

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

# **ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ**

Методичні рекомендації  
до виконання розрахункової (контрольної) роботи  
для студентів напрямів підготовки 6.030509 „Облік і аудит””,  
6.030507 „Маркетинг”

**ЗАТВЕРДЖЕНО**  
на засіданні кафедри бухгалтерського  
обліку, оподаткування та аудиту,  
протокол № 9 від 06.03.2017 р.

Чернігів ЧНТУ 2017

Оптимізаційні методи і моделі. Методичні рекомендації до виконання розрахункової (контрольної) роботи для студентів напрямів підготовки 6.030509 „Облік і аудит”, 6.030507 „Маркетинг” / Укл.: Ющенко Н.Л. – Чернігів: ЧНТУ, 2017. – 40 с.

Укладач: Ющенко Надія Леонідівна, кандидат економічних наук, доцент

Відповідальний за випуск: Маргасова Вікторія Геннадіївна, завідувач кафедри бухгалтерського обліку, оподаткування та аудиту, доктор економічних наук, професор

Рецензент: Гоголь Тетяна Анатоліївна, доктор економічних наук, доцент, професор кафедри бухгалтерського обліку, оподаткування та аудиту Чернігівського національного технологічного університету

## ВСТУП

Вплив інтеграційних процесів на економіку України, ускладнення зв'язків між суб'єктами господарювання, коливання ринкового попиту і пропозиції, зростання обсягів інформації та ін. посилює вимоги до планування і управління діяльністю, для підвищення ефективності якої необхідно використовувати сучасну методологію моделювання та інструментарій прийняття управлінських рішень.

Головне завдання фахівців з економіки та підприємництва – керувати економічними системами, розробляючи і впроваджуючи стратегічні та тактичні плани, що передбачає використання знань про системи, здобуття нової інформації та застосування її з метою відшукування найефективніших способів досягнення заданих результатів.

Важливою для нашого суспільства є проблема вдосконалення керування економічними системами на базі комп'ютерних технологій, тобто інтенсивного впровадження систем підтримки прийняття рішень (СППР), які окрім загального програмного забезпечення містять у собі банк економіко-математичних методів і моделей. Щоб ефективно застосовувати СППР, необхідно знати засадні принципи та прийоми математичного моделювання, вміти будувати економіко-математичні моделі економічних процесів та явищ, знати методи оптимізації різних задач. Усе це є змістом дисциплін економіко-математичного циклу. Отже, глибоке вивчення цього циклу дисциплін дасть змогу фахівцеві-економісту вступити в інформаційне суспільство, допоможе здобувати нові знання та унікальну інформацію. Цей цикл дисциплін є базовим у підготовці економістів і підприємців. Тільки з допомогою методів математичного моделювання можна збагатитися знаннями про системи, у тому числі й економічні. „Оптимізаційні методи і моделі” (або „Математичне програмування”) є однією з засадних дисциплін економіко-математичного циклу, які вивчають в економічних вузах.

**Метою** викладання навчальної дисципліни „Оптимізаційні методи і моделі” є кількісне обґрунтування рішень, що приймаються щодо управління соціально-економічними (організаційними) системами, які функціонують в умовах обмежень і у яких процеси можуть розвиватися за різними варіантами, кожен з яких має свої переваги та недоліки (причому, як правило, таких варіантів може бути безліч). Мета курсу – надати студентам алгоритми вибору з усіх можливих варіантів найкращого з точки зору встановленого критерію (критеріїв).

Основним **завданням** дисципліни „Оптимізаційні методи і моделі” є вироблення практичних навичок розв'язування екстремальних економічних задач, що складається з:

- побудови економіко-математичної моделі, тобто спрощеного образу економічного об'єкта (системи), поданого у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо),
- підготовки інформації,
- відшукування оптимального плану,

економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні **знати** широке коло задач оптимізації з відповідними методами розв'язання, що охоплюють різноманітні проблеми розвитку та функціонування реальних економічних систем.

Студенти мають **уміти** використовувати у поєднанні з швидкодіючою обчислювальною технікою та сучасними програмними продуктами існуючі банки економіко-математичних моделей, що утворюватимуть системи ефективної підтримки прийняття рішень у різних галузях економіки.

Вивчення даного курсу ґрунтується на знаннях, здобутих студентами з дисциплін „Математика для економістів. Модуль „Вища математика”, „Інформатика”, „Статистика”, „Економіка підприємства”, „Економіко-математичні моделі в управлінні та економіці” та ін.

Об'єктами застосування знань дисципліни „Оптимізаційні методи і моделі” є різноманітні галузі людської діяльності, де в певних ситуаціях необхідно здійснити вибір найкращого з можливих варіантів дій. Основою такого вибору є знаходження розв'язку екстремальної задачі методами математичного програмування.

Набуті студентами знання, вміння та навички при освоєнні курсу „Оптимізаційні методи і моделі” будуть необхідні їм у подальшому при вивченні таких дисциплін як „Логістика”, „Економічна кібернетика”, „Менеджмент”, „Економіка праці і соціально-трудова відносини”, „Аналіз господарської діяльності”, „Економічний аналіз у галузях економіки”, „Управлінський облік”, „Моделі і методи прийняття рішень в аналізі і аудиті” й ін., при виконанні аналітичних досліджень, під час виробничих практик, при написанні випускних кваліфікаційних робіт, у подальшій професійній діяльності.

Навчальними планами передбачена самостійна робота студентів усіх форм навчання з дисципліни „Оптимізаційні методи і моделі”. **Метою самостійної роботи** є поглиблене вивчення найважливіших тем дисципліни, набуття практичних навичок у використанні комп'ютерної техніки для аналізу розвитку, прогнозування процесів тощо та генерування інваріантів управлінських рішень.

Самостійна робота студентів забезпечується системою навчально-методичних засобів, передбачених для вивчення конкретної навчальної дисципліни: підручники, навчальні та методичні посібники, конспект лекцій викладача, тощо. Рекомендується використовувати відповідну наукову та фахову періодичну літературу.

Знання даної дисципліни є важливою складовою фахової освіти сучасного економіста. Вивчення студентами оптимізаційних методів і моделей забезпечує усвідомлення ними необхідності застосовувати їх до задач управління, до дослідження соціально-економічних явищ і процесів.

# 1 ТЕМАТИЧНИЙ ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

**Змістовий модуль 1. Предмет, сфери та особливості застосування математичного програмування в економіці. Класифікація задач. Лінійне програмування**

**Тема 1. Предмет, сфери та особливості застосування математичного програмування в економіці. Класифікація задач**

Предмет та об'єкти математичного програмування. Історична довідка. Класифікація оптимізаційних задач. Приклади економічних задач математичного програмування. Особливості реалізації математичних моделей оптимізаційного типу в середовищах MathCad та Excel.

**Тема 2. Загальна задача лінійного програмування та деякі з методів її розв'язування**

Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування. Форми запису задач лінійного програмування. Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування.

Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.

Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування. Метод штучного базису. Зациклення в задачах лінійного програмування. Геометрична інтерпретація симплексного методу. Модифікації симплексного методу.

**Тема 3. Теорія двоїстості та двоїсті оцінки у лінійному програмуванні**

Економічна інтерпретація прямої та двоїстої задач лінійного програмування. Правила побудови двоїстих задач. Основні теореми двоїстості та їх економічний зміст. Приклади застосування теорії двоїстості для знаходження оптимальних планів прямої та двоїстої задач.

Післяоптимізаційний аналіз задач лінійного програмування: аналіз діапазону зміни компонент вектора обмежень, коефіцієнтів цільової функції та коефіцієнтів матриці обмежень.

Двоїстий симплексний метод.

Параметричне програмування (параметричні зміни вектора обмежень; параметричні зміни вектора коефіцієнтів цільової функції).

**Тема 4. Транспортна задача**

Економічна і математична постановка транспортної задачі. Властивості опорних планів транспортної задачі. Методи побудови опорного плану транспортної задачі. Випадок виродження опорного плану транспортної задачі. Методи розв'язування транспортної задачі.

Транспортна задача з додатковими умовами. Двохетапна транспортна задача. Транспортна задача за критерієм часу.

Розв'язування транспортної задачі на мережі.

Приклади економічних задач, що зводяться до транспортних моделей.

**Тема 5. Цілочислові задачі лінійного програмування. Основні методи їх розв'язування та аналізу**

Економічна і математична постановка цілочислової задачі лінійного програмування. Геометрична інтерпретація розв'язків цілочислових задач лінійного програмування на площині.

Характеристика методів розв'язування цілочислових задач лінійного програмування: методи відтинання, метод Гоморі; комбінаторні методи, метод „гілок та меж”; наближені методи, метод вектора спаду.

Приклади застосування цілочислових задач лінійного програмування у плануванні та управлінні виробництвом.

## **Змістовий модуль 2. Дробово-лінійне програмування. Нелінійне програмування. Динамічне програмування. Стохастичне програмування**

### **Тема 6. Задачі дробово-лінійного програмування. Основні методи їх розв'язування та аналізу**

Економічна і математична постановка задачі дробово-лінійного програмування. Геометрична інтерпретація задачі дробово-лінійного програмування. Розв'язування дробово-лінійної задачі зведенням до задачі лінійного програмування.

### **Тема 7. Задачі нелінійного програмування. Основні методи їх розв'язування та аналізу**

Економічна і математична постановка задачі нелінійного програмування. Геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування. Основні труднощі розв'язування задач нелінійного програмування. Класичний метод оптимізації – метод множників Лагранжа. Економічна інтерпретація множників Лагранжа.

Необхідні умови існування сідлової точки. Теорема Куна-Таккера. Опукле програмування.

Квадратичне програмування: квадратична форма та її властивості; метод розв'язування задач квадратичного програмування.

Гradientні методи.

### **Тема 8. Динамічне програмування**

Економічна сутність задач динамічного програмування.

Задача про розподіл капіталовкладень між двома підприємствами на  $n$  років. Метод рекурентних співвідношень.

Задача про розподіл капіталовкладень між підприємствами. Принцип оптимальності. Багатокроковий процес прийняття рішень.

Приклади розв'язування задач динамічного програмування.

### **Тема 9. Стохастичне програмування**

Загальна математична постановка задачі стохастичного програмування. Особливості математичної постановки задач стохастичного програмування. Приклади економічних задач стохастичного програмування.

Одноетапні задачі стохастичного програмування.

Двохетапні задачі стохастичного програмування.

## 2 РОЗПОДІЛ ОБСЯГУ ДИСЦИПЛІНИ ЗА ТЕМАМИ

Інформацію щодо розподілу навчального часу за темами, що відповідають навчальній програмі дисципліни, формами занять, а також передбачені форми контролю наведено у таблиці 2.1.

Метою проведення лекцій є ознайомлення студентів із сукупністю оптимізаційних моделей і методів, що підтвердили свою ефективність на практиці у розв'язанні проблем управління. Метою проведення практичних занять є закріплення теоретичних знань, набутих на лекціях та в процесі самостійного вивчення дисципліни; вироблення навичок кількісного обґрунтування прийняття рішень.

