МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи студентів спеціальності 051 «Економіка» освітня програма «Економічна кібернетика», «Економічна аналітика», «Економіка підприємства» 071 «Облік і оподаткування» освітня програма «Облік і оподаткування»

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри
інформаційних систем в економіці
Протокол №7
від 15 лютого 2018р.

ЧЕРНІГІВ ЧНТУ 2018

Теорія ймовірностей. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи студентів спеціальності 051 «Економіка» освітня програма «Економічна кібернетика», «Економічна аналітика», «Економіка підприємства», 071 «Облік і оподаткування» освітня програма «Облік і оподаткування» /Укл.: Юрченко М.Є. – Чернігів: ЧНТУ, 2018. – 139 с.

Укладач: Юрченко Марина Євгеніївна, кандидат фізико – математичних наук, доцент кафедри інформаційних систем в економіці ЧНТУ

Відповідальний за випуск: Акименко Андрій Миколайович, завідувач кафедри інформаційних систем в економіці ЧНТУ, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: Маргасова Вікторія Геннадіївна, д.е.н., професор кафедри бухгалтерського обліку, оподаткування та аудиту ННІ економіки Чернігівського національного технологічного університету

ЗМІСТ

Вступ 4
1. Мета та завдання дисципліни 4
2. Основні поняття 6
3. Основні теореми теорії ймовірностей 22
4. Послідовність незалежних випробувань 31
5. Випадкові величини і закони розподілу 40
6. Деякі розподіли випадкових величин та їх числові характеристики 59
7. Закон великих чисел 77
8. Тестові завдання з курсу 81
Рекомендована література 139

ВСТУП

Теорія ймовірностей виникла з практичних потреб - необхідності передбачати випадкові події. Подією або випадком ми назвемо явище, яке може відбутися, а може і не відбутися. І хоча свій початок ця теорія бере з необхідності передбачати результати азартних ігор (саме слово “азарт”, з французької “le hasard”, що означає “випадок”), подальший її розвиток привів до значних здобутків у теорії вимірювань, масового обслуговування, надійності тощо.

Для економістів теорія ймовірностей є однією з базових фундаментальних дисциплін, тому що фінансова діяльність у суспільстві з вільною економікою повністю підлягає законам випадку, невизначеності. Уже у XVII столітті теорія ймовірностей застосовувалась у діяльності страхових компаній, а в наші дні вона вживається і для розрахунку ризикових фінансових операцій, планування банківської діяльності, макроекономічного планування. До задач економічного напрямку можна віднести також демографічні, сільськогосподарські, виробничірозрахунки.

В методичній розробці викладено основні теоретичні положення теорії ймовірностей. До кожного розділу пропонується значна кількість задач.

Методичну розробку можна рекомендувати студентам 2 курсу всіх економічних спеціальностей.

1. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Метою вивчення навчальної дисципліни "Теорія ймовірностей" є формування у майбутніх спеціалістів теоретичних знань і практичних навичок формалізації задач управління з використанням спеціалізованих методів теорії ймовірностей.

Об’єктом вивчення навчальної дисципліни є випадкові події та їх імовірності.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є стохастичні закономірності однорідних випадкових масових явищ. Методи теорії ймовірностей широко застосовуються в таких галузях природознавства і техніки, як теорія надійності, теорія масового обслуговування, теорія похибок, теорія автоматизованого управління, теорія ігор, загальна теорія зв'язку і в інших теоретичних і прикладних науках. Теорія ймовірностей лежить в основі іншої прикладної дисципліни – “Математичної статистики”, методи і засоби аналізу якої, у свою чергу, використовуються при плануванні й організації виробництва, при аналізі технологічних процесів, при планово-попереджувальному ремонті, контролі якості продукції і т. п. Отже, “Теорія ймовірностей і математична статистика” являє собою прикладну математичну дисципліну, що вивчає кількісні і якісні методи й засоби аналізу закономірностей еволюції систем, які розвиваються в умовах стохастичної невизначеності.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: базові поняття та методи обчислення ймовірностей подій у класичній імовірнісній схемі, складних подій із застосуванням теорем додавання і множення ймовірностей та знаходження ймовірностей появи події у повторних незалежних випробуваннях;види випадкових величин та форми законів їх розподілу, числові характеристики та основні розподіли випадкових величин, основні теореми закону великих чисел;ймовірносну природу статистичних оцінок параметрів генеральної сукупності та закони їх розподілу.

вміти: використовувати математичні методи при розв´язуванні прикладних задач та застосовувати ці методи при використанні обчислювальної техніки;здійснювати якісний і кількісний математичний аналіз економічних процесів, які пов´язані з практичною діяльністю фахівця.

При вивченні навчальної дисципліни необхідно звернути увагу на:
- ознайомлення студентів з основами математичного апарату, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних економічних задач;
- розвиток логічного мислення та підвищення загального рівня математичної культури;
- здобуття навичок дослідження прикладних питань та умінь перевести задачу на математичну мову;
- формування навичок самостійного вивчення навчальної літератури з теорії ймовірностей та математичної статистики;
- застосування отриманих знань до аналізу економічних процесів.

Зв'язок з іншими дисциплінами. Дисципліна «Теорія ймовірностей і математична статистика» є математичним фундаментом для глибокого вивчення курсів «Моделювання економіки», «Дослідження операцій», «Теорія надійності», «Теорія ігор».

Самостійна робота студента є основним засобом оволодіння навчальним матеріалом у час, вільний від обов'язкових навчальних занять. Навчальний матеріал дисципліни, передбачений робочим навчальним планом для засвоєння студентом в процесі самостійної роботи, виноситься на підсумковий контроль поряд з навчальним матеріалом, який опрацьовувався при проведенні навчальних занять.

При вирішенні практичних питань, пов'язаних з науково-технічним прогресом і підвищенням ефективності виробництва в умовах ринкової економіки необхідно вміти реалізовувати поставлені завдання за найбільшою ефективністю для господарства України. При цьому не обійтися без аналізу статистичних даних, прогнозування економічних процесів та прийняття рішень. До цього майбутніх спеціалістів готує дисципліна „Теорія ймовірностей і математична статистика”.

2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Всі події, що відбуваються навколо нас, умовно можна поділити на дві групи. До першої групи належать так звані детермінованіподії. Це такі події, про які завчасно можна стверджувати – відбудуться вони, чи не відбудуться. Наприклад, використовуючи закони класичної та небесної механіки, можна передбачити положення небесних тіл в обраний момент часу. До іншої групи належать випадковіподії. Це такі події, які за наявності певного комплекса умов можуть відбутися, а можуть і не відбутися.

Приклади.

1. Нехайми кидаємо монету. Чи можна визначити як саме вона впаде – «гербом» чи «решкою»? Напевно, якщо точно розрахувати рух монети, враховуючи всі фактори, що на неї впливають (силу, з якою вона кинута, кут, під яким кинута, тощо), то можна передбачити випад, наприклад, «герба». Але зрозуміло, що за звичайних умов такий розрахунок практично неможливий. І практично ми не можемо передбачити ані випадіння «герба», ані «решки». Може відбутися і те, й інше. Таким чином, ми стверджуємо, що випадіння «герба» (як і «решки») – випадкова подія.

2.Нехай ми працюємо на комп’ютері – розв’язуємо якусь певну задачу, граємо в ігри, або користуємось мережею Інтернет. Чи можемо ми стверджувати, що комп’ютер буде працювати весь час, що нам потрібен? Очевидно,ні. Можлива наявність цілої низки факторів, які можуть зашкодити безперебійній роботі комп’ютера – може відмовити який-небудь вузол комп’ютера, може з’явитися вірус, який буде заважати, може відбутися роз’єднання з мережею, може вимикнутися електрика тощо. Тому безперебійна робота комп’ютера (і взагалі будь-якого приладу) протягом певного проміжку часу є випадкова подія.Таким чином,кожна випадкова подія є наслідком багатьох факторів або невідомих нам причин, які впливають на подію. І врахувати цей вплив неможливо.

Разом із цим можна помітити наступне. Нехай, наприклад, ми кидаємо монету не один, а декілька разів поспіль. Тоді «герб» буде випадати приблизно в половині всіх підкидань. Скажімо, якщо ми кидаємо монету 20 разів, то «герб» випадає, як правило, 8 – 12 разів. А ось якщо «герб» випаде всі 20 разів, що теоретично, взагалі кажучи, можливо, то одразу ж виникає думка, що це щось невипадкове.

Наприклад, у відомій індійській кінострічці «Помста та закон» один з головних персонажів мав монету, на якій на обох сторонах був «герб». Зрозуміло, що «герб» випадав при кожному підкиданні монети, чим її власник успішно користувався. А за звичайних умов така ситуація практично неможлива.

Це свідчить про наступне.Незважаючи на те, що появу кожної випадкової події окремо ми не можемо точно передбачити, при багаторазовому розгляді таких подій виникають певні закономірності. Вони називаються ймовірнісними. Дослідженням таких закономірностей займається теорія ймовірностей. Таким чином, предметом теорії ймовірностей є вивчення ймовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій. Результати та методи теорії ймовірностей широко використовуються в багатьох галузях природознавства і техніки: теорії надійності, теорії масового обслуговування, в теоретичній фізиці, астрономії, теорії похибок спостережень тощо.

Перші роботи, у яких виникли основні поняття теорії ймовірностей, з'явилися у XV – XVI століттях як спроба побудови теорії азартних ігор і належать таким видатним вченим, як Б. Спіноза, Дж. Кардано, Г. Галілей.

Серйозні вимоги з боку природознавства привели до необхідності подальшого розвитку теорії ймовірностей та використання більш розвинутого математичного апарату (кінець XVII – початок XVIII ст.). Особливу значну роль тут відіграли роботи Б.Паскаля, П. Ферма, Х. Гюйгенса, К. Гауса, Я. Бернуллі, С. Пуассона, А. Муавра, П. Лапласа, Т. Байєса та ін. Я. Бернуллі зробив перші теоретичні обґрунтування накопичених раніше фактів. Теорема, що ним доведена, отримала у подальшому назву «Закону великих чисел». З формально-аналітичного боку, до цього ж напряму відноситься й робота М. І. Лобачевського, яка присвячена теорії помилок при вимірах на сфері. Наприкінці XIX століття П. Л. Чебишов та його учні А. А. Марков та О.М.Ляпунов перетворили теорію ймовірностей у стрійну та послідовну математичну науку.

Подальшим розвитком теорія ймовірностей та випадкових процесів зобов'язана таким математикам, як С.М. Бернштейн, А. М. Колмогоров, О.Я.Хінчін, Б.В.Гнеденко, А. В. Скороход, В. С. Королюк, І. І. Гіхман, М.Й.Ядренко та ін.

Вперше повну систему аксіом цієї науки сформулював у 1936 р. видатний математик і всесвітньо відомий вчений академік Колмогоров Андрій Миколайович у книзі „Основные понятия теории вероятностей».

Навчальні цілі заняття: Знати загальні положення та визначення «Теорії ймовірностей», методи розв'язування задач, аналітичні можливості статистичних методів збирання і обробки первинних даних про масові явища і процеси, обчислювати ймовірність події за класичною схемою, умовну та повну ймовірність, будувати закон розподілу випадкової величини, обчислювати її характеристики, проводити дисперсійний та регресійний аналіз даних.

2.1.Випадкові події та операції над ними. Означення ймовірності

Означення 2.1.Під *експериментом* (випробуванням, дослідом) розуміють деяку сукупність дій, яка може бути повторена в однотипних (незмінних основних) умовах необмежене число разів.

Означення 2.2. *Подією* називається усякий факт, який в результаті експерименту може відбутися або не відбутися.

Позначаються події заголовними буквами латинського алфавіту: A, B, C .

Означення 2.3.*Елементарною* подією називається один із взаємовиключних результатів експерименту.

Означення2.4. Множина всіх результатів експерименту, що розглядається називається *простором* елементарних подій.

Означення2.5. *Достовірною* називається подія, яка в результаті експерименту неодмінно повинна відбутися (позначається: Ω).

Означення2.6. *Неможливою* називається подія, яка в результаті експерименту не може відбутися (позначається: Ø).

Означення 2.7.*Випадковою* називається подія, яка при багаторазовому повторенні експерименту в одних виходах відбувається, а в інших – ні.

Приклад.*Монета підкидається до першого випадання герба. Простір елементарних подій* Ω *складається зі зчисленної кількості точок* ω_i, *де через* ω_i *позначено елементарну подію, що відповідає випаданню цифри (Ц) в перших* $i-1$*підкиданнях монети і герба (Г) при* i*-му підкиданню.* **Ω** = *{Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, ...}.*

Означення 2.8. Декілька подій називаються *несумісними*, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно в одному експерименті.

Означення2.9. Декілька подій в експерименті називаються *рівноможливими*, якщо за умовами симетрії експерименту немає підстави вважати появу якоїсь з них більш можливою, ніж появи інших.

Означення 2.10.*Повною групою подій* називаються декілька попарно несумісних подій таких, що в результаті експерименту одна з них неодмінно повинна відбутися.

Означення 2.11. Множина всіх елементарних подій, що складають повну групу несумісних подій, називається *простором* подій.

Означення 2.12. Якщо виходи експерименту утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій, то вони *називаються випадками*.

Означення 2.13. Випадок називається *сприятливим* до події, якщо його поява тягне за собою появу цієї події.

Ймовірність події є число, що характеризує чисельну міру об'єктивної можливості появи події в результаті експерименту. **Ймовірністю події** називають відношення кількості випадків, що сприятливі до події A, до загальної кількості випадків у даному експерименті. Ймовірності подій A прийнято події позначати $P(A)$

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (2.1)$$

де m − кількість випадків, що сприятливі до події A, n − загальна кількість випадків у даному експерименті. Співвідношення (2.1) є **класичною формулою** обчислення ймовірності подій, які можуть виникати в результаті експерименту з виходами, що підпадають під визначення випадків.

Приклад.*З 20 перших натуральних чисел наугад взято число. Знайти ймовірність того, що це число кратне 3.*

Розв’язання: Оскільки число береться наугад, то немає підстав вважати, що, наприклад, число 5 буде вибиратись частіше, ніж будь-яке інше, тобто слід вважати, що всі 20 можливих результатів рівноможливі. З них числа 3, 6, 9, 12, 15, 18 сприяють появі події A, яка полягає у тому, що вибране число кратне 3. Отже, число результатів досліду, які сприяють появі події A дорівнює 6, і за класичним означенням маємо $P(A) = 6/20 \approx 0{,}33$.

2.2.Основні принципи комбінаторики

Комбінаторика – це розділ математики, в якому вивчаються кількісні характеристики різних видів з'єднань елементів, незалежно від природи самих елементів.

Суттєву роль при підрахунках кількості результатів експерименту грають комбінаційні методи, основою яких є два наступних правила.

Означення2.14.Правило додавання. Нехай k взаємно заперечні дії можна виконати відповідно $n_1, n_2, ..., n_k$ способами. Тоді якусь одну з цих дій можна виконати $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ способами.

Означення2.15.Правило множення. Нехай потрібно виконати одна за одною k дії. Нехай першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами,... , k- ту – n_k способами. Тоді усі k дії можуть бути виконані $n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ способами.

Приклад.Для складання номера підрозділу використовуються цифри 1, 2, 3, 4. Скільки підрозділів можна пронумерувати, якщо один номер повинен складатися не більше, ніж з трьох цифр?

Розв’язання: а) Цифри у номері не повторюються. Для складання тризначного номера потрібно виконати одну за іншою три дії − вибір першої, другої та третьої цифр. Ці вибори можна здійснити відповідно 4, 3 та 2 способами. Отже, на підставі правила множення, тризначних номерів буде $N_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Аналогічним чином знаходимо кількість двозначних номерів $N_2 = 4 \cdot 3 = 12$ та однозначних номерів $N_1 = 4$. Тепер за правилом додавання знаходимо загальну кількість підрозділів, яку можна занумерувати $N = N_1 + N_2 + N_3 = 24 + 12 + 4 = 40$. б) Цифри у номері можуть повторюватися. Вибір будь-якої цифри можна здійснити 4 способами. Тому $N = N_1 + N_2 + N_3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 = 84$.

2.3. Основні види комбінаторних з’єднань

Означення 2.16.*Перестановками* з n елементів називаються комбінації, які складаються з *прізних* елементів і відрізняються одна від одної лише порядком елементів.

Кількість перестановок з n елементів P_n визначається формулою

$$P_n = n(n-1)(n-2)...1 = n!$$

Приклад. *Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр* 1, 2, 3, *якщо кожна цифра входить у зображення числа лише один раз*?

Розв'язання: Кількість чисел $P_3 = 3! = 6$

P_3:123, 231, 312, 132, 321, 213.

Означення 2.17. *Розміщеннями* з n елементів по $m\,(0 \le m \le n)$ елементів називаються комбінації, які складаються з *прізних*елементів по m елементів і відрізняються одна від одної або складом, або порядком елементів.

Кількість розміщень з n елементів по m елементів A_n^m визначається формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{p_n}{p_{n-m}}.$$

Зазначимо, що $A_n^n = P_n$.

Приклад. *Скільки двозначних чисел можна скласти з цифр* 1,2,3, *якщо кожна цифравходить у зображення числа лише один раз*.

Розв'язання:

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6;\ A_3^2 : \begin{cases} 12, 23, 31 \\ 21, 32, 13 \end{cases}$$

Означення 2.18. *Сполученнями* з n елементів по $m\,(0 \le m \le n)$ елементів називаються комбінації, які складаються з *прізних*елементів по m елементів і відрізняються одна від одної лише складом елементів.

Кількість сполучень з n елементів по m елементів C_n^m визначається формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{P_n}{P_{n-m}\,P_m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}.$$

Приклад. *Скількомаспособамиможна вибрати дві деталі з ящика, в якому три різні деталі* (1, 2, 3)?

Розв'язання:

$$C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = 3;\ C_3^2 : 12,\ 23,\ 31 \text{ або } 21,\ 32,\ 13$$

– тут вважається, що наслідками випробування є множина двозначних чисел.

Властивості чисел C_n^m:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$

– перевіряється безпосередньо.

2. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$

– випливає безпосередньо з формули розкладаннябінома Ньютона у такій редакції:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^{n-0} + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^n a^n b^{n-n}$$

при $a = b = 1$.

Таким чином, числа C_n^m $(m = \overline{0, n})$ є біноміальними коефіцієнтами.

3. У послідовності $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ сума парних членів дорівнює сумі непарних членів. Тобто

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots$$

– доводиться методом математичної індукції.

4. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ $(1 \le m \le n)$ – правило Паскаля.

Дійсно,

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{(n-1-m+1)!(m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-m)!m!} =$$

$$= \frac{(n-1)!m}{(n-m)!(m-1)!m} + \frac{(n-1)!(n-m)}{(n-m-1)!m!(n-m)} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-m)!m!}(m+n-m) = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_n^m.$$

Зауваження. Зазначимо, що правило Паскаля дозволяє відносно просто скласти арифметичний трикутник Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & C_0^0 & & & & \\ & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\ & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\ & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

– числова таблиця справа.

Арифметичний трикутник Паскаля, зокрема, спрощує обчислення біноміальних коефіцієнтів.

Приклад. $(a+b)^4 = 1a^0b^4 + 4a^1b^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b^1 + 1a^4b^0$

2.4. Формули комбінаторики для комбінацій з повтореннями

Означення 2.19. *Перестановками* з n елементів *з повтореннями* називаються перестановки з n елементів, серед яких є m різних типівелементів, тобто є n_1 елементів типу 1, n_2 елементів типу 2 , ... , n_m елементів типу m; $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$.

Кількість перестановок з n елементів з повтореннями $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ визначається формулою

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!}.$$

Приклад. *Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр* {1, 1, 2, 2}?

Розв'язання:

$$P_4(2,2) = \frac{4!}{2!\,2!} = 6;\ P_4(2,2):\ \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2, \\ 1 & 2 & 1 & 2, \\ 2 & 1 & 1 & 2, \\ 2 & 1 & 2 & 1, \\ 2 & 2 & 1 & 1, \\ 1 & 2 & 2 & 1. \end{matrix}$$

– відрізняються одна від одної лише порядком елементів.

Зауваження. Зазначимо, що

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = C_n^{n_1}\, C_{n-n_1}^{n_2}\, C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \dots 1,$$

зокрема,

$$P_n(m, n-m) = C_n^m\, C_{n-m}^{n-m} = C_n^m$$

– перевіряється безпосередньо.

Означення 2.20. *Розміщеннями* з n елементів по m елементів з повтореннями називаються розміщення з n різних типів елементів по mелементів. n, m – будь-які, кількість елементів кожного типу однакова і не менша m, зокрема – необмежена.

Кількість розміщень з n елементів по m елементів з повтореннями $\overline{A_n^m}$ обчислюється за формулою

$$\overline{A_n^m} = n\, n \dots n = n^m \left(n \overset{\le}{\underset{>}{}} m \right).$$

Приклад. *Скільки двозначних чисел можна скласти з цифр* 1, 2, 3?

Розв'язання: Згідно із умовою задачі двозначні числа складаємо з цифр {1, 1, 2, 2, 3, 3} або з цифр {1, 1, …, 1, 2, 2, … , 2, 3, 3, … , 3}.

$$\overline{A_3^2} = 3^2 = 9;\ \overline{A_3^2}:\ \begin{cases} 11, & 12, & 13, \\ 21, & 22, & 23, \\ 31, & 32, & 33. \end{cases}$$

– відрізняються одна від одної або складом, або порядком елементів.

Означення 2.21. *Сполученнями* з n елементів по m елементів з повтореннями називаються сполучення з n різних типівелементів по m елементів. n, m – будь-які, кількість елементів кожного типу однакова і не менша m, зокрема – необмежена.

Кількість сполучень з n елементів по m елементів з повтореннями $\overline{C_n^m}$ визначається формулою

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\, m!} \left(n \overset{\le}{\underset{>}{}} m \right).$$

Приклад.*Скількомаспособамиможна вибрати дві деталі з ящика, в якому три типи деталей*?

Розв'язання: Згідно із умови задачі в ящикуlдеталей типу 1;lдеталей типу 2 і lдеталей типу 3, $l \ge 2$. Вважаємо, що наслідками випробування є двозначні числа:

$$\overline{C_3^2} = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6;\ \overline{C_3^2}: \begin{cases} 11, & & \\ 21, & 22, & \\ 31, & 32, & 33. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 11, & 12, & 13, \\ & 22, & 23, \\ & & 33. \end{cases}$$

– відрізняються одна від одної лише складом елементів.

Приклад.*Скількомаспособами можна скласти трикутник*:

1. *З чотирьох відрізків з довжинами* 4, 5, 6, 7 *см*?

2. *З чотирьох типів відрізків з довжинами* 4, 5, 6, 7 *см*?

Розв'язання:

1. $n = C_4^3 = 4$.

2. $n = \overline{C_4^3} = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$.

2.5. Застосування формул комбінаторики до обчислення ймовірностей

Приклад.*В урні* 10*куль* (7 *білих*,3 *чорних*). *З урни*: 1) *навмання виймають* 6 *куль* (*вибірка без повернення*);2)6 *раз навмання виймають по одній кулі, не повертаючи їх назад* (*вибірка без повернення*);3)6 *раз навмання виймають по одній кулі і зафіксувавши її колір, повертають назад* (*вибірка з поверненням*). *Знайти ймовірність того, що серед вийнятих куль буде* 4 *білих і* 2 *чорні*.

Розв'язання:

1) A – виймають 4 білих і 2 чорні кулі. Можливих наслідків у розглядуваному імовірнісному експерименті очевидна скінченна множина причому вони рівно ймовірні і утворюють повну групу *а*, отже, ймовірність події A можна обчислити за класичною формулою.

$A = A_1 A_2$, де A_1 – вийнято 4 білих, A_2 – 2 чорних кулі.

Події A_1 сприяє m_1 наслідків, $m_1 = C_7^4$; події A_2 сприяє m_2 наслідків, $m_2 = C_3^2$. Отже, події $A = A_1 A_2$ сприяє $m_1 m_2 = C_7^4 C_3^2$ наслідків. A кількість можливих наслідків $n = C_{10}^6$. Тому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{m_1 m_2}{n} = \frac{C_7^4 C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{7!}{3!\,4!} \cdot \frac{3!}{1!\,2!} \cdot \frac{4!\,6!}{10!} = \frac{1}{2}.$$

2) Аналогічно, $B = B_1 B_2$, де B_1 – вийнято 4 білих, B_2 – 2 чорних кулі.

$B_1 : m_1 = A_7^4$; $B_2 : m_2 = A_3^2$. $B = B_1 B_2 : m_1 m_2 = A_7^4 A_3^2 P_6(4,2)$.

