

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи
студентів спеціальності 051 «Економіка» освітня програма
«Економічна кібернетика», «Економічна аналітика»

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри
інформаційних систем в економіці
Протокол №6
від 26 грудня 2017 р.

ЧЕРНІГІВ ЧНТУ 2018

Фінансова математика. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи студентів спеціальності 051 «Економіка» освітня програма «Економічна кібернетика», «Економічна аналітика» /Укл.: Юрченко М.Є. – Чернігів: ЧНТУ, 2018. – 71 с.

Укладач: Юрченко Марина Євгеніївна, кандидат фізико – математичних наук, доцент кафедри інформаційних систем в економіці ЧНТУ

Відповідальний за випуск: Акименко Андрій Миколайович, завідувач кафедри інформаційних систем в економіці ЧНТУ, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: Маргасова Вікторія Геннадіївна, д.е.н., професор кафедри бухгалтерського обліку, оподаткування та аудиту ННІ економіки Чернігівського національного технологічного університету

Зміст

Вступ.....	4
1. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ.....	4
2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ.....	5
Практичне завдання № 1. Фінансові розрахунки з використанням простих та складних відсотків	6
Практичне завдання № 2. Похідні відсоткові розрахунки.....	13
Практичне завдання № 3. Розрахунок еквівалентних параметрів фінансових операцій	19
Практичне завдання № 4. Розрахунок параметрів постійних фінансових рент .	26
Практичне завдання № 5. Конверсія фінансових рент. Змінювані ренти.....	32
Практичне завдання № 6. Планування погашення середньострокових і довгострокових кредитів	39
Практична завдання № 7. Розрахунок та аналіз показників ефективності фінансових операцій	47
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ	52
Рекомендована література	69

Вступ

Фінанси охоплюють усі стадії відтворювального процесу: виробництво, обмін, розподіл, споживання, а також можуть надавати регулюючу дію на всі його складові. Фінанси володіють потенційною властивістю направляти і регулювати економічні процеси, прискорюючи або уповільнюючи їх.

Сучасні ринкові умови потребують від суб'єктів господарювання вміння оцінювати всі можливі варіанти фінансових наслідків при здійсненні будь-якої комерційної операції та практично використовувати методи фінансово-економічного аналізу при здійсненні кредитних, інвестиційних та інших комерційних операцій. Математичний апарат сучасного фінансово-економічного аналізу складається з методів і моделей фінансової математики, які дозволяють описувати на кількісному та якісному рівнях явища й процеси фінансової сфери економічного життя суспільства.

Основна особливість фінансової математики полягає в тому, що будь-яким обчисленням передує якісний аналіз об'єкта, який полягає в перекладі властивостей об'єкта в числові показники, необхідні для здійснення розрахунків. Самі обчислення також тісно поєднуються з властивостями: розрахунки не мають сенсу, якщо вони не відповідають реальним процесам, які пов'язані з вкладанням коштів. Більш того, якісний аналіз необхідний і надалі, коли потрібно зіставити результати розрахунків і реальний стан об'єктів.

Фінансова математика є базовим компонентом технічного аналізу, який дозволяє виявляти і досліджувати взаємозв'язки між вартісними і часовими характеристиками фінансових операцій, на підставі чого вирішувати фінансові задачі різного типу, що стоять перед інвестором.

1. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Метою вивчення навчальної дисципліни "Фінансова математика" є формування системи знань з методології та практичного здійснення фінансових розрахунків і операцій та використання моделей фінансової математики.

Об'єктом вивчення навчальної дисципліни є процеси управління фінансовими операціями.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є сукупність методів розробки та реалізації фінансових рішень.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: дискретну і неперервну теорію простих і складних відсотків; номінальні та ефективні відсоткові ставки, дисконтування, номінальні та ефективні ставки дисконту, сучасну і майбутню вартість суми грошей; теорію фінансових рент; моделі потоку двосторонніх платежів і методи аналізу проектів капіталовкладень, а також методи обліку інфляції.

вміти: застосовувати набуті знання до розв'язування різноманітних задач фінансової діяльності установ і підприємств, застосовуючи сучасні комп'ютерні інформаційні технології.

При вивченні навчальної дисципліни необхідно звернути увагу на:

- ознайомлення студентів з основами математичного апарату, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних економічних задач;
- розвиток логічного мислення та підвищення загального рівня математичної культури;
- здобуття навичок дослідження прикладних питань та умінь перевести задачу на математичну мову;
- формування навичок самостійного вивчення навчальної літератури з теорії випадкових процесів;
- застосування отриманих знань до аналізу економічних процесів.

Зв'язок з іншими дисциплінами. Навчальна дисципліна «Фінансова математика» базується на циклі дисциплін професійної та практичної підготовки, зокрема «Математичний аналіз», «Теорія ймовірностей», «Математична статистика», «Економетрика».

Предметом вивчення навчальної дисципліни є формування системи знань про предмет, методологію та інструментарій цілісної концепції кількісного фінансового аналізу умов і результатів фінансово-кредитних і комерційних угод, пов'язаних з наданням грошей у борг.

2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Будь-який інвестиційний проект, фінансово-кредитна операція чи комерційна угода припускають наявність певних умов їхнього виконання. Обумовлюється обсяг грошових сум, платежів, час, термін виконання, відсоткові ставки і деякі інші додаткові величини. В межах однієї фінансової операції перераховані показники утворюють деяку взаємопов'язану систему. При зміні хоча б одного параметру в цій системі зміниться кінцевий результат операції. Такі системи є об'єктом дослідження кількісного фінансового аналізу. Перевірені практикою методи цього аналізу і становлять предмет фінансової математики (ФМ).

Кількісний фінансовий аналіз нині розвивається як наука. На це вказує те, що кілька останніх Нобелівських премій з економіки присуджені за роботи саме в цьому напрямку. Кількісний фінансовий аналіз застосовується як в умовах визначеності, так і невизначеності. У першому випадку передбачається, що дані для аналізу заздалегідь відомі і фіксовані. Наприклад, при випуску звичайних облігацій однозначно визначаються всі параметри: термін, купонна прибутковість, порядок викупу. Аналіз помітно ускладнюється, коли доводиться враховувати невизначеність – динаміку грошового ринку (рівень відсоткової ставки, коливання валютного курсу і т. д.), поведінку контрагента.

ФМ вивчає як елементарні нарахування відсотків, так і відносно складні розрахунки, наприклад, оцінювання впливу різних чинників на ефективність випуску облігацій чи методів скорочення ризику шляхом диверсифікації портфеля фінансових інвестицій і т. д.

Основні завдання ФМ такі:

- розробка планів виконання фінансових операцій;
- визначення кінцевих результатів фінансових операцій для всіх учасників;
- вимірювання залежності кінцевих результатів операції від основних її параметрів та маневрування цими параметрами для розрахунку еквівалентної зміни початкових умов операції;
- оптимізація портфеля активів.

Цей перелік не є вичерпним. У сучасній практиці виникають нові завдання. Методи ФМ використовуються в будь-якій сфері фінансів і кредиту. В тому числі і на етапі розробки умов контрактів, при фінансовому проектуванні, при порівнянні і виборі довготермінових інвестиційних проектів. Фінансові обчислення використовуються для розрахунків у довготерміновому особистому страхуванні, наприклад, при проектуванні й аналізі стану пенсійних фондів (розрахунок тарифів, оцінювання спроможності фондів виконати свої зобов'язання перед пенсіонерами і т. д.), довготерміновому медичному страхуванні. Причому сфера застосування методів кількісного аналізу фінансових операцій поступово розширюється.

Навчальні цілі заняття: Знати загальні положення та визначення «Фінансової математики», методи розв'язування задач, а також здійснювати оцінку вартості грошей у часі з використанням схеми простих та складних відсотків, здійснювати аналіз та давати оцінку потоків платежів.

Практичне завдання № 1. Фінансові розрахунки з використанням простих та складних відсотків

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навичок нарахування простих і складних відсотків.

Початкові дані. Депозитний внесок у сумі 1 тис. грн розміщений в банку на 10 років під 10 % річних.

Необхідно

1. Розрахувати майбутню вартість внеску при нарахуванні простих відсотків один раз на рік, складних відсотків один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

2. Розрахувати майбутню вартість внеску при нарахуванні простих і складних відсотків, якщо передбачена зміна відсоткової ставки: перші п'ять років – 10 %, кожен подальший рік ставка підвищується на 0,5 %.

3. Розрахувати майбутню вартість внеску при нарахуванні простих і складних відсотків з урахуванням щорічного рівня інфляції 7 % і 15 %.

Методичні рекомендації

1. Постійні ставки. Під нарощеною сумою позики (депозиту, інших видів виданих у борг або інвестованих грошей) розуміють первинну її суму з нарахованими відсотками до кінця терміну нарахування. Нарощена сума визначається множенням первинної суми на *множник нарощування*, який показує, в скільки разів нарощена сума більше первинної. Розрахункова формула залежить від виду відсоткової ставки і умов нарощування.

До нарощування за простими відсотками зазвичай вдаються при видачі короткострокових позик (на строк до 1 року) або у випадках, коли відсотки не приєднуються до суми боргу, а періодично виплачуються.

Для запису формул нарощування простих та складних відсотків приймемо позначення:

S – нарощена сума, тобто сума в кінці терміну (майбутня вартість внеску);

P – первинна сума внеску;

I – відсотки за весь термін вкладу;

i – відсоткова ставка, ставка нарощування відсотків (десятковий дріб); n – термін вкладу.

Якщо термін вимірюється в роках (як це звичайно і буває), то i означає річну відсоткову ставку. Відповідно, у випадку простих відсотків кожен рік приносить відсотки в сумі $P \cdot i$. Нараховані за весь термін відсотки складуть $I = Pni$.

При нарахуванні простих відсотків один раз на рік майбутня вартість внеску на кінець n -го року визначається за формулою:

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni) \quad (1)$$

Вираз (1) називають – *формулою простих відсотків*, а множник $(1 + ni)$ – *множником нарощування простих відсотків*.

Якщо $P = 1000$, $i = 0,1$, $n = 10$, то майбутня вартість внеску через 10 років складе:

$$S = 1000 \cdot 1 + 10 \cdot 0,1 = 2000 \text{ (грн)}$$

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості покроково (один крок – один рік) представлені у табл. 1.

Таблиця 1.

Розрахунки при нарахуванні простих відсотків один раз на рік

Рік	Стан рахунку На початок року, грн	Відсотки, накопичені Протягом року, грн	Усього на рахунку В кінці року, грн
1	1000	100	1100
2	1100	100	1200
3	1200	100	1300
4	1300	100	1400
5	1400	100	1500
6	1500	100	1600
7	1600	100	1700
8	1700	100	1800
9	1800	100	1900
10	1900	100	2000

У середньо- і довгострокових фінансово-кредитних операціях, якщо відсотки не виплачуються відразу після їх нарахування, а приєднуються до суми боргу, застосовують *складні відсотки*. База для нарахування складних відсотків на відміну від простих не залишається постійною – вона збільшується з кожним кроком в часі. Абсолютна сума відсотків, що нараховуються, зростає, і процес збільшення суми боргу відбувається з прискоренням. Нарощування за складними відсотками можна представити як послідовне реінвестування коштів, вкладених під прості відсотки на один період нарахування. Приєднання нарахованих відсотків до суми, яка послужила базою для їх нарахування, часто називають *капіталізацією відсотків*. При нарахуванні складних відсотків один раз на рік майбутня вартість внеску на кінець n -го року визначається за формулою:

$$S = P (1 + i)^n \quad (2)$$

Якщо $P = 1000$, $i = 0,1$, $n = 10$, то майбутня вартість внеску через 10 років складе:

$$S = 1000 (1 + 0,1)^{10} = 2539,74 \text{ (грн)}$$

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості покроково (один крок – один рік) представлені у табл. 2.

Таблиця 2.

Розрахунки при нарахуванні складних відсотків один раз на рік

Рік	Стан рахунку На початок року, грн	Відсотки, накопичені Протягом року, грн	Усього на рахунку В кінці року, грн
1	1000,00	100,00	1100,00
2	1100,00	110,00	1210,00
3	1210,00	121,00	1331,00

4	1331,00	133,10	1464,10
5	1464,10	146,41	1610,51
6	1610,51	161,05	1771,56
7	1771,56	177,16	1948,72
8	1948,72	194,87	2143,59
9	2143,59	214,36	2357,95
10	2357,95	235,79	2593,74

Розглянемо проблему нарощування відсотків m раз на рік. У сучасних умовах відсотки капіталізуються, як правило, не один, а кілька разів на рік – за півріччями, кварталами і так далі. Деякі зарубіжні комерційні банки практикують навіть щоденне нараховування відсотків. При нарахованні відсотків кілька разів на рік можна скористатися формулою (2). Параметр n в цих умовах означатиме число періодів нараховування, а під ставкою i слід розуміти ставку за відповідний період.

Отже, нехай річна ставка рівна j , число періодів нараховування в році – m . Кожного разу відсотки нараховуються за ставкою j/m . Ставку j/m називають номінальною. Формулу нарощування тепер можна представити таким чином:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} \quad (3)$$

Якщо відсотки нараховуються щоквартально, то $j = 0,1$, $n = 10$, $m = 4$, а майбутня вартість внеску через 10 років складе:

$$S = 1000 \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{10 \cdot 4} = 2685,06 \text{ (грн)}$$

Якщо відсотки нараховуються щомісячно, то $m = 12$, а майбутня вартість внеску через 10 років складе:

$$S = 1000 \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{10 \cdot 12} = 2707,04 \text{ (грн)}$$

2. Змінні ставки. У кредитних угодах іноді передбачаються відсоткові ставки, що змінюються в часі. Якщо це прості ставки, то нарощена на кінець терміну сума визначається таким чином:

$$S = P \left(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \dots + m i_m\right) = P \left(1 + \sum_{t=1}^m n_t i_t\right)$$

де i_t – ставка простих відсотків у періоді t , n_t – тривалість періоду з постійною ставкою.

Якщо передбачена зміна відсоткової ставки: перші п'ять років – 10 %, кожен подальший рік ставка підвищується на 0,5 %, то майбутня вартість внеску через 10 років при нараховування простих відсотків складе:

$$S = 1000 \cdot 1 + 5 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,105 + 1 \cdot 0,11 + 1 \cdot 0,115 + 1 \cdot 0,12 + 1 \cdot 1,025 = 2075 \text{ (грн.)}$$

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості покроково представлені у табл. 3.

Таблиця 3.

Розрахунки при нараховуванні простих відсотків зі змінною ставкою

Рік	Ставка відсотків	Стан рахунку На початок року, грн	Відсотки, накопичені Протягом року, грн	Усього на рахунку В кінці року, грн
1	0,1	1000,00	100,00	1100,00
2	0,1	1100,00	100,00	1200,00
3	0,1	1200,00	100,00	1300,00
4	0,1	1300,00	100,00	1400,00
5	0,1	1400,00	100,00	1500,00
6	0,105	1500,00	105,00	1605,00
7	0,11	1605,00	110,00	1715,00
8	0,115	1715,00	115,00	1830,00
9	0,12	1830,00	120,00	1950,00
10	0,125	1950,00	125,00	2075,00

Майбутню вартість внеску при нараховуванні складних відсотків, якщо передбачена зміна ставки відсотків, визначають так:

$$S = P \cdot \prod_{i=1}^m (1 + i_t)^{n_t}$$

Якщо передбачена зміна відсоткової ставки, то майбутня вартість внеску через 10 років при нараховуванні складних відсотків складе:

$$S = 1000 \cdot 1 + 0,1^5 \cdot 1 + 0,105^1 \cdot 1 + 0,11^1 \cdot 1 + 0,115^1 \cdot 1 + 0,12^1 \cdot 1 + 0,125^1 = 2775,2 \text{ (грн)}$$

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості покроково представлені у табл. 4.

Таблиця 4.

Розрахунки при нараховуванні складних відсотків зі змінною ставкою

Рік	Ставка відсотків	Стан рахунку На початок року, грн	Відсотки, накопичені Протягом року, грн	Усього на рахунку В кінці року, грн
1	0,1	1000,00	100,00	1100,00

2	0,1	1100,00	110,00	1210,00
3	0,1	1210,00	121,00	1331,00
4	0,1	1331,00	133,10	1464,10
5	0,1	1464,10	146,41	1610,51
6	0,105	1610,51	169,10	1779,61
7	0,11	1779,61	195,76	1975,37
8	0,115	1975,37	227,17	2202,54
9	0,12	2202,54	264,30	2466,84
10	0,125	2466,84	308,36	2775,20

3. Урахування інфляції. У розглянутих формулах нарощування всі грошові величини вимірювалися за номіналом. Інакше кажучи, не бралось до уваги зниження реальної купівельної спроможності грошей за період, що охоплюється операцією. Проте в сучасних умовах інфляція в грошових відносинах відіграє помітну роль при вимірюванні реальної прибутковості фінансової операції.

Введемо позначення:

S – нарощена сума грошей номінальна;

C – нарощена сума з урахуванням її знецінення внаслідок інфляції;

J_p – індекс цін. Очевидно, що $C = S/J_p$.

Індекс купівельної спроможності грошей, як відомо, рівний зворотній величині індексу цін – чим вище ціни, тим нижче купівельна спроможність. Неважко пов'язати індекс цін і темп інфляції. Під *темпом інфляції* h розуміється *відносний приріст цін за період*; зазвичай він вимірюється у відсотках і визначається як:

$$h = 100 \cdot J_p - 1$$

У свою чергу:

$$J_p = 1 + \frac{h}{100}$$

Інфляція є ланцюговим процесом. Отже, індекс цін за декілька періодів рівний *добутку* ланцюгових індексів цін:

$$J_p = \prod_{t=1}^n \left(1 + \frac{h_t}{100} \right)$$

де h_t – темп інфляції в періоді t .