Таблиця 2.1 – Розподіл навчального часу за темами і формами вивчення та контролю

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин для форми навчання: денної (ОА)/заочної(ЗМ)						
	Усього	У тому числі				СРС	
		Лекції	Практ. зан.	Лаб.	СРС		
					усього	у т.ч. ІІІДЗ	
Змістовий модуль 1. Предмет, сфери та особливості застосування математичного програмування в економіці. Класифікація задач. Лінійне програмування							
Тема 1. Предмет, сфери та особливості застосування математичного програмування в економіці. Класифікація задач	6/4	2/-	-/-	-	4/4	-	
Тема 2. Загальна задача лінійного програмування та деякі з методів її розв'язування	18/14	2/1	6/2	-	10/11	-	
Тема 3. Теорія двоїстості та двоїсті оцінки у лінійному програмуванні	18/18	2/0,5	4/-	-	12/17,5	-	
Тема 4. Транспортна задача	18/14	2/-	4/-	-	12/14	-	
Тема 5. Цілочислові задачі лінійного програмування. Основні методи їх розв'язування та аналізу	18/14	2/0,5	4/-	-	12/13,5	-	
Разом за змістовим модулем 1	78/64	10/2	18/2	-	50/60	-	
Змістовий модуль 2. Дробово-лінійне програмування. Нелінійне програмування. Динамічне програмування. Стохастичне програмування							
Тема 6. Задачі дробово-лінійного програмування. Основні методи їх розв'язування та аналізу	18/14	2/-	2/-	-	14/14	-	
Тема 7. Задачі нелінійного програмування. Основні методи їх розв'язування та аналізу	18/14	2/2	4/-	-	12/12	-	
Тема 8. Динамічне програмування	18/14	1/2	4/-	-	13/12	-	
Тема 9. Стохастичне програмування	18/14	1/-	4/2	-	13/12	-	
Разом за змістовим модулем 2	72/56	6/4	14/2	-	52/50	-	
Усього годин	150/120	16/6	32/4	-	102/110	-	

### 3 ЗАСОБИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ПОТОЧНОГО ТА ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ

Система оцінювання знань студентів з навчальної дисципліни „Оптимізаційні методи і моделі”, що включає поточний, проміжний та семестровий контроль знань, регламентується Положенням про поточне та підсумкове оцінювання знань студентів Чернігівського національного технологічного університету, погодженим Вченою радою ЧНТУ (протокол №9 від 26.10.2015 р.) та затвердженим наказом Ректора від 29.10.2015 р. №181.

Поточний контроль має на меті перевірку рівня підготовленості студентів до сприйняття нового матеріалу, виконання конкретної роботи, здійснюється протягом семестру під час проведення лекцій, практичних занять, виконання індивідуальних завдань і оцінюється сумою набраних балів. Поточний контроль реалізується у формі опитування, захисту практичних робіт, експрес-контролю, перевірки результатів виконання різноманітних індивідуальних завдань, контролю засвоєння навчального матеріалу, запланованого на самостійне опрацювання студентом та інших формах.

Проміжний контроль має на меті оцінку результатів знань студента після вивчення матеріалу з логічно завершеної частини дисципліни – змістового модуля. Проміжний контроль реалізується у формі контрольних робіт, що проводяться протягом тижня після вивчення матеріалу за завершеною частиною дисципліни на практичному занятті або в інший час, вільний від аудиторних занять.

Інформація щодо форм поточного контролю, що здійснюється протягом семестру під час проведення лекцій і практичних занять, представлена у таблиці 3.1. Оцінювання знань, вмінь та навичок студентів враховує види занять, самостійну роботу та виконання індивідуальних завдань. Контроль систематичного виконання самостійної роботи та активності на заняттях проводиться за наступними критеріями: розуміння, ступінь засвоєння теорії, методології та фактичного матеріалу навчальної дисципліни; ознайомлення з рекомендованими першоджерелами; вміння поєднувати теорію з практикою при розв’язанні задач, проведенні розрахунків при виконанні індивідуальних завдань та завдань, винесених на розгляд аудиторії; логіка, структура, стиль викладу матеріалу в письмових роботах і під час виступів в аудиторії, вміння обґрунтовувати свою позицію, здійснювати узагальнення інформації та робити висновки.

Таблиця 3.1 – Форми поточного контролю знань студентів

Форма поточного контролю	Кількість балів
Змістовий модуль 1	0...27
Відвідування занять	0...3
Повнота ведення конспекту лекцій, робочого зошита для практичних занять	0...1,5
Активність під час опитувань	0...1,5



Форма поточного контролю	Кількість балів
Підготовленість до занять, у т. ч. засвоєння питань програми, що не викладаються на лекції	0...6
Контрольна робота 1	0...15
Змістовий модуль 2	0...33
Відвідування занять	0...3
Повнота ведення конспекту лекцій, робочого зошита для практичних занять	0...1,5
Активність під час опитувань	0...1,5
Підготовленість до занять, у т. ч. засвоєння питань програми, що не викладаються на лекції	0...6
Презентація виконаного ІНДЗ	0...3
Якість звіту про виконання ІНДЗ	0...3
Контрольна робота 2	0...15
Разом	0...60

Робочими навчальними планами підготовки бакалаврів за напрямом 6.030509 „Облік і аудит” передбачене проведення семестрового контролю з нормативної дисципліни „Оптимізаційні методи і моделі” у формі семестрового екзамену. Студент може набрати до 60% підсумкової оцінки за виконання усіх видів робіт, що виконуються протягом семестру, і до 40% підсумкової оцінки – на екзамені. Складання екзамену є обов’язковим елементом підсумкового контролю для студентів, які претендують на оцінку „добре” або „відмінно” (таблиця 3.2). Якщо студент виконав усі види робіт протягом семестру (з мінімальними вимогами до знань) та набрав 60% підсумкової оцінки, тобто „задовільно”, він має право залишити набрану кількість балів як підсумкову оцінку і не складати екзамен. До складання екзамену допускаються студенти, які повністю виконали навчальний план і позитивно атестовані з дисципліни за результатами поточного та проміжного контролів.

Таблиця 3.2 – Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою
90-100	A	Відмінно
82-89	B	Добре
75-81	C	
66-74	D	Задовільно
60-65	E	
35-59	FX	Незадовільно з можливістю повторного складання
1-34	F	Незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни

Екзаменаційні білети з навчальної дисципліни „Оптимізаційні методи і моделі” містять два теоретичні питання, що відносяться до різних тем курсу, та

одне практичне (задача). На екзамені студент також має дати відповіді на ряд додаткових понятійних питань з курсу з метою виключення фактору випадковості.

Результати виконання екзаменаційних завдань оцінюються за бальною системою відповідно до рівня виконаних завдань (див. таблицю 3.3).

Таблиця 3.3 – Розподіл балів на семестровому екзамені

Екзаменаційний білет			Додаткові запитання	Разом
Теоретичне питання 1	Теоретичне питання 2	Практичне завдання		
0-5	0-5	0-20	0-10	0-40

Критерії оцінювання відповідей студентів на екзамені наступні.

Оцінка „відмінно” виставляється, якщо студент відповів на питання та вирішив задачу в повному обсязі, мають місце обґрунтованість та повнота відповідей на теоретичні та практичні питання. Можлива присутність деяких недоліків у вигляді описок.

Оцінка „добре” виставляється, якщо студент відповів на всі екзаменаційні питання і у повному обсязі, але має місце деяка необґрунтованість висвітлення цих питань. Можлива присутність деяких недоліків у вигляді технічних помилок та описок у вирішенні задачі.

Оцінка „задовільно” виставляється, якщо студент відповів на питання в неповному обсязі, але задачу в основному вирішено. Можлива присутність деяких грубих теоретичних помилок.

Оцінка „незадовільно” виставляється, якщо студент відповів на питання в неповному обсязі або повністю відсутні відповіді на теоретичні або практичне питання. Незадовільна оцінка може бути виставлена, якщо відповіді були не по суті теоретичних та практичних питань.

Підсумкова оцінка з дисципліни складається з кількості балів за виконання усіх видів робіт, що виконувались протягом семестру та кількості балів отриманих на екзамені. Оцінювання здійснюється за 100-бальною шкалою з подальшим переведенням у національну шкалу та шкалу ECTS.

Якщо студент протягом семестру не виконав у повному обсязі усіх видів навчальної роботи, має невідпрацьовані практичні заняття або не набрав мінімальну кількість балів – 60, він має право ліквідувати академічну заборгованість у порядку, передбаченому п. 6 Положення від 26.10.2015 р.

## 4 ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВОЇ (КОНТРОЛЬНОЇ) РОБОТИ НА ТЕМУ „ОПТИМАЛЬНЕ ПЛАНУВАННЯ ВИРОБНИЦТВА”

### 4.1 Постановка задачі оптимізації виробництва

Підприємство, що планує організувати виробництво двох нових видів виробів, має обмежену суму власних коштів для капіталовкладень  $K$ , але може збільшити обсяг цих вкладень за рахунок використання банківського кредиту, сума якого обмежена ( $I$ ). Природно, що залучення позикових коштів виявиться економічно виправданим тільки в тому випадку, якщо нове виробництво буде прибутковим з урахуванням виплачуваних відсотків  $h$ .

Визначити обсяги виробництва виробів кожного виду, що забезпечать одержання максимуму прибутку, якщо відомо, що капіталовкладення на одиницю виробництва виробів першого і другого видів складають, відповідно,  $a_1$  і  $a_2$ ; прибуток від реалізації одиниці виробу кожного виду дорівнює, відповідно,  $c_1$  і  $c_2$ ; мінімально припустимий обсяг виробництва виробу першого виду дорівнює  $A$  одиниць, виробу другого виду –  $B$  одиниць.

Вихідні дані по варіантах наведені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Вихідні дані до розрахункової (контрольної) роботи

Номер варіанту	грош. од.						h, %	од.	
	K	I	$a_1$	$a_2$	$c_1$	$c_2$		A	B
1	1000	100	2	2,5	3	4	101	100	50
2	300	300	4	5	4	8	102	50	4
3	200	50	6	3	10	5	103	5	20
4	150	300	3	2	4	2,5	101	10	30
5	90	200	1,2	1	2	2	102	20	20
6	80	100	3,5	1,5	6	3	103	15	30
7	70	100	2,2	1,8	3	2	101	10	10
8	120	50	3,2	4	4	4,6	102	30	20
9	180	200	4,5	4	7	6	103	20	10
10	400	100	2,1	3	3	3,5	101	50	10
11	800	1000	1,8	1,6	2	3	102	40	20
12	700	500	1,5	2	3	2,5	103	10	40
13	600	500	1,2	2	2	4	101	30	10
14	500	500	2	1,5	4	3	102	15	30
15	110	100	2,4	4	3	4	103	10	20
16	900	450	3,8	3	10	8	101	20	25
17	750	400	4,2	3,5	4	5	102	40	10
18	830	200	4,5	4,2	2,5	4	103	10	30
19	240	300	6	4,3	3	6	101	20	4
20	440	200	1,5	2,1	2	3	102	10	25

## 4.2 Вказівки щодо вибору варіанту завдання, структури роботи та вимоги до оформлення

За виданим варіантом завдання (таблиця 4.1) необхідно побудувати математичну модель, визначитися з методом розв'язування, знайти оптимальне рішення. У випадку отримання нецілочисельного розв'язку домогтися його цілочисельності. Всі кроки в процесі рішення обґрунтувати. Зробити висновки за результатами розрахунків.

