухомих підставках динамік  $D$  (гучномовець) та мікрофон  $M$ , які можна переміщувати уздовж лави у горизонтальному напрямі. Відстань між ними контролюється за допомогою масштабної лінійки, якою оздоблена лава.

Електричний сигнал звукової частоти від звукового генератора  $ЗГ$  подається на динамік і одночасно на  $X$ -вхід електронного осцилографа  $ЕО$  при відк-

## Коливання і хвилі

люченій розгортці осцилографа. Звук від гучномовця поширюється у повітрі і сприймається мікрофоном  $M$ , де перетворюється у електричні коливання такої самої частоти. Ці коливання підсилюються підсилювачем низької частоти ПНЧ, який змонтовано на підставці мікрофона, і подаються на  $Y$ -вхід осцилографа. Оскільки швидкість поширення звуку на ділянці між динаміком і мікрофоном набагато менша ( $\sim$  у  $10^6$  разів) від швидкості поширення сигналу в електричній лінії  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, сигнал на  $Y$ -вхід осцилографа буде надходити з деяким запізненням відносно сигналу на  $X$ -вході, внаслідок чого між сигналами на  $X$ - та  $Y$ - входах осцилографа з'явиться різниця фаз  $\Delta\varphi$ .

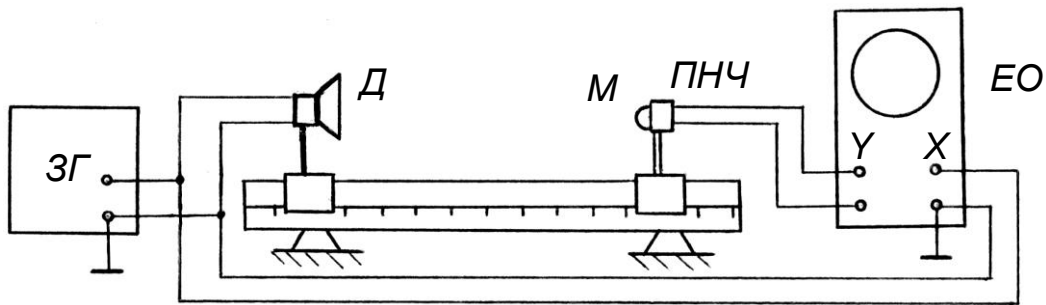


Рисунок 25.4 – Схема установки для вимірювань довжини звукових хвиль у повітрі фазовим методом

Нехтуючи часом проходження електричного сигналу від генератора до осцилографа, різницю фаз сигналів на входах осцилографа можна визначити за співвідношенням (25.10), де під величиною  $\Delta L$  слід розуміти відстань від динаміка до мікрофона. Таким чином, світна точка на екрані осцилографа буде брати участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, різниця фаз  $\Delta\varphi$  між якими залежить від відстані між динаміком і мікрофоном. В результаті на екрані осцилографа з'явиться зображення траєкторії руху точки у вигляді еліпса (дивись *розділ 1.2*). Орієнтація еліпса відносно координатних осей  $X$  та  $Y$  залежить від різниці фаз складових коливань. У деяких окремих випадках еліпс може вироджуватись у відрізок прямої лінії або у коло. При поступовій зміні відстані  $\Delta x$  між динаміком і мікрофоном картина на екрані осцилографа буде змінюватись у відповідній послідовності (*рисунок 25.2, б*), і при  $\Delta x^{\min} = \lambda$  повернеться до початкового вигляду.

Таким чином, експериментальне вимірювання довжини звукової хвилі у повітрі зводиться до вимірювання мінімальної зміни відстані  $\Delta x^{\min}$  між динаміком і мікрофоном, при якій осцилограма на екрані відновлює свій вигляд.

Після вимірювання довжини звукової хвилі  $\lambda$  швидкість звуку в повітрі легко обчислити за формулою (25.9), якщо частота  $\nu$  звуку відома.

## 5.5 Порядок виконання роботи

**Увага!** Перед початком вимірювань треба одержати від керівника заняття дозвіл на виконання роботи і необхідні вказівки щодо порядку вимірювань.

При складанні електричних схем слід пам'ятати, що виходи генератора і підсилювача мікрофона, а також входи динаміка, обох телефонів та осцилографа виведені на відповідні гнізда панелі *блока комутації*, розміщеного на лабораторному столі. Крім того, клеми « $\perp$ » усіх приладів також з'єднані заздалегідь у блоці комутації.