Якщо h – постійний очікуваний (або прогнозований) темп інфляції за один період, то за n таких періодів отримаємо:

$$J_p = 1 + \frac{h}{100}^n$$

Якщо нарощування проводиться за простою ставкою, то нарощена сума з урахуванням інфляції дорівнює:

$$C = \frac{S}{J_p} = P \cdot \frac{(1 + ni)}{1 + \frac{h}{100}^n}$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 7 %, а номінальна нарощена сума за простими відсотками відома з попередніх розрахунків, то можна визначити нарощену суму з урахуванням її знецінення за формулою:

$$C = \frac{S}{1 + \frac{h}{100}^n} = \frac{2000}{1 + \frac{7}{100}^{10}} \approx 1016,70 \text{ (грн)}$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 15 %, то:

$$C = \frac{2000}{1 + \frac{15}{100}^{10}} \approx 494,37 \text{ (грн)}$$

Нарощена сума з урахуванням інфляції за складними відсотками розраховується за формулою:

$$C = \frac{S}{J_p} = P \cdot \frac{1 + i^n}{1 + \frac{h}{100}^n} = P \cdot \frac{1 + i^n}{1 + \frac{h}{100}^n}$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 7 %, а номінальна нарощена сума за складними відсотками відома з попередніх розрахунків, то можна визначити нарощену суму з урахуванням її знецінення за формулою:

$$C = \frac{2593,74}{1 + \frac{7}{100}^{10}} \approx 1318,53 \text{ (грн)}$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 15 %, то:

$$C = \frac{2593,74}{1 + \frac{15}{100}^{10}} \approx 641,13 \text{ (грн)}$$

Практичне завдання № 2. Похідні відсоткові розрахунки

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навичок проведення похідних відсоткових розрахунків.

Початкові дані. Депозит на суму 20 000 грн був відкритий 10 грудня 2016 року по 20 березня 2017 року включно під 15 % річних.

Необхідно

1. Визначити нарощену величину депозиту при нарахуванні простих відсотків трьома способами: 365/365, 365/360, 360/360 в цілому за період та в кожному календарному році окремо.
2. Розрахувати суму нарахованих простих відсотків (365/365, 365/360), якщо 1 січня депозит поповнився на первинну суму.
3. Провести дисконтування і розрахувати первинну суму, якщо в початкових даних указана сума погашення і проста дисконтна ставка (365/365, 365/360).
4. Визначити нарощену величину депозиту при нарахуванні складних відсотків (365/365) в цілому за період та в кожному календарному році окремо.
5. Розрахувати ефективну відсоткову ставку для 360 і 365 днів.
6. Провести дисконтування і розрахувати первинну суму, якщо в початкових даних вказана сума погашення і складна дисконтна ставка.

Методичні рекомендації

1. Прості відсотки. Оскільки відсоткова ставка, як правило, встановлюється в розрахунку за рік, то при терміні позики менше року необхідно визначити, яка частина річного відсотка сплачується кредитором. Аналогічна проблема виникає і у випадках, коли термін позики менше періоду нарахування.

Розглянемо найбільш поширений в практиці випадок – з річними періодами нарахування. Очевидно, що термін позики необов'язково рівний цілому числу років. Виразимо термін n у вигляді дроби

$$n = \frac{t}{K}$$

де t – число днів позики; K – число днів у році, або *часова база нарахування відсотків*.

У цьому випадку формула (1) набуде вигляду:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{t}{K} i \right)$$

При розрахунку відсотків застосовують дві часові бази: $K = 360$ днів (12 місяців по 30 днів) або $K = 365$ (366) днів. Якщо $K = 360$, то отримують *звичайні або комерційні відсотки*, а при використанні дійсної тривалості року (365, 366 днів) розраховують *точні відсотки*.

Число днів позики також можна зміряти приблизно і точно. У першому випадку тривалість позики визначається з умови, згідно з якою будь-який місяць приймається рівним 30 дням. У свою чергу, точне число днів позики визначається шляхом підрахунку числа днів між датою видачі позики і датою її погашення. День видачі і день погашення вважаються за один день. Отже, можливі і застосовуються на практиці три варіанти розрахунку простих відсотків.

1. *Точні відсотки з точним числом днів позики.* Цей варіант, природно, дає найточніші результати. Цей спосіб застосовується центральними банками багатьох країн і крупними комерційними банками, наприклад, у Великобританії, США. У комерційних документах він позначається як 365/365 або АСТ/АСТ.

2. *Звичайні відсотки з точним числом днів позики.* Цей метод, який іноді називають банківським, поширений в позикових операціях комерційних банків між країнами, у внутрішніх операціях – у Франції, Бельгії, Швейцарії. Він позначається, як 365/360 або АСТ/360. Цей варіант дає дещо більший результат, ніж застосування точних відсотків. Зазначимо, що при числі днів позики, що перевищує 360, цей спосіб приводить до того, що сума нарахованих відсотків буде більша, ніж передбачається річною ставкою.

3. *Звичайні відсотки з наближеним числом днів позики.* Такий метод застосовується тоді, коли не вимагається великої точності, наприклад, при проміжних розрахунках. Він прийнятий в практиці комерційних банків Німеччини, Швеції, Данії. Метод умовно позначається як 360/360.

Визначимо спочатку термін позики, беручи до уваги, що день відкриття і день закриття депозиту рахують за один день. Таким чином, точне число днів позики з 10 грудня 2016 року по 20 березня 2017 року складе $t = 22 + 31 + 29 + 20 - 1 = 101$ день. *Наближене число днів* складе $t = 21 + 30 + 30 + 20 - 1 = 100$ днів.

Відповідно початковим даним $P = 20000$, $i = 0,15$. Розрахунки майбутньої вартості внеску при нарахуванні простих відсотків за різними варіантами наведені у табл. 5.

Якщо загальний термін позики охоплює два суміжні календарні роки і є необхідність у діленні суми відсотків між ними (наприклад, при визначенні річних сум доходу), то загальна сума нарахованих простих відсотків складе суму відсотків, отриманих у кожному році:

$$I = I_1 + I_2 = Pn_1i + Pn_2i$$

де n_1 і n_2 – частини терміну позики, що доводяться на кожен календарний рік.

Таблиця 5.

Розрахунки наращеної суми депозиту при нарахуванні простих відсотків

Варіант розрахунку	Формула розрахунку	Всього на рахунку в кінці терміну, грн
365/365	$S = 20000 \left(1 + \frac{101}{365} \cdot 0,15 \right)$	20830,14
365/360	$S = 20000 \left(1 + \frac{101}{360} \cdot 0,15 \right)$	20841,67
360/360	$S = 20000 \left(1 + \frac{100}{360} \cdot 0,15 \right)$	20833,33

При варіанті розрахунку 365/365 відсотки складуть:

$$I_1 = 20000 \frac{22 - 0,5}{365} \cdot 0,15 = 176,71 \text{ (грн)}$$

$$I_2 = 20000 \frac{80 - 0,5}{365} \cdot 0,15 = 653,42 \text{ (грн)}$$

$$I = I_1 + I_2 = 176,71 + 653,42 = 830,14 \text{ (грн)}$$

При варіанті розрахунку 365/360 відсотки складуть:

$$I_1 = 20000 \frac{22 - 0,5}{360} \cdot 0,15 = 179,17 \text{ (грн)}$$

$$I_2 = 20000 \frac{80 - 0,5}{360} \cdot 0,15 = 662,50 \text{ (грн)}$$

$$I = I_1 + I_2 = 179,17 + 662,50 = 841,67 \text{ (грн)}$$

При варіанті розрахунку 360/360 відсотки складуть:

$$I_1 = 20000 \frac{21 - 0,5}{360} \cdot 0,15 = 170,83 \text{ (грн)}$$

$$I_2 = 20000 \frac{22 - 0,5}{360} \cdot 0,15 = 662,50 \text{ (грн)}$$

$$I = I_1 + I_2 = 170,83 + 662,50 = 833,33 \text{ (грн)}$$

2. Поповнення депозиту. Якщо 1 січня депозит поповнився на первинну суму, то зміни у сумі нарахованих відсотків відбудуться тільки у другому календарному році. При варіанті розрахунку 365/365 відсотки складуть:

$$I_2 = 20000 \frac{80 - 0,5}{365} \cdot 0,15 = 1306,85 \text{ (грн)}$$

$$I = I_1 + I_2 = 176,71 + 1306,85 = 1483,56 \text{ (грн)}$$

При варіанті розрахунку 365/360 відсотки складуть:

$$I_2 = 20000 \frac{80 - 0,5}{360} \cdot 0,15 = 1325,00 \text{ (грн)}$$

$$I = I_1 + I_2 = 179,17 + 1325,00 = 1504,17 \text{ (грн)}$$

3. Дисконтування за простою дисконтною ставкою. Суть операції полягає в такому: відсотки нараховуються на початку розрахункового періоду, при цьому за базу (100 %) береться сума погашення боргу, тобто банк утримує авансові відсотки при видачі кредиту (або відсотки по депозиту виплачуються в момент відкриття депозитного рахунку). При цьому застосовується облікова ставка d (це банківський облік).

Розмір дисконту, або суми обліку, очевидно рівний $S \cdot n \cdot d$; якщо d – річна облікова ставка, то n вимірюється в роках. Тоді:

$$P = S - Snd = S(1 - nd)$$

Дисконтний множник у цьому випадку дорівнює $1 - nd$. З формули (4) випливає, що при $n > 1/d$ величина дисконтного множника і, отже, суми P стане від'ємною. Інакше кажучи, при відносно великому терміні зобов'язання облік може призвести до нульової або навіть від'ємної суми P . Наприклад, при $d = 20\%$ вже п'ятирічний термін достатній для того, щоб позичальник нічого не отримав при обліку зобов'язання.

Облік за допомогою облікової ставки найчастіше здійснюється при часовій базі $K = 360$ днів, число днів позики зазвичай береться точним. Якщо вважати, що в початкових даних вказана сума погашення і проста дисконтна ставка, то розрахувати первинну суму можна у такий спосіб.

При варіанті розрахунку 365/365 первинна сума становить:

$$P = S \left(1 - \frac{t}{K} d \right) = 20000 \left(1 - \frac{101}{365} 0,15 \right) = 19169,86 \text{ (грн)}$$

При варіанті розрахунку 365/360 первинна сума становить:

$$P = 20000 \left(1 - \frac{101}{360} 0,15 \right) = 19158,33 \text{ (грн)}$$

4. Складні відсотки. У випадку визначення нарощеної величини депозиту при нарахуванні складних відсотків у цілому за період, менший одного року, формула (2) набуде вигляду:

$$S = P \left(1 + \frac{i}{K} \right)^t$$

Відповідно початковим даними $P = 20000$, $i = 0,15$, варіант розрахунку прийнятий 365/365. Тоді майбутня вартість внеску складе:

$$S = 20000 \left(1 + \frac{0,15}{365} \right)^{101} = 20847,43 \text{ (грн)}$$

Відсотки за кожним з періодів визначаються за формулами:

$$I_1 = P \left(1 + \frac{i}{K} \right)^{t_1} - P$$

$$I_2 = P \left(1 + \frac{i}{K} \right)^t - P \left(1 + \frac{i}{K} \right)^{t_1}$$

де t_1 – кількість днів вкладу в першому календарному році.

Відсотки за кожним з періодів для варіанта 365/365 і нарощена сума складають:

$$I_1 = 20000 \left(1 + \frac{0,15}{365} \right)^{22-0,5} - 20000 = 177,46 \text{ грн ,}$$

$$I_2 = 20000 \left(1 + \frac{0,15}{365} \right)^{101} - 20000 \left(1 + \frac{0,15}{365} \right)^{22-0,5} = 669,97 \text{ (грн)}$$

5. Ефективна відсоткова ставка. Дійсна або ефективна ставка відсотка вимірює той реальний відносний дохід, який отримують в цілому за рік. Інакше кажучи, ефективна ставка – це річна ставка складних відсотків, яка дає той же результат, що і m -разове нарахування відсотків по ставці j/m . Позначимо ефективну ставку через i . За визначенням множники нарощування за двома ставками (ефективною і номінальною при m -разовому нарахуванні) повинні дорівнювати один одному:

$$1 + i^n = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{nm}$$

З рівності множників нарощування виходить:

$$i = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{n}} - 1$$

Ефективна ставка при $m > 1$ більше номінальної. Обидві ставки еквівалентні у фінансовому відношенні.

За умови нарахування відсотків протягом 365 і 360 днів ефективні ставки складуть:

$$i = 1 + \frac{0,15}{365}^{365} - 1 = 0,1618$$

$$i = 1 + \frac{0,15}{360}^{360} - 1 = 0,1618$$

Як бачимо, ефективні ставки рівні для обох варіантів нарахування і перевищують номінальну ставку.

6. Дисконтування за складною дисконтною ставкою. У практиці облікових операцій іноді застосовують *складну облікову ставку*. У цих випадках процес дисконтування відбувається з уповільненням, оскільки кожного разу облікова ставка застосовується не до первинної суми (як при простій обліковій ставці), а до суми, дисконтованої на попередньому кроці в часі. Дисконтування за складною обліковою ставкою здійснюється за формулою:

$$P = S \left(1 - d \right)^n$$

де d – складна річна облікова ставка. Дисконтування може проводитися не один, а m разів на рік, тобто кожного разу облік проводиться за ставкою f/m . У цьому випадку:

$$P = S \left(1 - \frac{f}{m} \right)^{nm},$$

де f – номінальна річна облікова ставка.

Якщо вважати, що в початкових даних вказана сума погашення і складна дисконтна ставка, то розрахувати первинну суму за умови дисконтування один раз на рік ($K = 365$) можна так:

$$P = S \left(1 - d \right)^{\frac{t}{K}} = 20000 \left(1 - 0,15 \frac{101}{365} \right) = 19120,50 \text{ (грн)}$$

За умови щоденного дисконтування:

$$P = S \left(1 - \frac{f}{K} \right)^t = 20000 \left(1 - \frac{0,15}{365} \right)^{101} = 19186,69 \text{ (грн)}$$

Практичне завдання № 3. Розрахунок еквівалентних параметрів фінансових операцій

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навичок розрахунку еквівалентних параметрів фінансових операцій.

Частина 1. Початкові дані. Депозитний внесок величиною 10 тис. грн розміщений в банк на 6 років під 10 % річних.

Необхідно

1. Розрахувати майбутню вартість внеску при нарахуванні простих відсотків один раз на рік, визначити еквівалентну облікову ставку.

2. Визначити еквівалентну складну ставку, якщо складні відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

3. Розрахувати майбутню вартість внеску при нарахуванні простих відсотків за умови, що депозит відкритий з 1 лютого 2013 року по 15 травня включно (365/365), визначити еквівалентну облікову ставку для $K=360, 365$.

4. Розрахувати середню відсоткову ставку для простих відсотків, якщо був відкритий депозит на таку ж суму через рік під 15 % річних з однаковим терміном погашення, а також, якщо був відкритий депозит на суму 5 тис. грн через 2 роки під 15 % річних з однаковим терміном погашення.

5. Розрахувати середню ставку складних відсотків, якщо перші 2 роки ставка 10 %, а кожен наступний рік підвищується на 1 %.

Частина 2. Початкові дані. Філія комерційного банку видала протягом року п'ять позик двом фірмам 1 та 2. Дані наведені в табл. 6.

Таблиця 6.

Вихідні дані

Квартал	Розмір позики, тис. грн	Термін позики, місяців
<i>Фірма 1</i>		
I	250	6
II	200	8
IV	500	3
<i>Фірма 2</i>		
II	600	2
III	450	4

Необхідно

1. Визначити середній розмір позики, отриманої кожною фірмою і всіх позик, виданих банком.

2. Середній термін користування позиками (за умови їх безперервної оборотності).

3. Середнє число оборотів позики за рік.

4. Розмір консолідованого платежу для кожної фірми, за умови, що нараховуються прості відсотки по ставці 10 % річних, термін погашення консолідованого платежу – 12 міс.

Методичні рекомендації

Частина 1

1. Еквівалентні прості ставки. Відсоткові і облікові ставки вирішують одні і ті ж завдання: визначають ступінь прибутковості при операції нарощування або розміри дисконтованих сум при облікових операціях. У зв'язку з цим можливий вибір таких відсоткових або облікових ставок, при використанні яких фінансові наслідки виявляться рівноцінними. Ставки, що забезпечують рівноцінність фінансових наслідків, називаються еквівалентними, або релятивними (відносними). Рівноцінність фінансових наслідків може бути забезпечена в тому випадку, якщо спостерігається рівність множників нарощування або дисконтних множників.