Множник $P_6(4,2)$ ураховує, що в результаті експерименту, що складається з 6 залежних випробувань (залежних відповідно події $Б$ – у кулю, оскільки ймовірність появи (непояви) білої кулі у кожному наступному випробуванні менша, ніж у попередньому) з'являється складна подія вигляду

$$B = БББББ\overline{Б}\,\overline{Б}$$

і, що кількість таких подій $P_6(4,2)$. $n = A_{10}^6$. Тому

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{m_1 m_2}{n} = \frac{A_7^4 A_3^2 P_6(4,2)}{A_{10}^6} = \frac{P_4 C_7^4 P_2 C_3^2 P_6(4,2)}{P_6 C_{10}^6} =$$

$$= \frac{P_4 P_2}{P_6} \cdot \frac{P_4}{P_4 P_2} P(A) = P(A) = \frac{1}{2}.$$

Тобто у вибірці без повернення спосіб виймання куль не має значення.

3) Аналогічно, $C = C_1 C_2$, C_1 – вийнято 4 білих, C_2 – 2 чорних кулі.

$$C_1 : m_1 = \overline{A_7^4}\,; \quad C_2 : m_2 = \overline{A_3^2}\,. \quad C = C_1 C_2 : m_1 m_2 = \overline{A_7^4}\,\overline{A_3^2} P_6(4,2).$$

Тут множник $P_6(4,2)$ ураховує, що в результаті експерименту, що складається з 6 незалежних випробувань (незалежних відповідно події $Б$ – у випробуванні вийнято білу кулю, оскільки ймовірність появи (непояви) білої кулі у кожному випробуванні залишається незмінною), з'являється складна подія виду

$$C' = ББББ\overline{Б}\,\overline{Б}$$

і що кількість таких подій $P_6(4,2)$. $n = \overline{A_{10}^6}$. Тому

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{m_1 m_2}{n} = \frac{\overline{A_7^4}\,\overline{A_3^2} P_6(4,2)}{A_{10}^6} = \frac{7^4 3^2 6!}{10^6 4!\,2!} = \left(\frac{7}{10}\right)^4 \left(\frac{3}{10}\right)^4 \frac{6!}{4!\,2!} =$$

$= 0{,}324135$.

Приклад. *Є прямокутна область Е поділена на* 4 *однакові підобласті. В область Е*:1)*кидають* 3 *точки. Знайти ймовірність того, що у першу підобласть буде* 1 *влучення, у другу –* 1 *і в третю –* 1, *якщо точки*: *а*) *нерозрізнимі*, *б*) *розрізнимі*;2) *кидають* 10 *точок. Знайти ймовірність того, що у першу підобласть буде* 4 *влучення, у другу –* 4 *і в третю –* 2, *якщо точки*: *а*) *нерозрізнимі*, *б*) *розрізнимі*.

Розв'язання:

Подія *А* – у першу підобласть – 1, у другу – 1 і в третю – 1 влучення; *В* – у першу підобласть – 4, у другу – 4 і в третю – 2 влучення.

Очевидно, що у випадкових 1) і 2) можливих наслідках випробування скінченна множина, причому вони рівноймовірні і утворюють повну групу, а, отже, ймовірності заданих подій можна знайти за класичною формулою.

1	1
2	1

3	1
4	

1)а) $m=1$; $n=C_4^3$. Таким чином,

$P(A_1)=1/C_4^3=1/4$.

б) $m=P_3$; $n=A_4^3$. Таким чином,

$$P(A_2)=P_3/A_4^3=1/4.$$

1	4
2	4
3	2
4	

2) а) $m=1$; $n=\overline{C_4^{10}}$. Таким чином, $P(B_1)=1/\overline{C_4^{10}}=$

$=1/C_{13}^{10}=\left(\dfrac{13!}{3!\,10!}\right)^{-1}=\dfrac{1}{286}=0{,}003496...$

б) $m=P_{10}(4,\,4,\,2)=C_{10}^4C_6^4C_2^2$; $n=\overline{A_4^{10}}$.

Таким чином,

$$P(B_2)=P_{10}(4,\,4,\,2)\big/\overline{A_4^{10}}=C_{10}^4C_6^4\big/\overline{A_4^{10}}=10!/(4!\,4!\,2!\,4^{10})=0{,}003004...$$

Задачі для самостійної роботи

Частина 1

2.1. У філії банку працюють п`ятнадцять співробітників, три з яких не мають потрібної кваліфікації. Скільки можна скласти списківпо восьми співробітниках.

2.2. Правління підприємства складається з дев`яти осіб. Скільки можна скласти варіантів обрання з їх числа трьох керівників: президента, директора та комерційного директора.

2.3. До профкому обрано семеро осіб, з яки потрібно обрати голову профкому та його заступника. Скількома способами це можливо зробити.

2.4. У філії банку працюють п`ятнадцять співробітників, три з яких не мають потрібної кваліфікації. Скільки можна скласти списків по шести кваліфікованих співпрацівниках.

2.5. Скількома способами з семи куль можна вибрати три.

2.6.Скількома способами з десяти осіб можна вибрати комісію з чотирьох осіб.

2.7. Скільки парних чотиризначних чисел, що складаються з цифр 2,3,5,7 можна одержати, якщо повторення цифр у числах заборонені.

2.8. Скількома способами можна розмістити дванадцять гостей за столом, біля якого стоять дванадцять стільців.

2.9. У філії банку працюють п`ятнадцять співробітників, три з яких не мають потрібної кваліфікації. Скільки можна скласти списків по дев`яти співробітниках, два з яких не мають потрібної кваліфікації.

2.10.У розіграшу першості країни з футболу приймають участь 17 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна та бронзова медалі?

2.11.Скількома способами 7 осіб можуть стати в чергу до каси?
2.12.Студенту необхідно протягом 8 днів скласти 4 екзамени. Скількома способами це можна зробити?

2.13. У магазині посуду є 5 видів чашок і 7 видів блюдець. Скількома способами можна вибрати пару блюдець і чашку?
2.14. Скількома способами можна відправити на екскурсію чотирьох осіб із групи в 10 осіб?

2.15. Підкидають два гральні кубики. Скільки є можливих варіантів випадання різних цифр на кубиках?

Частина 2

2.1. Монету кидають тричі. Скільки різних послідовностей орлів або решок можна при цьому одержати?

2.2. На фермі є 20 овець і 24 свині. Скількома способами можна вибрати одну вівцю й одну свиню? Якщо такий вибір уже зроблено, скількома способами його можна зробити ще раз?

2.3. У букеті 10 троянд і 12 хризантем. Скількома способами можна вибрати із букета: а) або одну троянду, або одну хризантему; б) одну троянду або одну хризантему; в) одну троянду й одну хризантему?

2.4. У магазині посуду є 5 видів чашок і 7 видів блюдець. Скількома способами можна вибрати пару блюдець і чашку?

2.5. У класі 30 учнів. Щодня призначається один черговий. Скількома способами можна скласти графік чергування на 5 днів так, щоб ніхто не чергував більше одного разу?

2.6. Скільки існує різних телефонних номерів, якщо вважати, що кожний номер складається із 7 цифр (телефонний номер може починатися з нуля)? Як зміниться розв'язок задачі, якщо телефонні номери можуть бути як семи-, так і шестицифровими?

2.7. Гральний кубик кидають тричі. Скільки різних послідовностей чисел може при цьому вийти?

2.8. Кожна літера азбуки Морзе — це послідовність крапок і тире. Скільки різних слів можна скласти, якщо використовувати для кожного з них: а) 5 символів; б) не більше ніж 5 символів?

2.9. У кошику 10 яблук і 12 апельсинів. Іван вибирає або яблуко, або апельсин, після чого Надя вибирає із фруктів, що залишилися, апельсин. Скільки можливостей такого вибору?

2.10. Скільки можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 різних трицифрових чисел?

2.11. Скільки можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 різних трицифрових чисел, якщо цифри в них не повторюються?

2.12. Скільки можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 різних трицифрових чисел, що діляться на 5?

2.13. Чотири учні одержують оцінки 2, 3, 4, 5. Скількома способами можна поставити їм оцінки?

2.14. Чотири учні одержують оцінки 2, 3, 4, 5. Скількома способами можна поставити оцінки так, щоб жодні два учні не одержали однакових?

2.15. Чотири учні одержують оцінки 2, 3, 4, 5. Скількома способами можна поставити оцінки так, щоб усі одержали 4 або 5?

Частина 3

2.1.У класі 30 учнів. Скількома способами можна в ньому вибрати старосту і його заступника?

2.2. У команді 12 членів. Скількома способами можна вибрати в ній капітана і воротаря?

2.3. Розклад одного дня містить 5 уроків. Визначте кількість таких розкладів при виборі з 11 предметів і за умови, що один предмет займає один урок. Як зміниться розв'язування задачі, якщо відомо, що першим уроком обов'язково має бути математика?

2.4. Скільки різних чотирицифрових натуральних чисел можна скласти із цифр: 2, 3, 5, 7, 9

2.5. Скільки різних чотирицифрових натуральних чисел можна скласти із цифр 0, 2, 3, 5, 7, 9?

2.6. Людина має 10 друзів і протягом декількох днів запрошує двох із них у гості так, що кожен побував у неї в гостях тільки один раз. Скільки різних варіантів зустрічей вона може скласти?

2.7. Скільки різних натуральних чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4?

2.8. На зборах мають виступати 5 чоловік — А, Б, В, Г і Д. Скількома способами їх можна розподілити, якщо: А повинен виступати перед Б;

2.9. Скількома способами можуть розподілитися місця між десятьма футбольними командами, якщо «Динамо» і «Шахтар» зайняли перші два місця?

2.10. У лотереї «5 із 36» головний виграш одержить той, хто вгадає всі 5 номерів. Той, хто вгадає 4, 3 або 2, одержує менший виграш. Скільки може бути різних карток, де вгадано: а 4 номери;

2.11. Скількома способами можна вибрати з 15 різних слів набір, що складається не більше ніж із 5 слів (зміст не важливий)?

2.12. У класі навчаються 14 хлопчиків і 10 дівчаток. Для привітання гостей необхідно вибрати чотирьох хлопчиків і трьох дівчаток. Скількома способами це можна зробити?

2.13. Скількома способами можна розбити 15 осіб на три команди по 5 осіб у кожній?

2.14. В одного учня є 7 книг з історії культури, а в іншого — 5 книг з філософії. Скількома способами вони можуть обміняти дві книги одного на дві книги іншого?

2.15. Є колода із 36 карт. Скількома способами можна витягнути 8 карт так, щоб було рівно два тузи;

Частина 4

2.1.На першому поверсі в ліфт сіло 10 осіб. Ліфт піднімається до 6 поверху, і на кожному поверсі можуть виходити люди. Скількома способами можуть бути розподілені пасажири на 6 поверхах?

2.2. Скільки різних п'ятицифрових автомобільних номерів можна скласти, якщо використовувати 10 цифр, але номер не може починатися з нуля;

2.3. Групі з 10 туристів (4 дітей і 6 дорослих) запропонували відвідати 5 музеїв, причому до двох із них дітей не пускають. Скільки існує способів розподілу туристів по музеях?

2.4. Двох братів привели у Будинок дитячої творчості, де працює 5 різних гуртків. Скільки є варіантів для зарахування хлопців до гуртків, якщо кожен хлопчик може відвідувати тільки один гурток?

2.5. Номери трамвайних маршрутів колись позначали двома кольоровими ліхтарями. Яку кількість різних маршрутів можна позначити, якщо використовувати ліхтарі шести кольорів?

2.6. Два листоноші повинні рознести 8 листів за вісьмома адресами. Скількома способами вони можуть розподілити цю роботу?

2.7. Номер автомобільного причепа складається із двох букв і чотирьох цифр. Скільки різних номерів можна скласти, використовуючи 12 букв і 5 цифр?

2.8. Трамвайні маршрути позначають одним, двома або трьома кольоровими ліхтарями. Яку кількість різних маршрутів можна скласти, якщо використовувати ліхтарі шести кольорів?

2.9. Скількома способами можна переставити букви слова: а) «телефон», б) «коробок»?

2.10. У кондитерському магазині є тістечка чотирьох видів: заварні, пісочні, «наполеон» і «корзинка». Скількома способами можна купити в ньому 10 тістечок?

2.11. Скількома способами можна розмістити 6 ліхтарів у новорічній гірлянді?

2.12. Скількома способами можна розставити в шеренгу 5 дівчат і 7 юнаків, щоб усі дівчата стояли скраю?

2.13. 12 студентів слід рівномірно розподілити по трьох різних групах. Скількома способами це можна зробити?

2.14. Скількома способами з колоди в 36 карт можна витягнути 5 так, щоб серед них була одна дама?

2.15. Скільки різних «слів» можна скласти з букв слова «сочетание»?

Частина 5

2.1. В ящику лежить 20 м’ячів: 8 зелених і 12 синіх. З ящика навмання виймають один м’яч. Яка ймовірність того, що він: а) зелений; б) синій ?

2.2. У класі навчається 30 учнів: 12 хлопчиків і 18 дівчаток. З класу навмання вибирають учня. Яка ймовірність того, що цей учень: а) хлопчик; б) дівчинка ?

2.3. На поличці розміщено 10 чашок: 4 синіх та 6 червоних. З полички навмання дістають одну чашку. Яка ймовірність того, що ця чашка: а) синя; б) червона ?

2.4. У кошику лежить 25 яблук: 15 зелених і 10 жовтих. З кошика навмання виймають одне яблуко. Яка ймовірність того, що це яблуко: а) зелене; б) жовте?

2.5. На столі лежить 40 зошитів: 24 в клітинку і 16 в лінійку. Навмання дістають один зошит. Яка ймовірність того, що цей зошит: а) в клітинку; б) в лінійку ?

2.6. Із карток розрізної азбуки складають слово “фінанси”, після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана: а) буква “ф”; б) буква “в”; в) буква “н”.

2.7. Із карток розрізної азбуки складають слово “менеджмент”, після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана: а) буква “е”; б) буква “ж”; в) буква “м”.

2.8. Із карток розрізної азбуки складають слово “економіка”, після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана: а) буква “е”; б) буква “о”; в) буква “к”.

2.9. Із карток розрізної азбуки складають слово “корпорація”, після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана: а) буква “ц”; б) буква “р”; в) буква “о”.

2.10. Із карток розрізної азбуки складають слово “ціноутворення”, після чого картки перемішують. Навмання вибирають одну картку. Визначити ймовірність того, що на ній написана: а) буква “н”; б) буква “у”; в) буква “о”.

2.11. Серед 100 електроламп 5 зіпсованих. Яка ймовірність того, що взяті навмання 3 лампи будуть справними?
2.12.Серед 100 електроламп 5 зіпсованих. Яка ймовірність того, що взяті навмання 3 лампи будуть справними?

2.13. Яка ймовірність того, що при киданні двох гральних костей сума номерів граней, які припали, дорівнює семи?
2.14. У шухляді письмового столу лежать 12 олівців однакової форми і розмірів, з яких 4 олівці - кольорові, а інші - прості. Яка ймовірність того, що, відкривши шухляду, навмання взятий олівець буде простий?
2.15. Яка ймовірність того, що при киданні двох гральних костей сума номерів граней, які припали, кратна п’яти?

Частина 6

2.1.У ліфті 7 пасажирів; ліфт зупиняється на 10-ти поверхах. Яка ймовірність того, що жодного разу два пасажири не вийдуть на одному поверсі?

2.2. Підкидають 4 гральних кубика. Знайти ймовірність того, що на всіх кубиках випаде одинакове число очок.

2.3. Кожна з букв А, У, К, С, З записані на одній із 5-ти карток. Картки розкладаються в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що при цьому утворюється слово КАЗУС

2.4. У колекції нумізмата 200 монет, серед яких 25 монет XIX ст. Яка ймовірність того, що навмання вибрана монета датована не XIXст.?

2.5. У коробці 4 червоних і 6 зелених олівців. Із коробки випало 3 олівці. Знайти ймовірність того, що 2 із них червоні.

2.6. Із 60 екзаменаційних питань студент підготовив 50. Яка ймовірність того, що із 3-х питань він знає 2 ?

2.7. Яка ймовірність того, що при випадковому розміщенні кубиків у ряд, на гранях яких написано по одній із букв а,г,и,л,м,о,р,т, вийде слово "алгоритм" ?

2.8. Із 10 лотерейних білетів є 2 виграшних. Знайти ймовірність того, що серед взятих наугад 5 білетів буде: а) один виграшний; б) обидва виграшні;

2.9. Серед 50 деталей три нестандартні. Знайти ймовірність того, що із двох взятих наугад деталей, обидві будуть нестандартними.
2.10. В податковій адміністрації зареєстровано 6 приватних і 4державних підприємства. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних трьох підприємств приватними будуть 2

2.11. З коробки, в якій знаходиться 5 куль, пронумерованих числами 1, 2, 3, 4, 5,виймають одну за одною 5 куль. Яка імовірність того, що номери вийнятих куль будуть у порядку зростання

2.12. На окремих картках написані букви А, Н, А, С, А, Н. Дитина навмання бере по одній картці й прикладає їх одну до одної. Знайти ймовірність того, що отримаємо слово АНАНАС

2.13. Знайти ймовірність того, що серед десяти цифр номера банкноти немає цифри 2

2.14. Знайти ймовірність того, що серед десяти цифр номера банкноти немає цифри 3 і 5

2.15. У кімнаті перебуває 10 студентів. Знайти ймовірність того, що два і більше студенти не мають спільного дня народження.

Контрольні запитання до теми

1. Що є предметом вивчення Теорії ймовірностей?
2. Дати визначення поняттю подія.
3. Дати визначення поняттю експеримент.
4. Дати визначення поняттю елементарна подія.
5. Дати визначення поняттю ймовірність події.
6. Дати визначення поняттю достовірна подія.
7. Чому дорівнює ймовірність достовірної події?
8. Дати визначення поняттю неможлива подія.
9. Чому дорівнює ймовірність неможливої події?
10. Дати визначення поняттю випадкова подія.

11.Які значення може приймати ймовірність випадкової події?
12.Які випадкові події називаються рівноможливими?
13.Які випадкові події називаються несумісними?
14.Дати визначення поняттю повна група подій.
15.Дати визначення поняттю простір подій.
16.Які випадкові події називаються випадками?
17.Які випадки називаються сприятливими до події?
18.Надати класичну формулу розрахунку ймовірності події?
19.Перестановки. Визначення і формула підрахунку кількість перестановок.
20.Розміщення. Визначення і формула підрахунку кількість розміщень.
21.Сполучення. Визначення і формула підрахунку кількість сполучень.

3. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

3.1.Теореми додавання

Теорема 3.1 (основна). Ймовірність суми двох подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку:

$$P(A) = P(A) + P(B) - P(AB) \qquad (3.1)$$

Зауваження. Якщо події А і В несумісні, то в результаті досліду вони не можуть з'явитись разом, тобто ймовірність їх добутку дорівнює нулю. Тому для несумісних подій можна сформулювати таку теорему-наслідок.

Теорема 3.2. Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad (3.2)$$

Наслідок 1. Ймовірність суми скінченної кількості попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

Наслідок 2. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють повну групу подій, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці. Тобто:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1 \qquad (3.3)$$

Наслідок 3. Ймовірність протилежної події A знаходять за формулою:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \qquad (3.4)$$

Приклад. Знайти ймовірність того, що при підкиданні 2 гральних кубиків хоча б один раз випаде 6 очок.

Розв'язання:

A – поява 6 очок при підкиданні першого грального кубика, B – поява 6 очок при підкиданні другого грального кубика. Оскільки події A і B сумісні, то

$$P(A) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

3.2. Умовна ймовірність

Означення 3.1. Події A і B називаються ***залежними***, якщо ймовірність однієї з них змінюється залежно від того, відбулась друга подія або ні. У протилежному випадку події називаються ***незалежними***. Імовірність події A, визначена за умови, що подія B відбулася, називається умовною і позначається $P(A/B) = P_A(B)$

Означення 3.2. Умовною ймовірністю події B за умови, що відбулася подія A, називається величина $P_A(B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B)>0$ Умовна ймовірність має всі властивості безумовної ймовірності.

Приклад. У кошику 5 червоних і 7 зелених м’ячів. З нього послідовно беруть два м’ячі. Знайти ймовірність того, що другий м’яч буде зеленим за умови, що перший м’яч був зеленим.

Розв’язання:

Позначимо: A – перший м’яч зелений; B – другий м’яч зелений. Якщо відбулась подія A, то в кошику залишилось 11 м’ячів, серед яких 6 зелених. Тому шукана ймовірність $P_A(B) = \dfrac{6}{11}$.

Ознака незалежності подій. Випадкові події A і B незалежні, якщо $P(AB) = P(A)P(B)$. Для незалежних подій $P_B(A) = P(A)$, тобто настання однієї з двох незалежних подій не впливає на ймовірність іншої.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються незалежними в сукупності, якщо для будьяких k із них $(k < n)$ виконується співвідношення $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$.

3.3. Теореми множення

Теорема 3.3. Ймовірність сумісної появи двох подій дорівнює ймовірності однієї з них, помноженій на умовну ймовірність іншої, за умови, що перша подія відбулась:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) \tag{3.5}$$

Приклад. Студент прийшов на екзамен, підготувавши лише 40 із 75 питань. Екзаменатор задав йому три питання по черзі. Яка ймовірність того, що студент знатиме відповіді на всі ці запитання?

Розв’язання:

Подія A – студент знає відповіді на всі три запитання; подія A_1, A_2, A_3 студент знає відповідь на кожне запитання. Тоді $A = A_1A_2A_3$, події $A_1A_2A_3$ – залежні, тому, $P(A) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3) = \frac{40}{75}\frac{39}{74}\frac{38}{73} = 0{,}146$.

Зауваження. Якщо події А і В незалежні (тобто поява однієї з них не змінює ймовірність появи іншої і $P_A(B) = P(B)$, то можна сформулювати таку теоремунаслідок.

Теорема 3.4. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{3.6}$$

Приклад. Прилад складається із трьох вузлів, які працюють незалежно один від одного. Імовірностівиходузладувузлівназаданому часовому проміжку становлять відповідно 0,2; 0,3 і 0,4. Знайти ймовірність того, що протягом заданого часу усі вузли приладу працюватимуть.

Розв’язання:

Розглянемоподії: A — «усівузлиприладупрацюють»; B_1 — «першийвузолпрацює»; B_2 — «другийвузолпрацює»; B_3 — «третійвузолпрацює». Тодіподія A єдобуткомподій B_i, $i = 1,2,3$. тобто $P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}336$.

3.4. Імовірність настання принаймні однієї події

При знаходженні ймовірності суми незалежних подій $A_1, A_2, ..., A_n$ доцільно переходити до протилежних подій $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)...P(\bar{A}_n)$.

Або $P(A) = 1 - q_1q_2 \cdots q_n$ – ймовірність настання принаймні однієї з подій A_i, $i = 1,...,n$

Приклад. В об’єднання входять три підприємства. Ймовірність виконати план для першого підприємства дорівнює 0,8, для другого – 0,9, для третього – 0,85. Знайти ймовірність таких подій: 1) D – договір не виконає жодне підприємство; 2) E – договір виконає принаймні одне підприємство. Розв’язання:

1) $D = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, $P(D) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}003$
2) $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - 0{,}003 = 0{,}997$

Задачі для самостійної роботи

3.1. Завідуючий рекламним відділом журналу оцінює ймовірність того, що передплатник журналу прочитає деяку рекламу, як 0,4, а ймовірність того, що він купить рекламований товар, як 0,01. За цими прогнозами знайти ймовірність того, що передплатник за рекламним повідомленням придбає товар.

3.2. Одна з десяти карток є виграшною. Десять учасників по черзі тягнуть по одній картці. Як відрізняється ймовірність виграшу у тих, хто тягне картку першим від інших?

3.3. В урні 4 білих і 3 чорні кульки. З урни послідовно виймають дві кульки. Знайти ймовірність того, що обидві кульки будуть різного кольору.

3.4. З урни, яка містить 3 білі та чорні кульки, перекладено дві кульки до урни, яка містить 4 білі та 4 чорні кульки. Яка ймовірність того, що з другої урни після такого перекладення буде взято білу кульку?

3.5. Для виконання завдання замовник звернувся до двох виконавців. Ймовірність того, що перший виконавець надасть згоду виконати замовлення дорівнює 0,8, а другий — 0,9. Знайти ймовірність того, що замовлення буде прийнято принаймні одним з цих виконавців.

3.6. Три стрільці незалежно один від одного стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень для першого дорівнює 0,7, для другого — 0,8, для третього — 0,9. Яка ймовірність, що: а) хоча б один з них влучить у мішень; б) тільки двоє влучать у мішень; в) жоден не влучить у мішень?

3.7. Ймовірність того, що покупець, зайшовши у певний магазин, придбає що-небудь, дорівнює 0,3. Якщо двоє покупців заходять до магазину, то яка ймовірність того, що: а) вони обоє що-небудь куплять; б) жоден не зробить покупки; в) один із двох точно зробить покупку?

3.8. У кожному з трьох ящиків лежить по 10 деталей; у першому ящику 2 деталі браковані, у другому – 3, у третьому – 1. З кожного ящика беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що: а) всі деталі браковані; б) серед трьох деталей є принаймні одна стандартна.

3.9. Ймовірність своєчасної сплати податків для першого підприємства дорівнює 0,8, для другого – 0,6, для третього – 2/3. Визначити ймовірність своєчасної сплати податків не більше ніж одним підприємством.