1. Підключити звуковий генератор та осцилограф до мережі живлення і прогріти протягом 2...3 хвилин.
2. Перемикач «ОСЛАБЛЕНИЕ» осцилографа встановити у положення «1:1». Відрегулювати режим роботи осцилографа так, щоб зображення електронного променя знаходилось у центрі екрана.
3. Встановити регулятор «РАССТРОЙКА Hz » звукового генератора у нульове положення.

### 5.5.1 Порядок вимірювань методом інтерференції

1. Скласти установку за схемою, наведеною на *рисунку 25 3*, з'єднавши відповідні гнізда на панелі блоку комутації спеціальними провідниками.
2. Відключити блок горизонтальної розгортки осцилографа.
3. За допомогою регулятора «УСТАНОВКА ЧАСТОТЫ» звукового генератора встановити частоту сигналу в межах *850...1100 Гц*.
4. Рукоятками «УСИЛЕНИЕ» по осі *Y* осцилографа та «РЕГ. ВЫХОДА» звукового генератора встановити у центрі екрана осцилографа вертикальну лінію, довжина якої дорівнює приблизно половині діаметра екрана.
5. Змінюючи поступово положення рухомої частини приладу Квінке, одержати два послідовні мінімуми (або максимуми) вертикальної лінії на екрані осцилографа, яким відповідатимуть мінімальні (максимальні) значення амплітуди звукової хвилі. Зафіксувати по масштабній лінійці відповідні відліки  $x_1$  і  $x_2$  та записати у таблицю.
6. Не змінюючи частоти звуку, повторити вимірювання 2...3 рази для суміжних мінімумів (або максимумів) амплітуди результуючих коливань.
7. Встановити нове значення частоти генератора і повторити вимірювання відповідно *n.4*. Вимірювання слід виконати для 4...5 значень частоти у межах від 850 до 1100 Гц.
8. За даними вимірювань *n.n. 4, 5* обчислити величину  $\Delta x = x_2 - x_1$  у кожному досліді і записати в окрему колонку таблиці.
9. За формулою (25.12) розрахувати і занести до таблиці швидкість поширення звуку в усіх дослідях.
10. Оцінити точність отриманих результатів.

### 5.5.2 Порядок вимірювань фазовим методом

1. Скласти установку за схемою, наведеною на *рисунку 25.4*, з'єднавши відповідні гнізда на панелі блоку комутації провідниками.
2. Ввімкнути блок горизонтальної розгортки осцилографа.
3. Встановити частоту генератора за допомогою регулятора «УСТАНОВКА ЧАСТОТЫ» у початкове положення у межах *850...1100 Гц*.
4. Ввімкнути живлення підсилювача ПНЧ сигналу з виходу мікрофона.

*Увага! Для запобігання перегріву ПНЧ його слід вмикати тільки під час роботи з мікрофоном і вимикати після закінчення вимірювань.*