Еквівалентність простої ставки відсотків і облікової ставки виражається формулами:

$$i = \frac{d}{1 - nd}; \quad d = \frac{i}{1 + ni}$$

Визначимо спочатку майбутню вартість внеску при нарахуванні простих відсотків один раз на рік, якщо $P = 10000$, $n = 6$, $i = 0,1$:

$$S = 10000 \cdot 1 + 6 \cdot 0,1 = 16000 \text{ (грн)}$$

Еквівалентна проста облікова ставка складе:

$$d = \frac{0,1}{1 + 6 \cdot 0,1} = 0,0625$$

Визначимо майбутню вартість внеску через облікову ставку:

$$S = P \frac{1}{1 - nd} = 10000 \frac{1}{1 - 6 \cdot 0,0625} = 16000 \text{ (грн)}$$

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

2. Еквівалентні складні ставки. Еквівалентність простих і складних відсоткових ставок при нарахуванні відсотків один раз на рік визначається за формулами:

$$i_{\Pi} = \frac{1 + i_C^n - 1}{n}; \quad i_C = 1 + ni_{\Pi}^{\frac{1}{n}} - 1$$

Визначимо еквівалентну складну відсоткову ставку:

$$i_C = 1 + 6 \cdot 0,1^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0,08148$$

Еквівалентність простої відсоткової ставки i і складної ставки j при нарахуванні відсотків m раз на рік визначається за формулами:

$$i_{\Pi} = \frac{1 + \frac{j}{m}^{nm} - 1}{n}; \quad j = m(1 + ni_{\Pi}^{\frac{1}{nm}} - 1)$$

Визначимо еквівалентну складну відсоткову ставку за умови, що відсотки нараховуються щокварталу і щомісяця:

$$j = 4(1 + 6 \cdot 0,1^{\frac{1}{6 \cdot 4}} - 1) \approx 0,07911$$

$$j = 12(1 + 6 \cdot 0,1^{\frac{1}{6 \cdot 12}} - 1) \approx 0,07859$$

3. Еквівалентні ставки для короткострокових операцій. Визначимо майбутню вартість внеску при нарахуванні простих відсотків за умови, що депозит відкритий з 1 лютого 2017 року по 15 травня включно (365/365):

$$S = 10000 \left(1 + \frac{103}{365} \cdot 0,1\right) \approx 10282,19 \text{ (грн)}$$

Визначимо еквівалентні прості облікові ставки для $K = 365$, $K = 360$, за умови, що нарахування відсотків проводиться при $K = 365$, тобто для двох варіантів: коли часові бази дорівнюють одна одній і коли вони різні:

$$d_{\Pi} = \frac{365 \cdot i_{\Pi}}{365 + t \cdot i_{\Pi}} = \frac{365 \cdot 0,1}{365 + 103 \cdot 0,1} = 0,09726$$

$$d_{\Pi} = \frac{360 \cdot i_{\Pi}}{365 + t \cdot i_{\Pi}} = \frac{360 \cdot 0,1}{365 + 103 \cdot 0,1} = 0,09592$$

Визначимо майбутню вартість внеску через розраховані прості облікові ставки:

$$S = P \frac{1}{1 - \frac{t}{365} d} = 10000 \frac{1}{1 - \frac{103}{365} \cdot 0,09726} \approx 10282,19 \text{ (грн)}$$

$$S = P \frac{1}{1 - \frac{t}{360} d} = 10000 \frac{1}{1 - \frac{103}{360} \cdot 0,09592} \approx 10282,19 \text{ (грн)}$$

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

4. Середні прості відсоткові ставки. Розглядаючи принцип еквівалентності відсоткових ставок, необхідно звернути увагу на розрахунок їх середніх значень, оскільки для декількох відсоткових ставок їх середнє значення є еквівалентною величиною. У випадку, якщо суми отриманих кредитів рівні між собою, то середня відсоткова ставка (відсотки прості) розраховується за формулою середньої арифметичної зваженої, де вагами служать часові періоди, протягом яких діяла ця ставка. Тобто, якщо був відкритий депозит на таку ж суму через рік під 15 % річних з однаковим терміном погашення, то *середня проста відсоткова ставка* складе:

$$i = \frac{i_1 n_1 + i_2 n_2}{n_1 + n_2} = \frac{0,1 \cdot 6 + 0,15 \cdot 5}{6 + 5} \approx 0,12273$$

Визначимо нарощену суму окремо за кожним депозитом і в цілому:

$$S_1 = 16000 \text{ грн} ; S_2 = 10000 \cdot 1 + 5 \cdot 0,15 = 17500 \text{ грн} ;$$

$$S = S_1 + S_2 = 33500 \text{ грн}$$

Визначимо нарощену суму окремо за кожним депозитом і в цілому через середню відсоткову ставку:

$$S_1 = 10000 \cdot 1 + 6 \cdot 0,1125 \approx 16750,00 \text{ грн} ;$$

$$S_2 = 5000 \cdot 1 + 4 \cdot 0,1125 = 7250,00 \text{ грн} ;$$

$$S = S_1 + S_2 = 24000 \text{ грн}$$

5. Середня ставка складних відсотків. Середня ставка за складними відсотками визначається за формулою:

$$i_C = \sqrt[N]{1 + i_1^{n_1} \cdot 1 + i_2^{n_2} \cdots 1 + i_k^{n_k}} - 1$$

де i_1, i_2, \dots, i_k – ставки складних відсотків; n_1, n_2, \dots, n_k – часові інтервали, протягом яких нарахування проводилося за складними відсотками ($N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$). Якщо перші 2 роки ставка 10 %, а кожен наступний рік підвищується на 1 %, то середня ставка складних відсотків складе:

$$i_C = \sqrt[5]{1 + 0,1^2 \cdot 1 + 0,11^1 \cdot 1 + 0,12^1 \cdot 1 + 0,13^1} - 1 \approx 0,1119$$

Визначимо нарощену суму депозиту через змінні ставки складних відсотків і через середню складну ставку відсотків:

$$S = 10000 \cdot (1 + 0,1^2 \cdot 1 + 0,11^1 \cdot 1 + 0,12^1 \cdot 1 + 0,13^1) \\ \approx 16998,27 \text{ (грн)}$$

$$S = 10000 \cdot 1 + 0,1119^5 \approx 16998,27 \text{ (грн)}$$

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

Частина 2

1. Середній розмір позики. Середній розмір однієї позики (P) без урахування кількості оборотів за рік знаходиться за формулою середньої арифметичної зваженої:

$$P = \frac{P_j \cdot n_j}{n_j}$$

Визначимо середній розмір позики, отриманої фірмою 1 (P_1) і фірмою 2 (P_2), а також всіх позик, виданих банком:

$$P_1 = \frac{250 \cdot 6 + 200 \cdot 8 + 500 \cdot 3}{6 + 8 + 3} \approx 270,58824 \text{ тис. грн ,}$$

$$P_2 = \frac{600 \cdot 2 + 450 \cdot 4}{2 + 4} = 500 \text{ тис. грн ,}$$

$$P = \frac{250 \cdot 6 + 200 \cdot 8 + 500 \cdot 3 + 600 \cdot 2 + 450 \cdot 4}{6 + 8 + 3 + 2 + 4} \approx 330,43478 \text{ тис. грн .}$$

2. Середній термін користування позиками (за умови їх безперервної оборотності), тобто середній час, протягом якого усі позики обертаються один раз, визначається так:

$$n = \frac{P_j}{\frac{P_j}{n_j}}$$

Визначимо середній термін користування позиками для фірми 1 (n_1) і фірми 2 (n_2), а також для банку в цілому:

$$n_1 = \frac{250 + 200 + 500}{\frac{250}{6} + \frac{200}{8} + \frac{500}{3}} \approx 4,0714 \text{ (міс.)}$$

$$n_2 = \frac{600 + 450}{\frac{600}{2} + \frac{450}{4}} \approx 2,5455 \text{ (міс.)}$$

$$n = \frac{250 + 200 + 500 + 600 + 450}{\frac{250}{6} + \frac{200}{8} + \frac{500}{3} + \frac{600}{2} + \frac{450}{4}} \approx 3,0968 \text{ (міс.)}$$

3. Середнє число оборотів позики за рік. Число оборотів окремих позик за умови їх безперервної оборотності за період, що вивчається, визначається як частка від ділення тривалості періоду ($D = 12$ міс.) на термін видачі позики:

$$W_j = \frac{D}{n_j}$$

Результати проміжних розрахунків наведені в табл. 7.

Таблиця 7.

Результати розрахунків

№ позики	Розмір позики P_j тис. грн	Термін позики n_j	Число оборотів за рік $W_j = \frac{D}{n_j}$	Річний оборот позики $O_j = P_j \cdot W_j$
Фірма 1				
1	250	6	2	500
2	200	8	1,5	300
3	500	3	4	2000
Сума	950	-	-	2800
Фірма 2				
4	600	2	6	3600
5	450	4	3	1350
Сума	1050	-	-	4950
Разом	2000			7750

Тоді середнє число оборотів всіх позик за період (за умови, що вони обертаються безперервно) розраховується так:

$$W = \frac{W_j \cdot P_j}{P_j} = D \cdot \frac{\frac{P_j}{n_j}}{P_j} = \frac{O_j}{P_j}$$

Визначимо середнє число оборотів всіх позик за рік для кожної фірми окремо і в цілому для банку:

$$W_1 = \frac{2800}{950} = 2,9474, \quad W_2 = \frac{4950}{1050} = 4,7143, \quad W = \frac{7750}{2000} = 3,875$$

4. Консолідація платежів. Зміна господарської ситуації нерідко спонукає одну із сторін-учасниць комерційної операції звернутися до іншої сторони з пропозицією змінити умови раніше укладених угод. Найчастіше пропонується змінити терміни платежів у бік їх збільшення, провести об'єднання декількох платежів в один (консолідувати платежі) зі встановленням єдиного терміну погашення. Природно, що запропоновані зміни повинні бути беззбитковими для обох сторін, тобто основним принципом зміни умови операції (контракту) є принцип фінансової еквівалентності. Для вирішення таких завдань використовується рівняння еквівалентності, в якому сума замінованих платежів, приведених до одного моменту часу, прирівняна до суми платежів за новим зобов'язанням, приведеної до тієї ж дати.

При консолідації декількох платежів в один за умови, що термін нового консолідованого платежу більше раніше встановлених термінів (тобто $n_0 > n_1, n_2, \dots, n_k$) і використовується проста відсоткова ставка, рівняння еквівалентності має вигляд:

$$S_0 = S_j \cdot (1 + t_j \cdot i)$$

де S_0 – нарощена сума консолідованого платежу; S_1, S_2, \dots, S_k – платежі, що підлягають консолідації, з термінами сплати n_1, n_2, \dots, n_k ; t_j – часові інтервали між терміном n_0 і n_j тобто $t_j = n_0 - n_j$.

Визначимо нарощені суми позик для кожної фірми окремо, як це показано у табл. 8.

Таблиця 8

Нарощені суми позик

Фірма	Формула розрахунку	Нарощена сума позик, тис. грн
1	$S_1^1 = 250 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{0,1}{12}$	262,50
	$S_1^1 = 200 \cdot 1 + 8 \cdot \frac{0,1}{12}$	213,33
	$S_1^1 = 500 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{0,1}{12}$	512,50
2	$S_1^2 = 600 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{0,1}{12}$	610,00
	$S_1^2 = 450 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{0,1}{12}$	465,00

Визначимо розмір консолідованого платежу для кожної фірми, за умови, що нараховуються прості відсотки за ставкою 10 % річних, термін погашення консолідованого платежу – 12 міс.:

Практичне завдання № 4. Розрахунок параметрів постійних фінансових рент

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, придбання навичок розрахунку параметрів постійних фінансових рент (потоків платежів).

Початкові дані. Депозитний договір поміщений на 5 років і передбачає щорічні внески в кінці року на депозитний рахунок у розмірі 10 тис. грн, відсоткова ставка складає 10 % складних річних.

Необхідно

1. Визначити нарощену суму до кінця терміну депозиту, якщо відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

2. Визначити нарощену суму до кінця терміну депозиту, якщо рентні платежі вносяться щокварталу, відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

3. Скласти загальну таблицю і порівняти результати нарощування річних і p -строкових рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків $S(p, t)$, для $p = 1, 2, 4, 12$ і $t = 1, 2, 4, 12$. Зробити висновки.

4. Визначити сучасну величину ренти, якщо відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

5. Визначити сучасну величину ренти, якщо рентні платежі вносяться щокварталу, відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

6. Скласти загальну таблицю і порівняти результати приведення річних і p -строкових рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків $A(p, t)$, для $p = 1, 2, 4, 12$ і $t = 1, 2, 4, 12$. Зробити висновки.

7. Розрахувати тривалість ренти при параметрах $p = 1, 4$ і $t = 1, 4$, якщо відома її нарощена величина, порівняти з початковими даними.

8. Розрахувати нарощену і сучасну величину річної ренти пренумерандо, якщо відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

Методичні рекомендації

1. Річна рента з нарахуванням відсотків t раз на рік. Ряд послідовних фіксованих платежів, здійснених через рівні проміжки часу, називається *фінансовою рентою, або ануйтетом*. Фінансова рента (далі – рента) може бути охарактеризована рядом параметрів:

член ренти (R) – величина кожного окремого платежу;

період ренти – часовий інтервал між двома платежами;

термін ренти (n) – час від початку реалізації ренти до моменту нарахування останнього платежу;

відсоткова ставка(i) – ставка, використовувана для розрахунку наращування або дисконтування платежів, що складають ренту.

Окрім перерахованих параметрів рента характеризується: кількістю платежів протягом року; частотою нарахування відсотків (тобто кількістю періодів у році, коли нараховуються відсотки); моментом здійснення платежів (на початку, середині або в кінці року) та ін.

Ренти, за якими платежі проводяться раз на рік, називаються *річними*. Залежно від частоти нарахування відсотків розрізняють *ренти з нарахуванням відсотків один раз на рік, кілька разів на рік (t раз) і безперервним нарахуванням*.

Нарощена сума річної ренти з нарахуванням відсотків один раз розраховуються за формулою:

$$S = R \frac{1 + i^n - 1}{i}$$

Якщо член ренти $R = 10$ тис. грн, термін ренти $n = 5$ років, а відсоткова ставка на рік $i = 0,1$, то нарощена сума річної ренти складе:

$$S = 10000 \frac{1 + 0,1^5 - 1}{0,1} = 61,051 \text{ (тис. грн)}$$

Розглянемо річну ренту з нарахуванням відсотків t раз на рік. У цьому випадку нарахування відсотків кожного разу проводитиметься за ставкою $\frac{j}{m}$, де j – номінальна (річна) ставка складних відсотків, число членів ренти рівне $n \cdot t$. Величина нарощеної суми визначатиметься за формулою:

$$S = R \frac{1 + j/m^{nm} - 1}{1 + j/m^m - 1}$$

де n – термін ренти в роках.

Визначимо нарощену суму річної ренти до кінця терміну депозиту, якщо відсотки нараховуються щокварталу, щомісячно:

$$S = 10 \frac{1 + 0,1/4^{5 \cdot 4} - 1}{1 + 0,1/4^4 - 1} = 61,5161 \text{ (тис. грн)}$$

$$S = 10 \frac{1 + 0,1/12^{5 \cdot 4} - 1}{1 + 0,1/12^4 - 1} = 61,6264 \text{ (тис. грн)}$$

2. Рента p -строкова з нарахуванням відсотків m раз на рік. Якщо рентні платежі вносяться кілька разів на рік рівними сумами (p -строкова рента), а нарахування відсотків проводиться раз на рік, в кінці року ($m = 1$), тоді річний платіж рівний R , перший член ренти – R/p , а загальне число членів ренти рівне $n \cdot p$. Нарощена сума, якщо платежі вносяться щокварталу складе:

$$S = \frac{R}{p} \frac{1 + i^n - 1}{1 + i^{1/p} - 1} = \frac{10}{4} \frac{1 + 0,1^5 - 1}{1 + 0,1^{1/4} - 1} \approx 63,295 \text{ (тис. грн) .}$$

Нарощена сума для p -строкової ренти, для якої число періодів нарахування відсотків протягом року рівне числу рентних платежів (тобто $p = m$), визначається за формулою:

$$S = R \frac{1 + j/m^{nm} - 1}{j} = 10 \cdot \frac{1 + \frac{0,1}{4}^{5 \cdot 4} - 1}{0,1} \approx 63,862 \text{ (тис. грн)}$$

Нарощена сума для p -строкової ренти, для якої число рентних платежів протягом року не рівне числу періодів нарахування відсотків, (тобто $p \neq m$), визначається за формулою:

$$S = \frac{R}{p} \frac{1 + j/m^{nm} - 1}{1 + j/m^{m/p} - 1}$$

Визначимо нарощену суму p - строкової ренти до кінця терміну депозиту, якщо відсотки нараховуються щомісячно:

$$S = \frac{10}{12} \frac{1 + 0,1/12^{5 \cdot 12} - 1}{1 + 0,1/12^{12/4} - 1} \approx 63,996 \text{ (тис. грн)}$$

3. Порівняння нарощених сум. Як видно з наведених формул, частота платежів і нарахування відсотків помітно впливають на розмір нарощеної суми. Результати розрахунків нарощених сум для різних умов здійснення платежів і нарахування відсотків наведені у табл. 9.

Таблиця 9

Порівняння нарощених сум рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарахування відсотків

Число рентних платежів протягом року	Число періодів нарахування відсотків				
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 12$
$p = 1$	61,0510	61,3556	61,5161	61,5161	61,6264
$p = 2$	62,5409	62,8895	63,0732	63,0732	63,1995
$p = 4$	63,2950	63,6660	63,8616	63,8616	63,9961
$p = 12$	63,8010	64,1872	64,3909	64,3909	64,5309

Зіставимо розглянуті варіанти нарощених сум.

Позначимо порівнювані суми як $S(p, m)$. Для одних і тих самих сум річних виплат, тривалості рент і розмірів відсоткових ставок отримаємо такі співвідношення:

$$S_{1,1} < S_{1,m} < S_{p,1} < S_{p,m} < S_{p,m} < S_{p,m}$$

$$m > 1 \quad p > 1 \quad m > p > 1 \quad p = m > 1 \quad p > m > 1$$

Наведені нерівності можуть бути використані при виборі умов контрактів, оскільки дозволяють заздалегідь (до розрахунку) отримати уявлення про результати, пов'язані з конкретними умовами. Наприклад, можна заздалегідь сказати, що рента з умовами $p = 2$ і $m = 4$ дає меншу нарощену суму, чим з $p = 4$ і $m = 2$ при рівності всіх інших умов.

4. Сучасна величина звичайної ренти (постнумерандо). Під сучасною (наведеною, або поточною) величиною потоку платежів розуміють суму дисконтованих членів цього потоку на деякий попередній момент часу. Сучасна вартість потоку платежів еквівалентна у фінансовому сенсі всім платежам, які охоплює потік. У випадку річної ренти оцінка сучасної величини (A) проводиться на момент початку реалізації ренти (рента негайна) і складає:

$$A = R \cdot \frac{1 - 1 + i^{-n}}{i} = 10 \cdot \frac{1 - 1 + 0,1^{-5}}{0,1} \approx 37,9079 \text{ (тис. грн)}$$

Математично взаємозв'язок між сучасною і нарощеною величиною ренти можна виразити таким чином:

$$A \cdot 1 + i^n = S$$

Це дає можливість переконатися, що наведена величина еквівалентна всім платежам, складовим потік рентних платежів.