Варіант завдання відповідає порядковому номеру студента у списку заліково-екзаменаційних відомостей, що формуються деканатом. Якщо списковий номер студента за списком перевищує 20, то *варіант* = № – 20.

Рекомендований зміст розрахункової (контрольної) роботи наступний:

Вступ (Звернути увагу на підвищення вимог до обґрунтованості економічних рішень в умовах ринкової економіки; місце економіко-математичного інструментарію у процесі прийняття економічних рішень)

1. Постановка задачі оптимального планування виробництва
2. Побудова математичної моделі
3. Обґрунтування вибору методу розв'язання поставленої задачі
4. Вирішення задачі оптимального планування виробництва методом Гоморі (методом „гілок і меж”)
5. Рішення задачі з використанням MS Excel
6. Аналіз допустимих та оптимального рішень, аналіз обмежуючих чинників

Висновки і пропозиції підприємству

Список використаної літератури

Додатки

Розрахункова (контрольна) робота повинна бути оформлена у відповідності зі стандартом щодо оформлення текстових документів ГОСТ 2.105-95, введеним у дію в якості державного стандарту наказом Держстандарту України №259 від 27.06.1996 року, або згідно вимог Державного стандарту України ДСТУ 3008-95 „Документація, звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення”.

Пропонується індивідуальні завдання виконати на стандартних аркушах формату А4, зброшурованих у теку. Сторінки мають бути пронумеровані. Загальний обсяг роботи не повинен перевищувати 25 сторінок (не враховуючи додатки), набраних у редакторі Word (абзац становить 10 мм; поля з усіх боків повинні дорівнювати 20 мм; шрифт Times New Roman Суг 12; міжрядковий інтервал – одинарний). Розрахунки необхідно виконувати за допомогою Excel.

На початку розрахункової (контрольної) роботи вміщується титульний аркуш за встановленою формою із зазначенням дати виконання роботи та підписом виконавця. На наступній сторінці зазначається деталізований зміст роботи з вказівкою початкових сторінок кожного параграфу. У тексті назва кожного параграфу виділяється окремим рядком. У кінці роботи подається список використаних джерел і у випадку їх наявності додатки.

Формули мають бути набрані обов'язково із застосуванням редактора формул.

При написанні розрахункової (контрольної) роботи студент повинен посилатися на джерела, матеріали з яких наводяться в даній роботі. Посилання додаються одразу після закінчення цитати у квадратних дужках, де вказується порядковий номер джерела у списку та відповідна сторінка джерела.

Для успішного вирішення поставлених завдань студенту потрібно уважно вивчити рекомендовані в кінці даної методичної розробки навчальні посібники та допоміжну літературу, а також доцільно скористатися методичними вказівками до виконання рекомендованих завдань.

## 5 РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ФОРМАЛІЗАЦІЇ ПОСТАВЛЕНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ ВИРОБНИЦТВА

Нехай має місце наступне завдання.

Підприємство, що планує організувати виробництво двох нових видів виробів, має обмежену суму власних засобів для капіталовкладень, що дорівнює 100 грош. од., але може збільшити обсяг цих вкладень за рахунок використання банківського кредиту, сума якого обмежена до 50 грош. од.

Визначити обсяги виробництва виробів кожного виду, що забезпечать одержання максимуму прибутку, якщо відомо, що капіталовкладення на виробництво одиниці виробу першого виду становлять 1,5 грош. од., на одиницю виробу другого виду – 1 грош. од. Прибуток від реалізації одиниці виробу кожного виду дорівнює, відповідно, 3 грош. од. і 2 грош. од. Мінімально допустимий обсяг виробництва виробу першого виду дорівнює 10 одиниць, виробу другого виду – 20 одиниць.

Виплата кредиту у випадку його використання складає 103% суми позикових коштів.

Для побудови математичної моделі вводяться невідомі:

$x_j$  – обсяг виробництва продукції  $j$ -го виду  $(j \in \{1, 2\})$  протягом планового періоду, одиниць.

Тоді, якщо залучення позикових коштів не припускається, обмеження мають вигляд:

$$\begin{cases} 1,5x_1 + x_2 \leq 100, \\ x_1 \geq 10, \\ x_2 \geq 20. \end{cases}$$

При цьому, вимоги невід'ємності змінних ( $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ ) не записуються, оскільки передбачаються двома останніми обмеженнями.

Щоб врахувати банківський кредит, можна видозмінити перше обмеження в такий спосіб:

$$1,5x_1 + x_2 - g = 100,$$

де введена змінна  $g$  не обмежена в знаку.

Якщо  $g < 0$ , то наявний обсяг капіталовкладень цілком не витрачений, тобто додаткові кошти не використовуються. Якщо  $g > 0$ , обсягу капіталовкладень не вистачає і використовується банківський кредит в обсязі  $g$  грош. од.

Далі слід розглянути цільову функцію. Мета завдання полягає в максимізації загального прибутку від реалізації виробів зменшеного на суму позикових коштів та виплачуваних відсотків по кредиту.

Загальний прибуток за умовою задачі визначається як  $3x_1 + 2x_2$ .

Слід звернути увагу, що плата за кредит враховується лише при  $g > 0$  і розраховується в такий спосіб:

$$\begin{aligned} \text{Виплачувана банку сума} &= \text{Відсоток виплати кредиту} \times \text{Сума кредиту} = \\ &= 1,03 \cdot \max\{0; g\} \end{aligned}$$

Таким чином, математичне формулювання задачі має наступний вигляд.

Визначити план виробництва  $X = (x_1; x_2)$  що забезпечуватиме максимум  $f = 3x_1 + 2x_2 - 1,03(\max\{0; g\})$  при обмеженнях

$$\begin{cases} 1,5x_1 + x_2 - g = 100, \\ x_1 \geq 10, \\ x_2 \geq 20, \\ g \leq 50. \end{cases}$$

$x_1, x_2$  – цілі числа.

Для приведення моделі до лінійної форми доцільно використати підстановку  $r = \max\{0; g\}$ , що еквівалентна умовам  $r \geq g$  або  $r - g \geq 0$  та  $r \geq 0$ , оскільки від'ємний коефіцієнт при  $r$  у виразі для цільової функції впливає на неї таким чином, що в процесі оптимізації буде вибиратися найменше з можливих невід'ємних значень, тобто 0 або  $g$ . А також необхідно змінну  $g$  представити як різницю двох невід'ємних змінних  $g = g' - g'', g' \geq 0, g'' \geq 0$ .

Тоді математична модель задачі цілочисельного лінійного програмування буде мати наступний вигляд.

Знайти  $X = (x_1; x_2)$  що максимізуватиме  $f = 3x_1 + 2x_2 - 1,03r$  при обмеженнях

$$\begin{cases} 1,5x_1 + x_2 - g' + g'' = 100, \\ x_1 \geq 10, \\ x_2 \geq 20, \\ r - g' + g'' \geq 0, \\ g' - g'' \leq 50, \\ r \geq 0, \\ g' \geq 0, g'' \geq 0. \end{cases}$$

## 6 ПРИКЛАД ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПЛАНУВАННЯ ВИРОБНИЦТВА З ОПТИМАЛЬНИМ РОЗПОДІЛОМ ВИРОБНИЧИХ РЕСУРСІВ

### 6.1 Текстова постановка задачі

Фірма виготовляє для автомобілів запчастини типу А і Б. Фонд робочого часу становить 5000 людино-год. на тиждень. Для виробництва однієї деталі типу А потрібно 1 людино-год., а для виробництва деталі типу Б – 2 людино-год. Виробнича потужність дозволяє випускати максимум 2500 деталей типу А і 2000 деталей типу Б на тиждень. Для виробництва однієї автозапчастини типу А витрачається 2 кг полімерного матеріалу і 5 кг листового матеріалу, а для виробництва деталі типу Б – 4 кг полімерного матеріалу та 3 кг листового матеріалу. Щотижневі запаси кожного матеріалу – по 10000 кг (10 тон). Загальна кількість виготовлених деталей протягом одного тижня повинна бути не менше 1500 шт.

Визначити скільки деталей кожного типу потрібно виробляти, щоб забезпечити максимальний дохід від продажу за тиждень, якщо дохід від продажу однієї деталі А і Б становить, відповідно, 1,1 грош. од. і 1,5 грош. од.

### 6.2 Математична постановка задачі

Для побудови математичної моделі поставленої задачі введемо позначення:

$x_1$  – тижневий обсяг виробництва запчастин типу А, шт.;

$x_2$  – кількість запчастин типу Б (шт.), що виготовлятимуться фірмою за тиждень.

Тоді, дана задача зводиться до визначення плану виробництва фірмою автозапчастин протягом тижня  $X = (x_1; x_2)$ , що забезпечуватиме їй максимальний дохід від реалізації продукції, тобто максимізуватиме деяку функцію  $f$ , що відображає обсяг виручки (грош. од.) при тижневих обсягах виробництва  $x_1$  та  $x_2$  і заданих цінах:

$$\max: f = 1,1x_1 + 1,5x_2 \quad (6.1)$$

за умов (при обмеженнях):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5000; \\ x_1 \leq 2500; \\ x_2 \leq 2000; \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 10000; \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 10000; \\ x_1 + x_2 \geq 1500; \end{cases} \quad (6.2)$$



$$\begin{aligned}
 x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \\
 x_1, x_2 - \text{цілі числа.}
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

Умови системи обмежень мають наступну економічну інтерпретацію. Перша нерівність означає, що фактичні витрати робочого часу на виробництво запчастин протягом тижня не повинні перевищувати планового фонду робочого часу; друга і третя нерівність: виробництво запчастин, відповідно, типу А та Б може здійснюватись в обсягах, що забезпечуються наявними виробничими потужностями; четверта нерівність: фактичні витрати полімерного матеріалу на виробництво запчастин не повинні перевищувати тижневого запасу цього матеріалу, що є в наявності на підприємстві; п'ята нерівність: фактичні витрати листового металу на виробництво автозапчастин не повинні перевищувати наявного тижневого запасу цього матеріалу; шоста нерівність: для виконання фірмою її договірних зобов'язань загальний тижневий обсяг виробництва запчастин (незалежно від їх типу) має бути не менше 1500 штук.

Умова невід'ємності змінних означає, що кількість запчастин (шт.) не може бути від'ємною; умова цілочисельності – кількість запчастин, що виражається в штуках не може бути дробовим числом.

### 6.3 Обґрунтування вибору методу розв'язання поставленої задачі

За виглядом математичної моделі дану задачу можна віднести до задач цілочисельного лінійного програмування (ЗЦЛП), оскільки математична модель складається з трьох елементів: цільової функції (6.1), системи обмежень (6.2) та умов, що накладаються на змінні, (6.3), і при цьому як цільова функція, так і обмежувальні умови – це лінійні вирази; до того ж, модель містить вимогу цілочисельності змінних.

Отже, для вирішення даної задачі можна використати метод „гілок і меж” або метод Гоморі.

Алгоритм методу Гоморі див. [2, стор. 180-181].

Алгоритм методу „гілок і меж”.