3.10. Два стрільці незалежно один від одного роблять по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення першого – 0,8, другого – 0,4. Відомо, що є одне влучення. Знайти ймовірність того, що в мішень влучив перший стрілець, один стрілець, хоча б один стрілець.

3.11. Ймовірність виготовлення бракованої деталі на першому верстаті дорівнює 0,2, на другому ця ймовірність на 50 % більша, ніж на першому, на третьому – 1/20. На кожному верстаті виготовлено по одній деталі. Визначити ймовірність того, що серед цих трьох деталей буде не більше двох бракованих.

3.12. Автомобіль обладнано двома протиугінними пристроями: механічним і електронним. Надійність механічного пристрою — 0,9, електронного — 0,8. Який ризик крадіжки автомобіля?

3.13. У першій урні міститься 7 білих і 3 чорних кульки; у другій — 5 білих і 5 чорних кульок; у третій — 4 білих і 6 чорних кульок. З кожної урни навмання виймають по одній кульці. Знайти класичну ймовірність того, що серед вибраних кульок виявляться: а) лише одна біла кулька; б) дві білі кульки; в) три білі кульки; г) хоча б одна біла кулька?

3.14. Ймовірність того, що подія відбудеться хоча б один раз в трьох незалежних в сукупності випробуваннях, дорівнює 0,964. Знайти ймовірність появи події в одному випробуванні, вважаючи, що ймовірність появи події в кожному випробуванні однакова.

3.15. Робітник обслуговує одночасно 3 верстати. Ймовірність порушення роботи протягом години для першого дорівнює 0,1, для другого — 0,2, для третього — 0,2. Яка ймовірність того, що: а) усі три верстати працюватимуть протягом години; б) хоча б один із них вийде з ладу?

Контрольні запитання до теми

1. Які теореми теорії ймовірностей називають основними?
2. Теорема додавання ймовірностей.
3. Наслідок основної теореми про ймовірність суми двох подій?
4. Які події називаються незалежними?
5. Дати визначення умовної ймовірності.
6. Як позначається умовна ймовірність?
7. Теорема множення ймовірностей.
8. Наслідок основної теореми про ймовірність добутку двох подій?
9. Які події називаються незалежними у сукупності?
10. Чому дорівнює ймовірність появи принаймні одної з подій n попарно незалежних події?

3.5. Формула повної ймовірності

Теорема 3.5. Нехай $H_i\ (i=\overline{1,n})$ – повна група подій і $P(H_i)>0\ \forall i$, тоді для будь-якої випадкової події A, $A\in\mathscr{U}$, і настає лише після настання однієї з подій (гіпотез) $H_i\ (i=\overline{1,n})$, має місце рівність

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$$

.

Формула називається формулою повної ймовірності. Її можна узагальнити і на зліченне число подій (гіпотез), якщо останні утворюють повну групу.

Приклад. *Серед n екзаменаційних білетів m «щасливих». У кого більша ймовірність витягти «щасливий» білет: у того, хто тягне білет першим, чи в того, хто тягне білет другим.*

Розв'язання:

Нехай подія A_1 – перший студент витягнув «щасливий» білет. Тоді подія A_2 – другий студент витягнув «щасливий» білет, може настати лише за умови настання однієї з гіпотез $H_i (i=1,2)$:

$$H_1=A_1, \qquad P(H_1)=\frac{m}{n}, \qquad P(A_2/H_1)=\frac{m-1}{n-1};$$

$$H_2=\overline{A_1}, \qquad P(H_2)=\frac{n-m}{n}, \qquad P(A_2/H_2)=\frac{m}{n-1}.$$

Тоді за формулою повної ймовірності

$$P(A)=P(H_1)P(A_2/H_1)+P(H_2)P(A_2/H_2)=$$
$$=\frac{m}{n}\,\frac{m-1}{n-1}+\frac{n-m}{n}\,\frac{m}{n-1}=\frac{m(n-1)}{n(n-1)}=\frac{m}{n}.$$

Таким чином, $P(A_1)=P(A_2)$, тобто ймовірності витягти «щасливий» білет у того, хто тягне білет першим, і в того, хто тягне білет другим, однакові.

3.6. Формули Байєса

Теорема 3.6. Нехай $H_i\ (i=\overline{1,n})$–повна група подій і $P(H_i)>0\ \forall i$. Тоді для будь-якої випадкової події A, $A\in\mathscr{U}$ і вже настала після настання однієї з гіпотез $H_i\ (i=\overline{1,n})$, мають місце рівності

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)} \tag{3.7}$$

$$(i=\overline{1,\ n})$$

Формули (3.7) називаються теоремою гіпотез, або формулами Байєса. Вони дозволяють зробити переоцінку гіпотез $H_i\ (i=\overline{1,\ n})$ після настання події A. Зазначимо, що ймовірності $P(H_i\,/\,A)\ (i=\overline{1,\ n})$ називаються *апостеріорними,* або післядослідними ймовірностями гіпотез.

Приклад.*Маємо три однакові урни, в кожній з яких по* 4 *кулі. У першій –* 1 *біла,*3 *чорних; у другій –* 2 *білих,*2 *чорних; у третій –* 3 *білих,*1 *чорна. Із навмання взятої урни навмання вийнято білу кулю. Знайти ймовірність того, що кулю вийнято з* i – *ї урни* $(i=\overline{1,\ 3})$.

Розв’язання. Подія A – вийнято білу кулю – настає після настання однієї з гіпотез $H_i\ (i=\overline{1,\ n})$ – вибрано i – ту урну

$$P(H_1)=1/3,\ P(A/H_1)=1/4;$$
$$P(H_2)=1/3,\ P(A/H_2)=2/4;$$
$$P(H_3)=1/3,\ P(A/H_3)=3/4.$$

Тоді

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\,P(A/H_i)=\frac{1}{3}\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\frac{3}{4}=\frac{1}{2}.$$

Тепер потрібні нам ймовірності можна знайти за формулами Байєса (3.7):

$$P(H_1\,/\,A)=\frac{\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6},\quad P(H_2\,/\,A)=\frac{\frac{1}{3}\,\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},\quad P(H_3\,/\,A)=\frac{\frac{1}{3}\,\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Перевірка: $\sum_{i=1}^{3}p_i=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1.$

Формула Байєса корисна тим, що дозволяють коректувати відомості про випадкові події на основі інформації, що надійшла. Вона знаходить застосування скрізь, де використовують імовірнісні методи:

− розпізнаванні образів для виявлення об'єктів по їх зображенню;

− у радіолокаційній техніці для відділення сигналу від шуму;

− технічній діагностиці для пошуку несправності;

− у медичній діагностиці для постановки діагнозу; − у прогнозування погоди і в інших випадках, коли необхідно виявити ймовірну причину (гіпотезу) появи події.

Задачі для самостійної роботи

3.16. У екзаменаційному білеті вступного іспиту з математики дві задачі: з алгебри і геометрії. Імовірність того, що навмання вибраний абітурієнт розв'яже задачу з алгебри дорівнює 0,7, з геометрії — 0,4. Яка імовірність того, що цей абітурієнт розв'яже обидві задачі?

3.17. У магазині мобільного зв'язку є стартові пакети операторів МТС, КИЇВСТАР і LIFE 20, 30 і 50 штук відповідно. Ймовірності покупки потенційними покупцями цих стартових пакетів дорівнюють 0,7, 0,8 і 0,9 відповідно. До магазину заходить покупець. Яка ймовірність того, що він купить стартовий пакет?

3.18.В урні 8 кульок — 5 білих і 3 чорних. Навмання одна за одною виймаються 2 кульки. Знайти ймовірність того, що друга кулька виявилася чорною, якщо: а) першу кульку повертали до урни; б) першу кульку не повертали до урни.

3.19. УКиєвічотириуніверситети, вякихможназдобутикваліфікаціюспеціаліста з ІТ. Для певного абітурієнта ймовірність вступу до кожного з них дорівнюють 0,4, 0,6, 0,7 і 0,8 відповідно. Абітурієнт подає документи до навмання вибраного одного з цих університетів. Яка ймовірність того, що він стане студентом?

3.20. Маємо три партії деталей. Перша складається з 10 стандартних і 4 нестандартних, друга — із 14 стандартних і 4 нестандартних, третя — із 16 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із навмання вибраної партії береться деталь. Знайти ймовірність того, що деталь буде: 1) стандартною; 2) нестандартною.

3.21. Ілля Муромець зупинився перед каменем на роздоріжжі трьох доріг. Напис на камені був такий: «Поїдеш наліво — загинеш з ймовірністю 0,5; направо — з ймовірністю 0,7; прямо — з ймовірністю 0,6. Підкинь монету двічі: випаде два герба — їдь наліво, дві цифри — направо, а якщо герб і цифра — прямо». Яка ймовірність того, що дочекаються Іллю його друзі — Добриня та Альоша?

3.22. Два економісти заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність помилки для першого економіста дорівнює 0,1, для другого — 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий —60. Під час перевірки у навмання взятому з папки документі виявили помилку. Знайти ймовірність того, що документ складав перший економіст.

3.23. 5% чоловіків та 0,25% жінок – дальтоніки. Навмання обрана людина виявилась дальтоніком. Яка ймовірність того, що це був чоловік, якщо вважати, що чоловіків та жінок однакова кількість?

3.24. З урни, яка містить 3 білі та 2 чорні кулі, перекладено 2 кулі в урну, яка містить 4 білі та 4 чорні кулі. Знайти ймовірність витягнути після цього з другої урни білу кулю.

3.25. У кошик, що містить 3 кулі, опущена чорна куля. Яка ймовірність того, що з кошика буде витягнута чорна куля, якщо всі припущення про початковий склад куль за кольором рівноможливі?

3.26. Кількістьвантажнихавтомобілів, якіпроїжджаютьпотрасіповзАЗС, відноситьсядокількостілегкових, якіпроїжджаютьпотійжетрасіяк 3:2. Ймовірність того, що буде заправлятись вантажний автомобіль, дорівнює 0,1; легковий автомобіль - 0,2. До АЗС під'їхав автомобіль для заправки. Яка ймовірність того, що це вантажний автомобіль?

3.27. Три мисливці одночасно зробили по одному пострілу у ведмедя. Ведмедя вбито однією кулею. Яка ймовірність того, що ведмедя вбито першим, другим або третім мисливцем, якщо ймовірності влучення для них дорівнюють відповідно p1= 0,2; p2=0,4; p3=0,6.

3.28. Три верстати-автомати штампують однотипні деталі, що потрапляють на спільний конвейєр. Продуктивність другого автомату на 40% вища від продуктивності першого і вдвічі вища від третього. Відсоток браку для кожного з автоматів дорівнює відповідно 3%, 6%, 2%. а) Яка імовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь виявиться бракованою? б) Навмання взята деталь виявилася бракованою. Що імовірніше: ця деталь виготовлена першим чи третім автоматом?

3.29. Маємо три однакові урни, в кожній з яких по 4 кулі. У першій – 1 біла,3 чорних; у другій – 2 білих,2 чорних; у третій – 3 білих,1 чорна. Із навмання взятої урни навмання вийнято білу кулю. Знайти ймовірність того, що кулю вийнято з З урни $(i=\overline{1,3})$.

3.30. У першій урні міститься 4 білих і 3 чорних кульки, а в другій — 3 білих і одна чорна кулька. З першої урни навмання вийняли 1 кульку і переклали її в другу. Знайти за класичним способом ймовірність того, що після перекладання навмання вийнята з другої урни кулька буде білою.

Контрольні запитання до теми

1. З якою метою використовують формулу повної ймовірності?
2. Які події називаються гіпотезами?
3. Навести формулу повної ймовірності.
4. Сформулювати теорему Байєса.
5. Яке призначення формули Байєса?

4. ПОСЛІДОВНІСТЬ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПРОБУВАНЬ

Нехай проводяться n випробувань, у кожному з яких подія A може як відбутись, так і не відбутись. Якщо ця ймовірність у кожному випробуванні не залежить від того, відбулась вона в інших випробуваннях чи ні, то такі випробування називаються незалежними щодо події A. Згідно з означенням випробування також незалежні, якщо в кожному з них імовірність настання події однакова, тобто дорівнює тому самому числу. Імовірність того, що подія A відбудеться в кожному з незалежних випробувань, позначають $P(A) = p$ а ймовірність настання протилежної події $P(\bar{A}) = 1 - p = q$. Для розв'язування задач на повторні незалежні випробування застосовують такі формули і теореми.

4.1. Формула Бернуллі

Нехай проводиться n послідовних випробувань, ймовірність події A в кожному випробуванні одна й та сама, а випробування незалежні, тобто поява події A в і-му випробуванні не залежить від її появи в інших випробуваннях. Таку серію випробувань називають схемою Бернуллі. Схема Бернуллі може бути пов'язаною з будь-яким експериментом: з підкиданням монети, зі стрільбою по мішені тощо. Якщо випадкова подія A відбувається в кожному випробуванні з ймовірністю $P(A) = p$, тоді вона не відбувається з ймовірністю $q = 1 - p$. Ймовірність того, що при n випробуваннях за схемою Бернуллі подія A відбудеться k разів визначається за формулою Бернуллі:

$$P\ k\ = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (4.1)$$

з якої випливають наступны наслідки:

- Ймовірність появи події A в n випробуваннях k разів, де число k перебуває між числами k_1 та k_2, $0 \le k_1 \le k_2 \le n$, знаходиться за формулою:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \ldots + P_n(k_2) \qquad (4.2)$$

- Ймовірність появи події A в n випробуваннях хоча б один раз

$$P_n(1 \le k \le n) = 1 - qn$$

- Найімовірніша кількість m_0 появи події A в n випробуваннях визначається з нерівностей: $np - q \le m_0 \le np + p$
- Якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює p, то кількість n випробувань, які необхідно здійснити,

щоб з ймовірністю P можна було стверджувати, що подія A відбудеться хоча б один раз, знаходиться за формулою

$$n > \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$$

Приклад. *Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі* 0,6. *Знайти ймовірність трьох влучень при п'яти пострілах*.

Розв'язання:

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{2!\,3!} 0{,}6^3 (1-0{,}6)^2 = 0{,}3456 \approx 0{,}35 .$$

Зауваження. При великих n і значній різниці між n і m обчислення $P_n(m)$ за формулою Бернуллі стають надто складними. Тому знайдемо кілька наближених формул.

4.2 Граничні теореми у схемі Бернуллі

Нехай виконуються умови схеми Бернуллі і проводиться n послідовних випробувань. Для наближеного обчислення ймовірності появи події A у цих n випробуваннях k разів при великих n і малих p таких, що $np < 10$, доцільно використовувати формулу Пуассона:

$$P_n\ k \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np (4.3)$$

Локальною функцією Лапласа називають функцію

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Інтегральною функцією Лапласа називають функцію

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Значення функцій φ(x) та Φ(x) наведено відповідно у додатках 1 і 2.

Локальна теорема Муавра—Лапласа. Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n достатньо велика, а ймовірність p появи події A в усіх випробуваннях відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність появи події A k разів може бути наближено знайдена за формулою

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x); \; x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \qquad (4.4)$$

φ(x)– локальна функція Лапласа.

Інтегральна теорема Муавра—Лапласа. Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n достатньо велика, а ймовірність p появи події A в усіх випробуваннях відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність появи події A не менше k_1 і не більше k_2 разів можна наближено знайти за формулою

$$P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \qquad (4.5)$$

де $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

$\Phi(x)$ - інтегральна фунція Лапласа.

Теорема Бернуллі. Нехай у схемі Бернуллі $p = P(A)$ — ймовірність події A, а n — кількість послідовних випробувань, в яких подія A відбувається $k = k(n)$ разів. Тоді для будь-якого додатного числа ε > 0 виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \qquad (4.6)$$

тобто подія, для якої відхилення $\dfrac{k}{n}$ від p в серії з n випробувань визначається формулою $\left|\dfrac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon$ при великих значеннях n практично неможлива. Отже, протилежна подія $\left|\dfrac{k}{n} - p\right| < \varepsilon$ при великих n практично достовірна:

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Ймовірності P_n можна наближено знайти за інтегральною теоремою Муавра—Лапласа

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Примітка. Формули (4.4) та (4.5) доцільно застосовувати за умови $n > 100$, $npq > 20$.

Приклад. *Ймовірність появи події при одному випробуванні* $p \approx 0{,}001$. *Знайти ймовірність появи двох і більше подій при* 5000 *випробуваннях.*

Розв’язання:

$$p \approx 0,001 < 0,1; \; npq = 5000 \cdot 0,001 \cdot 0,999 < 9$$

Отже, формулу Пуассона використовувати можна.

$$np = 5000 \cdot 0,001 = 5$$

$$P_{5000}(k \geq 2) = P_{5000}(2) + P_{5000}(3) + \ldots + P_{5000}(5000) = 1 - P_{5000}(0) - P_{5000}(1) =$$

$$= 1 - \frac{5^0}{0!} e^{-5} - \frac{5^1}{1!} e^{-5} = 1 - 6e^{-5} = 0,9595\ldots \approx 0,96 .$$

Приклад. *Ймовірність виготовлення деталі першого сорту на даному верстаті дорівнює* 0,6. *Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих* 100 *деталей буде* 55 *деталей першого сорту*.

Розв’язання:

$$p = 0,6 > 0,5; \; npq = 100 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 24 > 10 .$$

Отже, формулу Муавра-Лапласа уцьому випадку використовувати можна.

$$P_{100}(55) = \frac{1}{\sqrt{24}} \varphi(x) = \left\{ x = \frac{k - np}{\sqrt{24}} = \frac{55 - 100 \cdot 0,6}{\sqrt{24}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{24}} \varphi\left(\frac{55 - 100 \cdot 0,6}{\sqrt{24}} \right) = \frac{0,2371}{\sqrt{24}} \approx 0,04835 .$$

Приклад. *Знайти ймовірність того, що серед* 1200 *новонароджених від* 550 *до* 650 *хлопчиків, якщо ймовірність народження хлопчика* 0,515.

Розв’язання:

$$P = 0,515 > 0,5; \; npq = 1200 \cdot 0,515 \cdot 0,485 = 299,73 > 10$$

Отже, інтегральну формулу Муавра – Лапласа у даному разі використовувати можна:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{550 - 120 \cdot 0,515}{\sqrt{1200 \cdot 0,515 \cdot 0,485}} = -3,35 ;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{650 - 120 \cdot 0,515}{\sqrt{1200 \cdot 0,515 \cdot 0,485}} = 1,85 .$$

$$P_{1200}(550,650) \approx \Phi(1,85) - \Phi(-3,35) = \Phi(1,85) + \Phi(3,35) = 0,468 + 0,499 = = 0,967 \approx 0,97 .$$

Приклад. *Ймовірність випуску бракованого виробу дорівнює 0,02. Чому дорівнює ймовірність того, що у партії зі 100 виробів бракованих буде не більше 3?*

Розв’язання:

Скористаємось теоремою Пуассона. У даному випадку n=100, p=0,02, λ=np=100·0,02=2. Тоді

$$P\{k \leq 3\} = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + P_n(3) \approx e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{4e^{-2}}{2!} + \frac{8e^{-2}}{3!} = 0,8571.$$

Задачі для самостійної роботи

4.1. Оглядову лекцію мають прослухати 100 студентів. Ймовірність бути присутнім на лекції для кожного студента дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що на лекцію прийде більше половини студентів.

4.2. Ймовірність вчасної реалізації зі складу однієї пари взуттядорівнює 0,8. Знайти найімовірнішу кількість вчасно реалізованих пар взуття.

4.3. Зі статистичних даних відомо, що ймовірність захворіти грипом під час епідемії для кожної особи дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що із 100 перевірених осіб хворими виявляться від 20 до 50 осіб?

4.4. До магазину зайшли 8 покупців. Ймовірність того, що будьякий з них не піде з магазину без покупки, дорівнює 0,4. а) Знайти ймовірність того, що троє з покупців дещо куплять. б) Яка ймовірність того, що жоден з них нічого не купить?

4.5. Знайти ймовірність того, що серед 100 осіб буде не більше 40 брюнетів, якщо близко 30% населення-брюнети.

4.6. У процесі виробництва ймовірність дефектів у кожній партії продукції складає 0,1. Яка ймовірність того, що з десяти партій дефекти будуть мати менше двох партій?

4.7. Знайти ймовірність того, що серед 1000 новонароджених буде 480 дівчаток, якщо ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515.

4.8. Припустимо, що ймовірності народитися у будь-який з днів року однакові. Знайти ймовірність того, що серед 500 учнів школи: а) троє народилися 8 березня; б) жоден не народився 1 січня.

4.9. Ймовірність влучення у літак з гвинтівки при кожному пострілі дорівнює 0,001. Здійснюється 3000 пострілів. Знайти ймовірність того, що буде хоча б одне влучення.

4.10. Серед 5 студентів проводиться психологічний тест на визначення типу характеру людини. Ймовірність того, що за результатами тестування буде правильно визначено тип характеру кожної людини, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що буде правильно визначено тип характеру лише трьох протестованих студентів.

4.11. В одержаній партії текстильних виробів 0,6 % браку.Яка ймовірність при випадковому відборі 1000 виробів виявити: а) шість бракованих виробів; б) хоча б один бракований виріб?

4.12. У середньому з 200 ламп за місяць виходить з ладу 1 лампочка. Всього встановили 400 ламп. Яка ймовірність того, що за місяць вийде з ладу: а) 3 лампочки? б) не менше 3 лампочок? в) 0 лампочок?

4.13. Яка ймовірність того, що при 10 підкиданнях монети випаде герб: а) від 4 до 6 разів? б) від 3 до 5 разів? в) 0 разів? г) не менше 4 разів?

4.14. Імовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,001. Знайти імовірність двох і більше влучень, якщо було зроблено 5000 пострілів.

4.15. По каналу зв'язку передається 1000 знаків. Кожен знак може бути викривлений з імовірністю 0,004. Знайти ймовірність того, що буде викривлено не більше 3 знаків.

4.16. Імовірність успіху в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 випробуваннях успішними будуть: а) рівно 75 випробувань? б) рівно 85 випробувань?

4.17. Імовірність виробництва бракованого виробу дорівнює 0,005. Чому дорівнює ймовірність того, що з 10000 вибраних навмання виробів бракованих буде не більше 60?

4.18. Імовірність виходу з ладу за час τ одного приладу дорівнює 0,1. Визначити ймовірність того, що за час τ зі 100 приладів вийдуть з ладу: а) не менше 20; б) менше 15; в) від 6 до 18 приладів.

4.19. Імовірність замовлення в технічній бібліотеці книг з відділу техніка дорівнює 0,7 і з відділу математика — 0,3. Яка ймовірність того, що з п'яти читачів, які зайшли в бібліотеку, усі замовлять книги з одного відділу?

4.20. Автопарк нараховує 12 автомашин. Імовірність виходу на маршрут кожної з них дорівнює $p = 0,8$. Знайти ймовірність нормальної роботи автопарку, якщо для цього на маршруті необхідно мати не менш 8 автомашин.

4.21. Стрілок зробив 4 постріли по мішені. Імовірність влучення при кожному пострілі постійна і дорівнює $p = 0,6$. Знайти ймовірність того, що буде хоча б одне влучення у мішень.

4.22. Імовірність виявлення нестандартного виробу дорівнює 0,005. Чому дорівнює ймовірність того, що з 10000 навмання відібраних виробів нестандартних виявиться 40?

4.23. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Імовірність розриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини нитка обірветься на п'ятьох веретенах.

4.25. Схожість насіння пшениці дорівнює 95%. Знайти ймовірність того, що з 2000 посіяних зерен пшениці не проростуть від 80 до 120 зерен.

4.26. Імовірність випуску ламп із дефектом дорівнює 0,08. Знайти ймовірність того, що серед 1000 ламп відхилення від зазначеного відсотка браку не перевищить 0,01.

4.27. Радіоприлад складається з 1000 мікроелементів. Ймовірність відмови одного елемента на протязі доби становить 0,002 і не залежить від стану інших елементів. Знайти ймовірність відмови на протязі доби: а) тільки двох елементів; б) не менше двох елементів.

4.28. Компанія по перевезенню вантажів на протязі місяця виконує 400 рейсів. Ймовірність повного комерційного завантаження рейса дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що на протязі місяця з повним комерційним завантаженням буде виконано: а) не менше 300 рейсів; б) більшість рейсів.

4.29. Комплект виробів містить 30% нестандартних. Знайти ймовірність того, що серед відібраних з комплекту випадковим чином 5 виробів буде: а) тільки один нестандартний; б) хоча б один нестандартний.

4.30. Ймовірність того, що пасажир, що звернувся в авіакасу, замовить білет в пункт N, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що з 100 пасажирів, що звернулись в касу, білет до пункту N замовлять: а) менше 15 чоловік; б) від 5 до 12 чоловік;

4.31. Якість виробу перевіряють незалежно один від одного 4 контролери. Ймовірність прийому виробу кожним контролером дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що виріб буде прийнято: а) всіма контролерами; б) хоча б одним контролером.