1. Рукоятками «УСИЛЕНИЕ» по осях  $X$  та  $Y$  осцилографа, а також регулятором «РЕГ. ВЫХОДА» звукового генератора одержати у центрі екрана осцилографа зображення еліпса, розміри якого по горизонталі і вертикалі приблизно дорівнюють один одному.
2. Поступово пересуваючи підставку з мікрофоном уздовж лави, одержати на екрані осцилографа зображення відрізка прямої лінії, розташованого у першому і третьому квадрантах. Зафіксувати відповідне положення  $x_1$  мікрофона за допомогою масштабної лінійки і записати у таблицю.
3. Повільно пересуваючи мікрофон уздовж лави, одержати на екрані осцилографа зображення відрізка прямої лінії, розташованого у другому і четвертому квадрантах. Зафіксувати нове положення  $x_2$  мікрофона і записати відлік у таблицю. Величина переміщення мікрофона  $\Delta x = x_2 - x_1$  у такому випадку буде дорівнювати половині довжини звукової хвилі, тобто  $\lambda/2$ .
4. Продовжуючи повільно пересувати мікрофон у попередньому напрямі, знов одержати на екрані осцилографа зображення прямої лінії, яка проходить через перший і третій квадранти. У цьому випадку переміщення мікрофона від початкового положення  $\Delta x$  буде дорівнювати довжині  $\lambda$  звукової хвилі.
5. Не змінюючи частоти звукового генератора, повторити вимірювання відповідно *n.n. 5 – 8*.
6. Встановити нове значення частоти генератора і повторити вимірювання відповідно *n.n. 5 – 8*. Вимірювання слід виконати для 4...5 значень частоти у межах від 850 до 1100 Гц.
7. Визначивши довжину  $\lambda$  звукової хвилі у кожному досліді, розрахувати за формулою (25.9) швидкість звуку в повітрі.
8. Оцінити точність одержаних результатів.
9. Порівняти результати експериментальних вимірювань швидкості звуку в повітрі обома методами з теоретичним значенням, розрахованим за формулою (25.1, б).
10. Зробити висновки.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які хвилі називають звуковими? Від чого залежить швидкість поширення звуку в повітрі?
2. Для поширення звуку необхідне матеріальне середовище. Які властивості середовища забезпечують поширення в ньому звукових хвиль? У яких середовищах можуть поширюватись поздовжні, а у яких – поперечні звукові хвилі?
3. Доведіть на прикладах, що звукова хвиля переносить енергію і здатна виконати роботу.
4. У чому полягає явище інтерференції хвиль? За яких умов результат інтерференції хвиль у точці спостереження не буде змінюватися з часом? Як формулюються умови максимуму інтерференції? мінімуму інтерференції?
5. Інтерференція – вирішальний доказ твердження, що звук поширюється у вигляді хвиль. Обґрунтуйте це положення.
6. У чому полягає суть графічного способу додавання коливань однакових за напрямком і частотою? Що таке векторна діаграма?
7. Як по осцилограмі додавання двох взаємно перпендикулярних коливань з однаковими частотами визначити різницю фаз  $\Delta\phi$  цих коливань?
8. Швидкість звуку в повітрі при температурі  $t$  °C можна визначити за спрощеними формулами:  $v = v_0\sqrt{1+0,004 \cdot t}$  м/с або  $v = v_0 + 0,6 \cdot t$  м/с, де  $v_0$  – швидкість звуку за нормальних умов. Покажіть, що ці формули випливають з формули (25.1, б).
9. Грім пролунав через 6 секунд після спалаху блискавки. На якій відстані вдарив блискавка, якщо температура повітря 27°C?
10. При подоланні літаком на великій висоті звукового бар'єру спостерігач на землі сприймає звук, що нагадує вибух в повітрі. Поясніть це явище.



## Рекомендована література

1. ДСТУ 3008-95 (Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення).
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1975. – 872 с.
3. Електрика і магнетизм. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з фізики для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання / Укл.: Ушаков В.Г. – Чернігів: ЧНТУ, 2014. – 60 с.
4. Елементи векторної алгебри. Методичні вказівки до самостійної роботи з фізики для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання / Укл.: Ушаков В.Г., Григоренко В.А., Тепла Т.М. – Чернігів: ЧДТУ, 2012. – 24 с.
5. Зачек І.Р., Кравчук І.М., та ін. Курс фізики: навчальний підручник. – Львів: «Бескид Біт», 2002. – 376 с.
6. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. – М.: Высш.шк., 1991. – 288 с.
7. Калашников С.Г. Электричество. – М.: Наука, 1985. – 576 с.
8. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики; Навч. посібник для студентів вищих техн. і пед. закладів освіти / За ред. І.М. Кучерука . – К.: Техніка, 1999. Т.2: Електрика і магнетизм. – 2001. – 452с.
9. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: Высш. шк., 1983. – 463 с.
10. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1977 – 1979. – Т.2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика.

## Додаток А – Обробка результатів вимірювань

Середнє арифметичне значення величини, що вимірюється:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i;$$

Стандартне відхилення:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2};$$

Гранична похибка:

$$\Delta x = t(p, n) \cdot S_{\bar{x}}.$$

### КОЕФІЦІЄНТИ СТЬЮДЕНТА

Таблиця А1 – Значення  $t_{p,n}$  для надійної ймовірності  $p$  при кількості вимірювань  $n$

	$p = 0,80$	$0,90$	$0,95$	$0,98$
$n = 2$	3,08	6,31	12,71	31,82
3	1,89	2,92	4,30	6,96
4	1,64	2,35	3,18	4,54
5	1,53	2,13	2,78	3,75
6	1,48	2,02	2,57	3,36
7	1,44	1,94	2,45	3,14
8	1,41	1,90	2,36	3,00
9	1,40	1,86	2,31	2,90
10	1,38	1,83	2,26	2,82
11	1,37	1,81	2,23	2,76
12	1,36	1,80	2,20	2,72
13	1,36	1,78	2,18	2,68
14	1,35	1,77	2,16	2,65
15	1,34	1,76	2,14	2,62