При нарахуванні відсотків t раз на рік сучасна величина ренти обчислюється за формулою, у якій замінили дисконтний множник $1 + i^{-n}$ на еквівалентну величину $1 + j/m^{-nm}$, а i на $1 + j/m^m - 1$. Тоді сучасна вартість річної ренти з нарахуванням відсотків t раз на рік може бути визначена так:

$$S = R \cdot \frac{1 - 1 + \frac{j}{m}^{-nm}}{1 + \frac{j}{m} - 1} = R \cdot a_{nm, j/m}$$

Визначимо сучасну величину ренти, якщо відсотки нараховуються щокварталу і щомісяця:

$$S = 10 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{-5 \cdot 4}}{1 + \frac{0,1}{4} - 1} \approx 37,5415 \text{ (тис. грн)}$$

$$S = 10 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{-5 \cdot 12}}{1 + \frac{0,1}{12} - 1} \approx 37,4558 \text{ (тис. грн)}$$

5. Сучасна величина p -строкової ренти. При внесенні рентних платежів кілька разів у році (p -строкова рента) і нарахуванні відсотків один раз в році ($m = 1$) коефіцієнти приведення знаходяться так само, як і для річної ренти, але за умови, що розмір платежу рівний, а число членів ренти складе $n \cdot p$. Сума дисконтованих платежів у разі їх щоквартального внесення буде рівна:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + i\right)^{-n}}{1 + i\frac{1}{p} - 1} = \frac{10}{4} \cdot \frac{1 - \left(1 + 0,1\right)^{-5}}{1 + 0,1\frac{1}{4} - 1} \approx 39,3012 \text{ (тис. грн)} \cdot$$

Сучасна величина p -строкової ренти, для якої число періодів нарахування відсотків протягом року рівне числу рентних платежів (тобто $p = m$), визначається за формулою:

$$A = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{j} = 10 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{-5 \cdot 4}}{0,1} \approx 38,9729 \text{ тис. грн.}$$

Сучасна величина p -строкової ренти, для якої число періодів нарахування відсотків протягом року не рівне числу рентних платежів тобто $p \neq m$ (наприклад, якщо нарахування відбувається щомісяця), визначається за формулою:

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{1 + \frac{j}{m}\frac{1}{p} - 1} = \frac{10}{4} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{-5 \cdot 12}}{1 + \frac{0,1}{12}\frac{1}{4} - 1} \approx 38,8961 \text{ тис. грн.}$$

6. Порівняння сучасних вартостей річних і p -строкових рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарахування відсотків.

Як видно з наведених формул, величина сучасної вартості помітно залежить від ставки дисконтування і частоти виплат у межах року. Результати розрахунків сучасних вартостей для різних умов виплат і нарахування відсотків наведені у табл. 10.

Порівняння сучасних вартостей рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків

Число рентних платежів протягом року	Число періодів нарахування відсотків			
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 4$	$m = 12$
$p = 1$	37,9079	37,6670	37,5415	37,4558
$p = 2$	38,8330	38,6087	38,4918	38,4119
$p = 4$	39,3012	39,0854	38,9729	38,8961
$p = 12$	39,6154	39,4054	39,2959	39,2211

Зіставимо розглянуті варіанти наведених сум.

Позначимо порівнювані суми як $A(p, m)$, де p – число надходжень рентних платежів протягом року, m – число періодів нарахування відсотків протягом року. Для одних і тих же сум річних виплат, тривалості рент і розмірів відсоткових ставок отримаємо такі співвідношення:

$$A(1, \infty) < A(1, m) < A(1, 1) < A(p, \infty) < A(p, m) < A(p, 1)$$

$$p > m > 1 \quad p = m > 1 \quad m > p > 1$$

Таким чином, можна заздалегідь сказати, що рента з умовами $p = 4$ і $m = 2$ має меншу сучасну вартість, ніж з $p = 2$ і $m = 4$ при рівності всіх інших умов.

7. Тривалість ренти. При укладенні комерційного контракту, що передбачає погашення зобов'язань рентними платежами, найважливішим параметром є термін ренти. У разі узгодження решти параметрів термін ренти може бути розрахований з використанням величини нарощеної суми. Розрахунки тривалості ренти при параметрах $p = 1,4$ і $m = 1,4$ наведені у табл. 11.

Розрахунок тривалості ренти

p	m	Формула розрахунку	Тривалість ренти, років
1	1	$n = \frac{\ln \frac{S}{R} i + 1}{\ln(1 + i)} = \frac{\ln \frac{61,051}{10} 0,1 + 1}{\ln(1 + 0,1)}$	5
1	4	$n = \frac{\ln \frac{S}{R} (1 + j/m)^m - 1 + 1}{m \cdot \ln(1 + j/m)}$	5

4	1	$n = \frac{\ln \frac{S}{R} p (1+i)^{1/p} - 1}{\ln(1+i)}$	5
4	4	$n = \frac{\ln \frac{S}{R} j + 1}{m \cdot \ln(1 + j/m)} = \frac{\ln \frac{63,8616}{10} 0,1 + 1}{4 \cdot \ln(1 + 0,1/4)}$	5

Таким чином, як видно з табл. 11, результати розрахунків співпадають.

Практичне завдання № 5. Конверсія фінансових рент. Змінювані ренти

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навичок розрахунку параметрів конверсії рент і змінних фінансових рент (потоків платежів).

Завдання

1. Фірма пропонує покупцеві свою продукцію на суму 2 млн грн з умовою її оплати у кредит протягом 2 років під 15 % річних (складні відсотки). Платежі повинні вноситися щокварталу, відсотки нараховуються в кінці року. Визначити умови конверсії цієї пропозиції. Зробити висновки.

2. Фірма, що спеціалізується на торгівлі нерухомістю пропонує об'єкт вартістю 1,5 млн грн. При цьому пропонуються такі варіанти оплати: а) одноразова оплата; б) оплата протягом 2 років рівними платежами, що вносяться в кінці року під 9 % річних; в) оплата з відстроченням платежу в один рік, останні умови аналогічні попередньому варіанту; г) оплата з відстроченням в один рік, але термін ренти зростає до 3 років. Визначити фінансові наслідки, зробити висновки.

3. Є три річні ренти (негайні з нарахуванням % в кінці періодів) з такими параметрами: $R_1 = 0,2$ млн грн, $n_1 = 2$ роки, $i_1 = 9\%$; $R_2 = 0,25$ млн грн, $n_2 = 2$ роки, $i_2 = 8\%$; $R_3 = 0,37$ млн грн, $n_3 = 5$ років, $i_3 = 10\%$. Їх запропоновано замінити однією річною рентою з нарахуванням % в кінці періоду, термін погашення консолідованої ренти $n = 5$ років, $i = 10\%$. Визначити величину рентного платежу консолідованої ренти, якщо: а) початок її терміну збігається з початком терміну всіх замінюваних рент; б) оплата за новою рентою відкладається на 2 роки.

4. На модернізацію підприємства отриманий довгостроковий кредит строком на 10 років, погашення якого здійснюватиметься на таких умовах: у перших 5 років платежі у розмірі 3 млн грн вносяться кожні півроку під 8 % річних, наступних 3 роки платежі у розмірі 5 млн грн вносяться також за півріччями під 10 % річних, останні 2 роки платежі у розмірі 6 млн грн вносяться щокварталу під 10 % річних. Протягом всього терміну ренти відсотки нараховуються раз на рік. Визначити нарощену величину ренти.

5. Кредит розміром 15 млн грн має бути погашений протягом 5 років постійно зростаючими платежами з абсолютним щорічним приростом, рівним 0,5 млн грн. Платежі і нарахування відсотків на них виробляється в кінці року, відсоткова річна ставка – 9 %. Визначити розмір першого платежу і загальну суму виплат.

6. Отриманий кредит строком на 7 років. Умови погашення наступні: перший платіж 0,2 млн грн, кожен наступний зростає на 10 %, платежі вносяться двічі в році, відсоткова ставка 8 % річних. Визначте розмір отриманого кредиту і суму, що підлягає виплаті.

Методичні рекомендації

Під *конверсією* фінансових рент розуміють зміну умов виплати ренти через які–небудь причини, інакше кажучи, мова йде про конвертації умов, що передбачаються при виплаті фінансової ренти. Простими випадками конверсії є: заміна ренти разовим платежем (викуп ренти), або навпаки, заміна разового платежу рентою (розстрочка платежу). До складнішого випадку відноситься об'єднання декількох рент з різними характеристиками в одну – консолідація рент. При цьому передбачається, що конверсія не повинна приводити до зміни фінансових наслідків для кожної із сторін, що беруть участь, тобто конверсія ґрунтується на принципі фінансової еквівалентності.

1. Заміна разового платежу рентним. Для вирішення завдання прирівнюємо сучасну вартість ренти, за допомогою якої проводиться розстрочка, сумі боргу. Завдання полягає у визначенні одного з параметрів цієї ренти – члена ренти – за умови, що решта параметрів задана:

$$A = R \cdot \frac{1 - 1 + i^{-n}}{p \cdot 1 + i^{1/p} - 1}$$

Звідси

$$R = A \div \frac{1 - 1 + i^{-n}}{p \cdot 1 + i^{1/p} - 1}$$

де A – сучасна величина потоків платежів;

i – річна відсоткова ставка;

n – термін ренти;

p – терміновість ренти (кількість платежів на рік).

Якщо $A = 2$ млн грн, $n = 2$ роки, $p = 4$, $m = 1$, $i = 0,15$, тоді член ренти дорівнює:

$$R = 2 \div \frac{1 - 1 + 0,15^{-2}}{4 \cdot 1 + 0,15^{1/4} - 1} = 1,16652 \text{ (млн грн)}$$

Далі знаходимо квартальний платіж:

$$R_{\text{кв}} = \frac{R}{4} = \frac{1,16652}{4} \approx 0,291631 \text{ (млн грн)}$$

Для визначення доцільності здійснення покупки на пропонованих умовах, розрахуємо нарощену величину ренти:

$$S = R \cdot \frac{1 + i^n - 1}{p \cdot (1 + i^{\frac{1}{p}} - 1)} = 1,166525 \cdot \frac{1 + 0,15^2 - 1}{4 \cdot (1 + 0,15^{\frac{1}{4}} - 1)} = 2,645 \text{ (млн грн)}$$

Таким чином, приймаючи умови фірми, покупцеві необхідно буде щокварталу виплачувати 291,631 тис. грн, при цьому переплата складе 645 тис. грн.

2. Зміна умов ренти. Зміна умов виплати ренти, тобто часткова або повна зміна первинних параметрів ренти, приводить до утворення нової ренти, що викликає зміну фінансових наслідків. Разом із тим за бажанням сторін можна зберегти фінансову еквівалентність, змінивши ряд параметрів і зберігши рівність сучасних величин первинною і знов створеною рентою ($A_0 = A_1$), а також зберігаючи рівність відсоткових ставок.

Початкові дані: $A = 1,5$ млн грн, $n = 2$ року $i = 0,09$.

Розв'язання:

а) *одноразова оплата.* Цей варіант припускає, що виплата буде проведена відразу, тобто $S = A = 1,5$ (млн грн);

б) *оплата рівними платежами,* що вносяться в кінці кожного року, з формули розрахунку звичайної річної ренти $A = R \cdot \frac{1+i^{-n}}{i}$

знаходимо член ренти:

$$R = A \div \frac{1 + i^{-n}}{i} = 1,5 \cdot \frac{1 + 0,09^{-2}}{0,09} = 0,852703 \text{ (млн грн)}$$

Далі розраховуємо нарощену величину ренти:

$$S = R \cdot \frac{1 + i^n - 1}{i} = 0,852703 \cdot \frac{1 + 0,09^2 - 1}{0,09} = 1,782149 \text{ (млн грн)}$$

в) *оплата з відстроченням платежу (термін ренти не змінюється).* Це завдання припускає розрахунок відстроченої ренти, тобто коли внесення першого внеску переноситься на пізніший термін (t років, місяців). У цьому випадку загальна тривалість ренти залишається колишньою

$$R_t = R_0 \cdot 1 + i^t = 0,852703 \cdot 1 + 0,09^1 = 0,929446 \text{ (млн грн)}$$

тоді:

$$S = R_t \cdot \frac{1 + i^n - 1}{i} = 0,929446 \cdot \frac{1 + 0,09^1 - 1}{0,09} = 1,942543 \text{ (млн грн)}$$

г) *оплата з відстроченням із збільшенням терміну ренти*, тобто необхідно знайти відкладену ренту за умови, що загальна тривалість ренти зростає до 3 років.

Для розрахунку величини рентного платежу нової ренти, відстроченої на період $t = 1$ і з новим терміном, використовується формула:

$$R_t = \frac{1 - 1 + i^{-n_0}/i}{1 - 1 + i^{-n_t}/i} \cdot 1 + i^t$$

$$R_3 = \frac{1 - 1 + 0,09^{-2}/0,09}{1 - 1 + 0,09^{-3}/0,09} \cdot 1 + 0,09^1 = 0,645914 \text{ (млн грн)}$$

Таким чином, як вже було вказано, зміна умов виплати ренти, тобто часткова або повна зміна її первинних параметрів, приводить до зміни фінансових наслідків.

3. Консолідація (об'єднання) рент полягає в заміні декількох рент однією, параметри якої необхідно визначити. У цьому випадку з принципу фінансової еквівалентності виходить рівність сучасних вартостей замінюючої і замінюваних рент. Процес консолідації рент може супроводжуватися як збереженням, так і зміною їх параметрів. Основні характеристики, що визначаються при консолідації рент, – величина члена ренти і її тривалість. У табл. 12 вказані основні характеристики об'єднаних рент.

Таблиця 12

Основні характеристики об'єднаних рент

№ ренти, q	Член ренти, R_q , млн грн	Термін ренти, n_q , років	Відсоткова ставка $i\%$
1	0,20	2	9
2	0,25	4	8
3	0,37	5	7

а) умови консолідації рент передбачають *збіг початку терміну нової (консолідованої) ренти і об'єднаних рент*, тому член консолідованої ренти визначається за формулою:

$$R = \frac{\sum_{q=1}^K A_q}{1 - 1 + i^{-n}/i} = \frac{\sum_{q=1}^K R_q \cdot (1 - 1 + i_q^{-n_q}/i_q)}{1 - 1 + i^{-n}/i}$$

де R_q - член q -ої ренти, i_q - тривалість q -ої ренти, i_q - відсоткова ставка q -ої ренти, i - параметри консолідованої ренти ($n= 5, i = 0,1 \%$).

У табл. 13 представлені результати розрахунку сучасних величин рент, що об'єднуються.

Таблиця 13

Результати розрахунку сучасних величин

№ ренти, q	Член ренти, R_q , млн грн	Термін ренти, n_q , років	Відсоткова ставка $i\%$	Сучасна величина A_q , млн грн
1	0,20	2	0,09	0,3518222
2	0,25	4	0,08	0,8280317
3	0,37	5	0,07	1,5170731
Разом				2,696927

Підставивши отримані значення у формулу, маємо значення річного платежу нової консолідованої ренти:

$$R = \frac{2,696927}{1 - 1 + 0,1^{-5}/0,1} = 0,7114425 \text{ (млн грн)}$$

б) умови консолідації рент передбачають, що оплата за *новою рентою* відкладається на 2 роки, тому член консолідованої ренти визначається за формулою:

$$R_t = \frac{\sum_{q=1}^K R_q \cdot (1 - 1 + i_q^{-n_q}/i_q)}{1 - 1 + i^{-n}/i} \cdot 1 + i^t$$

де R_t - член відкладеної консолідованої ренти, R_q - член q -ї ренти, n_q - тривалість q -ї ренти, i_q - відсоткова ставка q -ї ренти, n_t , i - параметри консолідованої ренти ($n = 5, i = 0,1 \%, t = 2$).

Скоректуємо платіж консолідованої ренти:

$$R_t = \frac{\sum_{q=1}^K R_q \cdot (1 - 1 + i_q^{-n_q}/i_q)}{1 - 1 + i^{-n}/i} \cdot 1 + i^t = 0,7114425 \cdot 1 + 0,1^2 = 0,8608455$$

Таким чином, ґрунтуючись на принципі еквівалентності, розрахували величину річного платежу консолідованої ренти, при цьому зміна умов виплат приводить до збільшення рентного платежу.

4. Рента з разовою зміною платежу. Потік послідовних платежів, члени якого не є постійними величинами, називається змінною рентою. У разі, коли потік платежів є дискретним і кожен член ренти постійний тільки в межах свого часового відрізка, розраховується змінна рента з разовими змінами розміру члена ренти:

$$S = R_1 \cdot s_{n_1, i_1} \cdot 1 + i^{n-n_1} + R_2 \cdot s_{n_2, i_2} \cdot 1 + i^{n-(n_1+n_2)} + \dots + R_k \cdot s_{n_k, i_k}$$

Коефіцієнти нарощування річної ренти $s_{n,i}$ визначаються за формулою:

$$s_{n,i} = \frac{1 + i^n - 1}{i}$$

У табл. 14 представлений план погашення довгострокового кредиту.

Таблиця 14

Початкові дані погашення довгострокового кредиту

№ ренти, k	Термін ренти, n_k , років	Річний платіж R_k	Відсоткова ставка $i_k\%$	Строковість ренти p_k
1	5	6	0,08	2
2	3	10	0,1	2
3	2	24	0,1	4

Оскільки схема погашення довгострокового кредиту ($m=1$ і $n=10$) є змінною рентою з p -строковими платежами, коефіцієнти нарощування визначаються за формулою:

$$s_{n,i}^{(p)} = \frac{1 + i^n - 1}{p \cdot (1 + i^{\frac{1}{p}} - 1)}$$

У табл. 15 представлені результати розрахунку коефіцієнтів нарощування.

Таблиця 15

Результати розрахунку коефіцієнтів нарощування

№ ренти, k	Термін ренти, n_k , років	Відсоткова ставка $i_k\%$	Строковість ренти p_k	Коефіцієнт нарощення, $s_{n,i}^{(p)}$
1	5	0,08	2	5,981676
2	3	0,1	2	3,390779
3	2	0,1	4	2,177187

Таким чином, нарощена величина ренти дорівнює:

$$S = 6 \cdot 5,981676 \cdot 1 + 0,08^{10-5} + 10 \cdot 3,390779 \cdot 1 + 0,1^{10-5+3} + 24 \cdot 2,177187 = 146,01516 \text{ (млн. грн)}$$

Таким чином, загальна сума виплат за довгостроковим кредитом складе 146,01516 млн. грн.