4.32. Згідно з статистичними даними в середньому 1% пасажирів здає квиток на поїзд. Знайти ймовірність того, що з 300 пасажирів, що придбали квитки на поїзд, здадуть квиток: а) не більше 5 пасажирів; б) не менше 3 пасажирів.

4.33. Відділ технічного контролю приймаєвсередньому 90% продукціїзаводу.Скільки потрібно виготовити виробів, щоб з ймовірністю 0,95 можна було очікувати , що не менше 200 буде прийнято відділом технічного контролю?

4.34. Згідно з статистичними даними в середньому 5% авіарейсів затримується по технічним причинам. Знайти ймовірність того, що з 400 рейсів, запланованих на наступний місяць, по технічним причинам буде затримано: а) не більше 3% рейсів; б) не менше 10% рейсів.

4.35. Велика партія ламп містить 1% браку. Знайти ймовірність того, що серед вибраних випадковим чином 8 ламп виявиться хоча б одна бракована.

4.36. Ймовірність того, що студент дасть правильну відповідь на кожне з екзаменаційних питань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з чотирьох питань студент дасть правильну відповідь на: а) хоча б одне питання; б) два питання;

4.37. Ймовірність того, що студент дасть правильну відповідь на кожне з екзаменаційних питань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що з 10 питань студент дасть правильну відповідь на: а) хоча б два питання; б)не менше трьох питань.

4.38. Телефонна станція обслуговує 2000 абонентів. Ймовірність того, що деякий абонент зателефонує на станцію на протязі години, дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що на протязі години на телефонну станцію зателефонує: а) 5 абонентів; б) не більше трьох абонентів.

4.39. В осіннє-зимовий період регулярність авіарейсів становить 90%. Яку кількість рейсівпотрібнозапланувативацейперіод,щобзймовірністю0,96виконатинеменше 1500 рейсів?

4.40. Фабрика виготовляє 75% продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що з 300 виробів, виготовлених на фабриці, кількість першосортних буде: а) не менше 250; б) від 220 до 235;

4.41. Автопарк маршрутних таксі має 12 автомобілів одного типу. Ймовірність готовності кожного автомобіля до рейса дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопарку на найближчий день, якщо для цього необхідно мати готовими до рейсу: а) 8 автомобілів; б) не менше 8 автомобілів.

4.42. Ймовірність закриття аеропорту на добу у зв’язку з метеоумовами в осінньозимовий період дорівнює 0,15. Знайти ймовірність того, що в цей період аеропорт буде закрито: а) на 30 діб; б) не більше ніж на 20 діб;

4.43. Прилад складається з 4 незалежно працюючих елементів. Ймовірність безвідмовної роботи кожного елемента на протязі часу t дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що за час t будуть безвідмовно працювати: а) всі елементи; б) хоча б один елемент;

4.44. При транспортування пошкоджується в середньому 0,05% скляних виробів. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні 1000 виробів буде пошкоджено: а) рівно 3 вироби; б) не більше трьох виробів;

4.45. При транспортування пошкоджується в середньому 0,03% скляних виробів. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні 1000 виробів буде пошкоджено: а) рівно 4 вироби; б) хоча б один виріб;

4.46. За даними аеропорту в листопаді в зв’язку з метеоумовами відкладається 10% рейсів. Знайти ймовірність того, що з 400 рейсів, запланованих на цей місяць, буде відкладено: а) 50 рейсів; б) від 30 до 50 рейсів;

4.47. Радіостанція передає 6 повідомлень для екіпажу пароплава. Ймовірність прийому кожного повідомлення 0,6. 1) Знайти найбільш ймовірну кількість прийнятих повідомлень. 2) Знайти ймовірність того, що буде прийнято не менше 4 повідомлень.

4.48. Ймовірність того, що студент запізниться на пару, дорівнює 0,04. Знайти ймовірність того, що з 50 студентів запізниться: 1) четверо; 2) не більше 4;

4.49. В зону аеродрому входять 6 літаків. Ймовірність правильного (такого, що не потребує втручання диспетчера) заходу на посадку кожного літака дорівнює 0,85. Знайти найбільш ймовірне число літаків, для яких буде необхідна допомога диспетчера, та обчислити цю найбільшу ймовірність.

4.50. Завод відправив на базу 500 якісних виробів. Ймовірність пошкодження при транспортуванні кожного виробу дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що буде пошкоджено: 1) 3 вироби; 2) менше трьох виробів.

Контрольні запитання до теми

1. Сформулюйте дві вимоги «схеми Бернуллі».
2. Запишіть формулу Бернуллі.
3. Як обчислюється ймовірність появи події A в серії з n випробувань від k_1 до k_2 разів за умов схеми Бернуллі?

4. Яка ймовірність появи події A в n незалежних випробуваннях хоча б один раз за умов схеми Бернуллі?
5. Чому дорівнює параметр λ у формулі Пуассона?
6. Як можна обчислити значення функції $P_n(k)$ з формули Пуассона?
7. Яку функцію називають локальною функцією Лапласа?
8. Яку функцію називають інтегральною функцією Лапласа?
9. Як обчислюють значення локальної та інтегральної функцій Лапласа?
10. Запишіть локальну теорему Муавра—Лапласа.
11. Запишіть інтегральну теорему Муавра—Лапласа.
12. Що можна сказати про парність/непарність локальної та інтегральної функцій Лапласа?
13.Як діяти, якщо в таблицях для інтегральної функції Лапласа відсутнє значення необхідного аргументу?
14. Запишіть теорему Бернуллі.

5. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ І ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ

5.1. Випадкові величини. Способи задання випадкових величин

Означення 5.1. Випадковою називається величина, яка в результаті випробування може набувати того чи іншого, але лише одного числового значення з деякою ймовірністю. Означення випадкової величини пов’язане з поняттям простору елементарних подій. Нехай задано простір елементарних подій Ω. Однозначна числова функція $X = f(\Omega)$ яку задано на просторі елементарних подій, називається **випадковою величиною**. Якщо простір Ω дискретний, то випадкова величина **дискретна.** Тобто можливі значення дискретної випадкової величини можна пронумерувати або перелічити. Неперервному простору елементарних подій відповідає **неперервна** випадкова величина. Тобто неперервна випадкова величина може набувати всіх значень з деякого скінченного або нескінченного інтервалу. Випадкові величини позначаються великими літерами латинського алфавіту X, Y, Z,…, а їх можливі значення малими літерами.

Приклади випадкових величин:

1. Кількість гербів, що випали при n підкиданнях монети.
2. Сума очок, що випали при підкиданні двох кубиків.
3. Кількість попадань при трьох пострілах.
3. Координата x точки, вибраної навмання з відрізка [0; 1].
4. Час безвідмовної роботи приладу.
5. Температура тіла людини.

Відповідність між можливими значеннями $x_1, x_2, ..., x_n$ випадкової величини X і їх ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_n$ називається **законом розподілу (рядом розподілу)** випадкової величини X. Тобто законом розподілу випадкової величини X, називається будь-яке правило яке дозволяє визначати ймовірності кожного можливого значення випадкової величини. Закон розподілу можна задавати у довільній формі, але найбільш уживаними є такі форми: таблична; графічна; аналітична (функція розподілу). Ряд розподілу дискретної випадкової величини зручно подавати у табличній формі:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Перший рядок містить можливі значення випадкової величини X, а в другому рядку вказані ймовірності цих значень.

Означення 5.2. Графічне зображення ряду розподілу називається многокутником розподілу. Для його побудови в прямокутній системі координат будують точки $(x_1, p_1), (x_2, p_2), ..., (x_n, p_n)$ і з'єднують їх відрізками прямих.

Універсальним способом задання закону розподілу ймовірностей є функція розподілу. Функцією розподілу ймовірностей (функцією розподілу) називається функція $F(x)$, яка визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде значення, меншого за аргумент x, тобто $F(x) = P(X < x)$. Якщо x – фіксована точка, а X – випадкова величина, то $F(x)$ характеризує ймовірність потрапляння випадкової точки у проміжок лівіше за точку x.

Знаючи функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини, можна обчислити ймовірності будь-яких подій, які пов'язані з нею. Зокрема для довільних α і β ймовірність того, що випадкова величина набуде значення з інтервалу $(\alpha; \beta)$ знаходиться за формулою: $P(\alpha \le x \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Властивості функції розподілу:

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. Функція неспадна, тобто $F(x_1) \le F(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$
3. $P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$
4. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
5. $P(X \ge 1) = 1 - F(x)$

Функцію розподілу дискретної випадкової величини X можна побудувати за рядом розподілу: $F(x) = \sum\limits_{x_k < x} p_k$, де сумування поширюється на індекси k для яких $x_k < X$. Графік функції розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X, яка набуває значень $x_i \; (i = 1,..n)$ з ймовірностями $p_i \; (i = 1,...,n)$, має вигляд східчастої лінії.

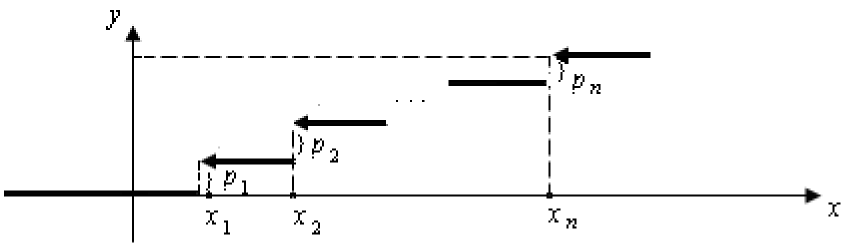


Рис. 1.Графік функції розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини

Графік функції $F(x)$неперервної випадкової величини X, значення якої належать інтервалу (a,b), має вигляд неперервної лінії:

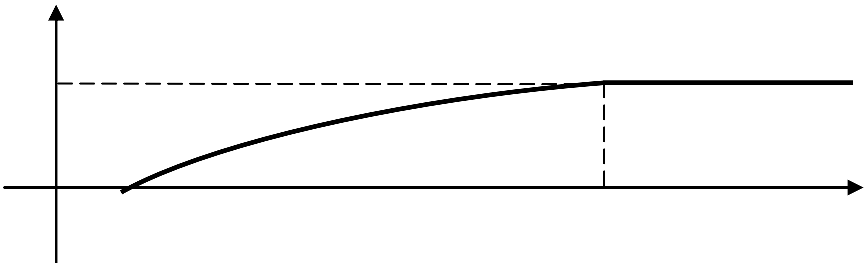


Рис. 2.Графік функції розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини

Приклад. *Задано функцію розподілу неперервної випадкової величини*

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ якщо\ x\le 1, \\ \frac{1}{12}x^2-\frac{1}{12}x,\ якщо 1<x\le 4, \\ 1,\ якщо\ x>4 \end{cases}$$

Знайти $P(2\le x\le 3)$

Розв'язання:

Обчислюємо ймовірність за формулою:

$$P(2<x\le 3)=F(3)-F(2)=\frac{1}{12}9-\frac{1}{12}3-\frac{1}{12}4+\frac{1}{12}2=\frac{1}{3}.$$

5.2. Дії над випадковими величинами

Піднесення до степеня *n* випадкової величини X. Результатом піднесення випадкової величини X до n-го степеня є випадкова величина $Y=X^n$, усі значення якої дорівнюють n-му степеню значень випадкової величини X, а ймовірності відповідних значень величини Y збігаються з ймовірностями відповідних значень випадкової величини X.

Множення випадкової величини X на число. Добутком випадкової величини X на число С є випадкова величина $Y=CX$, усі значення якої дорівнюють добутку значень випадкової величини X на число C, а ймовірності відповідних значень величини Y збігаються з ймовірностями відповідних значень випадкової величини X.

Сумою дискретних випадкових величин X (яка має значення x_i) і випадкової величини Y (яка має значення y_j) називається випадкова величина $Z = X + Y$, яка приймає значення **всіх** можливих сум $(x_i + y_j)$ із ймовірностями, які дорівнюють добуткам ймовірностей відповідних значень випадкових величин.

У випадку **різниці** двох випадкових величин використовується правило підсумовування з урахуванням невід'ємного знака другої випадкової величини: $Z = X + (-Y)$.

Множення випадкової величини X (яка має значення x_i) і випадкової величини Y (яка має значення y_j) призводить до вин $(x_i \cdot y_j)$ икнення випадкової величини $Z = X \cdot Y$, яка приймає значення **всіх** можливих добутків із ймовірностями, які дорівнюють добуткам ймовірностей відповідних значень випадкових величин.

5.3. Щільність розподілу

Означення 5.2. Щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини X називається функція $f(x)$ така, що

$$\forall [a,\, b) \subset R \;\; P(X \in [a,\, b)) = \int_a^b f(x)\, dx \qquad (5.1)$$

Щільність розподілу називають іноді **диференціальною функцією** розподілу, а її графік називають **кривою розподілу**. Випадкова величина, яка задається щільністю розподілу, називається неперервною випадковою величиною. Множина її можливих значень – проміжок.

Безпосередньо з означення випливає, що

$$\forall x \in R \;\; P(X < x) = P(X \in (-\infty,\, x)) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, dx \qquad (5.2)$$

Зокрема, якщо всі значення неперервної випадкової величини X належать півінтервалу $[a,b)$, то

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \int_a^x f(u)\, du, & a < x \le b; \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

а з (5.1) виплаває, що $\forall x$ неперервності функції $f(x)$

$$F'(x) = f(x) \qquad (5.3)$$

Властивості $f(x)$:

1. $\forall x$ неперервності функції $f(x)$

$$P(x < X < x + \Delta x) = f(x)\Delta x + 0(\Delta x)$$

або

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Обидва співвідношення випливають безпосередньо з означення і останнє з них означає, що щільність розподілу дійсно є щільністю, тобто ”кількістю ймовірності”, яка припадає на одиницю довжини області визначення випадкової величини X.

2. $f(x) \ge 0$– випливає з властивості 1, оскільки границя відношення невід’ємних величин не може бути від’ємною.

3. Умова нормованості $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

– випливає з (5.1) і з властивості 4 функції розподілу $F(x)$. Геометрично властивість 3 означає, що площа під кривою розподілу $y = f(x)$ дорівнює одиниці.

Таким чином, щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X – це невід’ємна інтегрована функція, яка задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Приклад. *Нехай випадкова величина Хзадана щільністю розподілу*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0;\ 4]; \\ A(4x - x^2), & x \in (0;\ 4]. \end{cases}$$

ЗнайтиA, $f(x)$,$F(x)$,*обчислити*$P(X \in (-2;\ 3))$.

Розв’язання:

1. $\displaystyle\int_0^4 A(4x - x^2)dx = A\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = A\left(32 - \frac{64}{3}\right) = A\frac{32}{3} = 1.$

Звідки

$$A = \frac{3}{32}.$$

Таким чином,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin(0;\,4]; \\ \dfrac{3}{32}(4x-x^2), & x\in(0;\,4]. \end{cases}$$

2. $x\in(0;4],\ F(x)=\int\limits_0^x \dfrac{3}{32}(4u-u^2)\,du=\dfrac{6x^2-x^3}{32}$.

Таким чином,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{1}{32}(6x^2-x^3), & 0<x\le 4; \\ 1, & x>4. \end{cases}$$

3. $P(X\in(-2;\,3))=P(X\in(0;\,3))=F(3)-F(0)=F(3)=$

$=\dfrac{1}{32}(6x^2-x^3)\Big|_0^3=\dfrac{6\cdot 9-3\cdot 9}{32}=\dfrac{27}{32}$.

5.4. Числові характеристики випадкових величин

Повну характеристику випадкової величини дає її функція розподілу. Для неперервної випадкової величини достатньо знайти її щільність розподілу, для дискретної випадкової величини – її ряд розподілу. Проте при розв'язанні багатьох задач теорії ймовірностей достатньо знайти лише деякі числа, які характеризують розподіл випадкової величини в цілому. Це так звані числові характеристики випадкової величини.

Означення 5.3. Математичним сподіванням неперервної випадкової величини *X*, заданої щільністю розподілу $f(x)$, $x\in(-\infty;+\infty)$, називають число

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx \qquad (5.4)$$

якщо невласний інтеграл справа в (5.4) збігається абсолютно, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|\,f(x)dx<+\infty\,.$$

Відповідно математичним сподіванням дискретної випадкової величини *X*, заданої рядом розподілу $P(X=x_i)=p_i\ (i=\overline{1,\infty})$, називають число

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\cdot p_i \quad (5.5)$$

якщо ряд справа в (5.5) збігається абсолютно, тобто якщо $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i < +\infty$. У протилежному випадку математичне сподівання $M(X)$ не існує.

Якщо розподіли ймовірностей $f(x)$, $x \in (-\infty;+\infty)$ і $P(X = x_i) = p_i$ $(i = \overline{1, \infty})$ інтерпретувати як розподіли одиничної маси, то співвідношення (5.4) і (5.5) є формулами для обчислення центра ваги x_cцієї маси. Саме це мають на увазі, коли кажуть, що математичне сподіванняє центром розподілу випадкової величини.

Приклад. *Знайти математичне сподівання числа влучень при трьох пострілах, якщо ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює* 0,4.

Розв'язання:

Випадкова величина *X* – число влучень при трьох пострілах, набуває значень: 0, 1, 2, 3, ймовірності яких знайдемо за формулою Бернуллі:

$$P_3(0) = q^3 = 0{,}6^3 = 0{,}216;$$
$$P_3(1) = C_3^1 0{,}4^1 0{,}6^2 = 0{,}432;$$
$$P_3(2) = C_3^2\, 0{,}4^2 0{,}6^1 = 0{,}288;$$
$$P_3(3) = p^3 = 0{,}4^3 = 0{,}064.$$

Таким чином, закон розподілу заданої випадкової величини (точніше ряд розподілу) у табличній формі має вигляд

X	0	1	2	3
P	0,216	0,432	0,288	0,064

і, отже,

$$M(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}216 + 1 \cdot 0{,}432 + 2 \cdot 0{,}288 + 3 \cdot 0{,}064 = 1{,}2$$

Властивості $M(X)$

1. $M(C) = C, C = const$
2. $M(CX) = CM(X)$
3. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$
4. $M(XY) = M(X)M(Y)$**,** якщо X, Y – незалежні
5. $M(X - M(X)) = 0$
6. Якщо $X \le Y$, $M(X) \le M(Y)$

Означення.Дисперсією, або розсіянням, випадкової величини X називається математичне сподівання квадратавідхилення цієї випадкової величини від її математичного сподівання, тобто

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2 \qquad (5.6)$$

Приклад. *Випадкові величини* X, Y *задані рядом розподілу у табличній формі*

$$\begin{matrix} X & -2 & -1 & 1 & 2 \\ P & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} Y & -2 & -1 & 1 & 2 \\ P & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{matrix}.$$

Потрібно знайти $M(X), M(Y), D(X), D(Y)$

Розв'язання Внаслідок симетрії розподілів $M(X) = M(Y) = 0$;

$$D(X) = M(X - MX)^2 = M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 4 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}4 = 3{,}4 .$$

Аналогічно

$$D(Y) = M(Y^2) = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 p_j = 4 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}6 .$$

З розглянутого прикладу зокрема випливає, що дисперсія, взагалі кажучи, визначається не лише розсіянням значень випадкової величини (у даному випадку для X і Y воно однакове), а і ймовірностями цих значень.

Властивості $D(X)$

1. $D(C) = 0,\ C = const$
2. $D(CX) = C^2 D(X)$
3. $D(X) \geq 0$
4. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, якщо $X, Y -$ незалежні
5. $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$, якщо $X, Y -$ незалежні
6. Якщо X – неперервна випадкова величина із щільністю розподілу $f(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$, то
$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - (M(X))^2 ,$$
7. Якщо X – дискретна випадкова величина, задана рядом розподілу $P(X = x_i) = p_i \ (i = \overline{1, \infty})$, то

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (M(X))^2 \qquad (5.7)$$

Означення 5.4.Середнім квадратичним (або стандартним) відхиленням випадкової величини X (від її математичного сподівання) називається додатний квадратний корінь з її дисперсії, тобто

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} .$$

$\sigma(X)-$ це ще одна характеристика розсіяння випадкової величини X . Її перевага в тому, що вона маєтусаму розмірність, що і випадкова величина X .

Властивості $\sigma(X)$

1. $\sigma(X) \geq 0$.

2. $\sigma(C) = 0$.

3. $\sigma(CX) = |\,c\,|\,\sigma(X)$.

4. Якщо X, Y – незалежні, то $\sigma(X+Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$.

5. Якщо X_i $(i = \overline{1, n})$ – незалежні випадкові величини, то

$$\sigma(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\sigma(X_i))^2} .$$

4. Якщо X, Y – незалежні випадкові величини, то

$$\sigma(X - Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$$

Означення 5.5. Якщо випадкова величина X має MX і DX, то її **коефіцієнтом варіації** називають число

$$V(X) = \frac{D(X)}{M(X)} \cdot 100\% \qquad (5.8)$$

Означення 5.6.Початковим моментом (або просто моментом) випадкової величини X порядку k $(k \geq 1, k \in N)$ називається число

$$\alpha_k = MX^k \qquad (5.9)$$

Означення.Центральним моментом випадкової величини X порядку k $(k \geq 1, k \in N)$ називається число

$$\mu_k = M(X - MX)^k \qquad (5.10)$$

Зазначимо, що виписані вище початкові і центральні моменти існують, якщо відповідні невласні інтеграли або ряди збігаються абсолютно. У протилежному випадку ці моменти не існують і, обчислюють моменти та центральні моменти за допомогою формул властивості 2 математичного сподівання.Між центральним і початковим моментами існує простий зв'язок. Дійсно,

$$\mu_k = M(X - MX)^k = M\sum_{i=0}^{k} C_k^i X^i(-MX)^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i MX^i(-MX)^{k-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i} C_k^i \alpha_i \alpha_1^{k-i} = \sum_{i=2}^{k}(-1)^{k-i} C_k^i \alpha_i \alpha_1^{k-i} + (-1)^k \alpha_1^k + (-1)^{k-1} k\alpha_1^k =$$

$$= \sum_{i=2}^{k}(-1)^{k-i} C_k^i \alpha_i \alpha_1^{k-i} + (-1)^{k-1}(k-1)\alpha_1^k \ .$$

Випишемо формули, які встановлюють цей зв'язок, для перших чотирьох значень k :

$\mu_1 = 0$;

$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = DX$;

$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3$;

$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4$

Із старшими моментами $(n > 2)$ зв'язані дві характеристики випадкової величини X (або розподілу X), які часто використовуються у застосуваннях – асиметрія і ексцес.

Означення. Асиметрією (або коефіцієнтом асиметрії)випадкової величиниX (або розподілу X) називається число

$$A(X) = \frac{\mu_3}{(\sigma(X))^3} = \frac{M(X - M(X))^3}{(\sigma(X))^3} \qquad (5.11)$$

Зміст асиметрії випливає з її означення формули (3). Якщо $A(X) < 0$, розподіл має праву асиметрію, якщо $A(X) > 0$ – ліву, якщо $AX = 0$, розподіл симетричний відносно прямої $X = M(X)$ (дивись рис. 3).

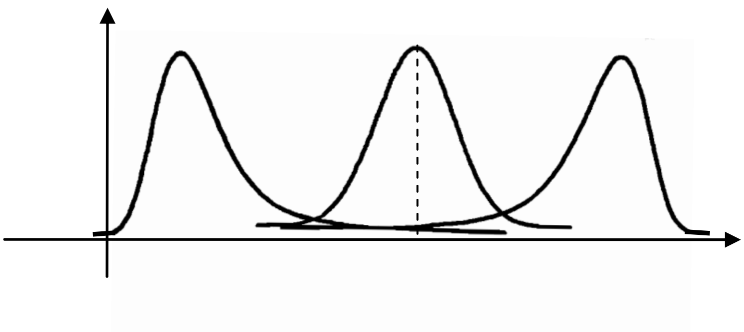


Рис. 3. Зміст асиметрії

Означення 5.7.Ексцесом випадкової величиниX(або розподілу X) називається число

$$E(X)=\frac{\mu_4}{(\sigma(X))^4}-3=\frac{M(X-M(X))^4}{(\sigma(X))^4}-3 \qquad (5.12)$$

– четвертий центральний момент, нормований четвертим степенем середнього квадратичного відхилення, без трьох.

Ексцес характеризує зглаженість кривої щільності розподілу порівняно зі стандартним нормальним розподілом, для якого $E(X)$,відповідно $\mu_4/(\sigma X)^4=3$ (дивись рис. 4).

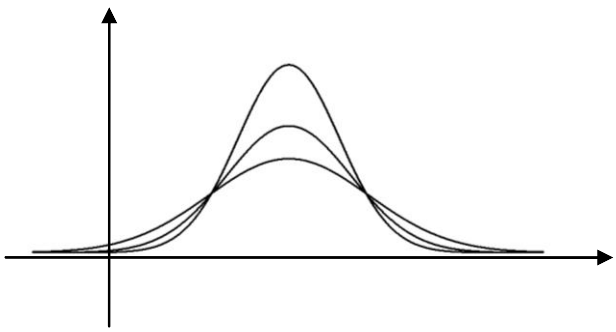


Рис. 4. Ексцес

Таким чином, *A(X)*і *E(X)*– безрозмірні випадкові величини, які характеризують степінь відмінності щільності розподілу $f(x)$ від щільності стандартного нормального розподілу $\varphi(x)$

Означення 5.8.Модою випадкової величини X (або розподілуX) називається число $Mo(X)$, що є максимально ймовірним значенням випадкової величини X.