1. Задача розв'язується без урахування вимоги цілочисельності змінних, як задача лінійного програмування (ЗЛП) симплекс-методом (можливе використання графічного методу, у випадку, коли задача має лише дві змінні або може бути зведена до задачі з двома змінними, що можливе за умови, коли в її канонічному записі кількість невідомих  $n$  і кількість лінійно незалежних рівнянь  $m$  пов'язані співвідношенням  $n - m \leq 2$ ). Якщо в результаті рішення буде одержаний цілочисельний результат – процес завершується, у протилежному випадку переходять до етапу 2.

2. Обирається змінна з більшою дробовою частиною, з урахуванням значення якої складаються обмеження виду:

$$x_j \leq x_j^* - \frac{1}{x_j^*}, \tag{6.4}$$

$$x_j \geq x_j^* - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \quad (6.5)$$

де  $x_j^*$  – значення змінної з більшою дробовою частиною;

$\frac{1}{2}$  – дробова частина значення змінної;

$x_j$  – позначення змінної.

Вихідна задача розбивається на дві розширені задачі. При цьому розширена задача 1 має вигляд математичної моделі вихідної задачі, в систему обмежень якої додана нерівність (6.4), а розширена задача 2 – це математична модель вихідної задачі, в систему обмежень якої включається нерівність (6.5).

Після чого кожна з розширених задач розв'язується окремо як ЗЛП. У разі отримання цілочисельних розв'язків розширених задач переходять до встановлення оптимального рішення вихідної задачі (етап 3), а у протилежному випадку з урахуванням значення змінної з більшою дробовою частиною будуються і розв'язуються розширені задачі для відповідних раніше розширених задач з нецілочисельними розв'язками. Процес завершується, коли буде отримано цілочисельне рішення усіх розширених задач або доведена нерозв'язність окремих чи усіх їх при встановлених занадто жорстких обмеженнях.

Процес рішення поставленої задачі супроводжується побудовою, так званого, „дерева рішень”.

3. Визначається оптимальне рішення вихідної задачі, тобто такий план (плани), що задовольняють усі обмеження поставленої задачі (включені в систему (6.2) та вимоги до змінних (6.3)), і при якому (яких) цільова функція (6.1) набуває екстремального значення (досягає максимуму чи мінімуму). Для цього на „дереві рішень” із всіх цілочисельних розв'язків у якості оптимального обирається той, що і забезпечує екстремальне значення цільової функції.

#### 6.4 Розв'язання поставленої задачі методом „гілок і меж”

Для забезпечення аналізу чутливості рішення до зміни обмежуючих умов поставленої задачі, зокрема, викликаних змінами внутрішнього та зовнішнього середовища фірми, наприклад, можливостей збуту продукції, придбання матеріалів, наявності трудових ресурсів, виробничих потужностей тощо, розв'яжемо дану задачу вручну методом „гілок і меж”, поклавши в основу симплексний метод.

Отже, на першому етапі (згідно з алгоритмом наведеним у п. 6.3) розв'язуємо задачу без урахування вимоги цілочисельності змінних симплекс-методом. Для цього переходимо до канонічної форми запису математичної моделі. Зауважимо, що канонічна форма запису ЗЛП передбачає наявність задачі на максимум цільової функції (як у даному випадку) та лише рівнянь у

систему обмежень. Оскільки дана задача містить у системі шість нерівностей, то для перетворення їх у рівняння вводимо додаткові невід'ємні змінні  $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ , що додаються до лівої частини нерівностей зі знаком „ $\leq$ ”, віднімаються з лівої частини нерівностей зі знаком „ $\geq$ ” та вводяться у цільову функцію  $f$  з нульовими коефіцієнтами, оскільки мають цілком певну економічну інтерпретацію. Так, змінна  $x_3$  означає невикористаний тижневий фонд робочого часу, людино-год.; змінні  $x_4, x_5$  – невикористані виробничі потужності на лініях з виробництва, відповідно, автозапчастин типу А і Б, шт.;  $x_6, x_7$  – залишки тижневого запасу, відповідно, полімерного і листового матеріалів, кг;  $x_8$  – запас готової продукції (шт.) понад обсяги передбачені наявними договорами постачання.

Таким чином, у канонічній формі поставлена задача записується наступним чином.

Знайти план  $X = (x_1; x_2)$ , що

$$\max : f = 1,1x_1 + 1,5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5000 \\ x_1 + x_4 = 2500 \\ x_2 + x_5 = 2000 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_6 = 10000 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_7 = 10000 \\ x_1 + x_2 - x_8 = 1500 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1;8}$$

Після переходу до канонічної форми потрібно виділити базисні змінні. Їх має бути стільки скільки обмежень містить система обмежень даної задачі; кожна з них повинна міститися лише в одному рівнянні системи і з коефіцієнтом „+1” (іншими словами, базисним змінним відповідають одиничні вектор-стовпці).

У даному випадку можна скористатися одним з двох наборів базисних змінних:

1) базисними змінними можна вважати змінні  $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$  та  $x_8$  після домножування лівої та правої частини останнього рівняння із системи на „-1”; при цьому подальше розв'язання ЗЛП здійснюється звичайним симплекс методом;

знайти  $X = (x_1; x_2)$ , що

$$\max : f = 1,1x_1 + 1,5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5000 \\ x_1 + x_4 = 2500 \\ x_2 + x_5 = 2000 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_6 = 10000 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_7 = 10000 \\ -x_1 - x_2 + x_8 = -1500 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1;8};$$

2) розв'язання ЗЛП здійснюватиметься симплекс-методом зі штучним базисом, коли в якості базисних змінних прийняти  $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$  і  $w$ , де  $w$  – додаткова невід'ємна штучна змінна, що додається у ліву частину останнього рівняння системи обмежень, не має економічної інтерпретації, а тому у цільову функцію вводиться із коефіцієнтом „-M” (M – як завгодно велике число); у ході розв'язання від неї у базисі потрібно позбавитися.

Знайти  $X = (x_1; x_2)$ , що

$$\max: f = 1,1x_1 + 1,5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 - Mw$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5000 \\ x_1 + x_4 = 2500 \\ x_2 + x_5 = 2000 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_6 = 10000 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_7 = 10000 \\ x_1 + x_2 - x_8 + w = 1500 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1;8}, \quad w \geq 0.$$

Скористаймося, наприклад, першим із варіантів базисних змінних. Формуємо таблицю 6.1 для розв'язання поставленої задачі симплекс-методом. Алгоритм симплексного методу можна повторити, наприклад, за джерелом [2, стор. 30-55].

З таблиці 6.1 видно, що у якості початкового опорного (допустимого) плану виробництва обирається план  $X^{(0)} = (1500; 0)$ . Це план згідно з яким протягом тижня виготовлятиметься 1500 шт. автозапчастин типу А; автозапчастини типу Б не виготовлятимуться і фірма отримуватиме дохід від реалізації 1650 грош. од. ( $f(1500; 0) = 1650$ ). При цьому 3500 людино-годин тижневого фонду робочого часу, 7000 кг полімерного матеріалу і 2500 кг

листового матеріалу з тижневих їх запасів залишаються не використаними; наявне устаткування дозволяє додатково виготовляти 1000 шт. запчастин А і 2000 шт. запчастин Б, але мінімальний обсяг виробництва (1500 шт.) забезпечується.

Перевіряється чи оптимальний для фірми такий план виробництва. Для цього розраховується контрольний рядок ( $\Delta$ ). Оскільки він містить від'ємні елементи, то план  $X^{(0)}$  не оптимальний, його необхідно покращити.

Таблиця 6.1 – Розв'язання задачі без урахування вимоги цілочисельності змінних

Базис	с	План	1,1	1,5	0	0	0	0	0	0	Мінім. віднош.
			x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	
x <sub>3</sub>	0	5000	1	2	1	0	0	0	0	0	
x <sub>4</sub>	0	2500	1	0	0	1	0	0	0	0	
x <sub>5</sub>	0	2000	0	1	0	0	1	0	0	0	
x <sub>6</sub>	0	10000	2	4	0	0	0	1	0	0	
x <sub>7</sub>	0	10000	5	3	0	0	0	0	1	0	
← x <sub>8</sub>	0	-1500	-1	-1	0	0	0	0	0	1	
Δ											
x <sub>3</sub>	0	3500	0	1	1	0	0	0	0	1	3500
x <sub>4</sub>	0	1000	0	-1	0	1	0	0	0	1	1000
x <sub>5</sub>	0	2000	0	1	0	0	1	0	0	0	x
x <sub>6</sub>	0	7000	0	2	0	0	0	1	0	2	3500
← x <sub>7</sub>	0	2500	0	-2	0	0	0	0	1	5	500
x <sub>1</sub>	1,1	1500	1	1	0	0	0	0	0	-1	x
Δ <sub>1</sub>		1650	0	-0,4	0	0	0	0	0	-1,1	
x <sub>3</sub>	0	3000	0	1,4	1	0	0	0	-0,2	0	2143
x <sub>4</sub>	0	500	0	-0,6	0	1	0	0	-0,2	0	x
← x <sub>5</sub>	0	2000	0	1	0	0	1	0	0	0	2000
x <sub>6</sub>	0	6000	0	2,8	0	0	0	1	-0,4	0	2143
x <sub>8</sub>	0	500	0	-0,4	0	0	0	0	0,2	1	x
x <sub>1</sub>	1,1	2000	1	0,6	0	0	0	0	0,2	0	3333
Δ <sub>2</sub>		2200	0	-0,84	0	0	0	0	0,22	0	
x <sub>3</sub>	0	200	0	0	1	0	-1,4	0	-0,2	0	
x <sub>4</sub>	0	1700	0	0	0	1	1,6	0	-0,2	0	
x <sub>2</sub>	1,5	2000	0	1	0	0	1	0	0	0	

Закінчення табл. 6.1

Базис	с	План	1,1	1,5	0	0	0	0	0	0	Мінім. віднош.
			x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	
x <sub>6</sub>	0	400	0	0	0	0	-2,8	1	-0,4	0	
x <sub>8</sub>	0	1300	0	0	0	0	0,4	0	0,2	1	
x <sub>1</sub>	1,1	800	1	0	0	0	-0,6	0	0,2	0	
Δ <sub>3</sub>		3880	0	0	0	0	0,84	0	0,22	0	

У результаті реалізації процедури симплекс–алгоритму поступово здійснюється перехід від плану  $X^{(0)}$  до плану  $X^{(1)} = (2000;0)$  і до плану  $X^{(2)} = (800;2000)$ . Плану  $X^{(2)}$  у контрольному рядку  $\Delta_3$  симплекс–таблиці 6.1 відповідають лише невід’ємні коефіцієнти, тому він оптимальний. До того ж, план  $X^{(2)}$  цілочисельний, тобто повністю задовольняє систему обмежень поставленої задачі, отже задача розв’язана уже після реалізації етапу 1 алгоритму методу „гілок і меж” наведеного у п. 6.3.

Зауважимо, що практично кожен коефіцієнт розрахункової симплекс–таблиці має економічну інтерпретацію, відповідно можна проаналізувати будь–яке з допустимих та оптимальне рішення, обмежуючі чинники тощо, аналогічно, як це буде наведено у п. 6.6).