5. Рента з постійною абсолютною зміною членів. Рента, члени якої змінюються за законом арифметичної прогресії, називається *змінною рентою з постійною абсолютною зміною її членів* (на величину d).

Початкові дані: $A = 15$ млн грн, $n = 5$ років, $i = 9\%$, $d = 0,5$ млн грн, нарахування відсотків і виплати здійснюються в кінці року.

Розв'язання:

Знаючи поточну суму боргу, тобто величину A , можна визначити розмір першого платежу:

$$R = \frac{A \cdot 1 + i^n - \frac{d}{i} \cdot (s_{n,i} - n)}{s_{n,i}}$$

де $s_{n,i}$ – коефіцієнт нарощування.

$$R = \frac{15 \cdot 1 + 0,09^5 - \frac{0,5}{0,09} \cdot (5,98471 - 5)}{5,98471} = 2,942288 \text{ млн. грн.}$$

Нарощена сума даної ренти визначається за формулою:

$$S = R \cdot s_{n,i} + \frac{d}{i} \cdot (s_{n,i} - n)$$

$$S = 2,942288 \cdot 5,98471 + \frac{0,5}{0,09} \cdot 5,98471 - 5 = 23,079359 \text{ млн. грн.}$$

Так, щоб виплатити кредит у розмірі 15 млн грн за запропонованою схемою, необхідно внести перший платіж у розмірі 2,942288 млн грн, при цьому переплата складе 8,079359 млн грн.

6. Рента з постійною відносною зміною членів. Рента, члени якої змінюються за законом зростаючої геометричної прогресії, називається *рентою з постійною відносною зміною платежів*.

У табл. 16 представлені початкові дані для погашення кредиту.

Початкові дані схеми погашення кредиту

Параметри	Позначення	Значення
Перший член ренти, млн. грн	R	0,2
Коефіцієнт зміни членів ренти	q	1,1
Терміновість ренти (кількість виплат на рік)	p	2
Термін ренти	n	7
Відсоткова ставка	i	0,08

Підсумкова величина виплат за наданим кредитом розраховується за формулою знаходження нарощеної величини p -строкової ренти з постійною відносною зміною платежів:

$$S = R \cdot \frac{q^{n \cdot p} - 1 + i^n}{q - 1 + i^{\frac{1}{p}}} = 0,2 \cdot \frac{1,1^{7 \cdot 2} - 1 + 0,08^7}{1,1 - 1 + 0,08^{\frac{1}{2}}} = 6,857629 \text{ (млн. грн)}$$

Сучасна величина p -строкової ренти визначається за формулою:

$$A = R \cdot \frac{q^{n \cdot p} - 1 + i^{-n} - 1}{q - 1 + i^{\frac{1}{p}}} = 0,2 \cdot \frac{1,1^{7 \cdot 2} - 1 + 0,08^{-7} - 1}{1,1 - 1 + 0,08^{\frac{1}{2}}} = 4,00136 \text{ (млн. грн)}$$

Таким чином, розмір отриманого кредиту складає 4,00136 млн грн, підсумкова сума виплат за запропонованою схемою рівна 6,85769 млн грн, тобто за 7 років переплата за кредитом складе 2,856268 млн грн.

Практичне завдання № 6. Планування погашення середньострокових і довгострокових кредитів

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навичок складання плану погашення середньострокових і довгострокових кредитів різними методами.

Початкові дані. Банк видав довгостроковий кредит в сумі 40,0 тис. дол. на 5 років під 6 % річних.

Необхідно

1. Погашення кредиту повинне проводитися рівними щорічними виплатами в кінці кожного року, що включають погашення основного боргу і відсоткові платежі. Нарахування відсотків проводиться раз на рік. Скласти план погашення позики. Розрахувати величину першого платежу для погашення основного боргу, величину відсоткового платежу на кінець останнього року

погашення позики, залишок основного неоплаченого боргу на початок 3-го року погашення. Порівняти розраховані значення з планом погашення позики.

2. Скласти план погашення кредиту рівними щорічними виплатами, якщо передбачається зміна відсоткової ставки: перші два роки – 6 %, що залишилися 3 роки – 8 %.

3. Скласти план погашення кредиту, якщо за умовами контракту погашення основного боргу повинне проводитися рівними щорічними платежами, нарахування відсотків – у кінці року. Розрахувати величину відсоткового платежу і строкової сплати для 4-го року, порівняти розраховане значення з планом погашення боргу.

4. Скласти план погашення кредиту, якщо виплати основного боргу повинні зростати щорічно на 1 тис. доларів, нарахування відсотків проводиться в кінці року.

5. Скласти план погашення кредиту, якщо виплати основного боргу повинні зростати на 5 % щорічно, нарахування відсотків проводиться в кінці року.

6. Скласти план погашення кредиту рівними щорічними виплатами, якщо після виплати третього платежу між кредитором і позичальником досягнута домовленість про продовження терміну погашення позики на 2 роки і збільшення відсоткової ставки з моменту конверсії до 10 %.

7. Скласти план погашення кредиту, якщо виданий кредит є іпотекою з щомісячним погашенням основного боргу і відсотків за ним рівними строковими сплатами, Розрахувати залишок боргу на початок 4-го місяця (кожного місяця приймається рівним 30 дням). Скласти план погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу (кожного місяця приймається рівним 30 дням). Зробити висновки.

Методичні рекомендації

1. Погашення боргу рівними строковими сплатами. Умовами кредитного контракту передбачається погашення боргу рівними виплатами в кінці кожного розрахункового періоду: Параметри позики: $D = 40,0$ тис. дол.; $n = 5$ років; $i = 0,06$; $m = 1$. Щорічна виплата дорівнює:

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot 1 + i^n}{1 + i^n - 1} = 40 \cdot \frac{0,06 \cdot 1 + 0,06^5}{1 + 0,06^5 - 1} \approx 9,49586 \text{ (млн. дол)}$$

Розрахуємо:

$$I = D \cdot i = 40 \cdot 0,06 = 2,4 \text{ (тис. дол)}$$

$$R = Y - I = 9,49586 - 2,4 = 7,09586 \text{ (тис. дол)}$$

У табл. 17 представлений поетапний план погашення боргу.

Таблиця 17

План погашення боргу, тис. дол.

Рік	Залишок боргу, D	Відсотковий платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна строкова сплата (ануїтет), Y
1	40	2,4	7,0959	9,4959
2	32,9041	1,97424864	7,5216	9,4959
3	25,3825	1,5229522	7,9729	9,4959
4	17,4096	1,04457797	8,4513	9,4959
5	8,9584	0,53750128	8,9584	9,4959
Разом		7,47928009	40,0000	47,4793

Знаючи розмір кредиту, відсоткову ставку i і термін погашення кредиту n , розрахуємо величину першої виплати погашення основного боргу R_1 :

$$R_1 = D \cdot \frac{i}{1 + i^n - 1} = 40 \cdot \frac{0,06}{1 + 0,06^5 - 1} = 7,09586 \text{ (тис. дол)}$$

Розмір платежу основного боргу в будь-якому періоді (R_k) можна визначити за формулою:

$$R_k = R_1 \cdot 1 + i^{k-1}.$$

$$R_3 = R_1 \cdot 1 + i^{k-1} = 7,09586 \cdot 1 + 0,06^{3-1} = 7,9729 \text{ (тис. дол)}.$$

Використовуючи наведені формули, можна розрахувати величину відсоткового платежу для будь-якого періоду k .

$$I_k = Y - R_k = Y - Y \cdot 1 + i^{-n+k-1} = Y \cdot 1 - (1 + i)^{-n+k-1}$$

За умовою завдання необхідно розрахувати величину відсоткового платежу на кінець останнього року погашення позики:

$$I_k = Y - R_k = Y - Y \cdot 1 + i^{-n+k-1} = 9,49586 \cdot 1 - 1 + 0,06^{-5+5-1} = 0,537501 \text{ (тис. дол)}.$$

Для розрахунку залишку неоплаченого основного боргу на будь-який k -й період використовується формула:

$$D_k = \frac{Y - R_k}{i}$$

За умовою завдання необхідно визначити залишок основного неоплаченого боргу на початок 3-го року погашення:

$$D_3 = \frac{Y - R_3}{i} = \frac{9,49586 - 7,9729}{0,06} = 25,382536 \text{ (тис. дол.)}$$

Таким чином, при погашенні позики рівними платежами залишок боргу з кожною виплатою зменшується; отже, зменшуються і відсоткові виплати. У результаті від періоду до періоду зростає розмір платежів, що йдуть на погашення основного боргу. Порівнюючи розрахунки з планом погашення позики, бачимо, що отримані результати не відрізняються. При цьому сумарна переплата складає 47,4793 тис. дол.

2. Погашення боргу рівними строковими сплатами при зміні відсоткових ставок

Параметри позики: $D = 40,0$ тис. дол.; $n_1 = 2$ року; $i_1 = 0,06$; $n_2 = 3$ року; $i_2 = 0,08$; $m = 1$, $n = n_1 + n_2 = 5$.

Розв'язання:

Для складання плану погашення позики визначимо величину щорічної виплати, враховуючи, що загальний термін погашення складе 5 років:

$$Y_1 = D \cdot \frac{i \cdot 1 + i^n}{1 + i^n - 1} = 40 \cdot \frac{0,06 \cdot (1 + 0,06)^5}{1 + 0,06^5 - 1} = 9,49586 \text{ (тис. дол.)}$$

Покроковий розрахунок здійснюється, виходячи зі співвідношень:

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot 1 + i^n}{1 + i^n - 1}$$

$$I = D \cdot i$$

$$R = Y - I$$

$$D_i = D_{i-1} - R_{i-1}$$

У табл. 18 представлений поетапний план погашення боргу.

Таблиця 18

Поетапний план погашення боргу

Рік	Відсоткова ставка, i	Залишок боргу, D	Відсотковий платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна строкова сплата, Y
1	0,06	40	2,4000	7,0959	9,495856017
2	0,06	32,9041	1,9742	7,5216	9,495856017
3	0,06	25,3825	2,0306	7,8187	9,849274874
4	0,06	17,5639	1,4051	8,4442	9,849274874
5	0,06	9,1197	0,7296	9,1197	9,849274874
Разом			8,5395	40,0000	48,5395

Таким чином, збільшення відсоткової ставки приводить до збільшення щорічних виплат. Як видно з прикладу, за 3 роки зміна ставки на 2 % привела до збільшення сумарної переплати на 1,0603 тис. дол. і складає 48,5395 тис. дол.

3. Погашення позики рівними виплатами основного боргу. За умовою завдання погашення основного боргу повинне проводитися рівними щорічними платежами. У цьому випадку розміри платежів за основним боргом складають:

$$\frac{D}{n} = R_1 = R_2 = \dots = R_k$$

$$R = \frac{40}{5} = 8 \text{ (тис. дол.)}$$

Залишок основного боргу на початку кожного розрахункового періоду (D_k) визначається як:

$$D_k = D - R \cdot (k - 1)$$

де D – сума всього боргу; k – номер розрахункового періоду.

Наприклад

Величина строкової сплати в кожному розрахунковому періоді дорівнює:

$$Y_k = D_k \cdot i + R$$

Наприклад,

$$Y_4 = D_4 \cdot i + R = (D - R \cdot (k - 1)) \cdot i + R = (40 - 8 \cdot 4 - 1) \cdot 0.06 + 8 = 8,96 \text{ (тис. дол.)}$$

Величина відсоткового платежу для k -го розрахункового періоду визначається за формулою:

$$I_k = D_k \cdot i$$

Наприклад

$$I_k = D_k \cdot i = (D - R \cdot (k - 1)) \cdot i = (40 - 8 \cdot 4 - 1) \cdot 0.06 = 0,96 \text{ (тис. дол.)}$$

У табл. 19 представлений поетапний план погашення боргу.

Таблиця 19

План погашення боргу, тис. дол.

Рік	Залишок боргу,	Відсотковий платіж,	Річна витрата по погашенню	Річна строкова
-----	----------------	---------------------	----------------------------	----------------

	D	I	основного боргу, R	сплата, Y
1	40	2,4	8,0000	10,4000
2	32,0000	1,92	8,0000	9,9200
3	24,0000	1,44	8,0000	9,4400
4	16,0000	0,96	8,0000	8,9600
5	8,0000	0,48	8,0000	8,4800
Разом		7,2	40,0000	47,2000

Таким чином, при погашенні позики рівними виплатами основного боргу з часом річна строкова сплата зменшується. Це відбувається за рахунок того, що залишок боргу і відсотковий платіж з кожною виплатою зменшується. Сумарна переплата складає 7,2 тис. дол.

4. Погашення позики змінними виплатами основного боргу (зміна виплат в арифметичній прогресії). За умовами контракту передбачено погашення основного боргу платежами, що зростають в арифметичній прогресії з різницею $d = 1$ тис. дол. У цьому випадку величина виплати основного боргу в періоді k дорівнює:

$$R_k = R_1 \pm (n - k) \cdot d$$

Величина основного боргу рівна сумі всіх виплат, тобто сумі членів арифметичної прогресії:

$$D = \frac{(R_1 + R_n + (n - 1) \cdot d) \cdot n}{2} = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot R_1 + (n - 1) \cdot d)$$

Величина першої виплати основного для прогресії розраховується за формулою:

$$R_1 = \frac{D}{n} \mp \frac{(n - 1) \cdot d}{2}$$

У табл. 20 представлений поетапний план погашення боргу.

Таблиця 20

План погашення боргу, тис. дол.

Рік	Залишок боргу, D	Відсотковий платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна строкова сплата, Y
1	40,00	2,40	6,00	8,40
2	34,00	2,04	7,00	9,04
3	27,00	1,62	8,00	9,62
4	19,00	1,14	9,00	10,14
5	10,00	0,60	10,00	10,60
Разом		7,80	40,00	47,80

Таким чином, сумарні виплати за кредитом складуть 47,8 тис. дол., преплата при цьому буде рівна 7,8 тис. дол. відповідно.

5. Зміна виплат у геометричній прогресії. Одним з варіантів погашення кредитної заборгованості є погашення основного боргу платежами, кожен з яких більше або менше попереднього в q разів. Величина основного боргу визначається за формулою геометричної прогресії, де R_1 – перший член прогресії і одночасно перший платіж основного боргу, q – знаменник прогресії. В цьому випадку основний борг D визначається, як:

$$D = R_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{де } q > 1$$

або

$$D = R_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \text{де } q < 1$$

Звідси, величина першої виплати основного розраховується за формулою:

$$R_1 = D \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}, \quad \text{де } q > 1$$

або

$$R_1 = D \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n}, \quad \text{де } q < 1$$

У табл. 21 представлений поетапний план погашення боргу, враховуючи, що виплати основного боргу повинні зростати на 5 % щорічно, тобто:

Таблиця 21

План погашення боргу, тис. дол.

Рік	Залишок боргу, D	Відсотковий платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна строкова сплата, Y
1	40	2,4	7,2390	9,6390
2	32,7610	1,96566048	7,6009	9,5666
3	25,1601	1,50960399	7,9810	9,4906
4	17,1791	1,03074468	8,3800	9,4108
5	8,7990	0,5279424	8,7990	9,3270
Разом		7,43395155	40,0000	47,4340

Таким чином, сумарні виплати за кредитом складуть 47,434 тис. дол., переплата при цьому буде рівна 7,434 тис. дол. відповідно.

6. Конверсія позик. Зміна умов погашення кредитів називається *конверсією позики*. При будь-якому методі конверсії спочатку визначаються сума виплаченого основного боргу і величина непогашеної його частини. Непогашена частина боргу розглядається як новий борг, що підлягає сплаті на нових умовах. Розглянемо один з варіантів конверсії, коли змінюються термін погашення позики і відсоткова ставка, а строкові сплати як за старими, так і за новими умовами проводяться рівними платежами; відсотки нараховуються один раз у кінці кожного розрахункового періоду. Позначимо параметри позик:

n – первинний термін погашення позик до конверсії;

n_1 – термін, на який продовжений період погашення в результаті конверсії;

k – число сплачених розрахункових періодів до конверсії;

i – відсоткова ставка до конверсії;

i_1 – відсоткова ставка після конверсії;

Y – величина строкової сплати до конверсії;

Y_1 – величина строкової сплати після конверсії;

D – величина основного боргу;

D_{n-k} – залишок боргу на момент конверсії.

Для складання плану погашення конверсійної позики визначають:

1) величину строкової сплати за старими умовами:

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$$

2) залишок боргу на момент конверсії:

$$D_{n-k} = Y \cdot \frac{(1 + i)^{n-k} - 1}{(1 + i)^{n-k} \cdot i}$$

3) величину строкової сплати за новими умовами:

$$Y_1 = D_{n-k} \cdot \frac{i \cdot (1 + i_1)^{n-k+n_1}}{(1 + i_1)^{n-k+n_1} - 1}$$

Величина строкової сплати за старими умовами складає:

$$Y = 40 \cdot \frac{0,06 \cdot 1 + 0,06^5}{1 + 0,06^5 - 1} \approx 9,49586 \text{ (тис. дол.)}$$

Залишок боргу на момент конверсії:

$$D_4 = 9,49586 \cdot \frac{1 + 0,06^{5-3} - 1}{1 + 0,06^{5-3} \cdot 0,06} = 17,4097 \text{ (тис. дол.)}$$

Величина строкової сплати за новими умовами:

План погашення конверсованого кредиту представлений в табл. 22.

Таблиця 22

План погашення боргу, тис. дол.

Рік	Залишок боргу, D	Відсотковий платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна строкова сплата, Y
до конверсії				
1	40	2,4	7,0959	9,4959
2	32,9041	1,97424864	7,5216	9,4959
3	25,3825	1,15229522	7,9729	9,4959
після конверсії				
4	17,4096	1,74096328	3,7513	5,4922
5	13,6584	1,36583652	4,1264	5,4922
6	9,5320	0,95319709	4,5390	5,4922
7	4,9929	0,49929371	4,9929	5,4922
Разом		10,4564914	40	50,4565

Таким чином, після зміни умов виплати боргу сумарна сума виплат склала 50,4565 тис. дол., що на 2,9772 тис. дол. більше, ніж величина виплат за первісним планом погашення.