Таким чином, якщо X – неперервна випадкова величина, задана щільністю розподілу $f(x)$, $x\in(-\infty;+\infty)$, то

$$Mo(X)=\mathrm{argmax}\ f(x) \qquad (5.13)$$

і, якщо X – дискретна випадкова величина, задана рядом розподілу $P(X=x_i)=p_i\ (i=\overline{1,\infty})$, то

$$Mo(X)=m_i:\ P(X=m_i)\geq P(X=m_j)\ \forall j.$$

Зазначимо, що якщо розподіл має єдину моду, то він називається унімодальним, у протилежному випадку – мультимодальним.

Означення 5.9. Медіаною випадкової величини X (або розподілу X) називається число $Me(X)$, яке задовольняє нерівностям

$$F(Me\ X\ \ =P(X<Me\ X\ )\leq 1/2(5.14)$$

$$F(Me(X)+0)=P(X>Me(X))=1-P(X<Me(X))\geq 1/2 \quad (5.15)$$

Зазначимо, що не завжди число $Me(X)$ є одним із значень випадкової величини X і що якщо X – неперервна випадкова величина, то $Me(X)$ є розв'язком рівняння

$$F(Me(X))=1/2.$$

Приклад. $X=\exp(\lambda)$ – *показниковий розподіл, тобто*

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$$

Потрібно знайти $Me(X)$.

Розв'язання:

$$F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda u}du=-\int_0^x e^{-\lambda u}d(-\lambda u)=-e^{-\lambda u}\Big|_0^x=1-e^{-\lambda x}.$$

Тоді

$$F(Me(X))=1-e^{-\lambda Me\,X}=1/2,\qquad e^{-\lambda Me\,X}=1/2,\quad -\lambda Me(X)=-\ln 2,\quad Me(X)=\ln 2/\lambda.$$

Зауваження. Зазначимо, що для симетричних унімодальних розподілів математичне сподівання, якщо воно існує, мода і медіана збігаються.

Задачі для самостійної роботи

Частина 1

5.1. Із надійшовших в ремонт 10 годинників 7 потрібують загальної чистки механізму. Годинники не розсортовані по виду ремонту. Майстер, бажаючи знайти годинник, що потребує чистки, переглядає їх по черзі і, знайшовши такі, припиняє подальший огляд. Скласти закон розподілу кількості переглянутих годинників.

5.2. Відомо, що в даному місті 20% міських жителів дістаються на роботу особистим автомобілем. Випадково вибрано 4 людей. Скласти закон розподілу кількості людей, що дістаються на роботу особистим автомобілем. Записати функцію розподілу і побудувати її графік.

5.3. Клієнти банку, не пов'язані один з одним, не повертають кредити в строк з ймовірністю 0,1. Скласти закон розподілу кількості повернених в строк кредитів із 5 виданих.

5.4. Із 10 телевізорів на виставці виявилось 4 телевізори фірми «Соні». Навмання для огляду вибрано 3 телевізори. Скласти закон розподілу кількості телевізорів фірми «Соні» серед 3 вибраних.

5.5. Завод от правил на базу 500 якісних деталей. Ймовірність пошкодження кожного виробу у дорозі рівна 0,002. Знайти закон розподілу випадкової величини X , рівні кількості пошкоджених виробів, знайдіть ймовірності наступних подій.

5.6. Серед 10 виготовлених приборів 3 неточних. Скласти закон розподілу кількості неточних приборів серед взятих навмання 4 приборів. Скласти функцію розподілу випадкової величини та побудувати її графік.

5.7. В магазині продаються 5 вітчизняних та 3 імпортних телевізори. Скласти закон розподілу випадкової величини – кількості імпортних із 4 навмання взятих телевізорів. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

5.8. В білеті три задачі. Ймовірність правильного рішення першої задачі рівна 0,9, другої – 0,8, третьої – 0,7. Скласти закон розподілу кількості правильно розв'язаних задач.

5.9. Абітурієнт для вступу у вуз повинен скласти 3 іспити. Ймовірність скласти перший іспит рівна 0,9, другий – 0,8, третій – 0,7. Наступний екзамен абітурієнт складає лише у випадку успішної здачі попереднього. Скласти закон розподілу кількості приходів на екзамен для особи, яка поступає в університет.

5.10. У місті 4 комерційних банка. У кожного ризик банкрутства протягом року складає 10%. Скласти закон розподілу кількості банків, які можуть збанкрутувати протягом наступного року.

5.11. Ймовірність зараження полуниці вірусним захворюванням рівна 0,2. Скласти закон розподілу кількості кущів полуниці, заражених вірусом, із чотирьох посаджених кущів.

5.12. З ймовірністю попадання при одному пострілі 0,7, охотник стріляє по дичині до першого попадання, але встигає зробити не більше 4 пострілів. Дискретна випадкова величина X - кількість промахів. Знайти закон розподілу X . Побудувати многокутник розподілу.

5.13. 2 стрілка роблять по одному пострілу в одну мішень. Ймовірність попадання для першого стрілка рівна при одному пострілі – 0,5, для другого – 0,4. Дискретна випадкова величина X - кількість попадань в мішень. Знайти закон розподілу X , побудувати многокутник розподілу.

5.14. В коробці знаходиться 7 олівців, із яких 4 червоних. Із цієї коробки навмання дістають 3 олівця. Знайти закон розподілу випадкової величини X , рівній кількості червоних олівців у вибірці. Побудувати многокутник розподілу.

5.15. Є 5 ключів, із яких тільки один підходить до замка. Знайти закон розподілу випадкової величини X , рівній кількості спроб при відкриванні замка, якщо випробуваний ключ в подальших перевірках не приймає участі.

5.16. В партії з 10 деталей є 8 стандартних. Із цієї партії навмання взято 2 деталі. Знайти закон розподілу випадкової величини, рівній кількості стандартних деталей у вибірці.

5.17. Двічі підкинуто гральну кість. Випадкова величина X рівна різниці між кількістю очок при першому і кількістю очок при другому підкиданні. Знайти закон розподілу X.

5.18. 2 стрілка стріляють по одній мішені, роблячи незалежно один від одного по 2 постріли. Ймовірність попадання в мішень для першого стрілка рівна 0,5, для другого – 0,6. Знайти закон розподілу випадкової величини X , рівній загальній кількості попадань і в мішень.

5.19. Робітник обслуговує 4 незалежно працюючих станка. Ймовірність того, що протягом часу станок не потребує уваги робітника, рівна для першого станка 0,7, для другого – 0,75, для третього 0,8, для четвертого – 0,9. Знайти закон розподілу випадкової величини X , рівній кількості станків, які не потребують уваги робітника.

5.20. На дорозі руху автомобіля 6 світлофорів, кожний із них або дозволяє, або забороняє подальший рух з ймовірністю 0,5. Знайти закон розподілу випадкової величини X , рівній кількості світлофорів, які проїхав автомобіль до першої зупинки.

5.21. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі 0,1. Із партії контролер бере деталь і перевіряє її на стандартність. Якщо деталь виявляється нестандартною, то подальші випробування припиняються, а партія вся затримується. Якщо ж деталь виявиться стандартною, то контролер бере наступну і т.д., але всього він перевіряє не більше 5 деталей. Знайти закон розподілу випадкової величиниX , рівній кількості перевірених стандартних деталей.

5.22. Автоматизована електрична станція обслуговує 1000 телефонних точок. Ймовірність того, що протягом 5 хвилин на АТС надійде виклик із телефонної точки, рівна 0,005. Знайти закон розподілу випадкової величини X , рівній кількості викликів, о надійшли на АТС протягом 5 хвилин.

5.23. Ймовірність попаданні в літак при кожному пострілі із гвинтівки рівна 0,001. Проводиться 3000 пострілів. Знайти закон розподілу випадкової величини X , рівній кількості попадань в літак.
5.24. Ймовірність виготовлення стандартної деталі рівна 0,98. Для контролю взято 100 деталей. Знайти закон розподілу випадкової величини X , рівній кількості нестандартних деталей у вибірці.

5.25. Підкидається гральна кість до першої появи шістки. Випадкова величина X рівна кількості підкидань кості. Знайти закон розподілу випадкової величини X.

Частина 2

Випадкова величина X **задана функцією розподілу. Знайти** $C = const$ **;** $P(a < x < b)$ **;** $M(X)$ **,** $D(X)$ **,** $Me(X)$

5.1. $F(x) = \begin{cases} Ce^x, \ x \le 0 \\ 1, \ \ x > 0 \end{cases}$ 5.2. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 1 \\ Cx - 1, \ \ 1 < x < 2 \\ 1, \ \ x > 2 \end{cases}$

$a = 1, b = 2$ $a = 1{,}1, b = 1{,}2$

5.3. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ Ce^x \ \ 0 < x < 2 \\ 1, \ \ x > 2 \end{cases}$ 5.4. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ 1 + C\sin x, \ \ -\dfrac{\pi}{2} < x \le 0 \\ 1, \ \ x > 0 \end{cases}$

$a = 1, b = 2$ $a = -\pi/4, b = 0$

5.5. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 1 \\ \dfrac{1}{\pi}(x - C\sin 2x), \ \ 1 < x < \pi \\ 1, \ \ x > \pi \end{cases}$ 5.6. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 1 \\ C\ln x, \ \ 1 < x \le 2 \\ 1, \ \ x > 2 \end{cases}$

$a = 1, b = \pi/2$ $a = 1{,}2, b = 1{,}4$

5.7. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 1 \\ Cx^2 - \dfrac{1}{3}, \ \ 1 < x \le 2 \\ 1, \ \ x > 2 \end{cases}$ 5.8. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 2 \\ C(x - 2,)^{3/2}, \ \ 2 < x \le 4 \\ 1, \ \ x > 4 \end{cases}$

$a = 1{,}3, b = 1{,}4$ $a = 3, b = 3{,}5$

5.9. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ Cx^3, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$ 5.10. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ Cx-1, & 1<x<2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a=0{,}5,\ b=0{,}7$ $a=1{,}5,\ b=1{,}8$

5.11. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ C(x^2-x), & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$ 5.12. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ C(x+1)^3, & -1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

$a=1{,}3,\ b=1{,}6$ $a=0,\ b=2$

5.13. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -4\\ C(x+4), & -4<x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$ 5.14. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ C\sqrt{2x}, & 0<x\le 8\\ 1, & x>8\end{cases}$

$a=-1,\ b=-0{,}5$ $a=1,\ b=2$

5.15. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{1}{2}+C\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 5.16. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ Cx+2, & -2<x<5\\ 1, & x>5\end{cases}$

$a=0,\ b=\pi/4$ $a=1{,}1,\ b=2$

5.17. $F(x)=\begin{cases}0,, & x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ C\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$ 5.18. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ C(1-\cos x), & 1<x\le \pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$

$a=-\pi/4,\ b=0$ $a=1,\ b=2$

5.19. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 1+cx(\ln x-1), & 1<x<e\\ 1, & x>e\end{cases}$ 5.20. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{1}{\pi}(x-C\sin 2x), & 1<x<\pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$

$a=1,\ b=2$ $a=1,\ b=2$

5.21. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ C\sin x, & 0<x\le \frac{\pi}{6}\\ 1, & x>\frac{\pi}{6}\end{cases}$ 5.22. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ C(x^3+x^2), & 0<x<1\\ 1, & x>1\end{cases}$

$a=0; b=\pi/8$ $a=0{,}1; b=0{,}2$

5.23. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ Cx^2+2x, & 0<x\le \frac{1}{3}\\ 1, & x>\frac{1}{3}\end{cases}$ 5.24. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ C(x-1)^2, & 1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

$a=0{,}1,\ b=0{,}2$ $a=1{,}1,\ b=2$

5.25. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ C(x-2)^3, & 2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

$a=2{,}2,\ b=2{,}5$

Частина 3

Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C=const$, $M(X)$, $D(X)$, $Mo(X)$, функцію розподілу $F(x)$

5.26. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ C\sin x, & 0<x\le \frac{\pi}{2}\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 5.27. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ C(x^2+2x-3), & -1<x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$

5.28. $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le 4\\ Cx\sqrt{x}, \ \ 4<x\le 9\\ 0, \ \ x>9\end{cases}$ 5.29. $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le -2\\ Cx^2+2x, \ -2<x\le 0\\ 0, \ \ x>0\end{cases}$

5.30. $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le 1\\ C\ln x, \ \ 0<x\le e\\ 0, \ \ x>e\end{cases}$ 5.31. $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0\\ C2^x, \ \ 0<x\le 1\\ 0, \ \ x>1\end{cases}$

5.32. $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le -10\\ C(x^2+2x+1), \ -10<x\le -5\\ 0, \ \ x>-5\end{cases}$ 5.33. $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le -2\\ C(x^2-2x), \ -2<x\le 2\\ 0, \ \ x>2\end{cases}$

5.34. $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0\\ C\sin x, \ \ 0<x\le \dfrac{\pi}{4}\\ 0, \ \ x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$ 5.35. $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le -1\\ C(x^2+2x-3), \ -1<x\le 1\\ 0, \ \ x>1\end{cases}$

5.36. $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0\\ Cx^2, \ \ 0<x\le 1\\ 0, \ \ x>1\end{cases}$ 5.37. $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0\\ Cx^2, \ \ 0<x\le 2\\ 0, \ \ x>2\end{cases}$

5.38. $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le -1\\ C(x+1)^2, \ -1<x\le 3\\ 0, \ \ x>3\end{cases}$ 5.39. $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le -3\\ \dfrac{C}{\sqrt{x+3}}, \ -3<x\le 1\\ 0, \ \ x>1\end{cases}$

5.40. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x\le \frac{\pi}{6} \\ C\sin 3x, \; \frac{\pi}{6}<x\le \frac{\pi}{3} \\ 0, \; x>\frac{\pi}{3} \end{cases}$ 5.41. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x\le 1 \\ x-C, \; 1<x<2 \\ 0, \; x>2 \end{cases}$

5.42. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x\le 0 \\ Cx+\frac{1}{2}, \; 0<x<4 \\ 0, \; x>0 \end{cases}$ 5.43. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x\le -1 \\ C(x+1)(x-5), \; -1<x\le 5 \\ 0, \; x>5 \end{cases}$

5.44. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x\le -2 \\ \frac{1}{8}x+C, \; -2<x\le 0 \\ 0, \; x>0 \end{cases}$ 5.45. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x\le -4 \\ \frac{x+C}{8}, \; -4<x\le 0 \\ 0, \; x>0 \end{cases}$

5.46. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x\le 0 \\ \frac{C}{e^{2x}}, \; x>0 \end{cases}$ 5.47. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x\le 0 \\ \frac{C}{\sqrt{2x}}, \; 0<x\le 8 \\ 0, \; x>8 \end{cases}$

5.48. $f(x)=\begin{cases} 0, \; x\le -3 \\ \frac{C}{\sqrt{x+3}}, \; -3<x\le 1 \\ 0, \; x>1 \end{cases}$ 5.49. $f(x)=\begin{cases} 0,, \; x\le -\frac{\pi}{2} \\ C\cos x, \; -\frac{\pi}{2}<x\le \frac{\pi}{2} \\ 1, \; x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$

5.50. $f(x)=\begin{cases} 0,, \; x\le -\frac{\pi}{2} \\ C\cos^2 x, \; -\frac{\pi}{2}<x\le \frac{\pi}{2} \\ 1, \; x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Контрольні запитання до теми

1. Що називають випадковою величиною?
2. Що називають функцією розподілу ймовірності випадкової величини F (x)?
3. Назвіть основні властивості функції розподілу ймовірностей F (x)?
4. Яка випадкова величина називається дискретною?
5. Яким чином можна задати дискретний розподіл випадкової величини?
6. Як побудувати многокутник розподілу випадкової величини?
7. Чому має дорівнювати сума всіх значень ймовірностей p_i дискретного розподілу випадкової величини?
8. В яку чверть декартової системи координат графіки функцій розподілу ймовірностей випадкової величини ніколи не попадають?
9. Назвіть основні числові характеристики, що описують розподіл ймовірності випадкової величини.
10. Що називають математичним сподіванням?
11. В яких одиницях вимірюється математичне сподівання по відношенню до одиниць вимірювання випадкової величини?
12. Назвіть властивості математичного сподівання.
13. Що називають дисперсією?
14. Сформулюйте властивості дисперсії.
15. Що називають середнім квадратичним відхиленням?
16. Що таке мода?
17. Що таке медіана?
18. Що таке ексцес та асиметрія?

6. ДЕЯКІ РОЗПОДІЛИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

6.1. Закон рівномірної щільності

Означення 6.1. Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X називається рівномірним $R(a,b)$ з параметрами (a,b), якщо її щільність розподілу визначається рівністю

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin [a;b]; \\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in [a;b]. \end{cases} \qquad (6.1)$$

Знайдемо $F(x)$:

$$F(x)\big|_{x\in[a,b]} = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,du = \frac{x-a}{b-a}\,.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

ЗнайдемоMXі DX рівномірного розподілу.

$$MX = \int_a^b x\, f(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{a+b}{2}.$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2;$$

$$MX^2 = \int_a^b x^2 f(x)\,dx = \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^2+ab+a^2}{3};$$

$$DX = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}\,.$$

Таким чином, для рівномірного розподілу

$$MX = \frac{a+b}{2},\quad DX = \frac{(b-a)^2}{12},\quad \sigma X = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Приклад.Для визначення графічного вигляду щільності розподілу випадкової величини, яка підлегла експоненціальному закону, задамо значення $\lambda=0,5$, а x в діапазоні 0….10.

Очевидно, що **при $x<0$ ця функція не існує.**

Графік цього закону наведений на рис. 5. З нього ми бачимо, що при $x=0$, $f(x)=$ $\boldsymbol{\lambda}$, а далі плавно спадає до нуля. Знайдемо числові характеристики для наведеного вище прикладу.

Тут,

$$M(X) = \frac{1}{0,5} = 2, \quad \text{а} \qquad D(X) = \frac{1}{0,5^2} = 4$$

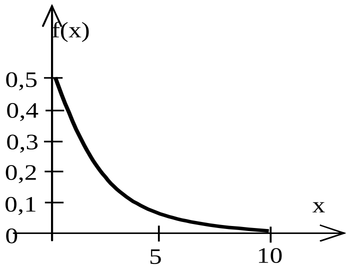
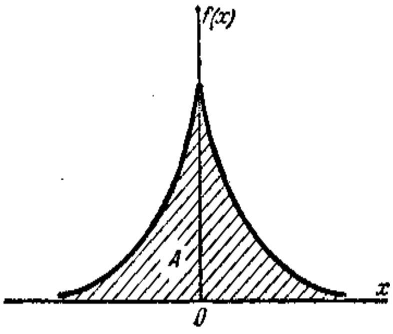


Рис.5.Графік закону розподілу

Приклад.Безперервна випадкова величина X підлегла закону розподілу зі щільністю (рис. 6.4): $f(x)=Ae^{-|x|}$. Знайти коефіцієнт A. Визначити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення. асиметрію, ексцес.



Розв'язання: Для визначення A скористаємося властивістю щільності розподілу: $1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-|x|}dx=2A\int_{0}^{\infty} e^{-|x|}dx=2A\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx=2A$, звідки $A=0,5$.

Математичне сподівання дорівнює нулю $m_x=\int_{-\infty}^{\infty} 0,5xe^{-|x|}dx=0$.

Тоді дисперсія дорівнює другому початковому моменту

$$D_x=\alpha_2=\int_{-\infty}^{\infty} 0,5x^2e^{-|x|}dx=2\cdot 0,5\int_{0}^{\infty} x^2e^{-x}dx=2\ \sigma_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{2}.$$

Оскільки розподіл симетричний, то $S_k = 0$. Для обчислення ексцесу знаходимо $\mu_4=2\int_{0}^{\infty} 0,5x^4e^{-x}dx=24$, звідки $E_x=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=3$.

Приклад.Середні двох випадкових величин дорівнюють, відповідно 1 та 3 а дисперсії – 2 та 9. Яка х них розподілена за експоненціальним законом?

Друга, тому що за властивостями цього закону $m_x=\frac{1}{\lambda}=3$,звідки $\lambda=\frac{1}{3}3$. Тоді

$$D_x=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=9$$

6.2 Показниковий розподіл

Означення 6.2. Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X називається показниковим (або експоненціальним), $\exp(\lambda)$, з параметром λ, $\lambda > 0$, якщо її щільність розподілу визначається рівністю

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Цей розподіл широко застосовується в теорії надійності. Тому знайдемо інтерпретацію X.

Нехай, наприклад, деякий прилад почав працювати в момент часу $t=0$. Відомо, що умовна ймовірність відмови приладу в інтервалі часу $(t,\ t+\Delta t)$ за умові, що прилад неприладу в інтервалі часу $(t,\ t+\Delta t)$ за умові, що прилад не відмовить до моменту часу t, визначається рівністю:

$$P(t < X < t + \Delta t \,/\, X \ge t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t), \quad \lambda > 0\,, \qquad (6.3)$$

де випадкова величина $X = X(t)$ – час до першої відмови приладу. Знайдемо $F(t)$і$f(t)$ – функцію і щільність розподілу випадкової величини X.

Нехай $P(x \ge t) > 0$, тоді з (B), оскільки $(t < X < t + \Delta t) \subset (X \ge t)$, маємо

$$\frac{P(t < X < t + \Delta t)}{P(X \ge t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \lambda\, \Delta t + o(\Delta t)\,,$$

або

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = (1 - F(t))\left(\lambda - \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right).$$

З останньої рівності при $\Delta t \to 0$ дістанемо

$$\frac{dF}{dt} = (1 - F)\lambda$$

– диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюванимизмінними. Розв’яжемо це рівняння, враховуючи, що $F(0) = 0$:

$$\frac{dF}{F - 1} = -\lambda\, dt\,,$$
$$\ln|F - 1| = -\lambda\, t \ln e + \ln|c|\,,$$
$$F - 1 = ce^{-\lambda t}\,.$$
$$F(0) = 0 : -1 = C\,.$$

Отже,

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases} \qquad (6.4)$$

Відповідно

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0; \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases} \qquad (6.5)$$

Відмітимо, що (6.5)з точністю до позначень незалежної змінної збігається з (6.4). Тим самим ми показали, що випадкову величину X, що має показниковий розподіл, можна інтерпретувати як час до першої відмови приладу.

Згідно з (C)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda t}, & x > 0. \end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$ $iF(x)$ показникового розподілу мають вигляд:

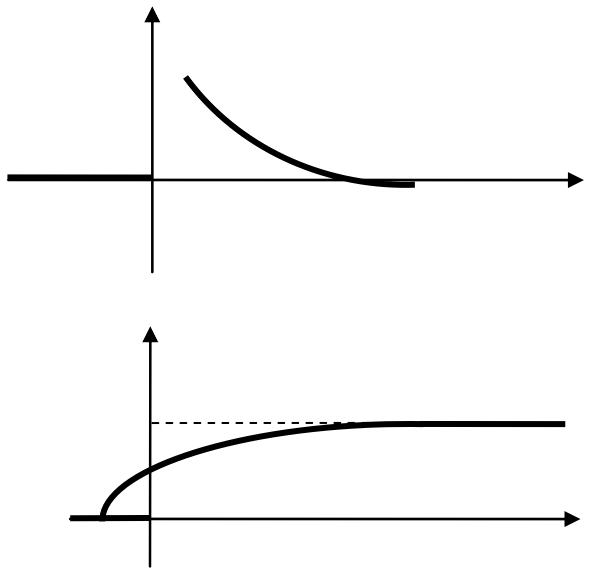


Рис.6. Графіки функцій $f(x)$ $iF(x)$ показникового розподілу

Зазначимо, що показниковий розподіл має властивість відсутності післядії, яка виражається рівністю:

$$P(t < X < t+\Delta t / X \geq t) = P(X < \Delta t) \qquad (6.6)$$

і стосовно приладу означає, що умовна ймовірність його відмови впродовж часу Δt не залежить від розміщення Δt на осі t.

Дійсно,

$$P(t < X < t+\Delta t / X \geq t) = \frac{P(t < X < t+\Delta t)}{P(X \geq t)} = = \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{1 - e^{-\lambda(t+\Delta t)} - (1 - e^{-\lambda \cdot t})}{1 - (1 - e^{-\lambda \cdot t})} =$$

$$= \frac{-e^{-\lambda t} e^{-\lambda \Delta t} + e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda \Delta t} = F(\Delta t) = P(X < \Delta t).$$

Відмітимо також, що властивість відсутності післядії є характеристичною для показникового розподілу, оскільки серед усіх розподілів із неперервною функцією розподілу цю властивість має лише показниковий розподіл. Дійсно, згідно з (6.6)

$$\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = F(\Delta t),$$

або

$$F(t+\Delta t) - F(t) = (1 - F(t)) F(\Delta t).$$

Звідки при $1 - F(t) = Q(t)$ маємо

$$1 - Q(t+\Delta t) - 1 + Q(t) = Q(t)(1 - Q(\Delta t)),$$

$$Q(t+\Delta t) = Q(t) Q(\Delta t).$$

Функція $Q(t) = 1 - F(t)$ є неперервною і обмеженою, і легко переконатися в тому, що всі неперервні і обмежені розв'язки останнього функціонального рівняння визначаються рівністю

$$Q(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0,$$

з якої випливає, що $F(t)$ визначається співвідношенням (C), тобто є функцією розподілу випадкової величини $X = \exp(\lambda)$.