*Допустимим розв’язком ЗЛП* називають план  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що задовольняє всі обмеження даної задачі, котрі містяться у системі (6.2), та вимоги до змінних (6.3). *Оптимальним розв’язком ЗЛП* називають такий допустимий розв’язок, що максимізує (мінімізує) цільову функцію (6.1).

При реалізації симплекс–методу для обчислення невідомих коефіцієнтів симплекс–таблиці використовуємо *правило трикутника*, що формулюється наступним чином.

Щоб розрахувати у новій симплекс–таблиці невідомий коефіцієнт, потрібно знайти три числа:

- 1) число, що стоїть на місці невідомого коефіцієнта у попередній симплекс таблиці;
- 2) число, що знаходиться у попередній симплекс таблиці у тому ж рядку, що і невідомий коефіцієнт, але у направляючому стовпці;
- 3) число, що стоїть у новій симплекс таблиці в одному стовпці з невідомим коефіцієнтом, але у рядку щойно введеної в базис змінної (елементи якого розраховуються у першу чергу).

Ці три числа утворюють прямокутний трикутник і щоб визначити невідомий коефіцієнт потрібно від числа, що знаходиться у вершині прямого кута відняти добуток двох інших чисел, тобто:

$$\text{Невідомий коефіцієнт} = 1 \text{ число} - 2 \text{ число} \times 3 \text{ число.}$$

Графічна інтерпретація процесу пошуку оптимального розв’язку поставленої ЗЛП про планування виробництва фірмою автозапчастин представлена на рисунку 6.1. Алгоритм графічного методу можна повторити, наприклад, за джерелом [2, стор. 20].

З рисунка 6.1 видно, що ABCDE – множина допустимих рішень даної задачі. Усі точки з цілочисельними координатами, що містяться на сторонах п’ятикутника ABCDE та всередині нього – це допустимі розв’язки даної ЗЛП, що задовольняють систему обмежень (6.2) та умови, що накладаються на змінні (6.3).

Як бачимо, завдяки симплекс–алгоритму забезпечується найбільш швидке наближення до оптимального розв’язку. Тобто оминаються множина допустимих планів, у тому числі і точки B і C, що трапляються на шляху



переміщення лінії рівня цілей (прямої, перпендикулярної до вектора градієнтного напрямку цільової функції  $f$ , напрям якого задається координатами, що відповідають або пропорційні коефіцієнтам при змінних  $x_1$  і  $x_2$  у цільовій функції  $f = 1,1x_1 + 1,5x_2$ ), і в таблиці 6.1 аналізуються лише допустимі плани, що відповідають точкам А (1500;0) та Е (2000;0), та відбувається вихід на оптимальний план, що на рисунку 6.1 досягається у точці D.

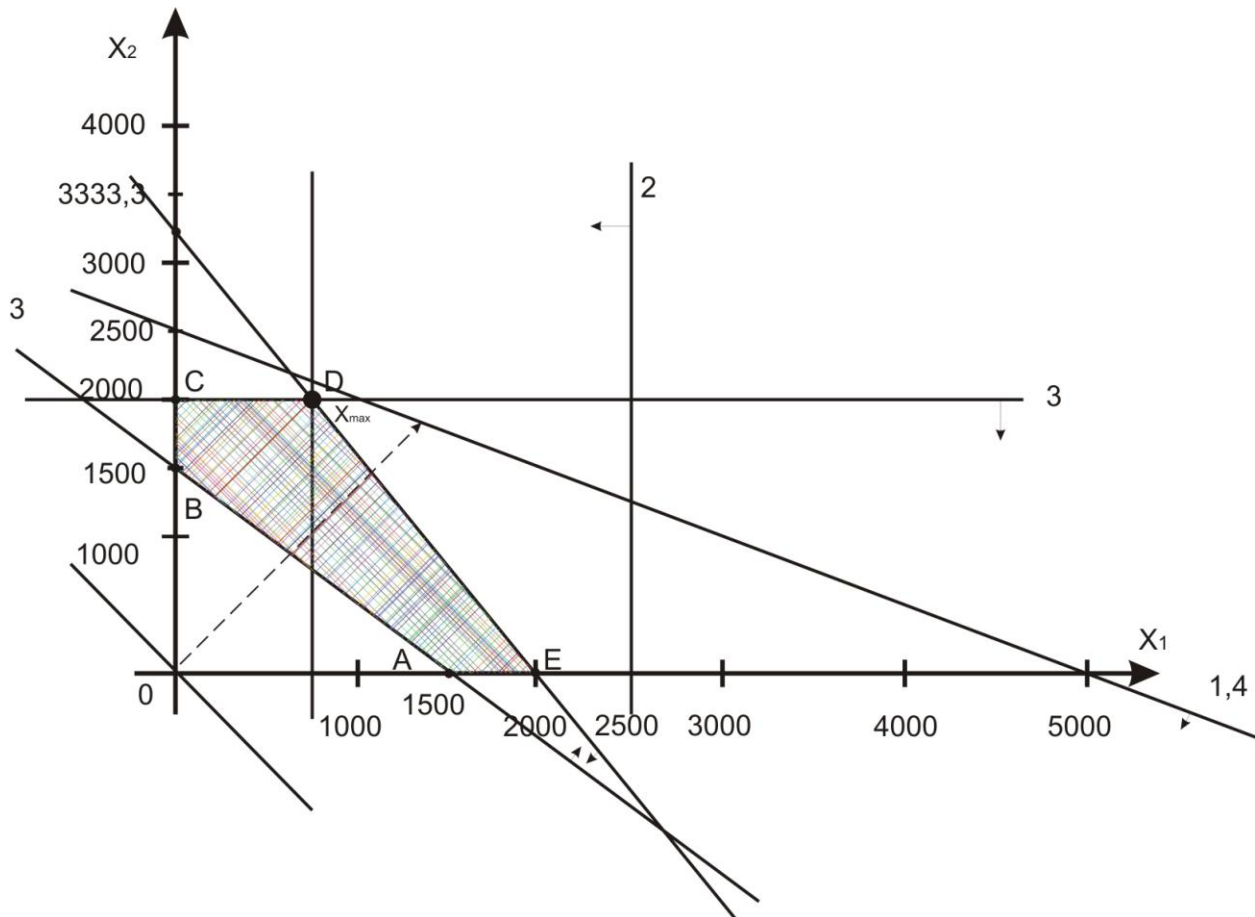


Рисунок 6.1 – Графічна інтерпретація процесу пошуку оптимального рішення

Отже, точка D – оптимальне рішення даної задачі, тобто це допустиме рішення, яке максимізує цільову функцію (6.1) (оскільки це крайня точка дотику прямої, перпендикулярної до вектора градієнтного напрямку цільової функції, з множиною допустимих рішень).

Для знаходження координат точки D розв'язується система рівнянь, що відповідають прямим, на перетині яких знаходиться точка D.

$$\begin{cases} x_2 = 2000, \\ 5x_1 + 3x_2 = 10000, \end{cases}$$

...

$$\begin{cases} x_1 = 800, \\ x_2 = 2000. \end{cases}$$

$$f_{\max}(800;2000) = 1,1 \cdot 800 + 1,5 \cdot 2000 = 3880 \text{ (грош. од.)}$$

Можливі чотири варіанти розв'язку ЗЛП симплекс–методом.

1. Задача має єдиний розв'язок, коли у контрольному рядку, що відповідає оптимальному плану, нулі стоять лише під базисними змінними.

2. Множина розв'язків, коли у контрольному рядку, що відповідає оптимальному плану, нулі стоять не лише під базисними змінними. Тоді одну з таких небазисних змінних можна ввести в базис, виконати розрахунки і отримати другий оптимальний план. Множина інших альтернативних планів може бути отримана як лінійна комбінація двох знайдених  $X_{\text{opt}}^I$  і  $X_{\text{opt}}^{II}$  :

$$X_{\text{opt}} = t \cdot X_{\text{opt}}^I + (1-t) \cdot X_{\text{opt}}^{II}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Значення цільової функції для всіх з множини оптимальних розв'язків ЗЛП буде однаковим і екстремальним.

3. Задача не має розв'язку, якщо у стовпці „План” є від'ємні числа, а у відповідних рядках від'ємних чисел немає; або, якщо у контрольному рядку є від'ємні числа, а у відповідних стовпцях додатних чисел немає.

4. Максимум (мінімум) цільової функції необмежений ( $+\infty$  або  $-\infty$ , коли у контрольному рядку з метою покращення допустимого плану обирається найбільше за модулем від'ємне число, а відповідний стовпець містить лише нулі.

При розв'язанні ЗЛП графічним методом можливі такі ж варіанти розв'язку.

1. Єдиний розв'язок, коли у крайньому положенні пряма перпендикулярна вектору градієнтного напрямку цільової функції дотикається множини допустимих рішень в одній точці.

2. Множина розв'язків, коли у крайньому положенні пряма перпендикулярна до вектора градієнтного напрямку цільової функції співпадає зі стороною множини допустимих розв'язків (відрізком, променем). Координати будь–якої точки цієї сторони – оптимальне рішення ЗЛП; значення цільової функції в усіх цих точках однакове і екстремальне.

3. Задача не має розв'язку, коли множина допустимих рішень – порожня множина, тобто обмежувальні умови задачі суперечать одна одній.

4. Максимум (мінімум) цільової функції необмежений, коли скільки б ми не переміщували пряму перпендикулярну до вектора градієнтного напрямку цільової функції у потрібному напрямку, вона не займає крайнього положення по відношенню до множини допустимих розв'язків.

## 6.5 Рішення задачі з використанням MS Excel

Для вирішення поставленої задачі щодо планування виробництва з використанням надбудови „Пошук рішення” в MS Excel макетуємо таблицю 6.2 (див. рисунок 6.2), що дозволяє враховувати зміни обмежувальних умов та генерувати інваріанти розв'язків будь–яким пересічним користувачем, та

працюємо з відповідним діалоговим вікном Excel згідно, наприклад, методичних вказівок [21, стор. 32–34] (див. рисунок 6.3). У результаті чого приходимо до того ж результату, що і при ручному розв’язуванні (додаток А або рисунок 6.4). Надбудова „Пошук рішення” MS Excel дозволяє переглянути і допустимі рішення ЗЛП.

Слід зауважити, що вигляд розрахункової таблиці 6.2 є орієнтовним. Вона може бути розширена нормативами витрат різних ресурсів на одиницю виробу та іншими необхідними для прийняття рішень показниками.