Практична завдання № 7. Розрахунок та аналіз показників ефективності фінансових операцій

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навичок розрахунку показників ефективності фінансових операцій.

Завдання

Частина 1. Фірмі надали кредит на 250 днів під 12 % річних. Комісійні склали 0,5 % від суми кредиту.

Необхідно

1. Визначити прибутковість операції для кредитора у вигляді річної ставки складних відсотків, якщо кредит був виданий під прості відсотки (365/360), під складні відсотки (365/365).

2. Визначити прибутковість облікової операції, якщо вказано суму векселя і ставку дисконту.

Частина 2. Розглядаються пропозиції двох фірм щодо будівництва промислового об'єкта. У табл. 23 вказані початкові умови для кожної фірми.

Таблиця 23

Початкові умови фірм щодо будівництва промислового об'єкта

Параметри	Умови фірми А	Умови фірми В
Ціна нового об'єкта, млн. грн	50,0	55,0
Термін будівництва, років	1	1
Авансові платежі (вносяться при підписанні контракту), млн. грн	20,0	10,0
Термін кредиту, років	8	7
Пільговий період, років	2	3
Ставка відсотків, %	10,0	11,0

Кредит погашається рівними річними виплатами, ставка порівняння $q = 12\%$. Вибрати оптимальні умови контракту.

Частина 3. Умови двох контрактів наступні: $P_1 = 10,0$ млнгрн, $P_2 = 12,0$ млнгрн, $i_1 = 8\%$, $i_2 = 7\%$, $n_1 = 5$ років, $n_2 = 4$ роки. Визначити граничні параметри другого контракту, прийнявши ставку порівняння $q = 10\%$. Визначити граничні параметри другого контракту, якщо $n_1 = n_2 = 5$ років.

Методичні рекомендації

Загальним принципом визначення фінансової ефективності різних операцій є прибутковість, еквівалентна прибутковості від проведення позикової операції, тобто проблема зводиться до визначення розрахункової відсоткової ставки, що відображає загальну прибутковість на вкладений капітал.

Розрахункову відсоткову ставку в позикових операціях зазвичай називають ефективною ставкою. У розрахунках за оцінкою облігацій її називають прибутковістю на момент погашення. Проте у вітчизняній економічній літературі найчастіше розрахункову відсоткову ставку позначають терміном "повна прибутковість" (ПП).

Для запису формул розрахунку ставок повної прибутковості приймемо такі позначення:

i_e – ставка повної прибутковості;

i – відсоткова ставка;

g – відсоток комісійних утримань від суми кредиту;

n – термін погашення заборгованості ($n = t/K$);

n' – часовий інтервал від моменту обліку векселя до моменту сплати за ним;

d – облікова ставка.

1. Розрахунок ставки повної прибутковості з урахуванням комісійних

Початкові дані: $t = 250$, $i = 0,12$, $g = 0,005$, $K = 360$ (365).

Розв'язання:

а) при видачі позики під прості відсотки (365/360):

$$i_e = \frac{1 + n \cdot i \cdot \frac{1}{n}}{1 - g} - 1 = \frac{1 + \frac{250}{360} \cdot 0,12}{1 - 0,005} - 1 = 0,130296$$

б) при видачі позики під складні відсотки (365/365):

$$i_e = \frac{1 + i}{1 - g \cdot \frac{1}{n}} - 1 = \frac{1 + 0,12}{1 - 0,005 \cdot \frac{365}{250}} - 1 = 0,128227$$

в) при реалізації облікової операції:

$$i_e = \frac{1}{1 - n' \cdot d - g} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{250}{360} \cdot 0,12 - 0,005} - 1 = 0,144562$$

2. Вибір оптимальних умов у комерційних контрактах

Аналіз фінансових наслідків реалізації комерційних контрактів може проводитися на основі використання методу порівняння сучасних величин всіх платежів, передбачених цими контрактами, коли всі платежі приводяться до моменту початку їх дії.

Сучасна величина всіх витрат характеризуватиме грошову суму, яка з нарахованими на неї відсотками забезпечить виконання всіх платежів, передбачених контрактом. Для покупця найбільш вигідною є найменша сучасна величина.

При обчисленні сучасних величин дисконтування всіх платежів, передбачених контрактами, проводиться за єдиною відсотковою ставкою, так званою ставкою порівняння.

При аналізі умов різних контрактів необхідно враховувати, що збільшення терміну постачання скорочує сучасну величину витрат покупця. Тому зіставні результати можуть бути отримані у тому випадку, коли терміни постачань однакові.

При одноразовому постачанні товару заборгованість, як правило, визначається на момент постачання:

$$A = Q + I \cdot V^{t+L} + Y \cdot a_{n,q} \cdot V^{t+L},$$

де Q – сума авансового платежу; I – відсотки в пільговому періоді (прості або складні); $V = 1 + q^{-1}$; t – час від моменту укладення оборудки до моменту постачання товару; L – час пільгового періоду; $a_{n,q}$ – коефіцієнт приведення; n – термін погашення заборгованості; Y – величина щорічних строкових сплат.

При постачанні товару партіями зі заздалегідь обумовленими термінами постачання для кожної партії встановлюють відповідні моменти часу, що визначають заборгованість:

$$A = Q_1 + Q_2 \cdot V^t + I \cdot a_{L,q} \cdot V^t + Y \cdot a_{L,q} \cdot V^{t+L},$$

де t – термін виплати останнього авансового платежу; Q_1 і Q_2 – суми авансових платежів; L – пільговий період (відсотки виплачуються щорічно); n – термін погашення заборгованості (погашення проводиться рівними річними платежами); i – договірна відсоткова ставка; I – нараховані за пільговий період відсотки; q – ставка порівняння; $Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ – величина щорічних строкових сплат; D – накопичена заборгованість на кінець терміну постачання за умови, що на авансові платежі нараховуються відсотки:

$$D = M_j \cdot 1 + i^{T_j} - Q_k \cdot 1 + i^{T_k}$$

де M_j – вартість кожної партії товару, що поставляється ($M = M_j$ – загальна вартість товару);

T_j – терміни постачань кожній партії товару ($T = T_j$ – загальний термін); T_k – час від моменту виплати останнього авансового платежу до кінця терміну постачань ($T_k = T - k$).

Зважаючи на початкові дані завдання, в табл. 24 представлені розрахункові значення основних параметрів комерційних контрактів.

Розрахункові значення основних параметрів комерційних контрактів

Параметри контрактів	Умовне позначення	А	В
Сума авансового платежу, млн. грн	Q	20	10
Залишок заборгованості після сплати авансу, млн. грн	D	30	45
Час від моменту укладення контракту до момента постачання товару, років	t	1	1
Термін погашення заборгованості (термін кредиту), років	n	6	4
Ставка відсотків за кредитом	i	0.1	0,11
Пільговий період, років	L	2	3
Множник дисконтування з параметром t	V^t	0,892857	0,892857
Множник дисконтування з параметром $(t + L)$	V^{t+L}	0,71178	0,635518
Коефіцієнт наведення з параметрами (n, q)	$a_{n,q}$	4,111407	3,037349
Коефіцієнт наведення з параметрами (L, q)	$a_{L,q}$	1,690051	2,401831
Сучасна вартість заборгованості, млн. грн	A	44,68474	48,61349

Таким чином, умови фірми А є переважнішими, оскільки сучасна величина кредиту за цією фірмою менша, ніж за фірмою В.

3. Граничні значення параметрів комерційних контрактів. Для порівняння конкурентоспроможності двох альтернативних контрактів використовується метод визначення граничних значень параметрів, при яких зіставляються ціни або відсоткові ставки.

Граничним значенням параметра контракту є величина конкурентоспроможності, що забезпечує його, щодо іншого, базового, тобто порівнюваного з ним, контракту при незмінності решти умов. Облік усіх умов контрактів при використанні граничних значень їх параметрів повинен забезпечити рівність сучасних величин платежів покупця за обома контрактами.

$$P_1 \cdot \frac{1 + i_1}{1 + q}^{-n_1} = P_2 \cdot \frac{1 + i_2}{1 + q}^{-n_2}$$

де P_1 і P_2 – вартість товару за умовами першого і другого контрактів; i_1 і i_2 – відсоткові ставки; n_1 і n_2 – терміни платежів; q – ставка порівняння.

У табл. 25 представлені умови двох контрактів.

Таблиця 25

Умови двох контрактів

Параметри	Умовне позначення	Умови контракту А	Умови контракту В
Вартість товару за умовами	P_i	10	12

контракту, млн. грн			
Термін платежів, років	n_i	5	4
Ставка порівняння, %	q	10	
Ставка відсотків, %	i	8	7

а) з наведеного виразу знайдемо i_2^* і P_2^* :

$$i_2^* = 1 + q \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{1 + i_1}{1 + q}^{n_1 \frac{1}{n_2}} - 1 = 1 + 0,1 \frac{12}{10} \cdot \frac{1 + 0,08}{1 + 0,1}^{5 \frac{1}{4}} - 1 = 0,125193$$

$$P_2^* = P_1 \cdot \frac{1 + i_2}{1 + i_1}^{n_2} \cdot 1 + q^{n_1 - n_2} = 10 \cdot \frac{1 + 0,07}{1 + 0,08}^4 \cdot 1 + 0,1^{5-4} = 9,813163 \text{ (млн грн)}$$

б) значення i_2^* і P_2^* істотно залежать від прийнятої ставки порівняння і терміну кредитування. У випадку якщо $n_1 = n_2 = n$ для розрахунків граничних значень параметрів операції можна обійтися без ставки порівняння, а саме:

$$i_2^* = 1 + i_1 \frac{P_2}{P_1}^{\frac{1}{n}} - 1 = 1 + 0,08 \frac{10}{12}^{\frac{1}{5}} - 1 = 0,0413279$$

$$P_2^* = P_1 \cdot \frac{1 + i_1}{1 + i_2}^n = 10 \cdot \frac{1 + 0,08}{1 + 0,07}^5 = 10,476106 \text{ (млн грн)}$$

Таким чином, за умови, що терміни контрактів однакові, переважно будуть умови першого, оскільки $i_2^* < i_2$ і $P_2^* < P_2$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ПРОСТА ВІДСОТКОВА СТАВКА

1. Фірма “Любава” взяла позику обсягом 100 тис. грн. терміном на 2 роки під 15% річних і після закінчення позичкового періоду має повернути кредит з відсотками. Яку суму поверне “Любава” банку, якщо відсотки прості?

2. Молода сім’я отримала від банку позику на будівництво житла обсягом 60 тис. грн. терміном на 3 роки під прості відсотки 16% річних. Визначте нарощену суму кредиту і відсотки.

3. Внески на ощадний рахунок становлять 50 тис. грн. на початку кожного року. Визначте, яка сума буде на рахунку через 10 років при відсотковій ставці 11% (відсотки прості)?

4. Банк приймає внески на терміновий депозит на таких умовах: відсоткова ставка при терміні 35 днів – 45%; при терміні 65 днів – 48% ,при терміні 90 днів – 50%. Розрахуйте дохід клієнта на вказані терміни, якщо внесок становить 10 тис. грн., а рік не високосний. Метод розрахунку: точні відсотки з точним числом днів.

5. Клієнт вклав у банк на депозит 2000 грн. на термін з 1 квітня по 6 травня з простою відсотковою ставкою 6% річних. Розрахуйте дохід клієнта за трьома методами, якщо рік не високосний.

6. Банк приймає депозити на 3 місяці за ставкою 5% річних, на 6 місяців за ставкою 6% річних і на рік за ставкою 8% річних. Визначте суму, яку отримає власник депозиту обсягом 500000 грн. для трьох випадків. Порівняйте отримані результати для 5% кварталних, 6% піврічних, 8% річних.

7. Комерційний банк приймає кошти від населення під прості відсотки з відсотковою ставкою 36% річних. Клієнт вніс 6 тис. грн. на депозит з 12 лютого по 24 квітня. Визначте величину множника нарощення і нарощену суму для випадку: а) точних відсотків з точним числом днів; б) звичайних відсотків з точним числом днів; в) звичайних відсотків з наближеним числом днів; рік не високосний.

8. Клієнт вклав у банк 3 тис. грн. 1 лютого. Відсоткова ставка банку з 1 лютого по 18 лютого – 60% річних; з 19 лютого по 7 березня – 56% річних; з 8 березня по 23 березня – 53% річних; з 24 березня по 19 квітня, коли був вилучений внесок, – 48% річних. Визначте дохід клієнта і ефективну відсоткову ставку. Метод розрахунку: звичайні відсотки з точним числом днів, рік не високосний.

9. Фірма вклала в комерційний банк 28 тис. грн. на термін з 9 листопада по 21 листопада. На внески “до запитання” банк нараховує відсотки – 36% річних. Відсотки звичайні з наближеним числом днів у році. Визначте нарощену суму.

10. Клієнт вклав у банк 14 тис. грн. на термін з 14 лютого 2003 р. по 23 липня цього ж року. На внески “до запитання” терміном більше місяця банк нараховує 84% річних. Визначте нарощену суму при розрахунку за: а) точними відсотками з точним числом днів; б) банківським методом; в) звичайними відсотками з наближеним числом днів, якщо рік не високосний.

11. Клієнт вклав в Ощадбанк 3 тис. грн. Згідно з умовами договору “до запитання”, відсоткова ставка може бути змінена банком в односторонньому порядку. Внесок було зроблено 3 квітня під 24% річних. 22 квітня відсоткова ставка, згідно з рішенням Правління банку, встановлена в 12% річних, а 20 травня – 84% річних. Внесок разом з відсотками отриманий 3 червня. Визначте нарощену суму, якщо розрахунок відсотків проводиться за точними відсотками з точним числом днів у році ($K = 365$).

12. Клієнт отримав кредит обсягом 6 тис. грн. терміном на 3 місяці. Сума повернення кредиту – 7,5 тис. грн. Визначте відсоткову ставку банку.

13. На який термін виданий кредит обсягом 300 тис. грн. під відсоткову ставку 60% річних, якщо банк отримав суму від позичальника 380 тис. грн. Методика розрахунку: банківська.

14. Скільки років потрібно, щоб сума 1 млн. грн. досягла величини 2,16 млн. грн., якщо відсоткова ставка – 14,5%.

15. Визначте, який відсоток повинна встановити кредитна спілка “Калина” при наданні позики обсягом 8000 грн., щоби при терміні 187 днів мати дохід не менший, ніж 1400 грн. Відсотки звичайні з наближеним числом днів.

16. Клієнт поклав на депозитний рахунок 4000 грн. терміном на 3 місяці під відсоткову ставку 35% річних. Відсотки прості. Сума, отримана клієнтом після закінчення терміну, 4540 грн. Визначте відсоткову ставку податку на дохід.

17. Обсяг кредиту, отриманого фірмою “Фокстрот” на термін 6 місяців, дорівнює 60 млн. грн. Сума повернення кредиту – 70 млн. грн. Визначте просту відсоткову і облікову ставку кредиту.

18. Підприємство міняє 60 млн. грн. на долари США за курсом 1дол. – 5,32 грн. Скільки доларів США отримає підприємство?

19. Туристична фірма має 50000 грн. і хоче поміняти їх на євро. Курс купівлі/продажу євро – 6,62/6,72. Яку суму отримає фірма і скільки заробить банк на цій операції?

20. Студент має 100 дол. США і хоче купити євро. Курс купівлі – долара 5,25. Скільки євро купить студент, якщо курс продажу євро – 6,40?

21. Необхідно поміняти 1000 євро на італійські ліри. Курс купівлі/продажу євро 6,40/6,65; 1,92/2,05 для італійської ліри. Яку суму отримає клієнт, який прибуток отримає банк на цій операції?

22. Турист повертається з Бельгії через Чехію і вирішив поміняти 300 бельгійських франків на чеські крони. Курс американський долар/бельгійський – 4,6/4,7; американський долар/чеська крона: 2,62/2,72. Яку суму отримає турист у результаті обміну?

23. Визначте курс англійського фунта відносно долара США на початку лютого 2004 р., якщо 535 грн. = 100 дол., а 930 грн. = 100 фунтів.

24. Визначте курс гривні відносно латвійського лата і литовського лита, якщо: 1 латвійський лат = 9859 рос. руб., 1 литовський лит = 1449 рос. руб., 10 рос. руб. = 1,85 грн.

25. Підприємство для модернізації устаткування вирішило взяти в банку кредит на 600 млн. грн. Кредит видається під 28% річних. Термін кредиту – 9 місяців. Крім того, банк вимагає 8% від суми кредиту в заставу. Яку суму отримає підприємство, якщо відсотки прості і оплачуються при видачі кредиту. Визначте реальну відсоткову ставку для кредиту.

26. Фірма “ВІКА” отримала на півроку банківський кредит на 8000 грн. під 24% річних. Відсотки за кредит банк бере авансом. Розрахуйте реальну відсоткову ставку за кредит у випадку: а) застава не вимагається; б) застава за надання кредиту становить 6% від суми кредиту.

27. Є два варіанти купівлі квартири: заплатити 20 тис. дол. сьогодні або 21 тис. дол. через рік. Крім цього, є можливість вкласти 20 тис. дол. на депозит у банку на рік під 6% річних. Яку альтернативу вигідніше вибрати?

28. Фірма “КОМФОРТ” отримала кредит на 3 місяці під заставу нерухомості вартістю 160000 грн. Величина кредиту становить 80% від вартості нерухомості. Відсоткова ставка за кредитом – 36% річних, комісійні з обслуговування кредиту становлять 2%. Визначте суму отриманого кредиту, реальну відсоткову ставку і дохід банку, якщо відсотки за кредит банк бере авансом.

29. Підприємство отримало кредит в 80000 грн. терміном на 2 роки під просту відсоткову ставку 24% річних. Розгляньте план погашення кредиту і нарахованих на залишкову суму кредиту відсотків серією з восьми рівних платежів, які виплачуються в кінці кожного кварталу.

30. Фірма взяла в банку позику 100 тис. грн. терміном на 1 рік під 12% річних. Відсотки прості і виплачуються в кінці року. Знайти суму, яку фірма має повернути.

31. Банк розміщує валютні кошти фізичних осіб на депозит під 25% річних. Визначте множник нарощення і нарощену суму депозиту в 1000 дол., якщо термін депозиту 3 роки, а відсотки прості.