Знайдемо числові характеристики показникового розподілу:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} x\, \lambda\, e^{-\lambda x} dx = -\int_{0}^{+\infty} x\, de^{-\lambda x} = -\left(0 - \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx\right) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{\lambda}(0-1) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2;\, MX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_{0}^{+\infty} x^2 de^{-\lambda x} =$$

$$= -\left(0 - 2\int_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx\right) = \frac{2}{\lambda}\int_{0}^{+\infty} x\, \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} MX = \frac{2}{\lambda^2},\, DX = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Таким чином, для показникового розподілу

$$MX = \frac{1}{\lambda}, \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma X = \frac{1}{\lambda}.$$

6.3. Нормальний розподіл (розподіл Гаусса)

Означення 6.3.Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X називається нормальним $N(m, \sigma^2)$, з параметрами (m, σ^2), якщо її щільність розподілу визначається рівністю

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in (-\infty; +\infty).$$

Випадкову величину X розподілену нормально, можна інтерпретувати, наприклад, як суму великого числа малих порівняно із самою сумою незалежних випадкових величин.Наприклад, в інтегральній теоремі Муавра–Лапласа

$$P(m \in [a, b]) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2/2} dx,$$

$$\alpha = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}},\, \beta = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}, \qquad p \in (0;\, 1)$$

маємо

$$P\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}} \in \left[\frac{a-np}{\sqrt{npq}}, \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right]\right) = P\left(X \in [\alpha, \beta]\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2/2}dx .$$

Звідки згідно із означенням шільності розподілу випливає, що

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

Таким чином, в інтегральній теоремі Муавра – Лапласа $X = N(0, 1)$, тобто має стандартний нормальний розподіл і є сумою великого числа малих порівняно із самою сумою, незалежних випадкових величин. Дійсно,

$$X = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(m_i - p)}{\sqrt{npq}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i - p}{\sqrt{npq}} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

де

$$X_i = \frac{m_i - p}{\sqrt{npq}} = \frac{\overset{\circ}{m}_i - p}{\sqrt{pq}}\,\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{m_i}{\sqrt{n}} \qquad (i = \overline{1,\ n})$$

Тут $m_i = B(p)$, тобто має розподіл Бернуллі з параметром *p*, і є числом «успіхів» в *i*–му випробуванні Бернуллі; $\overset{\circ}{m}_i$ – центрована і нормована випадкова величина m_i, оскільки, як ми покажемо далі, $p = Mm_i$, $pq = Dm_i$.

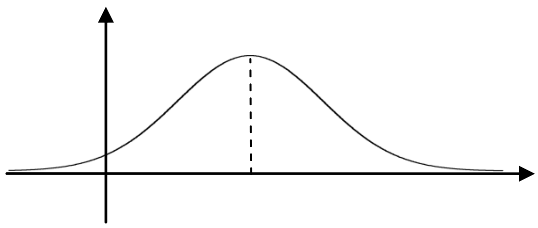


Рис.7. Крива Гауса

Графік $f(x)$ має вигляд (дивись рис. 7). З графіка, як і з аналітичного задання, добре бачимо, що $f(x)$ невід'ємна, і крім того можна показати , що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 .$$

Дійсно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \frac{x-m}{\sigma} = t, \quad x = m + \sigma t \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = Ц(+\infty) - Ц(-\infty) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1.$$

Таким чином, усі властивості $f(x)$ мають місце.

Знайдемо функцію розподілу $F(x)$випадкової величини $X = (m, \sigma^2)$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\cdot\sigma^2}} du = \left\{ \frac{u-m}{\sigma} = t \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-t^2/2} \sigma\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-t^2/2} dt = \left\{ Ц(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2/2} dt \right\} =$$

$$= Ц\left(\frac{x-m}{y} \right) - Ц(-\infty) = Ц\left(\frac{x-m}{y} \right) + 0{,}5.$$

Такимчином,

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma} \right) + 0{,}5,$$

відповідно

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Відмітимо, щотодіймовірністьпопаданнянормальнорозподіленоївипадковоївеличинивінтервал (a,b) визначаєтьсяформулою

$$P(a,b) = F(b) - F(a) = Ц\left(\frac{b-m}{\sigma} \right) - Ц\left(\frac{a-m}{\sigma} \right). \qquad (6.7)$$

Знайдемо числові характеристики нормального розподілу.

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \frac{x-m}{\sigma} = t \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (m + \sigma t) e^{-t^2/2} \sigma\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-t^2/2} dt \right] = m,$$

оскільки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

– інтеграл Ейлера – Пуассона і

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-t^2/2} dt = 0$$

– як інтеграл від непарної функції із симетричними межами інтегрування .

Таким чином, для нормального розподілу $MX = m$, $DX = \sigma^2$, $\sigma X = \sigma$, тобто у позначенні нормального розподілу $X = N(m,\sigma^2)$ і в аналітичному заданні його щільності розподілу $f(x)$, m– математичне сподівання, а σ^2– дисперсія нормально розподіленої випадкової величини.

І нарешті, використовуючи формулу (A)і непарність функції $\Phi(x)$,знайдемо ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання не більше ніж на $\varepsilon,\ \varepsilon > 0$. Маємо:

$$P(|X - m| \le \varepsilon) = P(m - \varepsilon \le X \le m + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{m+\varepsilon-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-\varepsilon-m}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Таким чином,

$$P(|X - m| \le \varepsilon) = 2Ц\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (6.8)$$

З (B), при $\varepsilon = 3\sigma$, маємо

$$P(|X - m| \le 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}9973 \approx 1 .$$

Тобто значення нормально розподіленої випадкової величини практично не виходить за межі інтервалу ($m - 3\sigma , m + 3\sigma$). Цей факт називається **правилом трьох сигм.** На практиці правило трьох сигм використовується при розпізнаванні нормального розподілу: якщо в експерименті розподіл невідомий але правило трьох сигм виконується, то вважають, що випадкова величина має нормальний розподіл.

6.4. Геометричний розподіл

Означення 6.4. Розподіл ймовірностей дискретної випадковоївеличини X називається геометричним $g(p)$, з параметром p, якщо її ряд розподілу изначається рівністю

$$P(X = m) = (1 - p)^m p , \qquad (m = \overline{0, \infty}) .$$

Випадкову величину X , розподілену геометрично, можна інтерпретувати як число випробувань Бернуллі до першого «успіху». «Успіх» настає в $m+1$ випробуванні.

Знайдемо числові характеристики геометричного розподілу.

$$MX = \sum_{m=0}^{\infty} mP(X = m) = \sum_{m=1}^{\infty} m(1 - p)^m p = \sum_{m=1}^{\infty} mq^m p =$$

$$= qp\left(\sum_{m=0}^{\infty} q^m\right)'_q = qp\left(\frac{1}{1-q}\right)'_q = qp\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{qp}{p^2} = \frac{q}{p} .$$

$$MX^2=\sum_{m=0}^{\infty}m^2P(X=m)=\sum_{m=1}^{\infty}m^2(1-p)p=\sum_{m=1}^{\infty}m^2q^m p=$$

$$=qp\sum_{m=1}^{\infty}m^2q^{m-1}=qp\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)q^{m-1}+\underbrace{qp\sum_{m=1}^{\infty}mq^{m-1}}_{MX}=$$

$$=q^2p\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)\,q^{m-2}+qp\sum_{m=1}^{\infty}mq^{m-1}=q^2p\left(\sum_{m=0}^{\infty}q^m\right)_{qq}^{//}+$$

$$+qp\left(\sum_{m=0}^{\infty}q^m\right)_q^{/}=\left\{\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)_q^{/}=-\frac{2}{(1-q)^3}(-1)=\frac{2}{(1-q)^3}\right\}=$$

$$=\frac{2q^2p}{p^3}+\frac{qp}{p^2}=\frac{2q^2+q(1-q)}{p^2}=\frac{q^2+q}{p^2}.$$

Отже,

$$DX=\frac{q^2+q}{p^2}-\frac{q^2}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

Таким чином, для геометричного розподілу

$$MX=\frac{q}{p}\ ,\ DX=\frac{q}{p^2}.$$

Зауваження. Розглядають також геометричний розподіл 2, або розподіл Фаррі:

$$P(X=m)=(1-p)^{m-1}p\ \left(m=\overline{1,\infty}\right).$$

Тут X – число випробувань Бернуллі до першого «успіху» включно, тобто «успіх» настає в m – му випробуванні.

Тоді

$$MX=\frac{1}{p},\ DX=\frac{q}{p^2}.$$

6.5. Гіпергеометричний розподіл

Означення 6.5. Розподіл ймовірностей дискретної випадкової величини X називається гіпергеометричним $G(N,M,n)$, з параметрами (N,M,n) , $M\le N,\ n\le N$, якщо її ряд розподілу визначається рівністю

$$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}\ ,\qquad \left(m=\overline{0,\ \min(M,n)}\right),$$

де N,M,n – натуральні числа.

Випадкову величину X, розподілену гіпергеометрично можна інтерпретувати як число «успіхів» в n залежних випробуваннях, причому наперед відомо, що в N випробуваннях «успіх» настане M раз.

Наприклад, X – це число білих куль серед навмання взятих n куль з урни , в який серед N куль M білих.

Знайдемо числові характеристики гіпергеометричного розподілу.

Нехай

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

де $X_i\,(i=\overline{1,n})$ – число (кількість) «успіхів» в i –му випробуванні.

Розподіл X_i у табличній формі має вигляд

X_i	0	1
P	$P(X_i=0)$	$P(X_i=1)$.

Знайдемо спочатку ймовірність $P(X_i=1)$, тобто ймовірність того , що в i – му випробуванні – «успіх».

Подія A – «успіх» в i – му випробуванні може настати лише за умови настання однієї з гіпотез $H_k(k=\overline{0,\, i-1})$ – в $i-1$ попередніх випробуваннях було k «успіхів». Тоді

$$P(H_k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{i-1-k}}{C_N^{i-1}} \;; \qquad P(A/H_k) = \frac{M-k}{N-(i-1)} .$$

Отже,

$$P(A) = P(X=1) = \sum_{k=0}^{i-1} P(H_k)P(A/H_k) = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{C_M^k\, C_{N-M}^{i-1-k}}{C_N^{i-1}}\, \frac{M-k}{N-(i-1)} =$$

$$= \left\{ C_M^k (M-k) = \frac{M!\,(M-k)}{(M-k)!\,k!} = \frac{(M-1)!\,M}{(M-k-1)!\,k!} = C_{M-1}^k M \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{C_{M-1}^k C_{N-M}^{i-1-k}}{C_N^{i-1}} \frac{M}{N-i+1} = \frac{M}{N-i+1} \frac{1}{C_N^{i-1}} \sum_{k=0}^{i-1} C_{M-1}^k C_{N-M}^{i-1-k} =$$

$$= \frac{M}{N-i+1} \frac{1}{C_N^{i-1}} C_N^{i-1} = \frac{M}{N-i+1} \frac{(N-1)!}{(N-i)!\,(i-1)!} \frac{(N-i+1)!\,(i-1)!}{N!} = \frac{M}{N}$$

Таким чином, випадкова величина X_i має розподіл

X_i	0	1
P_i	$1-M/N$	M/N.

Тоді

$$MX_i = 0 \cdot (1 - M/N) + 1 \cdot M/N = M/N$$

і відповідно

$$MX = M\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} MX_i = n\frac{M}{N} .$$

Дисперсія

$$DX = D\sum_{i=1}^{n} X_i \neq \sum_{i=1}^{n} DX_i ,$$

оскільки випадкові величини $X_i\ (i=\overline{1,\ n})$ – залежні парами (і у сукупності). Тому

$$DX = MX^2 - (MX)^2$$

$$MX^2 = M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} X_i X_j\right) = \left\{X_i^2 = X_i\right\}$$

$$= M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + 2\sum_{i,j} X_i X_j\right) = MX + 2\sum_{i,j} M(X_i X_j) .$$

Випадкова величина $X_i X_j$ має розподіл

$X_i X_j$	0	1
P	$1-\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1}$	$\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1}$.

Отже ,

$$M(X_i X_j) = 0\cdot\left(1-\frac{M}{N}\,\frac{M-1}{N-1}\right) + 1\cdot\frac{M}{N}\,\frac{M-1}{N-1} = \frac{M}{N}\,\frac{M-1}{N-1} ,$$

відповідно

$$MX^2 = n\frac{M}{N} + 2\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1}C_n^2 = n\frac{M}{N} + 2\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1}\frac{n!}{(n-2)!2!} =$$

$$= n\frac{M}{N} + n(n-1)\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1}$$

і , отже,

$$DX = n\frac{M}{N} + n(n-1)\,\frac{M}{N}\,\frac{M-1}{N-1} - \left(n\,\frac{M}{N}\right)^2 = n\frac{M}{N}\,(1 + n\,\frac{M-1}{N-1} -$$

$$-\frac{M-1}{N-1} - n\,\frac{M}{N}\Bigg) = n\frac{M}{N}\left(\frac{N}{N}\,\frac{N-M}{N-1} + n\,\frac{MN-N-MN+M}{(N-1)N}\right) =$$

$$= n\,\frac{M}{N}\,\frac{N-M}{N}\,\frac{N-n}{N-1} = n\,\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1} .$$

Таким чином, для гіпергеометричного розподілу

$$MX = n\frac{M}{N} ; \qquad DX = n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1} .$$

Зауваження1. При малих $\boldsymbol{n}$ **,** практично при $n < 0{,}1N$

$$\frac{C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \approx C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m} \left(m = \overline{0,\ \min(M,n)}\right) .$$

Зауваження 2. З означення гіпергеометричного розподілу випливає, що

$$\sum_{m=0}^{min(M,n)} C_M^m C_{N-M}^{n-m} = \sum_{m=0}^{min(M,n)} \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} C_N^n = C_N^n .$$

Знайдена формула часто виконується при розвязанні задач.

Таким чином, для розподілу Бернуллі

$$MX = p , \quad DX = pq .$$

6.6. Біноміальний (біномний) розподіл

Означення 6.6. Розподіл ймовірностей дискретної випадкової величини X називається біноміальним $B(n, p)$, з параметрами (n, p) , якщо її ряд розподілу визначається рівністю

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \ (m = \overline{0, n}) .$$

Випадкова величина X розподілена біноміально – це число «успіхів» у n випробуваннях Бернуллі , тобто у біноміальному експерименті. Назва розподілу біноміальний пов'язана із тим що права частина формули Бернуллі являє собою загальний член розподілу бінома Ньютона у такій редакції:

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} , \quad q = 1 - p .$$

Знайдемо числові характеристики біноміального розподілу. Подамо X у вигляді

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

де X_i – випадкова величина , яка має розподіл Бернуллі , тобто $X_i = B(p)$, $X_i = B(p)$, $DX_i = pq$.

Тоді

$$MX = M\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} MX_i = np .$$

$$DX = D\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} DX_i = npq ,$$

оскільки, $X_i \ (i = \overline{1, n})$ – незалежні випадкові величини.

Таким чином, для біноміального розподілу

$$MX = np , \quad DX = npq .$$

6.7. Розподіл Бернуллі

Означення 6.7. Розподіл ймовірностей дискретної випадкової величини X називається розподілом Бернуллі $B(p)$ з параметром p, якщо її ряд розподілу визначається рівністю

$$P(X=m)=p^m(1-p)^{1-m}\ (m=0{,}1)\ ,$$

або

$$P(X=0{,}1)=(1-p)=p\ .$$

Випадкова величина X, розподілена за розподілом Бернуллі, – це число «успіхів» в одному випробуванні Бернуллі.

Знайдемо числові характеристики розподілу Бернуллі:

$$MX=0\cdot(1-p)+1\cdot p\ \ ,DX=MX^2-(MX)^2=p-p^2=p(1-p)=pq\ .$$

6.8. Розподіл Пуассона

Означення 6.8. Розподіл ймовірностей дискретної випадкової величини X називається розподілом Пуассона $\Pi(a)$, з параметром (a), $a>0$, якщо її ряд розподілу визначається рівністю

$$P(X=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}\ ,\qquad a=np\qquad (m=\overline{0,\infty})\ .$$

Розподіл Пуассона випливає з біноміального при $n\to\infty$, $p\to 0$, але $np\to a$, $a\in(0,+\infty)$. Тому розподіл Пуассона є наближенням біноміального при великих n і малих p, тобто законом розподілу рідких подій.

Знайдемо числові характеристики розподілу Пуассона:

$$MX=\sum_{m=0}^{\infty}m\,P(X=m)=\sum_{m=1}^{\infty}m\,\frac{a^m}{m!}\,e^{-a}=a\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}\,e^{-a}=$$

$$=\left\{m-1=n\right\}=a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\,e^{-a}=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x\right\}=ae^ae^{-a}=a\,.$$

$$MX^2=\sum_{m=0}^{\infty}m^2P(X=m)=\sum_{m=1}^{\infty}m^2\,\frac{a^m}{m!}e^{-a}=a\sum_{m=1}^{\infty}m\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a}=$$

$$=\left\{m-1=n\right\}=a\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{a^n}{n!}e^{-a}=a\left(\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{a^n}{n!}e^{-a}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}e^{-a}\right)==a(MX+1)=a^2+a\ .$$

Отже,

$$DX=MX^2-(MX)^2=a^2+a-a^2=a\ .$$

Таким чином, для розподілу Пуассона

$$MX=a\,,\quad DX=a\ .$$

6.9. Гамма-розподіл

Означення 6.9. Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини *X* називається гамма – розподілом $\gamma(\alpha,\lambda)$ з параметрами (α,λ), $\alpha>0$, $\lambda>0$, якщо її щільність розподілу визначається рівністю

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x>0; \end{cases}$$

де $\Gamma(\alpha)=\Gamma(x)\big|_{x=a}$, $\Gamma(x)$ – гамма функція.

За Ейлером

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt, \quad x>0,$$

За Гауссом

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}, \quad x\in R.$$

Деякі властивості гамма-функції:

1. $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

2. $\Gamma(1)=1$.

3. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x+1)$.

З властивостей 2 і 3 випливає, що $\Gamma(a+1)=a!$

Дійсно,

1. $\Gamma(1/2)=\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt=\int\limits_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\left\{t=\dfrac{u^2}{2}\right\}=$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{u}\right)e^{-\frac{u^2}{2}}u\,du=\sqrt{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

2. $\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} t^{1-1}e^{-t}dt=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{\infty}=1$.

3. $\Gamma(\mathrm{x}+1)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x+1-1}e^{-t}dt=\int\limits_0^{+\infty} t^{x}e^{-t}dt=\left\{\begin{matrix} t^x=u, & du=xt^{x-1}dx; \\ e^{-t}dt=dv, & v=-e^{-t} \end{matrix}\right\}=$

$$=\underbrace{-t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty}}_{0}+x\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x).$$

Зокрема, при *a* = 1 маємо

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0. \end{cases}$$

–щільність показникового розподілу $\exp(\lambda)$. Тобто показниковий розподіл є окремим випадком γ – розподілу.

6.10. Розподіл χ^2 (Пірсона)

Означення 6.10. Числом ступенів вільності випадкової величини $(X_1, X_2, ..., X_n)$ називається число $k = n - l$, де n – число незалежних (у сукупності) випадкових величин $X_i\ (i = \overline{1, n}), l$ – число лінійних зв'язків, які обмежують вільність випадкових величин $X_i\ (i = \overline{1, n})$.

Приклад. *Випадкова величина*

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

де

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

має $n-1$ *ступенів вільності. Тут* n *незалежних випадкових величин і єдиний лінійний зв'язок (лінійна комбінація), що обмежує їх вольності.*

Означення 6.11. Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^{\ 2} ,$$

де $X_i\ (i = \overline{1, n})$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини із стандартним нормальним розподілом $N(0,1)$, називається χ^2 («Хі квадрат») – розподілом Пірсона з n ступенями вільності. Позначається $\chi^2(n)$.

Відмітимо, що розподіл χ^2 є інваріантним відносно згортки, що випливає з його означення, тобто, якщо $X = \chi^2(n_1)$, $Y = \chi^2(n_2)$, то $X + Y = \chi^2(n_1 + n_2)$.

Маючи на увазі відшуканнящільності розподілу $f(x)$ випадкової величини χ^2 знайдемо спочатку щільність розподілу $f_i(x)$ випадкової величини $X_i^{\ 2} = \chi^2(1)$. Маємо

$$F_i(x) = P(X_i^{\ 2} < x) = P\left(|X_i| < \sqrt{x}\right) = P\left(-\sqrt{x} < X_i < \sqrt{x}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}}du .$$

Звідки

$$f_i(x)\big|_{x>0} = F_i'(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} =$$
$$= \frac{\left(1/2\right)^{1/2}}{\Gamma\left(1/2\right)}x^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x} .$$

Таким чином,

$$f_i(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)}x^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0,\end{cases}$$

тобто

$$X_i^{\,2}=\chi^2(1)=\gamma(1/2,1/2)\,.$$

Отже

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}=\gamma\left(\sum_{i=1}^{n}1/2,\,1/2\right)=\gamma(n/2,\,1/2),$$

тобто

$$f(x)=f_{\chi^2(n)}(x)=f_{\gamma(n/2,\,1/2)}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0.\end{cases}$$

Зазначимо, що розподіл χ^2 визначається лише одним параметром n – числом ступенів вільності.

Із збільшенням числа ступенів вільності n χ^2 –розподіл наближається до нормального.

6.11. t – розподіл (Стьюдента)

Означення 6.12. Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини

$$t=\frac{X}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^{\,2}}{n}}}=\frac{X}{\sqrt{\frac{\chi^2(n)}{n}}}\,,$$

де $X,\,X_i\,(i=\overline{1,\,n})$ незалежні однаково розподілені випадкові величини із стандартним нормальним розподілом $N(0,1)$, називається t– розподілом Стьюдента з n ступенями вільності. Позначається $t(n)$.

Маючи на увазі відшукання щільності розподілу $f(x)$ випадкової величини t, знайдемо спочатку щільність розподілу $f_n(x)$ випадкової величини $\sqrt{\chi^2(n)/n}$. Маємо

$$F_n(x)=P\left(\sqrt{\chi^2/n}<x\right)=P(\chi^2<nx^2)=F_{\chi^2}(n\,x^2)\,.$$

Звідки

$$f_n(x)\big|_{x>0}=F_n^{\,/}(x)=F_{\chi^2}^{\,/}(nx^2)=f_{\chi^2}(nx^2)2nx=$$

$$=\frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}(nx^2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}n\,x^2}\,2nx=\frac{2(n/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}x^{n-1}e^{-\frac{1}{2}nx^2}\,.$$

Таким чином,

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{2(n/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}x^{n-1}e^{-\frac{n}{2}x^2}, & x>0.\end{cases}$$

Таким чином, щільність розподілу Стьюдента

$$f(x)=f_t(x)=\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

оскільки x входить у $f_t(x)$ у ступінь 2. Як і щільність розподілу χ^2, вона визначається лише одним параметром *n* – числом ступенів вільності.

Графік щільності *t* – розподілу Стьюдента має вигляд (рис. 8).

Зазначимо, що із збільшенням*nt*– розподіл наближається донормального.

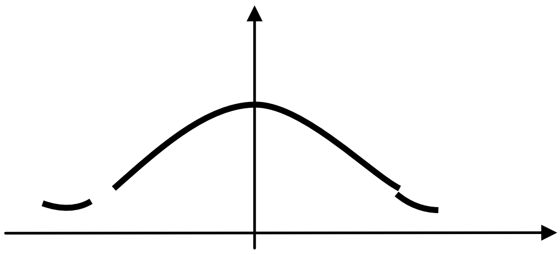


Рис.8. Графік щільності *t* – розподілу Стьюдента

6.12. F – розподіл (Фішера – Снедекора, Фішера)

Означення 6.13. Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини

$$F=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}\right)\Big/n}{\left(\sum_{j=1}^{m}Y_j^{\,2}\right)\Big/m}=\frac{\chi^2(n)/n}{\chi^2(m)/m}$$

називається F – розподілом Фішера – Снедекора з (n,m) ступенями вільності. Позначається $F(n,m)$.