*Таблиця 6.2 – Визначення оптимального плану виробництва за допомогою надбудови „Пошук рішення” (MS Excel)*

Найменування показника, одиниці вимірювання	Значення показника		
	фактичне	допустиме	мінімально необхідне
Тижневий обсяг виробництва, шт.:			
автозапчастин типу А	0	2500	
автозапчастин типу Б	0	2000	
разом А і Б	0		1500
Дохід фірми від продажу запчастин за тиждень, грош. од.	0		
Витрати робочого часу на виробництво автозапчастин протягом тижня, людино–годин	0	5000	
Тижневі витрати, кг:			
полімерного матеріалу	0	10000	
листового металу	0	10000	

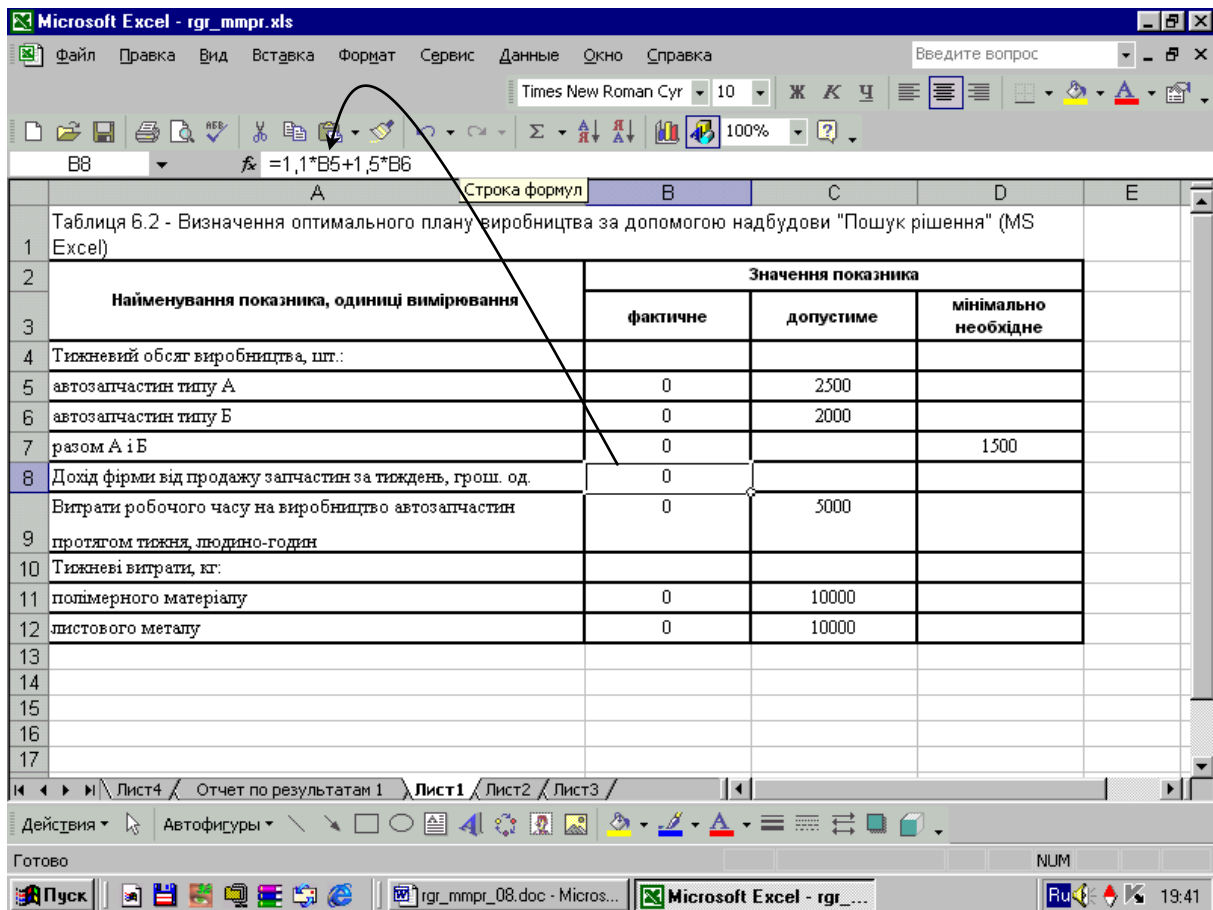


Рисунок 6.2 – Зразок задання фактичних значень показників за допомогою рядка формул

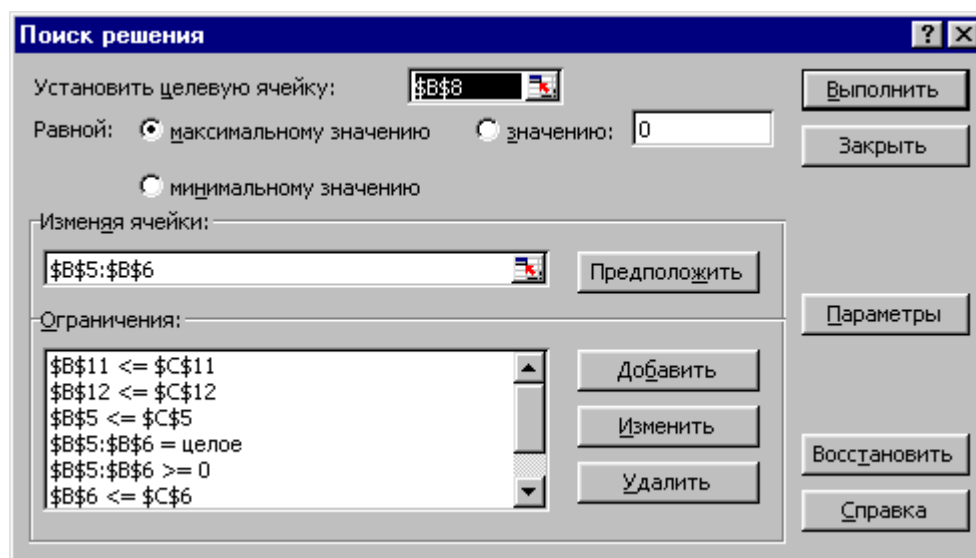


Рисунок 6.3 – Діалогове вікно пошуку рішення

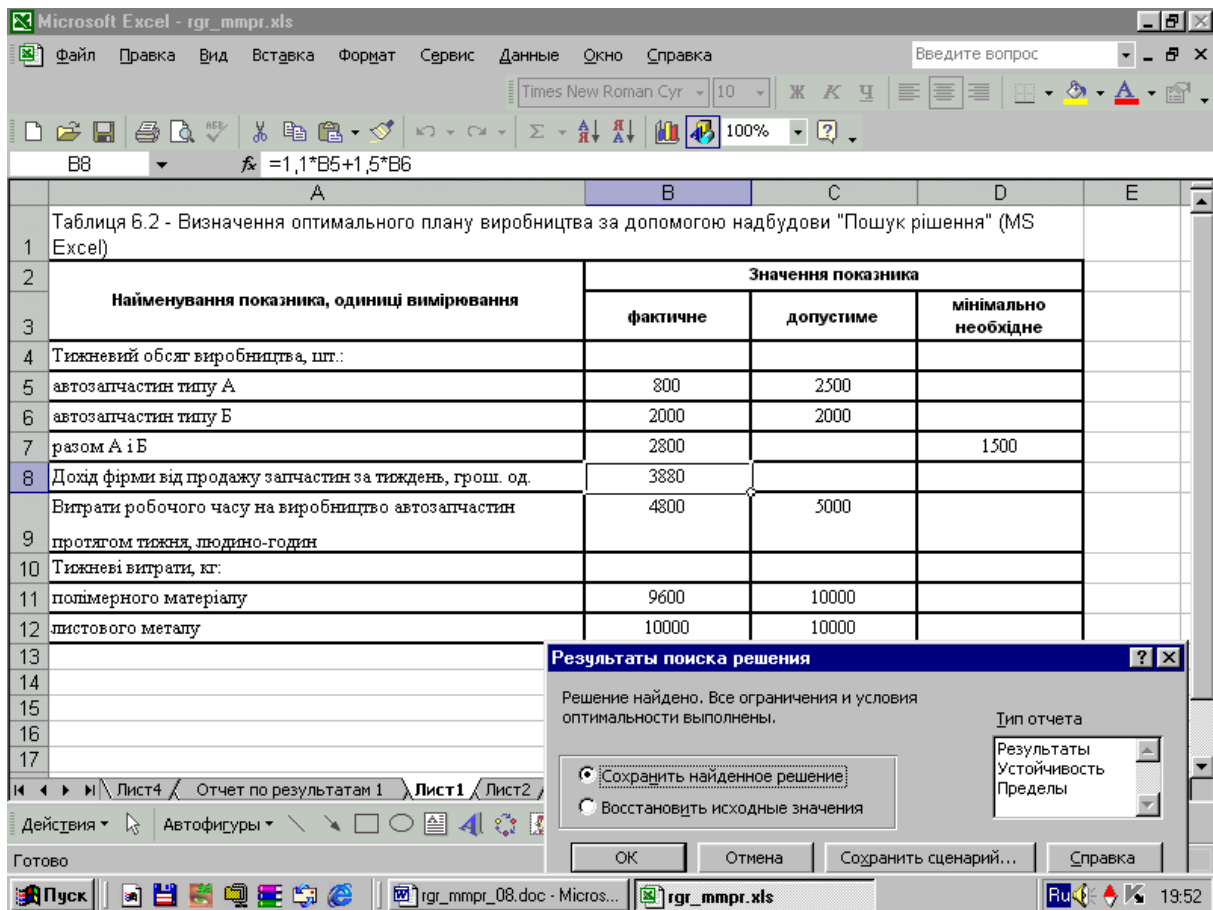


Рисунок 6.4 – Оптимальний розв’язок задачі планування виробництва

## 6.6 Висновки і пропозиції підприємству

Щоб проаналізувати результати виконаних розрахунків, студентам рекомендується повторити економічну інтерпретацію двоїстих оцінок (див., наприклад, джерело [2, стор. 97–100]).

Отже, як видно у стовпці „План” таблиці 6.1, для отримання максимальної виручки від реалізації продукції за даних умов, що становитиме 3880 грош. од. на тиждень (рядок  $\Delta_3$ ), фірма протягом тижня повинна виготовляти 800 шт. запчастин типу А ( $x_1 = 800$ ) і 2000 шт. запчастин типу В ( $x_2 = 2000$ ).

Такий оптимальний план виробництва, що дає максимально можливий дохід у нинішніх умовах функціонування підприємства єдиний.

При такому плані виробництва залишаються невикористаними 200 людино–годин тижневого фонду робочого часу ( $x_3 = 200$ ) і 400 кг тижневого запасу полімерного матеріалу ( $x_6 = 400$ ); обладнання, призначене для виробництва продукції типу А, використовується не на повну потужність і дозволяє додатково виробляти 1700 шт. запчастин типу А ( $x_4 = 1700$ ). Лімітуючими факторами є виробничі потужності щодо виготовлення запчастин

типу Б ( $x_5 = 0$ ) та тижневий запас листового матеріалу ( $x_7 = 0$ ), котрі вичерпуються при такому плані виробництва повністю. До того ж, підприємство задовольняє мінімально необхідні потреби в готовій продукції для виконання ним своїх зобов'язань, і понад цей обсяг одержує запас готових виробів у 1300 шт. ( $x_8 = 1300$ ).

Якщо фірма матиме проблеми зі збутом продукції, то їй можна рекомендувати виявити можливості оволодіння виробництвом нових видів конкурентноздатної продукції, освоїти нові види діяльності тощо, і цим самим завантажити роботою наявні трудові ресурси та устаткування, що, як показує аналіз обмежувальних умов, на даний момент використовується не досить раціонально; або скоротити чисельність працюючих, здати в оренду або продати частину устаткування, що не задіяне у виробничому процесі, і цим самим скоротити витрати фірми.