32. Фірмі виділили банківський кредит на термін з 3 січня по 12 березня під прості відсотки з ставкою 12% річних. Сума кредиту – 80 тис. грн. Визначити за трьома методами множник нарощення і нарощену суму.

33. За який час позика величиною 6000 грн., вкладена під 7% простих річних ($K = 360$), збільшиться на таку ж суму, що й вклад 7000, внесений з 3.03 по 1.07 під 9% простих річних ($K = 365$).

34. Фірма взяла в комерційному банку кредит на суму 600 тис. грн. терміном на 4 роки. Згідно з угодою за перший рік відсоткова ставка становила 24% і з урахуванням інфляції кожний подальший рік підвищувалася на 5 пунктів. Визначте множник нарощення, нарощену суму і дохід банку.

35. Ощадний банк приймає вклади “до запитання” під відсоткову ставку $i\% = 4\%$. Відсотки прості, $K = 365$ днів. Через скільки днів вклад в 45000 грн. наросте до 50000 грн.?

36. Українські банки приймають у населення грошові кошти на термінові вклади. Клієнт хоче вкласти в банк грошову суму 3000 грн. на 3 місяці з таким розрахунком, щоб нарощена сума була не менше 4800 грн. Якою повинна бути річна проста відсоткова ставка?

37. На який термін виписаний вексель, якщо його номінальна вартість становить 14000 грн., а власник векселя отримав 12560 грн. за обліковою простою відсотковою ставкою 90% річних?

38. Власник векселя облікував його в банку за 3 місяці до терміну погашення і отримав 4560 грн. Облікова ставка банку – 14%. Визначте номінальну вартість векселя.

39. Визначте номінальну вартість векселя і дисконт банку, якщо його власник облікував за простою обліковою ставкою 18% за два місяці до терміну погашення і отримав 12000 грн.

40. Банк купує акції фірми за ціною 1000 грн., дисконтна ставка – 30% річних, а дата погашення – через місяць. Визначте номінал цієї акції.

41. Визначте просту облікову ставку, еквівалентну простій відсотковій ставці 6% річних при обліку векселя за два місяці до терміну погашення.

42. Визначте просту відсоткову ставку, еквівалентну простій обліковій ставці 5% річних при депозиті 4 місяці.

43. Власник векселя номінальною вартістю 10000 грн., облікував його в банку за два місяці до терміну погашення за простою обліковою ставкою 6% річних. Банк отримує комісійні за обсягом 2% від вартості векселя. Яку суму отримав власник і який дохід цієї операції за ефективною ставкою простих відсотків?

44. Власник векселя номінальною вартістю 3000 грн., облікував його в банку за три місяці до терміну погашення за простою обліковою ставкою 6% річних. Комісійні – 1% від номінальної вартості векселя. Яку суму отримає власник і скільки становить дохід цієї операції за ефективною ставкою простих відсотків?

45. Чотири векселі номінальною вартістю 2000 грн., 3000 грн., 4000 грн., 8500 грн., з терміном погашення 35, 60, 70, 90 днів потрібно об'єднати в один з терміном погашення 120 днів. Визначте вартість об'єданого векселя, якщо проста відсоткова ставка, за якою відбувається об'єднання – 6% річних.

46. Три векселі номінальною вартістю 2000 грн., 6000 грн., 8000 грн. з термінами 40, 56, 75 днів необхідно об'єднати в один з терміном погашення 95

днів. Об'єднання відбувається за ставкою простих відсотків 8% річних. Яка вартість об'єданого векселя?

47. Підприємець купив партію товару за 20000 грн., а продав за 35600 грн. Скільки відсотків прибутку отримав підприємець?

48. Товарообіг магазину в червні місяці становив 940 тис. грн., а в липні – 890 тис. грн. На скільки відсотків зменшився товарообіг у липні? 49. За продаж дачної ділянки посередник отримав 2000 грн., що становить 5% від вартості продажу. Визначте, за яку суму було продано дачну ділянку?

50. Підприємець купив першу і другу партію товару відповідно за 36 тис. грн. і 42 тис. грн., продав відповідно за 39,5 тис. грн. і 45,6 тис. грн. При продажі якої партії було отримано найбільший відсоток прибутку?

51. Знайдіть: а) 4% “на 100” з 456; б) 6% “на 100” з 785; в) 10% “на 100” з 2400; г) 15% “на 100” з 56000.

52. Знайдіть: а) 3% “в 100” з 1241; б) 5% “в 100” з 356; г) 23% “в 100” з 2340.

53. Знайдіть з 1320 грн. і 3467 грн.: а) 45% “зі 100”; б) 27% “на 100”; в) 61% “в 100”.

54. Підприємство реалізувало партію товару за 380000 грн., і отримало 25% прибутку. Визначте величину прибутку і собівартість товару.

55. Фірма реалізувала партію товару за 24560 грн. і отримала 6% збитку. Визначте величину збитку і собівартість товару.

56. Через псування було списано 12% товару. Визначте, скільки товару було списано, якщо його залишилось 567 кг?

57. Загальний оклад робітника, включаючи премію обсягом 10% від місячного окладу, становить 864 грн. Знайдіть величину премії і величину окладу.

58. Підприємець за 1кг деякого товару хоче отримати 10 грн. 67 коп. Яку ціну йому потрібно назначити, щоб зробивши 3%-у знижку, отримати 10,67 грн. за 1 кг?

59. Об'єднуються три платежі на суму 5, 7, 4 тис. грн. і з термінами платежів 12.04, 7.06, 22.09. Термін об'єднання платежів – 11.08. Визначте суму об'єданого платежу при простій ставці 8% і часовій базі $K = 365$ днів.

60. Для умови задачі 59 задані нові терміни платежів: 7.07, 12.09, 11.10, термін об'єднання платежів – 1.09.

61. Об'єднуються чотири платежі з сумами обсягом 8, 10, 12, 14 тис. грн. з термінами 2.04, 28.04, 13.08, 15.08. Термін об'єднання платежів 11.08 при

складній ставці $i = 11\%$ річних і $K = 360$. Необхідно розрахувати суму об'єднаного платежу.

62. Для умови задачі 61 задані нові терміни платежів: 7.07, 12.09, 11.10, 22.12, термін об'єднання платежів – 12.10.

63. Платежі сумами 150, 100, 165 тис. грн. і термінами погашення 100, 120, 250 днів від деякої дати заміщуються одним платежем з терміном 270 днів від цієї ж дати. Визначте суму об'єднаного платежу при простій ставці 9% річних і часовій базі $K = 360$ днів.

64. Для умови задачі 63 задані нові терміни погашення: 120, 150, 190 днів від деякої дати та термін об'єднання платежів – 180 днів від цієї ж дати, часова база $K = 365$ днів.

65. Для умови задачі 63 задані нові терміни погашення: 80, 210, 290 днів від деякої дати та термін об'єднання платежів – 200 днів від цієї ж дати, часова база $K = 365$ днів.

66. Рух коштів на рахунку відбувався так: 5.04.02 – надходження 3000 грн. (відкрито рахунок); 12.05.02 – зняття 1000 грн.; 30.06.02 – надходження 700 грн.; 11.08.02 – надходження 400 грн.; 15.09.02 – зняття 350 грн.; 7.10.02 – надходження 200 грн.; 30.12.02 – рахунок закрито. Відсоткова ставка – 21% річних. Визначити суму нарахованих відсотків, використавши точні відсотки з точною кількістю днів. Визначити загальну суму коштів.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення нарощеної суми позички.
2. Запишіть формулу нарощення за простими відсотками.
3. Що показує множник нарощення?
4. В яких задачах використовується розрахунок відсотків „зі 100”?
5. Коли проводиться розрахунок відсотків „на 100” та „в 100”?
6. Які часові бази існують для нарахування відсотків?
7. Як проводиться підрахунок днів для нарахування відсотків?
8. Охарактеризуйте три варіанти розрахунку простих відсотків.
9. Запишіть формулу нарощення за простими відсотками при зміні відсоткових ставок у часі.
10. Наведіть формулу нарахування відсотків при зміні суми депозиту в часі.
11. Яка величина називається відсотковим числом?

12. Запишіть формулу відсоткового дільника (дивізора).
13. Зобразіть і поясніть на графіку контур збалансованої фінансової операції.
14. Розкрийте суть актуарного методу погашення заборгованості частковими платежами.
15. У чому полягає суть погашення заборгованості частковими платежами за правилом торговельника?
16. Запишіть формули погашення споживчого кредиту.
17. Дайте визначення сучасної вартості майбутнього платежу.
18. Які види дисконтувань вам відомі?
19. Розкрийте суть математичного дисконтування.
20. Запишіть формулу банківського обліку.
21. Виведіть формули визначення терміну позички для ставок нарощення і дисконтування.
22. За якими формулами визначаються ставка нарощення та облікова ставка?
23. Запишіть рівняння еквівалентності при об'єднанні декількох платежів в один.
24. Який вигляд має рівняння еквівалентності при заміні однієї кількості платежів на іншу?

СКЛАДНА ВІДСОТКОВА СТАВКА

1. Банк приймає валютні внески на депозит за номінальною відсотковою ставкою 12% річних. Нарахування відсотків щомісячне. Визначте дохід клієнта, якщо внесок 2500 грн., а термін внеску – 6 місяців.

2. Визначте, яка сума буде на рахунку, якщо вклад на суму 800 тис. грн. зроблено під 8% річних на 20 років, а відсотки нараховуються щоквартально.

3. Визначте нарощену суму внеску в 3 тис. грн. при терміні 2 роки за номінальною відсотковою ставкою 4% річних. Нарахування відсотків проводиться: а) один раз на рік, б) за півріччями, в) щоквартально, г) щомісячно.

4. Яка сума повинна бути виплачена, якщо п'ять років назад була видана позика 2000 грн. під 15% річних із щомісячним нарахуванням відсотків.

5. Банк приймає внески від населення за номінальною відсотковою ставкою 12% річних. Нарахування відсотків щомісячне. Внесок 1200 грн. був повернений через 102 дні. Визначте дохід клієнта.

6. Внески на ощадний рахунок становлять 50 тис. грн. на початку кожного року. Визначте, скільки буде на рахунку через 10 років при відсотковій ставці 11%. Відсотки прості.

7. Для будівництва заводу банк надав фірмі кредит у 200 млн. грн. терміном на 10 років з розрахунку 13% річних. Обчисліть множник нарощення, суму нарахованих відсотків і вартість кредиту на кінець кожного року.

8. Фірмі “BMW” було надано пільгову позику в 500000 дол. на 3 роки під 12% річних. Відсотки на позику нараховуються один раз на рік. За умовами договору фірма має право оплати позику і відсотки одним платежем в кінці трьохрічного періоду. Скільки повинна заплатити фірма при розрахунку за простими і складними відсотками?

9. Визначте період часу, необхідний для потроєння капіталу за простими і складними відсотками при відсотковій ставці 22% річних. В останньому випадку нарахування відсотків щоквартальне.

10. На який термін потрібно покласти кошти в банк під 26% річних при щомісячному, щоквартальному, піврічному нарахуванні відсотків, щоб сума вкладу подвоїлась. Метод розрахунку – банківський.

11. Клієнт вклав на депозит терміном на 5 місяців 1345 грн. Після закінчення терміну він отримав 1748 грн. Визначте відсоткову ставку банку.

12. За який час позика величиною 6000 грн., вкладена під 7% складних річних ($K = 360$), збільшиться на таку ж суму, що й вклад 7000 грн., зроблений з 3.03 по 1.07 під 9% складних річних ($K=365$).

13. Якою повинна бути мінімальна відсоткова ставка, щоб сума вкладу подвоїлась за рік при нарахуванні відсотків: а) щоквартально, б) щомісячно.

14. Реклама одного комерційного банку пропонує 82% річних при щомісячному нарахуванні відсотків. Другий комерційний банк пропонує 86% річних при щоквартальному нарахуванні відсотків. Термін вкладу – 11 місяців. Якому банку віддати перевагу?

15. Банк не може забезпечити прибутковість за внесками населення більше, ніж 15% на рік. Яку номінальну ставку він повинен оголосити, якщо капіталізацію відсотків передбачається здійснювати а) раз на півріччя; б) щоквартально; в) щомісячно?

16. Порівняйте умови чотирьох банків: а) відсотки прості і відсоткова ставка 28%; б) номінальна відсоткова ставка – 26% річних, нарахування відсотків відбувається за півріччями; в) номінальна відсоткова ставка – 24%, нарахування відсотків щоквартальне; г) номінальна відсоткова ставка – 22%, нарахування відсотків щомісячне.

17. Клієнт вклав 15000 грн. на терміновий депозитний рахунок терміном на 8 місяців під номінальну відсоткову ставку 36% річних. Визначте нарощену суму і ефективну відсоткову ставку.

18. Яку суму потрібно покласти до банку, щоб через 1,5 року при нарахуванні відсотків раз на півроку можна було б одержати 2500 грн., якщо річна ставка становить 22%?

19. Підприємство взяло кредит на 6 років під річну відсоткову ставку 48%. Комісійні становлять 3% від суми кредиту. Визначте ефективну відсоткову ставку при нарахуванні відсотків: а) один раз на рік; б) щоквартально; в) щомісячно.

20. Підприємство отримало позику на 3 роки під річну відсоткову ставку 38%. Комісійні становлять 5% від суми кредиту. Визначте ефективну відсоткову ставку позики, якщо: а) позика отримана під прості відсотки, б) позика отримана під складні відсотки з нарахуванням відсотків один раз на рік, в) при щомісячному нарахуванні відсотків.

21. Визначте дохід клієнта і податок за терміновим депозитом у 8000 грн. на 7 місяців з номінальною відсотковою ставкою 28% річних, якщо відсоткова ставка податку 20%. Нарахування відсотків проводиться: а) щоквартально, б) щомісячно.

22. Визначте номінальну ефективну ставку простих і складних відсотків для депозиту терміном на 4 місяці, якщо номінальна відсоткова ставка податку 13%. Банк нараховує відсотки щомісячно.

23. Сума термінового депозиту на 6 місяців – 3000 дол. Номінальна відсоткова ставка банку – 16% річних при щомісячному нарахуванні відсотків. Який дохід клієнта, якщо податок на прибуток – 15%.

24. Виробнича фірма отримала кредит в 240000 грн. терміном на 4 роки. Відсотки – складні. Відсоткова ставка за перший рік – 24% і кожен наступний рік збільшується на 3%. Визначте суму повернення кредиту.

25. Визначте період часу, необхідний для подвоєння капіталу за простими і складними відсотками при відсотковій ставці 12% річних. В останньому випадку нарахування відсотків щомісячне.

26. 3.09.03 р. курс купівлі долара в банку “Аваль” становив 5,25 дол. Клієнт купив гривні на суму 500 дол. і помістив їх на терміновий депозит терміном на два місяці. Гривнева відсоткова ставка банку на цей період становила 8% річних. Валютна відсоткова ставка – 4%. Курс продажу долара 3.11.03 р. становив 5,45 дол. Потрібно визначити нарощену валютну суму і ефективну відсоткову ставку такого нарощення.

27. Яким умовам віддасть перевагу клієнт при отриманні кредиту: а) відсоткова ставка – 12%, нарахування відсотків щомісячно; б) відсоткова ставка – 14%, нарахування відсотків щоквартальне; в) відсоткова ставка – 23%, нарахування відсотків за півріччями.

28. Розрахувати майбутню вартість облігації номіналом 100 тис. грн., яка випущена на 5 років. Перші два роки відсотки нараховуються за ставкою 15%, а в наступні три роки – за ставкою 20% річних.

29. Фірма “Техфарм” для будівництва цеху з виробництва медпрепаратів отримала від держави пільговий кредит під 6% річних на 4 роки. Сума кредиту – 180000 грн. Відсотки складні і оплачуються при видачі кредиту. Яку суму отримає фірма?

30. Підприємець отримав кредит в 18000 грн. на три роки під 18% річних. Погашення кредиту і відсотків повинне відбуватись у кінці кожного року рівними сумами. Відсотки нараховуються на непогашену частину кредиту. Визначити платежі за кредитом і відсоткові платежі за роками.

31. Сума кредиту – 20000 грн. Кредит отриманий на 4 роки під відсоткову ставку 24% річних. Нараховуються відсотки на непогашену суму кредиту. Погашення кредиту і відсотків повинне відбуватися рівними платежами в кінці кожного року. Визначте величину річного платежу, загальну суму відсотків і нарощену суму кредиту.

32. Фірма узяла в комерційному банку кредит на суму 600 тис. грн. терміном на 4 роки. Згідно з угодою, за перший рік відсоткова ставка становила 24% і з урахуванням інфляції кожного року підвищувалася на 5 пунктів. Визначте множник нарощування, нарощену суму і дохід банку.

33. Векселевласник отримав 5000 грн. за векселем з терміном погашення 7 місяців. Номінальна вартість векселя 7000 грн. Визначте облікову ставку банку.

34. Номінальна вартість векселя 11000 грн. Векселевласник обготівкував його в банку за 38 днів до терміну погашення під облікову ставку 84%. Яку суму отримає векселевласник?

35. Векселевласник облікував вексель у банку за 6 місяців до терміну погашення за номінальною відсотковою ставкою $j = 0,6$. Нарахування відсотків щомісячне. Номінальна вартість векселя – 120000 грн. Скільки отримав власник векселя і чому дорівнює дисконт банку?

36. Визначте, скільки коштує акція 15 червня, дата погашення якої 15 серпня, якщо її номінал 325 грн., а складна дисконтна облікова ставка 30%.

37. Фінансова компанія за кредит в 40000 грн. терміном на 5 місяців під номінальний обліковий відсоток 0,9 отримала дисконт 4000 грн. Відсотки складні і нараховуються щомісячно. На який термін було видано кредит?

38. Визначте номінальний обліковий відсоток, за яким був обготівкований вексель номіналом 3000 грн. і терміном погашення 80 днів, якщо векселевласник отримав 2750 грн. Нарахування відсотків щомісячне.