Маючи на увазі відшукання щільності розподілу $f(x)$ випадкової величини *F*, знайдемо спочатку щільність розподілу $f_n(x)$ випадкової величини $\chi^2(n)/n$. Маємо

$$F_n(x)=P\left(\frac{\chi^2}{n}<x\right)=P(\chi^2<nx)=F_{\chi^2}(nx).$$

Звідки

$$f_n(x)\big|_{x>0} = F_n{}'(x) = F_{\chi^2}{}'(nx) = f_{\chi^2}(nx)n =$$
$$= \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}(nx)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}nx} n = \frac{(n/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}x} .$$

Таким чином,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{(n/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}\cdot x}, & x > 0, \end{cases}$$

тобто

$$\chi^2(n)/n = \gamma(n/2, n/2).$$

Отже,

$$f(z) = f\left(\frac{x}{y}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\, f_1(y\,z)\, f_2(y)\, dy$$

маємо:

$$f(x)\big|_{x>0} = \int_0^{+\infty} y\, f_1(xy)\, f_2(y)dy = = \frac{\Gamma((n+m)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\frac{n}{m}x\right)^{-\frac{n+m}{2}}$$

Таким чином, щільність F – розподілу Фішера – Снедекора визначається рівністю

$$f(x) = f_F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{\Gamma((n+m)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\dfrac{n}{m}x\right)^{-\frac{n+m}{2}}, & x > 0. \end{cases}$$

7. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

7.1. Нерівність Чебишева

Теорема. Якщо X –невід’ємна випадкова величина, для якої існує MX, то $\forall \varepsilon > 0$

$$P(X \ge \varepsilon) \le \frac{MX}{\varepsilon}. \qquad (7.1)$$

Доведення.Якщо $P(X \ge 0) = 1$, то

$$MX = \int_0^{+\infty} x\, f(x)dx \ge \int_\varepsilon^{+\infty} x\, f(x)dx \ge \varepsilon \int_\varepsilon^{+\infty} f(x)dx = \varepsilon\, P(X \ge \varepsilon).$$

Звідки і випливає нерівність (7.1) .

Нерівність (7.1) називається допоміжною або першою нерівністю Чебишева.

Теорема. Якщо X – випадкова величина, для якої існує DX, то $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(|X - MX| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} \quad (7.2)$$

Зазначимо, що основна нерівність Чебишева універсальна, оскільки не висуває ніяких вимог до розподілу X, але і саме внаслідок своєї універсальності, малоінформативна кількісно – для конкретних значень ε оцінки ймовірностей $P\left(|X - MX| \geq \varepsilon\right)$ і $P\left(|X - MX| < \varepsilon\right)$ вкрай грубі. Незважаючи на сказане, покращити її неможливо, оскільки (це можна показати на прикладах) вона є точною.

7.2. Означення закону великих чисел. Теореми Маркова, Чебишова, Хінчина, Бернуллі

Означення 7.1. Вважають, що для послідовності випадкових величин $X_n \ (n = \overline{1, \infty})$ для яких існують математичні сподівання $MX_n \ (n = \overline{1, \infty})$, має місце закон великих чисел, якщо

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i \,. \qquad (7.3)$$

Зазначимо, що співвідношення (7.3) виражає той факт, що при деяких додаткових припущеннях, поведінка середнього арифметичного достатньо великої кількості випадкових величин, при необмеженому зростанні цієї кількості, втрачає випадковий характер і стає закономірною.

Одним із найпростіших варіантів закону великих чисел є така теорема.

Теорема 1. (Маркова). Якщо $X_n \, (n = \overline{1, \infty})$ – послідовність незалежних (у сукупності) випадкових величин і

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = 0 \,, \qquad (7.4)$$

то має місце закон великих чисел (7.3).

Теорема 2. (Чебишева (1821 – 1894)). Якщо $X_n \, (n = \overline{1, \infty})$ послідовність незалежних випадкових величин з обмеженими дисперсіями, тобто $DX_n \leq c \ (n = \overline{1, \infty})$, $c = const$, то має місце закон випадкових чисел (7.3).

Теорема 2 випливає з теореми 1, оскільки умова обмеженості дисперсій випливає з умови (7.4) теореми 1.

Теорема 3. (окремий випадок теореми 2). Якщо $X_n\,(n=\overline{1,\infty})$ – послідовність незалежних випадкових величин із однаковими математичними сподіваннями $MX_n = m\ (n=\overline{1,\infty})$ і з обмеженими дисперсіями ($DX_n \le c\ (n=\overline{1,\infty})$, $c = const$), то

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} m\,.$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} m\,.$$

Цей окремий випадок теореми Чебишева є одним з найважливіших результатів теорії ймовірностей. Він, зокрема теоретично обґрунтовує застосування середнього арифметичного в теорії і практиці вимірювань.

Так, при вимірюванні деякої, наприклад, фізичної величини m, звичайно проводять кілька вимірювань, $X_i\,(i=\overline{1,\infty})$ а їх середнє арифметичне беруть за шуканий результат, тобто припускають, що невідоме значення

$$X = X_{\text{сер}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(m+\alpha_i) = m + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

де $\alpha_i\ (i=\overline{1,\infty})$ – похибка i – го вимірювання.

Теорема 3 дає умови, при виконанні яких описаний вище спосіб вимірювань можна вважати правильним. А саме результати вимірювань, що є випадковими величинами, повинні: 1) бути незалежними; 2) мати одне і тесаме математичне сподівання m, тобто не містити систематичної похибки; 3) мати обмежені дисперсії. Остання умова забезпечується точністю приладу для вимірювань.

Теорема 4. (Хінчина (1894 – 1959)). Якщо $X_n\,(n=\overline{1,\infty})$ послідовність незалежних випадкових величин, однаково розподілених із математичними сподіваннями $MX_n = m\ (n=\overline{1,\infty})$, то

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} m\,.$$

Теорема 5. (Бернуллі). Якщо m – число «успіхів» у біноміальному експерименті $B(n,p)$, то

$$\frac{m}{n} \xrightarrow{P} P$$

Доведення.Подамо відношення m/n у вигляді

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

де $X_i = B(p)$, тобто X_i має розподіл Бернуллі і є числом «успіхів» в i – му випробуванні біноміального експерименту $B(n, p)$.

Послідовність $X_i \, (i = \overline{1, \infty})$, $n \to \infty$, є послідовністю незалежних випадкових величин, однаково розподілених із математичними сподіваннями $MX_i = p$ (до того ж з обмеженими дискретними $DX_i = pq \; (i = \overline{1, \infty})$), тобто при вибраному поданні для m/n теорема 5 є окремим випадком теореми 4.

Зауваження. Теорема 5 (Бернуллі) теоретично обґрунтовує сталість при великих n відносної частоти $W(A) = m/n$ числа m «успіхів» у n випробуваннях Бернуллі, встановлену емпіричним шляхом (тобто шляхом випробувань) і тим самим теоретично обґрунтовує означення статистичної ймовірності.

Теорема 6. Ляпунова. Якщо $X_n \; (n = \overline{1, \infty})$ послідовність незалежних випадкових величин із математичними сподіваннями $MX_n = m_n, \; (n = \overline{1, \infty})$, обмеженими третіми центральними моментами(тобто $M|X_n - m_n|^3 < +\infty \quad (n = \overline{1, \infty})$
), то при

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} M|X_i - m_i|^3}{\left(\sqrt{DS_n}\right)^3} \to 0, \quad n \to \infty \qquad (7.5)$$

$\forall x$ має місце співвідношення

$$P\left(\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du, \quad n \to \infty,$$

де

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (n = \overline{1, \infty})$$

Відмітимо, що теорема не висуває ніяких вимог до законів розподілу $X_n \; (n = \overline{1, \infty})$, доводиться вона із використанням характеристичних функцій і що важлива умова (7.5) може бути інтерпретована як вимога приблизної однаковості доданків (у чисельнику(7.5)).

Зауваження. Теорема Ляпунова дозволяє уточнити основне співвідношення закону великих чисел.

Контрольні запитання до теми

1. Як визначають закон великих чисел?
2. Сформулюйте основні граничні теореми, поясніть їх зміст.
3. Граничні теореми теорії ймовірностей. Лема Маркова.

4. Теорема і нерівність Чебишева. Теореми Бернуллі і Пуассона
5. Поняття про центральну граничну теорему. Теорема Ляпунова

8. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ З КУРСУ

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 1

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* Із коробки, в якій 10 білих, 6 чорних та 4 синіх кульок, навмання вибирають 3 кульки. Знайти ймовірність того, що серед них будуть: а) всі білі; б) одна біла і дві чорні; в) одна біла, одна чорна, одна синя.	*A. а)* $\frac{C_6^1 C_4^2}{C_{20}^3}$ *B. а)* $\frac{C_{10}^3}{C_{20}^3}$ *C. а)* $\frac{C_2^1 C_3^2}{C_{20}^3}$ *б)* $\frac{C_6^2 C_6^1}{C_{20}^3}$ *б)* $\frac{C_{10}^1 C_6^2}{C_{20}^3}$ *б)* $\frac{C_7^2 C_6^1}{C_{20}^3}$ *в)* $\frac{C_3^1 C_2^1 C_4^1}{C_{20}^3}$ *в)* $\frac{C_{10}^1 C_6^1 C_4^1}{C_{20}^3}$ *в)* $\frac{C_6^1 C_8^1 C_8^1}{C_{20}^3}$
2. *Розв'язати задачу.* Для обслуговування деякого будівництва виділено 5 автомобілів за однакових і незалежних умов з ймовірністю 0,8 вони прибувають на будівництво. Знайти ймовірність того, що в даний момент будівництво обслуговують: а) всі 5 автоматів; б) не менше 3-х автомобілів; в) жоден автомобіль не прибув.	*A. а)* $(0,8)(0,2)^4$; *б)* $(0,8)^4(0,2)^2$; *в)* $(0,8)^5$ *B. а)* $(0,8)^5$; *б)* $C_5^3(0,8)^3(0,2)^2$; *в)* $(0,2)^5$ *C. а)* $(0,2)^5$; *б)* $(0,8)^3(0,2)^3$; *в)* $(0,8)^5$
3. *Розв'язати задачу.* На трьох лініях заводу виготовляються конструкції однієї назви, причому, перша лінія випускає 60%; друга – 30%; третя – 10% виробів. Ймовірність, що конструкція є не бракованою відповідно для першої лінії – 0,8; для другої – 0,7; для третьої – 0,4. Знайти ймовірність, якщо а) конструкція є не бракованою; б) за умови, що вона не бракована, знайти ймовірність того, що її виготовлено на третій лінії.	*A. а) 0,73; б) 0,054* *B. а) 0,61; б) 0,84* *C. а) 0,054; б) 0,976*

4. *Розв'язати задачу.* Монета кинута 100 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде: а) 60 разів; б) не менше 40 і не більше 90.	*A. а) 0,01; б) 0,04* *B. а) 0,061; б) 0,81* *C. а) 0,054; б) 0,976*
5. Монету кинуто 4 рази; X – число появ герба. Знайти закон розподілу випадкової величини X, знайти математичне сподівання MX, дисперсію $ДX$, середньоквадратичне відхилення σX, функцію розподілу $F(x)$.	*A. а) MX=3; б) ДX=9; в) σX =3* *B. а) MX= 2; б) ДX=1; в) σX =1* *C. а) MX=4; б) ДX=0; в) σX =0*
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \frac{1}{4}, & z<x\le 4,\ x\in(2{,}5;3)\\ 0, & x>4\end{cases}$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, MX, $ДX$, σX та ймовірність того, що в результаті випробувань X набуде значення, що належить інтервалу *(а, в)*.	$A.\ F(x)=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2};\ MX=\frac{3}{2};\ \sigma(x)=1{,}5;\ DX=\frac{29}{12}$ $B.\ F(x)=\frac{1}{4}x^2-1;\ MX=2;\ \sigma(x)=1{,}6;\ DX=\frac{40}{11}$ $C.\ F(x)=\frac{1}{4}x^3-3;\ MX=1;\ \sigma(x)=1;\ DX=1$
7. Відомі математичне сподівання a, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=1$; $\sigma=2$; $\alpha=0$; $\beta=4$; $\xi=5$.	*A. а) 0,7483; б) 0,1421* *B. а) 0,6247; б) 0,9876* *C. а) 4123; б) 0,8713*
8. Довжина деталі підпорядковується нормальному закону. При вимірюванні отримані результати 48, 46, 52, 51, 47, 50, 51, 52, 49, 50. Знайти оцінку для математичного	*A. 49,6* *B. 51,6* *C. 40,2*

сподівання $\overline{x_B}$.	
9. Довжина деталі підпорядковується нормальному закону. При вимірюванні отримані результати 48, 46, 52, 51, 47, 50, 51, 52, 49, 50. Знайти оцінку для дисперсії D_B.	*A. 3,84* *B. 4,08* *C. 5,12*
10. Довжина деталі підпорядковується нормальному закону. При вимірюванні отримані результати 48, 46, 52, 51, 47, 50, 51, 52, 49, 50. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,95.	*A. (48,12; 51,08)* *B. (40,1; 42,3)* *C. (51,4; 55,8)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 2

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* В учнів 15 білих, 5 чорних і 20 синіх кульок. Навмання вийняли 5 кульок. Знайти ймовірність того, що серед них будуть: а) 3 білих 2 чорних; б) 5 синіх; в) 1 біла, 3 чорних, 1 синя.	*A. а)* $\frac{C_{15}^3 C_5^2}{C_{40}^5}$ *B. а)* $\frac{C_5^2 C_{20}^3}{C_{40}^5}$ *C. а)* $\frac{C_{40}^2 C_{15}^3}{C_{40}^5}$ *б)* $\frac{C_{20}^5}{C_{40}^5}$ *б)* $\frac{C_{20}^2 C_{15}^3}{C_{40}^5}$ *б)* $\frac{C_{15}^2 C_{20}^3}{C_{40}^5}$ *в)* $\frac{C_{15}^1 C_5^3 C_{20}^1}{C_{40}^5}$ *в)* $\frac{C_5^2 C_{20}^3}{C_{40}^5}$ *в)* $\frac{C_{15}^2 C_{15}^3}{C_{40}^5}$
2. *Розв'язати задачу.* На виробництві для сигналізації про аварію встановлено 4 незалежних пристрої. Ймовірність того, що при аварії спрацюють пристрої: $p_1 = 0{,}9$; $p_2 = 0{,}95$; $p_3 = 0{,}94$; $p_4 = 0{,}79$. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацюють: а) всі пристрої; б) лише 3 пристрої; в) не менше 1-ого.	*A. а) 0,151; б) 0,841; в) 0,912* *B. а) 0,7395; б) 0,3133; в) 0,9999* *C. а) 0,634; б) 2743; в) 0,999*
3. *Розв'язати задачу.* На заводи ЗБК надходить цемент, що виготовлений на заводах №1, №2, №3. Обсяг цементу для кожного заводу відповідно	*A. а) 0,367; б) 0,181* *B. а) 0,22; б) 0,3* *C. а) 0,1; б) 0,7*

дорівнює: №1 – 30%; №2 – 20%; №3 – 50%. Надійшло 5 вагонів з заводу № 1, 10 – із заводу №2, 15 – із №3. Навмання взятий вагон, розвантажується. Знайти ймовірність того, що в ньому знаходиться цемент та ймовірність того, що цемент з заводу №2.	
4. *Розв'язати задачу.* Ймовірність появи події в кожному експерименті дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що в 245 експериментах подія з'явиться: а) рівно 100 разів; б) не менше 50 та не більше 200.	*А. а) 0,0001; б) 0,0474* *В а) 0,005; б) 0,54* *С а) 0,000014; б) 0,9515*
5. З ймовірністю 0,4 стрілець влучив в ціль за один постріл. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, середньоквадратичне відхилення σX, функцію розподілу $F(x)$, якщо стрілець вистрілив 4 рази. *X* - число влучень.	*А. а) MX=1,6; б) ДX=0,954; в)* $\sigma(X)$*=0,976* *В. а) MX= 2,1; б) ДX=4; в)* $\sigma(X)$*=2* *С а) MX=4,3; б) ДX=0; в)* $\sigma(X)$*=0*
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le\frac{-\pi}{2}\\ \frac{1}{2}\cos x, \frac{-\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2}, \ x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\\ 0, \ x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX, ДX,* σX та ймовірність того, що в результаті випробувань *X* набуде значення, що належить інтервалу *(а, в)*.	*A.* $F(x)=\frac{1}{2}\sin x\cos x+1$; $MX=1$; $\sigma(X)=0$; $DX=0$ *B.* $F(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}$; $MX=1$; $\sigma(X)=\frac{\pi}{2}$; $DX=\frac{\pi^2}{4}$ *C.* $F(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}$; $MX=0$; $\sigma(X)=\frac{\pi^2}{4}-2$; $DX=\frac{\pi^2}{4}-2$

7. Відомі математичне сподівання a, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a \rvert < \xi$, де *a=2;* σ *=4;* $\alpha=-2$; $\beta=3$; $\xi=4$.	*A. а) 0,511; б) 0,1112* *B а) 0,44; б) 0,6826* *C а) 0,4393; б) 0,6826*
8. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 3,3* *B. 4,2* *C. 5,8*
9. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Знайти оцінку для дисперсії $\overline{D_B}$.	*A. 4,61* *B. 5,82* *C. 6,91*
10. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,95.	*A. (1,6827; 4,9173)* *B. (2,695; 3,784)* *C. (4,895; 5,194)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 3

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* Із партії 30 деталей, серед яких 25 стандартних, вийняли 5 деталей. Знайти ймовірність того, що: а) всі стандартні; б) всі нестандартні; в) одна стандартна, 4 – нестандартні.	*A. а)* $\frac{C_{25}^5}{C_{30}^5}$ *B. а)* $\frac{C_{20}^1}{C_{30}^5}$ *C. а)* $\frac{C_{25}^2 C_5^3}{C_{30}^5}$ *б)* $\frac{C_5^5}{C_{30}^5}$ *б)* $\frac{C_{25}^5}{C_{30}^5}$ *б)* $\frac{C_5^1 C_{25}^1}{C_{30}^5}$ *в)* $\frac{C_{25}^1 C_5^4}{C_{30}^5}$ *в)* $\frac{C_{30}^1 C_{20}^1}{C_{30}^5}$ *в)* $\frac{C_5^5}{C_{30}^5}$
2. *Розв'язати задачу.* На будівництві об'єкта працюють незалежно 6 бульдозерів із ймовірністю роботи 0,8. Знайти ймовірність того, що на	*A. а)$(0,2)^4(0,8)^2$; б) $(0,2)^3(0,8)^3$; в) $(0,8)^6$* *B. а) $C_6^4(0,8)^4(0,2)^2$; б) $C_6^5(0,8)^5(0,2)+C_6^6(0,8)^6$;* *в) $(0,2)^6$*

будівництві а) працює лише 4 бульдозери; б) не менше 5-ти; в) жоден не працює.	*С. а)* $(0,2)^6$*; б)* $C_6^5(0,85)^5(0,2)^2$*; в)* $(0,8)^6$
3. *Розв'язати задачу.* На 3 заводах виготовляються конструкції для будівництва. Процент браку для першого заводу – 0,2%; для другого – 0,3%; для третього – 0,5%.На об'єкт доставлено 200 виробів першого заводу; 100 – другого; 30 – третього. Навмання взятий виріб виявився бракованим. Знайти ймовірність того, що: а) бракована конструкція поставлена першим заводом; б) брак поставлено другим заводом.	*А. а) 0,47; б) 0,35* *В. а) 0,11; б) 0,48* *С. а) 0,91; б) 0,81*
4. *Розв'язати задачу.* Ймовірність влучити в ціль для стрільця 0,7. Зроблено 100 пострілів. Знайти ймовірність того, що стрілець влучив в ціль: а) 90 разів; б) не менше 75 разів.	*А. а) 0,112; б) 0,54* *В. а) 0,2; б) 0,97* *С. а) 0,0001; б) 0,861*
5. Гральний кубик кинуто 3 рази; *X* – число появ «шістки». Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДХ*, середньоквадратичне відхилення σX, функцію розподілу $F(x)$.	*А. а) МХ=0,42; б) ДХ=0,3825; в)* $\sigma(X)$*=0,621* *В. а) МХ= 0; б) ДХ=9,1; в)* $\sigma(X)$*=3,05* *С. а) МХ=2,3; б) ДХ=0; в)* $\sigma(X)$*=0*
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \frac{1}{2}\sin x, 0<x\le\pi,\ x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right).\\ 0,\ x>\pi\end{cases}$$ Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX, ДХ,* σX та ймовірність того, що в результаті випробувань *X* набуде значення, що належить інтервалу *(а, в)*.	*А.* $F(x)=\frac{1}{2}\sin x\cos x-1;\ MX=3;\ \sigma(x)=0;$ $DX=0$ *В.* $F(x)=\frac{1}{2}\sin x+1;\ MX=\frac{\pi^2}{4};\ \sigma(x)=1;\ DX=1$ *С.* $F(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2};\ MX=\frac{\pi}{2};\ \sigma(x)=\frac{\pi}{2};$ $DX=\frac{\pi^2}{4}$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що	*А. а) 0,975; б) 0,112* *В. а) 0,295; б) 0,9876* *С. а) 0,541; б) 0,627*

розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α, β); б) абсолютна величина відхилення $\|X-a\|<\xi$, де $a=3$; $\sigma=2$; $\beta=2$; $\xi=5$.	
8. Показники вологості повітря розподілені нормально. Дослідження дали результати: 0,63; 0,66; 0,65; 0,67; 0,62; 0,61; 0,65; 0,60. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 0,64;* *B. 0,71;* *C. 0,91.*
9. Показники вологості повітря розподілені нормально. Дослідження дали результати: 0,63; 0,66; 0,65; 0,67; 0,62; 0,61; 0,65; 0,60. Знайти оцінку для дисперсії $\overline{D_B}$.	*A. 0,0004* *B. 0,08* *C. 0,071*
10. Показники вологості повітря розподілені нормально. Дослідження дали результати: 0,63; 0,66; 0,65; 0,67; 0,62; 0,61; 0,65; 0,60. Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,95.	*A. (0,624; 0,656)* *B. (0,721; 0,823)* *C. (0,834; 0,981)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 4

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* В бригаді 20 робітників, серед яких 11 дівчат, решта хлопці. На нараду послали 4-х представників від бригади. Знайти ймовірність того, що серед них: а) одні чоловіки; б) одні жінки; в) дві жінки і два чоловіки.	*A. а) 0,02 б) 0,068 в) 0,4* *B. а) 0,01 б) 0,01 в) 0,5* *C. а) 0,03 б) 0,037 в) 0,3*
2. *Розв'язати задачу.* Троє студентів складають іспит. Ймовірність того, що 1-й студент складе іспит дорівнює 0,8; 2-й - 0,7; 3-й - 0,4. Обчислити ймовірність того, що не складуть іспит: а) всі студенти; б) тільки один; в) хоча б один.	*A. а) 0,031; б) 0,321; в) 0,031* *B. а) 0,036; б) 0,05; в) 0,25* *C. а) 0,037; б) 0,488; в) 0,776*
3. *Розв'язати задачу.* На складі в	*A. а) 0,320; б) 0,03;*

трьох ящиках знаходяться деталі для ремонту автомобілів. Відомо, що в першому ящику 50 деталей, з яких 6 бракованих, у другому - 30 деталей, з яких 5 бракованих, у третьому - 40 деталей, з яких 6 бракованих. Майстер навмання вибирає деталь з будь-якого ящика. Знайти ймовірність того, що взята деталь бракована, й того, що майстер взяв її з другого ящика.	*B. а) 0,401; б) 0,2;* *C. а) 0,1409; б) 0,294.*
4. *Розв'язати задачу.* Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 народжених: а) рівно 50 хлопчиків; б) не менше 30 і не більше 70.	*A. а) 0,95; б) 0,002* *B. а) 0,002; б) 0,102* *C. а) 0,079; б) 0,102*
5. В білеті 4 запитання. З ймовірністю 0,4 студент правильно відповідає на кожне з них. *X* – число правильних відповідей студента. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, середньоквадратичне відхилення σX .	*A. а) MX=1,6; б) ДX=0,96;* *в)* $\sigma(X)=0{,}97$ *B. а) MX= 1,6; б) ДX=2,1;* *в)* $\sigma(X)=1{,}7$ *C. а) MX=1,4; б) ДX=2,3;* *в)* $\sigma(X)=1{,}9$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}5e^{-5e}, x\ge 0\\ 0\ при\ x<0\end{cases}$ $x\in(0;2)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX, ДX* та ймовірність того, що в результаті випробувань *X* набуде значення, що належить інтервалу *(а, в)*.	*A.* $F(x)=-e^{-5x}$*;* $MX=0{,}1;\ DX=0{,}0283$ *B.* $F(x)=e^{-5x}$*;* $MX=0{,}4;\ DX=0{,}002$ *C.* $F(x)=5e^{-5x}$*;* $MX=0{,}3;\ DX=0{,}0784$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально, обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де *a=5*; σ *=4*; $\alpha=0;\ \beta=6;\ \xi=9$.	*A. а) 0,317; б) 0,323* *B. а) 0,254; б) 0,975* *C. а) 0,4931; б) 0,975*

8. Показники насиченості повітря отруйними парами підкорюються нормальному закону. Дослідження дали наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 0,21;* *B. 0,11;* *C. 1,2.*
9. Показники насиченості повітря отруйними парами підкорюються нормальному закону. Дослідження дали наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{D_B}$.	*A. 0,98* *B. 0,098* *C. 0,2*
10. Показники насиченості повітря отруйними парами підкорюються нормальному закону. Дослідження дали наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання.	*A. (0,0945; 0,314)* *B. (0,1; 0,5)* *C. (0,17; 1)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 5