Коли фірма налагодить реалізацію готової продукції, слід буде переглянути розмір і періодичність поставок листового матеріалу, а також, виходячи з фінансових можливостей фірми, вирішити питання збільшення виробничих потужностей для виготовлення запчастин типу Б, що є дорожчими в порівнянні з А (лізингове кредитування, придбання і т. п.). При цьому слід мати на увазі, що нарощування виробничих потужностей з виробництва запчастин типу Б на один виріб (див. стовпець, що відповідає змінній  $x_5$ , у останній симплекс-таблиці таблиці 6.1) призведе до скорочення на 0,6 шт. виробництва запчастин типу А (змінній  $x_1$  в стовпці  $x_5$  відповідає коефіцієнт „-0,6”) і збільшення на 1 шт. виробництва запчастин типу Б (змінній  $x_2$  у стовпці  $x_5$  відповідає коефіцієнт „1”); відповідно, обумовить зменшення завантаження обладнання з виробництва запчастин типу А на 0,6 шт. ( $x_4 = 0,6$ ); фактично протягом тижня вироблятиметься на 0,4 шт. запчастин більше (бо змінній  $x_8$  відповідає число „0,4” (перевірка:  $x_1 + x_2 = -0,6 + 1 = 0,4$ )); крім того, це потребуватиме додатково 1,4 людино-годин фонду робочого часу ( $x_3 = -1,4$ ; перевірка:  $x_1 + 2x_2 = -0,6 + 2 \cdot 1 = 1,4$ ) та 2,8 кг полімерного матеріалу ( $x_6 = -2,8$ ; перевірка:  $2x_1 + 4x_2 = 2 \cdot (-0,6) + 4 \cdot 1 = 2,8$ ) і не позначиться на використанні листового матеріалу ( $x_7 = 0$ ; перевірка:  $5x_1 + 3x_2 = 5 \cdot (-0,6) + 3 \cdot 1 = 0$ ). При цьому, як видно з контрольного рядка  $\Delta_3$  таблиці 6.1, виручка фірми збільшиться на 0,84 грош. од. (перевірка:  $1,1x_1 + 1,5x_2 = 1,1 \cdot (-0,6) + 1,5 \cdot 1 = 0,84$ ).

Збільшення тижневого запасу листового матеріалу на 1 кг дозволить виробляти запчастини типу А на 0,2 шт. більше і не відобразиться на обсягах виробництва запчастин типу Б (у стовпчику, що відповідає змінній  $x_7$  на останній ітерації таблиці 6.1 змінним  $x_1$  і  $x_2$  відповідають, відповідно коефіцієнти „0,2” і „0”). Очевидно, це позначиться на використанні виробничих

потужностей (див. коефіцієнти, що відповідають змінним  $x_4$  й  $x_5$ ) і на фактичному тижневому загальному обсязі виробництва (див. змінну  $x_8$ ; перевірка:  $x_1 + x_2 = 0,2 + 0 = 0,2$ ), а також потребуватиме додатково 0,2 людино-годин ( $x_3 = -0,2$ ; перевірка:  $x_1 + 2x_2 = 0,2 + 2 \cdot 0 = 0,2$ ) і 0,4 кг полімерного матеріалу ( $x_6 = -0,4$ ; перевірка:  $2x_1 + 4x_2 = 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0 = 0,4$ ); дохід фірми зросте на 0,22 грош. од. (перевірка:  $1,1x_1 + 1,5x_2 = 1,1 \cdot 0,2 + 1,5 \cdot 0 = 0,22$ ).

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

### Базова

1. Абрамов Л.М., Капустин В.Ф. Математическое программирование. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1976. – 184 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.
3. Ашманов С. А. Линейное программирование. – М.: Наука, 1981.
4. Балашевич В.А. Основы математического программирования. – Мн.: Выш. шк., 1985. – 173 с.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.
6. Богаенко І.М., Григорків В.С., Бойчук М.О., Рюмшин М.О. Математичне програмування. – К.: Логос, 1996. – 266 с.
7. Вдовин М.Л., Данилюк Л.Г. Математичне програмування: теорія та практикум. – Львів: Новий Світ, 2009. – 158 с.
8. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, 1969.
9. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщение и приложения. – М.: Прогресс, 1966.
10. Зангвилл У. Нелинейное программирование. Единый подход. – М.: „Советское радио”, 1973. – 312 с.
11. Івченко І.Ю. Математичне програмування. Навч. посіб.– К.: Центр учбової літератури, 2007. – 232 с. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [predator.stu/library/](http://predator.stu/library/) (у локальній мережі ЧДТУ)
12. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая шк., 1975.
13. Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1973.
14. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
15. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, 1970.
16. Крушевский А.В., Швецов К.И. Математическое программирование и моделирование в экономике. – К.: Вища шк., 1979. – 456 с.
17. Кузнецов А.В., Холод П.И. Математическое программирование. – Мн.: Выш. шк., 1984. – 221 с.
18. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1976. – 352 с.
19. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980. – 302 с.
20. Кучма М.І. Математичне програмування: приклади і задачі. – Львів: Новий світ–2000, 2006. – 342 с.
21. Кюнц Г. П., Крелле В. Нелинейное программирование. – М.: „Советское радио”, 1965. – 299 с.



22. Линейное и нелинейное программирование / Под ред. И.П.Ляшенко. – К.: Вища шк., 1975.– 372 с.
23. Мину М. Математическое программирование: Теория и алгоритмы. – М.: Наука, 1990. – 458 с.
24. Мирзоахмедов Ф. Математические модели и методы управления производством с учетом случайных факторов. – К.: Наукова думка, 1991. – 224 с.
25. Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.М. Методы выпуклой оптимизации. – М.: Наука, 1987.
26. Муртаф Б. Современное линейное программирование. Теория и практика. – М.: Мир, 1984.
27. Мухачева Э.А., Рубинштейн Г.Ш. Математическое программирование. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1977. – 320 с.
28. Мухачева Э.А., Рубинштейн Г.Ш. Математическое программирование. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1987. – 271 с.
29. Наконечний С.І., Гвоздецька Л.В. Збірник задач з курсу „Математичне програмування”. Частина 1.: Навч. посібник. – К.: ІСОД, 1996. – 128 с.
30. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.
31. Оптимізаційні методи і моделі: Практикум / В.Б. Антонів, М.В. Дацко. – Львів, Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2012. – 116 с.
32. Романюк Т.П., Терещенко Т.О., Присенко Г.В., Городкова І.М. Математичне програмування: Навч. посіб. – К.: ІЗМН, 1996. – 312 с.
33. Сакович В.А. Оптимальные решения экономических задач. – Мн.: Выш. шк., 1986. – 272 с.
34. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. К.: Наук. думка., 1985. – 384 с.
35. Степанюк В.В. Методи математичного програмування. – К.: Вища школа, 1997. – 272 с.

#### **Допоміжна**

1. Абчук В.А. Экономико–математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций. – СПб.: Союз, 1999. – 320 с.
2. Акофф Р., Сасиени М. Основы исследования операций.– М.: Мир, 1971.
3. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965.
4. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 368 с.
5. Берж К. Теория графов. – М.: Мир, 1968. – 168 с.
6. Боровик О.Л., Боровик Л.В. Дослідження операцій в економіці. – К., 2007.
7. Бусленко Н.Л., Коваленко И.Н., Калашников В.В. Лекции по теории сложных систем. – М.: „Советское радио”, 1973.
8. Бутинець Ф.Ф. та ін. Бухгалтерський управлінський облік. – Житомир: ЖІТІ, 2000. – 448 с.
9. Вагнер Г. Основы исследования операций. – М.: Статистика, 1976. – 231 с.

10. Вальтер Я. Стохастические модели в экономике. – М.: Статистика, 1976. – 231 с.
11. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: „Советское радио”, 1972. – 552 с.
12. Вентцель Е.С. Элементы динамического программирования. – М.: Наука, 1964.
13. Воронин В.Г. Математические методы планирования и управления в пищевой промышленности. – М.: Пищевая промышленность, 1977. – 320 с.
14. Голов С.Ф. Управлінський облік. – К.: Лібра, 2003. – 704 с.
15. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. – М.: „Советское радио”, 1966.
16. Даффин Р., Питерсон З., Зенер К. Геометрическое программирование. – М.: Мир, 1972.
17. Деордица Ю.С, Савченко В.Т. Компьютерные технологии в экономике и менеджменте. Учеб. пособие. – Луганск: ВУГУ, 1999.
18. Дерлоу Дес. Ключові управлінські рішення. Технологія прийняття рішень. – К.: Всеуито, Наукова думка. – 2001. – 242 с.
19. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. – М.: Наука, 1981. – 335 с.
20. Евланов Л.Г. Теория и практика принятия решений / Редкол.: Е.М.Сергеев и др. – М.: Экономика, 1984. – 176 с.
21. Електронні таблиці Excel. Методичні вказівки до лабораторних робіт із дисциплін „Інформатика і комп’ютерна техніка” і „Інформатика” для студентів економічних і механічних спеціальностей / Укл. Клименко Ю.М. – Чернігів: ЧДТУ. – 2004. – 55 с.
22. Ермольев Ю.М. и др. Математические методы исследования операций. – К.: Вища шк., 1979. – 312 с.
23. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976. – 234 с.
24. Ермольев Ю. М., Ястремский А. И. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. – М.: Наука, 1979. – 249 с.
25. Экономико–математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В.Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 391 с.
26. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: Підручник. – 4–те вид., перероб. і допов. – К., 2000. – 688 с.
27. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – К.: Вища шк., 1979. – 392 с.
28. Зайченко Ю.П. Исследование операций: нечеткая оптимизация. – К.: Вища школа, 1991. – 191 с.
29. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сборник задач. – К.: Вища школа. Изд–во при Киев. ун–те, 1984. – 224 с.
30. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: МГУ им. М.В.Ломоносова, Изд–во „Дело и Сервис”, 1999. – 368 с.
31. Испирян Г.П. и др. Математические методы и модели в планировании и управлении в лёгкой промышленности. – К.: Вища шк., 1978.– 280 с.