39. Власник векселя облікував його в банку за три місяці до кінця терміну погашення і отримав 1600 грн. Номінальний обліковий відсоток банку – 0,72. Відсотки складні і нараховуються щомісячно. Визначте номінальну вартість векселя.

40. Визначте просту і складну облікові ставки, якщо за кредит в 2400 грн. з терміном погашення три місяці потрібно заплатити 3200 грн. Нарахування дисконту щомісячне.

41. Власник векселя номінальною вартістю 10000 грн. облікував його в банку за обліковою ставкою 6%. До терміну погашення залишилось 4 місяці. Визначте поточну вартість векселя і дисконт банку у випадку простої і складної облікових ставок. В останньому випадку дисконтування щомісячне.

42. Визначте просту і складну номінальні облікові ставки при кредитуванні, якщо за кредит в 5000 грн., виданий на чотири місяці, потрібно заплатити 6000 грн. В останньому випадку нарахування дисконту щомісячне.

43. На який термін видано кредит при обліковій ставці 0,7, якщо позичальник отримав 1800 грн., а номінальна вартість кредиту – 2000 грн. Дисконтування за простою і складною обліковими ставками. В останньому випадку нарахування дисконту щомісячне.

44. Яку суму необхідно вкласти у банк під складну відсоткову ставку 25% річних, щоб накопичити 30 тис. грн. за 2 роки за щомісячного нарахування відсотків?

45. Визначте номінальну вартість векселя і дисконт банку, якщо банк облікував вексель за три місяці до терміну погашення за обліковою ставкою 6% і власник векселя отримав 4800 грн. Нарахування дисконту щомісячне.

46. Визначте складну облікову ставку, еквівалентну складній відсотковій ставці 6% річних. Нарахування дисконту і відсотків один раз на рік.

47. Визначте річну відсоткову ставку для вкладу величиною 100 тис. грн., якщо за 13 років ця сума зросла до 1 млн. грн. при щоквартальному нарахуванні відсотків.

48. Визначте номінальну складну облікову ставку, еквівалентну номінальній ставці, яка дорівнює 4% складних відсотків, при щомісячному нарахуванні дисконту і відсотків.

49. Визначте складну відсоткову ставку, еквівалентну складній обліковій ставці 7% річних при депозиті 4 місяці.

50. Власник векселя номінальною вартістю 3000 грн., облікував його в банку за три місяці до терміну погашення за простою обліковою ставкою 6% річних. Комісійні – 1% від номінальної вартості векселя. Яку суму отримає власник і який дохід цієї операції за ефективною ставкою простих і складних відсотків?

51. Три векселі номінальною вартістю 1000 грн., 3000 грн., 8000 грн. з терміном погашення 80 днів об'єднали в один номінальною вартістю 14000 грн. Об'єднання відбувається за річною ставкою складних відсотків – 19%. Знайдіть термін погашення об'єданого векселя.

52. Об'єднуються чотири платежі з сумами 8, 10, 12, 14 тис. грн. з термінами 2.04, 28.04, 3.07, 15.08. Термін об'єднання платежів – 11.08 за складною ставкою $i = 11\%$ річних і $K = 365$. Необхідно розрахувати суму об'єданого платежу.

53. Об'єднуються три платежі з сумами 5, 7, 4 тис. грн. і термінами платежів 12.04, 7.06, 22.09. Термін об'єднання платежів – 11.08. Визначте суму об'єданого платежу за складною ставкою 8% і часовою базою $K = 360$ днів.

54. Платежі на суми 150, 100, 165 тис. грн. і з термінами погашення 100, 120, 250 днів від деякої дати замінюються одним платежем з терміном 270 днів від цієї самої дати. Визначте суму об'єданого платежу за складної ставки 9% річних і часової бази $K = 360$ днів.

55. Чотири векселі номінальною вартістю 2000 грн., 3000 грн., 4000 грн., 8500 грн., з терміном погашення 35, 60, 70, 90 днів потрібно об'єднати в один з терміном погашення 120 днів. Визначте вартість об'єданого векселя, якщо складна відсоткова ставка, за якою відбувається об'єднання, – 6% річних.

Питання для самоконтролю

1. Запишіть формулу нарощення за складними відсотками .
2. На що вказує множник нарощення при нарахуванні за складними відсотками
3. Зобразіть графічно зростання за складними відсотками.
4. Запишіть формулу нарощення за складними відсотками при зміні відсоткових ставок у часі.
5. Зростання за складними і простими відсотками при різних термінах позички.
6. В яких випадках при нарахуванні відсотків використовується номінальна ставка?

7. Дайте визначення ефективної ставки.
8. Наведіть формулу нарощення при номінальній ставці.
9. Виведіть формули визначення номінальної ставки через ефективну і навпаки.
10. Пригадайте визначення сучасної вартості майбутнього платежу.
11. Які види дисконтувань вам відомі?
12. Розкрийте суть математичного дисконтування за складними відсотками.
13. Запишіть формулу банківського обліку за складною обліковою ставкою.
14. Коли застосовуються номінальна і ефективна облікові ставки?
15. Виведіть формули визначення номінальної облікової ставки через ефективну облікову і навпаки.
16. Порівняйте результати нарощення за різними видами ставок при різних термінах позички.
17. Порівняйте результати дисконтування за різними видами ставок при різних термінах позички.
18. Виведіть формули визначення терміну позички для складних ставок нарощення і дисконтування.
19. За якими формулами визначаються складні ставки нарощення та облікові ставки (номінальні та ефективні)?
20. Коли застосовується сила росту?
22. Запишіть рівняння еквівалентності при об'єднанні декількох платежів в один.
23. Який вигляд має рівняння еквівалентності при заміні однієї кількості платежів на іншу?

ФІНАНСОВІ РЕНТИ

1. Фірма створює резервний фонд. Для цього в кінці кожного року протягом 4 років у банк вкладається по 2000 грн. Відсоткова ставка банку – 16%. Визначте нарощену суму фонду і його поточну вартість.

2. Організація створює фонд страхівки в 800 тис. грн. Планується створити його протягом п'яти років. Внески робляться: а) щомісячно; б) в кінці року під відсоткову ставку 14% річних. Визначте поточну вартість фонду і величину разового внеску.

3. Фірма “Мрія ” взяла кредит в 50000 грн. на 3 роки. Річна відсоткова ставка за користування кредитом – 16%. Визначте величину разового платежу і

загальну вартість кредиту при оплаті: а) щорічними рівними внесками в кінці кожного року, б) щомісячними рівними внесками в кінці кожного місяця.

4. Поточна вартість звичайної ренти з внесками 5500 грн. в кінці кожного місяця і нарахуванням 4% річних один раз на рік дорівнює 20 тис. грн. Визначте термін ренти і нарощену суму.

5. Поточна вартість звичайної ренти із щомісячними рівними внесками в кінці кожного місяця і терміном 5 років дорівнює 80000 грн. Нарощена вартість – 240000 грн. Визначте річну відсоткову ставку, якщо нарахування відсотків відбувається один раз на рік.

6. Фірма “А” створює резервний фонд і для цього щомісячно переводить в банк 8 тис. грн. Річна відсоткова ставка при нарахуванні відсотків один раз на рік – 14%. Через який час на рахунку фірми буде 230000 грн.?

7. Пенсіонер збирає гроші для купівлі телевізора вартістю 1240 грн. Для цього він вкладає в банк щомісячно, але в кінці місяця, 50 грн. Номінальна відсоткова ставка банку – 7%. Нарахування відсотків щомісячне. Розрахуйте динаміку нарощування внеску за перших 1,5 року.

8. В кінці кожного місяця сім'я вкладає в банк 100 грн. під номінальну ставку відсотків 14%. Нарахування відсотків щомісячне. Який термін необхідний для того, щоб сума заощадження стала достатньою для придбання легкового автомобіля вартістю 70000 грн.?

9. Проводиться заміна річної ренти постнумерандо з річним платежем 1000 грн. і терміном 10 років річною рентою постнумерандо терміном 6 років. Обчислити річний платіж нової ренти, якщо відсоткова ставка – 10%.

10. Яку суму повинен щомісячно в кінці місяця вкласти член спілки “Калина”, щоб на його рахунку через 2 роки була сума 4000 грн. Номінальна відсоткова ставка спілки при щомісячному нарахуванні відсотків – 12%.

11. Кредитна спілка “Калина” створює резервний фонд 60000 грн. Заплановано створити його протягом 3 років: а) рівними річними платежами на початку кожного року, б) рівними щомісячними платежами на початку місяця. Відсоткова ставка спілки – 16%, і відсотки нараховуються раз на рік. Визначте величину разового платежу.

12. Молокозавод отримав кредит вартістю 6 млн. грн. на 1 рік. Річна відсоткова ставка за користування кредитом – 23%. Платежі за кредитом відбуваються на початку кожного місяця рівними сумами. Визначте величину місячного платежу.

13. Для створення резервного фонду фірма вносить 1440 грн.: а) на початку кожного року, б) щомісячно. Резервний фонд заплановано створити

протягом 8 років. Відсоткова ставка банку – 12% річних. Визначте нарощену і поточну вартість фонду.

14. Нарощена вартість термінової ренти з щомісячними внесками на початку кожного місяця по 7500 грн. і щомісячним нарахуванням відсотків дорівнює 325 тис. грн. Номінальна річна відсоткова ставка – 13%. Визначте термін ренти.

15. Яку суму отримає студент на випускний вечір якщо буде вкладати свою стипендію величиною 126 грн. на початку кожного місяця протягом п'яти років навчання.

16. Для створення фонду страхування фірма щорічно на початку кожного року протягом п'яти років вкладає в банк привілейовані акції. Визначте дохід фірми і прибутковість операції за ефективною ставкою простих і складних відсотків.

17. Студент вкладає на початку кожного місяця в банк по 30 грн. під 18% річних. Визначте, через який час він збере суму, достатню для купівлі холодильника вартістю 1450 грн. Відсотки нараховуються щомісячно.

18. Сім'я хоче купити через 5 років автомобіль за 8 тис. дол. Яку суму їй потрібно вносити кожного року в банк за умови, що банк нараховує відсотки щомісячно при ставці 8% річних: а) на початку року; б) в кінці року?

19. Яку суму повинен батько покласти сьогодні на рахунок при ставці 8% річних, щоб забезпечити сину щорічні виплати обсягом 700 дол. протягом 4-ох років навчання в інституті. (Син навчається на першому курсі, за перший рік батько оплатив).

20. Передбачається поставка обладнання вартістю 80000000 грн. Можливі наступні варіанти оплати: 1) аванс – 15%. Оплата залишкової суми протягом 2-х років рівними місячними платежами під номінальну відсоткову ставку 16% річних. Нарахування відсотків щомісячне; 2) аванс – 10%. Відстрочка платежу протягом 6 місяців. Оплата залишку рівними щоквартальними платежами протягом 2-х років. Нарахування відсотків один раз на рік за відсотковою ставкою 17% річних; 3) оплата обладнання протягом року рівними щоквартальними платежами за номінальною відсотковою ставкою – 18% річних нарахування відсотків щоквартальне. Розгляньте фінансові умови запропонованих варіантів.

21. Продається об'єкт вартістю 3,5 млн. грн. Продавець пропонує оплату рівними місячними платежами протягом 2-х років. Нарахування відсотків щомісячне під номінальну відсоткову ставку 24,5 річних. Покупець пропонує такі умови: оплата рівними щоквартальними платежами протягом 3-х років. Нарахування відсотків два рази на рік під номінальну відсоткову ставку 20%

річних. Визначте величину річних платежів і загальну наращену суму для обох варіантів.

22. Автосалон реалізує автомобіль вартістю 84000 грн. Можливі такі варіанти оплати: 1) аванс – 15%. Залишок вартості – в кредит терміном на рік під номінальну відсоткову ставку 24% річних. Відсотки нараховуються щомісячно. Рівні платежі за кредитом проводяться щоквартально; 2) аванс – 20% вартості. Можлива відстрочка платежів на три місяці. Кредит нараховується і виплачується щомісячно рівними сумами під номінальну відсоткову ставку 25,5% річних протягом року; 3) аванс – 25% вартості кредиту. Кредит нараховується і виплачується терміново протягом 2-х років під номінальну відсоткову ставку 26% річних щоквартально рівними сумами. Розрахуйте фінансові можливості трьох варіантів.

23. Замініть річну ренту з річним платежем 600 грн. і терміном 10 років семирічною річною рентою. Ставка відсотка – 8% на рік.

24. Замініть річну десятирічну ренту з річним платежем 1000 грн. на ренту з піврічним платежем по 600 грн., річна ставка відсотка – 8%.

25. Син мав у банку на рахунку 50000 грн., на які щомісячно нараховувались 0,8%. Син поїхав у десятирічне відрядження за кордон і попросив батька за цих 10 років потратити всі його гроші, що є на рахунку. Скільки грошей буде отримувати батько кожного місяця?

26. Покупець запропонував два варіанти розрахунку при купівлі дачі: 1) 5000 дол. терміново, а потім по 1000 дол. протягом 5ти років; 2) 8000 дол. терміново і по 300 дол. протягом 5-ти років. Який варіант вигідніший при річній ставці відсотка: а) 10%, б) 5%.

27. Яким повинен бути платіж кінцевої річної ренти терміном 8-ми років, щоб її сучасна вартість була 16000 при ставці 12%?

28. Скільки років буде потрібно, щоби платежі обсягом 1 млн. грн. в кінці кожного року досягли 10,897 млн. грн., якщо відсоткова ставка – 14,5%.

29. Фонд обсягом 21 млн. грн. був створений за 2 роки шляхом надходжень по 770 тис. грн. на початку кожного місяця. Визначити річну відсоткову ставку.

30. Позичка величиною 5000 тис. грн. погашається щомісячними платежами по 141,7 тис. грн. Скільки років відбудуватиметься погашення при річній відсотковій ставці 16%?

31. Визначте річну відсоткову ставку для позики в 980 тис. грн., що погашається рівномірними періодичними платежами по 100 тис. грн. кожні півроку протягом семи років.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення потоку платежів і розкрийте його класифікацію.
2. Який платіж називається фінансовою рентою?
3. Охарактеризуйте параметри ренти.
4. Проаналізуйте ренти за класифікаційними групами.
5. Дайте визначення сучасної вартості та нарощеної суми потоку платежів.
6. Наведіть формули розрахунку нарощеної суми та сучасної вартості потоку платежів.
7. Виведіть формулу обчислення нарощеної суми річної постійної ренти постнумерандо.
8. Наведіть декілька формул обчислення нарощеної суми ренти постнумерандо з різними параметрами.
9. Порівняйте результати нарощення для рент з різними параметрами.
10. Виведіть формулу обчислення сучасної вартості річної постійної ренти постнумерандо.
11. Наведіть декілька формул обчислення сучасної вартості ренти постнумерандо з різними параметрами.
12. Порівняйте сучасні вартості для рент з різними параметрами.
13. Запишіть формули залежностей між нарощеною і сучасною вартістю ренти та коефіцієнтами нарощення і приведення.
14. Наведіть декілька формул визначення величини платежу ренти з різними параметрами.
15. Наведіть декілька формул визначення терміну ренти з різними параметрами.
16. Опишіть алгоритм визначення величини відсоткової ставки.
17. Яка методика розрахунку нарощених сум і сучасних вартостей постійних рент пренумерандо?
18. Наведіть методику розрахунку нарощених сум і сучасних вартостей постійних рент з платежами в середині періодів.
19. Охарактеризуйте відкладені ренти на прикладі задачі про поділ спадку.
20. Дайте визначення вічної ренти і оцініть її нарощену суму і сучасну вартість.
21. Прокласифікуйте види конверсії рент.

Рекомендована література

Основна

1. Башарин Г. П. Начала финансовой математики / Г. П. Башарин. – М. : ИНФРА-М, 1998. – 160 с.
2. Бочаров П. П. Финансовая математика : учебник / П. П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. – М. : ИНФРА-М, 2002. – 624 с.
3. Долінський Л. Б. Фінансові обчислення та аналіз цінних паперів : навч. посібн. / Л. Б. Долінський. – К. : Майстер-Клас, 2005. – 192 с.
4. Ковалев В. В. Курс финансовых вычислений / В. В. Ковалев, В. А. Уланов. – М. : Финансы и статистика, 2001. – 328 с.
5. Малыхин В. И. Финансовая математика : учебн. пособ. для вузов / В. И. Малыхин. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 247 с.

6. Медведев Г. А. Начальный курс финансовой математики : учебн. пособ. / Г. А. Медведев. – М. : ИНФРА-М, 2000. – 267 с.

7. Мелкумов Я. С. Финансовыевычисления. Теория и практика : Учеб. пособ. / Я. С. Мелкумов. – М. : ИНФРА-М, 2007. – 408 с.

8. Роздавальний матеріал з навчальної дисципліни "Фінансова математика" для студентів напряму підготовки "Економічна кібернетика" денної форми навчання / укл. О. В. Панасенко. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2010. – 16 с.

9. Фомин Г. П. Финансовая математика: 300 примеров и задач : учебн. пособ. / Г. П. Фомин. – М. : Гном-Пресс, 2000. – 120 с.

10. Четыркин Е. М. Финансовая математика : учебник / Е. М. Четыркин. – М. : Дело, 2004. – 400 с.

Додаткова

11. Бакаєв Л. О. Кількісні методи в управлінні інвестиціями : навч. посібн. / Л. О. Бакаєв. – К. : КНЕУ, 2000. – 151 с.

12. Бланк И. А. Инвестиционный менеджмент : учебн. курс / И. А. Бланк. – К. : Эльга-Н; Ника-Центр, 2001. – 448 с.

13. Вітлінський В. В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком : навч.-метод. посібн. для самост. вивч. дисц. / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко. – К. : КНЕУ, 2000. – 292 с.

14. Кочович Е. Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов / Е. Кочович ; пер. с серб. – М. : Финансы и статистика, 1994. – 268 с.

15. Лукасевич И. Я. Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений / И. Я. Лукасевич. – М. : Финансы ; ЮНИТИ, 1998. – 400 с.

16. Шимон Беннинга. Финансовое моделирование с использованием Excel / Шимон Беннинга. – М. : ООО "И.Д. Вильямс", 2007. – 592 с.