32. Исследование операций: В 2-х томах. Пер. с англ. / Под ред. Дж.Моудера, С.Элмаграби. – М.: Мир, 1981. – 677 с.
33. Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій. Навч. посіб. – К.: Центр навчальної літератури, 2007. – 256 с. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [predator.stu/library/](http://predator.stu/library/) (у локальній мережі ЧДТУ)
34. Карасев А.М., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И. Математические методы и модели в планировании. – М.: Экономика, 1987. – 240 с.
35. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1975. – 272 с.
36. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
37. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981.
38. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Учебн. пос. – М.: Высш. шк., 2008. – 480 с. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [predator.stu/library/](http://predator.stu/library/) (у локальній мережі ЧДТУ)
39. Кігель В.Р. Математичні методи ринкової економіки. Навч. посіб. – К.: Кондор, 2003. – 158 с.
40. Коффман А., Фор Р. Займемся исследованием операций. – М.: Мир, 1966.
41. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике. Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
42. Кулиш С.А., Валовельская С.Н., Рабинович И.А. Математические методы в планировании материально-технического снабжения. – К.: Вища школа, 1974. – 228 с.
43. Лабскер Л.Г., Бебешко Л.О. Теория массового обслуживания в экономической сфере. – М.: Банки и биржи, 1998. – 319 с.
44. Ланкастер К. Математическая экономика. – М.: „Советское радио”, 1976. – 464 с.
45. Ларионов А.И. и др. Экономико-математические методы в планировании. – М.: Высш. шк., 1991. – 240 с.
46. Лихтенштейн В.Е., Павлов В.И. Экономико-математическое моделирование. – М.: „Изд-во ПРИОР”, 2001. – 448 с.
47. Лігоненко Л.О. Сучасні інформаційні технології економічних досліджень. Навч. посіб. – К.: КНТЕУ, 2002.
48. Малик Г.С. Основы экономики и математические методы в планировании. – М.: Высш.шк., 1988. – 279 с.
49. Машина Н.І. Математичні методи в економіці. – К., 2003. – 148 с.
50. Мних Є.В. Економічний аналіз: Підручник. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 412 с.
51. Моделі і методи прийняття рішень в аналізі і аудиті / За ред. Ф.Ф.Бутинця, М.М.Шигун. – Житомир: МДТУ, 2004. – 352 с.
52. Наконечный С.И., Андрийчук В.Г. Математическое моделирование экономических процессов сельскохозяйственного производства. Учеб. пособие. – Киев: КИНХ, 1982. – 106 с.

53. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970.
54. Олексюк О.С., Мельничук В.Г., Штабалюк П.І. та ін. Методи і системи прийняття фінансових рішень. Підручник – Тернопіль: ДП ТВПК „Збруч”, 2001. – 360 с.
55. Пономаренко О.І., Пономаренко В.О. Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі. – К.: „Либідь”, 1995. – 240 с.
56. Поттосина С.А., Журавлев В.А. Экономико–математические модели и методы. Учебн. пос. – Мн.: БГУИР, 2003. – 94 с. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [predator.stu/library/](http://predator.stu/library/) (у локальній мережі ЧДТУ)
57. Прокопенко І.Ф. Комп’ютеризація економічного аналізу (теорія, практика). Навч. пос. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 340 с.
58. Рейлян Я.Ф. Аналитические основы принятия управленческих решений. – М.: Экономика, 1984. – 175 с.
59. Ременников В.Б. Разработка управленческого решения: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2000. – 140 с.
60. Салманов О.М. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel. – СПб., 2003.
61. Сакович В.А. Исследование операций (детерминированные методы и модели): Справочное пособие. – Мн.: Выш. шк., 1984. – 256 с.
62. Ситник В.Ф., Карагодова Е.А. Математические модели в планировании и управлениях предприятиями. – К.: Вища школа, 1985. – 214 с.
63. Солодовников А.С. и др. Математика в экономике. В 3–х част. – М.: Финансы и статистика, 1998.– 217 с.
64. Сорока К.О. Основи теорії систем і системного аналізу. Навч. посіб. – Харків: Тимченко А.М., 2005. – 228 с.
65. Справочник по оптимизационным задачам в АСУ/ В.А.Бункин, Д.Колев, Б.Я. Курицкий и др.– Л.: Машиностроение, 1984.– 212 с.
66. Сурмин Ю.П. Теория систем и системный анализ. Учеб. пос. – К.: МАУП, 2003. – 365 с.
67. Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: Мир, 1985. – Т. 1, 2.
68. Тынкевич М.А. Экономико–математические методы (исследование операций). Учебн. пос. – Кемерово: Кузбасс. гос. техн. ун–т, 2011. – 222 с. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [predator.stu/library/](http://predator.stu/library/) (у локальній мережі ЧДТУ)
69. Томас Ричард. Количественные методы анализа хозяйственной деятельности. Пер. с англ. – 1999. – 432 с.
70. Томашевський В.М. Моделювання систем. – К.: Видавнича група ВНУ, 2005. – 352 с.
71. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1981. – 258 с.
72. Ульяновченко О.В. Дослідження операцій в економіці. – Харків: ВКФ „Гриф”, 2006. – 580 с.
73. Федоренко Н.Б. Оптимизация экономики. – М.: Наука, 1977. – 287 с.
74. Федоренко І.К, Черняк О.І., Карагодова О.О. та ін. Дослідження операцій в

- економіці. – К.: Знання, 2006. – 720 с.
75. Федосеев В.В. Экономико–математические методы и модели в маркетинге. – М.: АО „Финстатинформ”, 1996. – 112 с.
  76. Филлипс Д., Гарсиа–Диас А. Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
  77. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 544 с.
  78. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. – М.: Мир, 1967.
  79. Шарапов О.Д., Дербенцев В. Д., Семьонов Д. Є. Системний аналіз. Навч.—метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2003. – 154 с.
  80. Швачич Г.Г. Лінійна алгебра в розрахунках середовища MATHCAD: Підручник. – Дніпропетровськ: ДАУБП, 2000.
  81. Ястремский А.И. Стохастические модели математической экономики. – К.: 1983.
  82. Ястремский А.И. О соотношениях двойственности в условиях оптимальности в линейных задачах стохастического программирования // Кибернетика. – 1987. – №1. – С. 102–107.
  83. Bartholomew D.I. Stochastic models for social processes. Ed.2. – N.Y.: J. Willey and Sons, 1973. – 473 p.
  84. Borys M. Software economics driven by requirements engineering / M. Borys // Актуал. пробл. економіки. – 2011. – №6. – С. 310–315.
  85. Contini V. A stochastic approach to goal programming // Oper. Res. – 1968. – V. 16. – № 3. – P. 576–586.
  86. Ermoliev Y., Gaivoronski A., Nedeva C. Stochastic optimization problems with inkomplete information on distribution functions // SIAM J. Control and Optimization. – 1985. – №23. – P. 697–716.
  87. Handbook of operations research / Edited by J. Moder and S. Elmaghraby. – N.Y.: Van Nostrand Reinhold Company, 1978.
  88. Nachane D.M. Optimization methods in multilevel systems: a methodological survey // Eur. J. Oper. Res. – 1985. – №1. – P. 25–38.
  89. Paksoy T. A multi–objective mixed integer programming model for multi echelon supply chain network design and optimization / T. Paksoy, E. Ozceylan, G.–W. Weber // Систем. дослідж. та інформ. технології . – 2010. – №4. – С. 47–57.
  90. Rackow P., Corcoran W. The analysis of academic retrenchment using parametric programming and Marcov chains // Comput. and Oper. Res. – 1984. – V. 11. – № 3. – P. 307–319.
  91. Zeynalov C.I. Mathematical modeling for optimal use of bounded area / C.I. Zeynalov, A.A. Niftiyev, H.C. Efendiyeva // Актуал. пробл. економіки . – 2011. – №2. – С. 261–269.

## ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

№ з/п	Режим доступу	Коментар
1	<a href="http://archive.nbu.gov.ua/portal/soc_gum/emmses/">http://archive.nbu.gov.ua/portal/soc_gum/emmses/</a>	Архів статей за 2007–2012 рр. у Національній бібліотеці ім. В.І.Вернадського та у Науковій
2	<a href="http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/10297">http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/10297</a>	електронній бібліотеці періодичних видань НАН України, відповідно, збірника наукових праці „Економіко–математичне моделювання соціально-економічних систем”
3	<a href="http://journal.iasa.kpi.ua/archiv">http://journal.iasa.kpi.ua/archiv</a>	Архів міжнародного журналу „Системні дослідження та інформаційні технології” (Інститут прикладного системного аналізу НАН України та Міністерства освіти і науки України)
4	<a href="http://www.problecon.com/main/">http://www.problecon.com/main/</a>	Міжнародний науковий рецензований журнал із відкритим доступом „The Problems of Economy” („Проблеми економіки”) (Науково-дослідний центр індустріальних проблем розвитку НАН України), представлений у міжнародних інформаційних та наукометричних базах; див. тематичний розділ „Математичні методи та моделі в економіці”
5	<a href="http://eco-science.net/Arhive.html">http://eco-science.net/Arhive.html</a>	Архів фахового економічного журналу „Актуальні проблеми економіки”, див. тематичний розділ „Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці”
6	<a href="http://archive.nbu.gov.ua/portal/soc_gum/Ek/index.html">http://archive.nbu.gov.ua/portal/soc_gum/Ek/index.html</a>	В архіві Національної бібліотеки ім. В.І.Вернадського (Наукова періодика України) статті з міжнародного наукового журналу „Экономическая кибернетика”, див. тематичний розділ „Методы исследования операций и теории систем”
7	<a href="http://www.economukraine.com.ua/index.php?id=13748&amp;show=50667">http://www.economukraine.com.ua/index.php?id=13748&amp;show=50667</a>	Всеукраїнський щомісячний науковий журнал „Економіка України”, див. розділ „Методи економіко–математичного моделювання”

## ЗМІСТ

Вступ.....	3
1 Тематичний зміст навчальної дисципліни.....	5
2 Розподіл обсягу дисципліни за темами.....	7
3 Засоби для проведення поточного та підсумкового контролю.....	8
4 Завдання для розрахункової (контрольної) роботи на тему „Оптимальне планування виробництва”.....	11
4.1 Постановка задачі оптимізації виробництва.....	11
4.2 Вказівки щодо вибору варіанту завдання, структура роботи та вимоги до оформлення.....	12
5 Рекомендації щодо формалізації поставленої задачі оптимального планування виробництва.....	14
6 Приклад вирішення задачі планування виробництва з оптимальним розподілом виробничих ресурсів.....	16
6.1 Текстова постановка задачі.....	16
6.2 Математична постановка задачі.....	16
6.3 Обґрунтування вибору методу розв’язання поставленої задачі.....	17
6.4 Розв’язання поставленої задачі методом „гілок і меж”.....	18
6.5 Рішення задачі з використанням MS Excel.....	26
6.6 Висновки і пропозиції підприємству.....	29
Рекомендована література.....	32
Інформаційні ресурси.....	38
Додаток А – Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам.....	40

## Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам

## Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$B\$8	Дохід фірми від продажу запчастин за тиждень, грош. од. фактичне	0	3880

## Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$B\$5	автозапчастин типу А фактичне	0	800
\$B\$6	автозапчастин типу Б фактичне	0	2000

## Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
\$B\$9	Витрати робочого часу на виробництво автозапчастин протягом тижня, людино-годин фактичне	4800	\$B\$9<=\$C\$9	не связан.	200
\$B\$11	полімерного матеріалу фактичне	9600	\$B\$11<=\$C\$11	не связан.	400
\$B\$12	листового металу фактичне	10000	\$B\$12<=\$C\$12	связанное	0
\$B\$7	разом А і Б фактичне	2800	\$B\$7>=\$D\$7	не связан.	1300
\$B\$5	автозапчастин типу А фактичне	800	\$B\$5<=\$C\$5	не связан.	1700
\$B\$6	автозапчастин типу Б фактичне	2000	\$B\$6<=\$C\$6	связанное	0
\$B\$5	автозапчастин типу А фактичне	800	\$B\$5>=0	не связан.	800
\$B\$6	автозапчастин типу Б фактичне	2000	\$B\$6>=0	не связан.	2000
\$B\$5	автозапчастин типу А фактичне	800	\$B\$5=целое	связанное	0
\$B\$6	автозапчастин типу Б фактичне	2000	\$B\$6=целое	связанное	0