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* В цеху працюють 6 чоловіків і 4 жінки. За табельними номерами вибирають семеро чоловік. Знайти ймовірність того, що серед вибраних: а) три жінки; б) 5 чоловіків і 2 жінки; в) три чоловіки.	*A. а)* $\frac{1}{4}$ *B. а)* $\frac{1}{2}$ *C. а)* $\frac{1}{5}$ *б) 0,4* *б) 0,3* *б) 0,3* *в)* $\frac{1}{6}$ *в)* $\frac{1}{6}$ *в)* $-\frac{1}{6}$
2. *Розв'язати задачу.* Троє студентів складають іспит. Ймовірність того, що 1-й студент складе іспит дорівнює 0,8; 2-й - 0,7; 3-й - 0,4. Обчислити ймовірність того, що не складуть іспит: а) всі студенти; б) тільки один; в) хоча б один.	*A. а) 0,99; б) 0,17; в) 0,23* *B. а) 0,036; б) 0,488; в) 0,776* *C. а) 0,915; б) 0,23; в) 0,012*
3. *Розв'язати задачу.* На будівництво надходять однакові деталі, виготовлені на 3-х заводах, з	*A. 0,3* *B. 0,210* *C. 0,63*

продуктивністю заводів 1:2:4. Ймовірність браку на 1-му заводі дорівнює 0,3, 2-му – 0,6, 3-му – 0,1. Взята навмання деталь – бракована. Знайти ймовірність того, що вона виконана на 3-му заводі.	
4. *Розв'язати задачу.* З ймовірністю 0,7 продається кожна партія деякого товару. На аукціон виставлено 700 партій. Знайти ймовірність того, що буде продано: а) 300 партій; б) не менше 500 партій.	*A. а) 0,35; б) 0,2061* *B. а) 0,007; б) 0,415* *C. а) 0,000008; б) 0,7938*
5. Ймовірність виграти по 1 лотерейному білету дорівнює 0,02. X – число виграних білетів для володаря чотирьох білетів. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, середньоквадратичне відхилення σX .	*A.а)MX=0,08;б)ДX=0,4728; в)* $\sigma(X)=0,68$ *B.а)MX= 0,04; б) ДX=0,0276; в)* $\sigma(X)=0,12$ *C.а) MX=0,216; б) ДX=0,15; в)* $\sigma(X)=1,3$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<1\\ \frac{1}{4}x \text{ при } 1\le x\le 3\\ 0 \text{ при } x>3\end{cases}$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX, ДX.*	$A.\ M(X)=0.5;\quad DX=3{,}5;\ \sigma X=2{,}296$ $B.\ M(X)=1;\ DX=4{,}06;\ \sigma X=2{,}015$ $C.\ M(X)=2{,}16;\ DX=0{,}33;\ \sigma X=0{,}57$
7. Відомі математичне сподівання *а*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально, обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де *a=5;* σ *=4;* $\alpha=0;\ \beta=6;\ \xi=9$.	*A. а) 0,4235; б) 0,83* *B. а) 0,207; б) 0,764* *C. а) 0,4931; б) 0,975*
8. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 23; 29; 25; 26; 27; 29; 30; 24; 25; 26; 25. Знайти оцінку для	*A. 27;* *B. 26,2;* *C. 15.*

математичного сподівання $\overline{x_B}$.	
9. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 23; 29; 25; 26; 27; 29; 30; 24; 25; 26; 25. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{D_B}$.	*A. 0,12* *B. 1015* *C. 4099*
10. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 23; 29; 25; 26; 27; 29; 30; 24; 25; 26; 25. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання.	*A. (0; 3120)* *B. (2; 4)* *C. (-348,76; 3540,16)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 6

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* В ящику 25 деталей, серед яких 10 кольорові. Навмання витягують 5 деталей. Знайти ймовірність того, що серед взятих деталей: а) всі кольорові; б) всі не кольорові; в) 2 кольорові та 3 не кольорові.	*A. а) 0,005; B. а) 0,003; C. а) 0,012* *б) 0,057; б) 0,017; б) 0,0019* *в) 0,38; в) 0,15; в) 0,38*
2. *Розв'язати задачу.* Ймовірність непопадання в ціль для 1-го стрільця дорівнює 0,2; для 2-го – 0,1; для 3-го – 0,3. Обчислити ймовірність попадання в ціль: а) хоча б одного; б) двох; в) всіх.	*A. а) 0,994; б) 0,398; в) 0,504* *B. а) 0,305; б) 0,27; в) 0,45* *C. а) 0,804; б) 0,672; в) 0,903*
3. *Розв'язати задачу.* Для 10 студентів 1-ї групи ймовірність скласти іспит дорівнює 0,9, для 12 (2-га група) – 0,6, для 15 (3-тя група) – 0,8. Навмання викликаний студент склав іспит. Знайти ймовірність того, що студент, що склав іспит, належить до 2-ї групи.	*A. 0,3* *B. 1,24* *C. 0,25*
4. *Розв'язати задачу.* Ймовірність появи події в кожному із 900 незалежних експериментів дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а) рівно 450 разів; б)	*A. а) 0,16; б) 0,33* *B. а) 0,121; б) 0,5* *C. а) 0,026; б) 0*

не менше 50 та не більше 350.	
5. Зроблено чотири постріли в ціль. Ймовірність попадання при одному пострілі 0,6. *X* – число попадань. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, середньоквадратичне відхилення σX .	*A. а) MX=2,9; б) ДX=0,73; в)* $\sigma(X)=0,117$ *B. а) MX= 2,4; б) ДX=0,64; в)* $\sigma(X)=0,805$ *C. а) MX=2,4; б) ДX=0,96; в)* $\sigma(X)=0,979$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases} 0 \; при \; x<-4 \\ \frac{1}{8}(x+4) \; при \; -4\le x\le 0 \\ 0 \; при \; x>0 \end{cases}$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX, ДX*.	*A.* $F(x)=\frac{x^2}{4}+x$; $MX=0{,}3$; $DX=\frac{23}{5}$ *B.* $F(x)=\frac{x^2}{8}-\frac{1}{2}x$; $MX=-\frac{8}{9}$; $DX=\frac{17}{9}$ *C.* $F(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{1}{2}x$; $MX=-\frac{4}{3}$; $DX=\frac{8}{9}$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=8; \sigma=10$; $\alpha=0$; $\beta=20$; $\xi=16$.	*A. а) 0,904; б) 0,63* *B. а) 0,673; б) 0,8904* *C. а) 0,215; б) 0,18*
8. Показники насиченості повітря отруйними парами підпорядковуються нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 0,11;* *B. 0,13;* *C. 0,21.*
9. Показники насиченості повітря отруйними парами підпорядковуються нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Знайти оцінку для математичного	*A. 0,0013* *B. 0,098* *C. 0,2*

сподівання $\overline{D_B}$.	
10. Показники насиченості повітря отруйними парами підпорядковуються нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання.	*A. (0,109; 0,1100914)* *B. (0,3; 0,8)* *C. (0,12; 0,15)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 7

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. Розв’язати задача. В ящику 10 яблук – 1-го сорту, 20 – 2-го і 30 – 3-го. Навмання вибирають 10 яблук. Знайти ймовірність того, що серед вибраних: а) всі третього сорту; б) 2 – 1-го і 8 – 2-го; в) 5 – 1-го 2 – 2-го і 3-го.	*A.* а) $\frac{C_{30}^{10}}{C_{60}^{10}}$; б) $\frac{C_{10}^{2}C_{20}^{8}}{C_{60}^{10}}$; в) $\frac{C_{10}^{5}C_{10}^{2}C_{30}^{3}}{C_{60}^{10}}$; *Б.* а) $\frac{C_{20}^{5}}{C_{60}^{10}}$; б) $\frac{C_{10}^{1}C_{30}^{2}C_{5}^{3}}{C_{60}^{10}}$; в) $\frac{C_{30}^{2}C_{15}^{2}C_{5}^{2}}{C_{60}^{10}}$.
2. Розв’язати задача. Ймовірність того, що радіоприймач бракований – 0,99. На перевірку взято 10 приймачів. Знайти ймовірність того, що серед них: а) хоча б три браковані; б) жоден не бракований; в) всі браковані.	*A.* а) 0,1819; б) 0,4118; в) $(0,1)^9$ *B.* а) 0,1719; б) 0,398; в) $(0,09)^{10}$ *C.* а) 0,1415; б) 0,4119; в) $(0,1)^8 0,9$
3. Розв’язати задача. На біржу поступили чотири партії товару. В першій 100 одиниць товару, у II-й – 300; у III-й – 50 та у VI-й – 500. З ймовірністю 06; 0,5; 0,3 та 0,4 відповідно вони можуть бути продані в перший день торгу. Знайти ймовірність того, I-а партія не буде продана у перший день торгу.	*A.* 0,076 *B.* 0,18 *C.* 0,41
4. Розв’язати задача. Ймовірність появи події А в кожному із 1000 експериментів дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що подія не з’явиться: а) рівно 900 разів; б) н менше 500 разів.	*A.* а) 0,0106; б) 0,065 *B.* а) 0,216; б) 0,112 *C.* а) 0,318; б) 0,918

5. Знайти 3 ймовірністю 0,3 рибак може спіймати на одного черв'яка одну рибину. Насаджено чотири черв'яка. X – число спійманих рибин. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, $F(X)$.	*A. а) MX=1,2; б) ДX=0,84;* *в)* $F(X)=\begin{cases}0, x<0\\ 0.2401, 0\le x\le 1\end{cases}$ *B. а) MX= 0,8; б) ДX=1,4;* *в)* $F(X)=\begin{cases}0, x<0\\ 0.6517, 1\le x<2\end{cases}$ *C. а) MX=1,9; б) ДX=2,7; в)* $F(X)=\begin{cases}0, x<0\\ 0.9163; 2\le x<3\end{cases}$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}0\ при\ x<1\\ x-\frac{1}{2}\ при\ 1\le x\le 2\\ 0\ при\ x>2\end{cases}.$ Знайти *MX, ДX* .	*A.* $MX=1; DX=0{,}14$ *B.* $MX=0{,}5; DX=2{,}1$ *C.* $MX=1{,}5; DX=1{,}7$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=4; \sigma=1; \alpha=-3; \beta=4; \xi=6$.	*A. а) 0,1517; б) 0,217* *B. а) 0,0866; б) 0,135* *C. а) 0,1213; б) 0,1719*
8. Показники вогнестійкості обладнання розподілення нормально. Дослідження дали результати: 57; 58; 59; 60; 59; 58; 56; 59; 60; 61. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 58,45;* *B. 61,14;* *C. 48,19.*
9. Показники вогнестійкості обладнання розподілення нормально. Дослідження дали результати: 57; 58; 59; 60; 59; 58; 56; 59; 60; 61. Знайти оцінку для дисперсії $\overline{D_B}$.	*A. 2,43* *B. 4,12* *C. 3,17*

10. Показники вогнестійкості обладнання розподілення нормально. Дослідження дали результати: 57; 58; 59; 60; 59; 58; 56; 59; 60; 61. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,95.	*А. (56,89; 60,01)* *В. (71,4; 73,21)* *С. (61,15; 62,3)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 8

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. Розв'язати задача. В колоді 36 карт. Навмання витягнуто три карти. Знайти ймовірність того, що серед них будуть: а) дама, валет, король; б) дві десятки ті сімка; в) всі тузи.	*А. а)* $\frac{C_4^1C_4^1C_4^1}{C_{36}^3}$; *б)* $\frac{C_4^2C_4^1}{C_{36}^3}$; *в)* $\frac{C_4^3}{C_{36}^3}$; *Б. а)* $\frac{C_4^1C_4^2}{C_{36}^3}$; *б)* $\frac{C_{36}^2C_4^1}{C_{36}^3}$; *в)* $\frac{C_{18}^1C_{18}^2}{C_{36}^3}$.
2. Розв'язати задача. У цеху чотири верстата. Ймовірність відмови 1-го верстата дорівнює 0,3; 2-го – 0,4; 3-го – 0,6; 4-го – 0,1. Знайти ймовірність роботи: а) хоча б одного верстата; б) двох верстатів; в) всіх верстатів.	*А. а) 0,8488; б) 0,4144; в) 0,072* *В. а) 0,918; б) 0,5114; в) 0,09* *С. а) 0,851; б) 0,5114; в) 0,01*
3. Розв'язати задача. У піраміді 10 гвинтівок, з яких 4 з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу – 0,8. Стрілок вразив ціль. Що ймовірніше: стрілок влучив з гвинтівки з оптичним прицілом чи ні?	*А.* $\frac{19}{43} < \frac{24}{43}$ *В.* $\frac{18}{41} > \frac{17}{41}$ *С.* $\frac{21}{32} < \frac{25}{32}$
4. Розв'язати задача. В страховій компанії застраховано 1000 автомобілів. Ймовірність поломки довільного автомобіля 0,006. Кожний володар сплачує в рік 450 грн., а страхова компанія виплачує в результаті аварії 1000 грн. Знайти ймовірність подій: А= $\{$*за рік страхова компанія не отримає прибутку*$\}$ В= $\{$*прибуток компанії не менше 8000 гривень*$\}$	*А. а) 0,718; б) 0,834* *В. а) 0,083; б) 0,9713* *С. а) 0,693; б) 0,534*

5. В партії з 6 деталей 4 стандартних. Навмання взято 3 деталі. X – число стандартних серед вибраних. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *МХ*, дисперсію *ДХ*, $F(X)$.	*A. а) МХ=2; б) ДХ=0,4;* *в)* $\sigma(X)=0{,}63$ *B. а) МХ= 4; б) ДХ=1;* *в)* $\sigma(X)=1$ *C. а) МХ=5; б) ДХ=0,01; в)* $\sigma(X)=0{,}1$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<-4 \\ \frac{2}{9}(x+4) \text{ при } -4\le x\le -1 \\ 0 \text{ при } x>-1 \end{cases}.$ Знайти *MX, ДХ* .	*A.* $MX=6{,}1;\ DX=0{,}83$ *B.* $MX=5{,}1;\ DX=9{,}1$ *C.* $MX=13{,}83;\ DX=0{,}111$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=10; \sigma=6;\ \alpha=3;\ \beta=4;\ \xi=11$.	*A. а) 0,036; б) 0,932* *B. а) 0,114; б) 0,814* *C. а) 0,171; б) 0,784*
8. Показники вологості повітря розподілення нормально. Дослідження дали результати: 0,83; 0,85; 0,7; 0,75; 0,8; 0,79; 0,81; 0,88. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 0,8013;* *B. 0,9117;* *C. 0,7113.*
9. Показники вологості повітря розподілення нормально. Дослідження дали результати: 0,83; 0,85; 0,7; 0,75; 0,8; 0,79; 0,81; 0,88. Знайти оцінку для дисперсії $\overline{D_B}$.	*A. 0,00281* *B. 0,482* *C. 0,0372*
10. Показники вологості повітря розподілення нормально. Дослідження дали результати: 0,83; 0,85; 0,7; 0,75; 0,8; 0,79; 0,81; 0,88. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,99.	*A. (0,731; 0,871)* *B. (0,432; 0,584)* *C. (0,931; 0,999)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 9

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. В групі 30 студентів, серед яких 10 відмінників, 5 відстаючих, а інші встигаючі. По списку відібрали 5 студентів. Знайти ймовірність того, що серед них будуть: а) всі відмінники; б) один відмінник та 4 відстаючих; в) один відмінник, 2 відстаючих та 2 встигаючих.	*А. а) 0,0017 б) 0,0004 в) 0,074* *В. а) 0,3 б) 0,14 в) 3* *С. а) 1 б)0,2 в) 4,1*
2. Троє студентів складають іспит. Ймовірність того, що 1-й студент не складе іспит дорівнює 0,1, для 2-го – 0,2, 3-го – 0,3. Обчислити ймовірність того, що студенти складуть іспит: а) всі студенти; б) двоє студентів; в) хоча б один студент.	*А. а) 1; б) 2; в) 3* *Б. а) 0,504; б) 0,398; в) 0,994* *В. а) 0,1; б) 0,12; в) 0,3*
3. В групі з 25 чоловік, що прийшли складати іспит з теорії ймовірностей 10 відмінників, 7 – підготовлених добре, 5 задовільно та 3 – погано підготовлених студенти. Відмінники знають всі 25 питань програми, добре підготовлені – 20, задовільно підготовлені – 15, погано підготовлені 10. Викликаний навмання студент відповів на два запитання. Знайти ймовірність події: - студент підготовлений на відмінно або добре; - студент підготовлений погано.	*А. а) 0,624; б) 0,048* *В. а) 0,1; б) 3,1* *С. а) 1; б) 4*
4. Подія в кожному із 200 експериментів з’являється з постійною ймовірністю 0,4. Знайти ймовірність того, що подія з’явиться: а) 75 разів; б) не менше 30 і не більше 170 разів.	*А. а) 0,044; б) 0,998* *В. а) 0,12; б) 1,3*
5. На прилавках магазина виставлено для продажу п’ять тортів «Космос» та чотири – «Київський».	*А. а) МХ=2; б) ДХ=0,12; в)* $\sigma(X)=0,3$ *В. а) МХ= 1,78; б) ДХ=0,978; в)* $\sigma(X)=0,99$

Х – число проданих в даний момент «Київських» тортів. Знайти МХ, ДХ, $\sigma(X)$.	
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases} 0\ при\ x<0 \\ 4e^{-4e}\ \ x\ge 0 \end{cases}\quad x\in(1;3).$ Знайти *МХ, ДХ*.	*A.* $MX=\frac{1}{4};\ DX=\frac{1}{16}$ *B.* $MX=0{,}2;\ DX=4$
7. Відомі математичне сподівання a, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=6;\sigma=5;\ \alpha=1;\ \beta=6;\ \xi=10$.	*A. а) 0,341 б) 0,96* *B. а) 0,13 б) 1,2*
8. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 3,3* *B. 2,1* *C. 3,0*
9. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{D_B}$.	*A. 0,63* *B. 1,2* *C. 0,9*
10. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Оцінити для математичного сподівання з надійністю 0,95.	*A. (-0,11; 0,77)* *B. (0; 0,2)* *C. (-3; -5)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 10

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. Серед кандидатів на студентську конференцію: 6 – першокурсників, 5 – другокурсників та 10 – чотирикурсників. За списками навмання вибрали чотирьох. Знайти ймовірність серед вибраних: а) всі студенти 2-го курсу, б) 2 студенти 1-	*A. а) 0,2 B. а) 0,0008* *б) 0,13 б) 0,11* *в) 0,4 в) 0,003*

го курсу та 2 чотирикурсника, в) всі студенти першого курсу.	
2. Ймовірність того, що стрілок може влучити в мішень при одному пострілі, дорівнює 0,7. Стрілок вистрілив чотири рази. Знайти ймовірність того, що із чотирьох разів він влучив: а) один раз; б) хоча б один раз; в) не влучив жодного разу.	*А. а)0,0756; б) 0,0081; в) 0,9919* *В. а) 0,12; б) 0,09; в) 1,3*
3. В спортивних змаганнях беруть участь 4 команди. Склад їх відповідно 10, 15, 12, 13 – спортсменів. Перемогти в іграх вони можуть з ймовірністю 0,4; 0,6; 0,7; 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що у турнірі перемогла І команда.	*А. 0,21* *В. 0,12* *С. 0,13*
4. З ймовірністю 0,9 автомат видає порцію кави. Купують за день 100 покупців. Знайти ймовірність того, що кількість людей, що випили каву: а) 90 чоловік; б) не менше 80.	*А. а)0,132; б) 0,9986; в) 0,9919* *В. а) 0,14; б) 2,1; в) 1,3*
5. З ймовірністю 0,3 кожен студент з навмання вибраних чотирьох має борг з деякою предмету. Х – число боржників серед вибраних. Знайти МХ, ДХ, $\sigma(X)$.	*А.а) МХ=0,7866;б) ДХ=1,6544;в)* $\sigma(X)=1{,}286$ *В. а) МХ= 1; б) ДХ=2,3; в)* $\sigma(X)=1{,}7$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<-3 \\ \frac{2}{9}(x+3) \text{ при } -3\le x\ge 0 \end{cases}$ Знайти *МХ, ДХ*.	*А.* $MX=-1;\ DX=\frac{1}{2}$ *В.* $MX=0{,}2;\ DX=4$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)Х*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна	*А. а) 0,3413 б) 0,12* *В. а) 0,3413 б) 0,8664*

величина відхилення $\|X-a\|<\xi$, де $a=2; \sigma=4; \alpha=-2; \beta=6; \xi=6$.	
8. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 61; 62; 59; 60; 59; 63; 61; 62; 58; 60; 64. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 20,03;* *B. 60,8;* *C. 15,7.*
9. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 61; 62; 59; 60; 59; 63; 61; 62; 58; 60; 64. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{D_B}$.	*A. 1,7* *B. 2,1* *C. 3,5*
10. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 61; 62; 59; 60; 59; 63; 61; 62; 58; 60; 64. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання.	*A. (62; 17)* *B. (0,3; 5)* *C. (59,17; 62,4)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 11

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* Із коробки, в якій 10 білих, 6 чорних та 4 синіх кульок, навмання вибирають 3 кульки. Знайти ймовірність того, що серед них будуть: а) всі білі; б) одна біла і дві чорні; в) одна біла, одна чорна, одна синя.	*A. а)* $\frac{C_6^1C_4^2}{C_{20}^3}$ *B. а)* $\frac{C_{10}^3}{C_{20}^3}$ *C. а)* $\frac{C_2^1C_3^2}{C_{20}^3}$ *б)* $\frac{C_6^2C_6^1}{C_{20}^3}$ *б)* $\frac{C_{10}^1C_6^2}{C_{20}^3}$ *б)* $\frac{C_7^2C_6^1}{C_{20}^3}$ *в)* $\frac{C_3^1C_2^1C_4^1}{C_{20}^3}$ *в)* $\frac{C_{10}^1C_6^1C_4^1}{C_{20}^3}$ *в)* $\frac{C_6^1C_8^1C_8^1}{C_{20}^3}$
2.*Розв'язати задачу.* Для обслуговування деякого будівництва виділено 5 автомобілів за однакових і незалежних умов з ймовірністю 0,8 вони прибувають на будівництво. Знайти ймовірність того, що в даний момент будівництво обслуговують: а) всі 5 автоматів; б) не менше 3-х автомобілів; в) жоден автомобіль не прибув.	*A. а)* $(0,8)(0,2)^4$; *б)* $(0,8)^4(0,2)^2$; *в)* $(0,8)^5$ *B. а)* $(0,8)^5$; *б)* $C_5^3(0,8)^3(0,2)^2$; *в)* $(0,2)^5$ *C. а)* $(0,2)^5$; *б)* $(0,8)^3(0,2)^3$; *в)* $(0,8)^5$

3. *Розв'язати задачу.* На трьох лініях заводу виготовляються конструкції однієї назви, причому, перша лінія випускає 60%; друга – 30%; третя – 10% виробів. Ймовірність, що конструкція є не бракованою відповідно для першої лінії – 0,8; для другої – 0,7; для третьої – 0,4. Знайти ймовірність, якщо а) конструкція є не бракованою; б) за умови, що вона не бракована, знайти ймовірність того, що її виготовлено на третій лінії.	*A. а) 0,73; б) 0,054* *B. а) 0,61; б) 0,84* *C. а) 0,054; б) 0,976*
4. *Розв'язати задачу.* Монета кинута 100 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде: а) 60 разів; б) не менше 40 і не більше 90.	*A. а) 0,01; б) 0,04* *B. а) 0,061; б) 0,81* *C. а) 0,054; б) 0,976*
5. Монету кинуто 4 рази; *X* – число появ герба. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, середньоквадратичне відхилення σX, функцію розподілу $F(x)$.	*A. а) MX=3; б) ДX=9; в)* $\sigma X=3$ *B. а) MX= 2; б) ДX=1; в)* $\sigma X=1$ *C. а) MX=4; б) ДX=0; в)* $\sigma X=0$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \frac{1}{4}, & z<x\le 4,\ x\in(2{,}5;3)\\ 0, & x>4\end{cases}$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX, ДX,* σX та ймовірність того, що в результаті випробувань *X* набуде значення, що належить інтервалу *(а, в).*	*A.* $F(x)=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$; $MX=\frac{3}{2}$; $\sigma(x)=1{,}5$; $DX=\frac{29}{12}$ *B.* $F(x)=\frac{1}{4}x^2-1$; $MX=2$; $\sigma(x)=1{,}6$; $DX=\frac{40}{11}$ *C.* $F(x)=\frac{1}{4}x^3-3$; $MX=1$; $\sigma(x)=1$; $DX=1$
7. Відомі математичне сподівання *а*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити	*A. а) 0,7483; б) 0,1421* *B. а) 0,6247; б) 0,9876* *C. а) 4123; б) 0,8713*

ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=1$; $\sigma=2$; $\alpha=0$; $\beta=4$; $\xi=5$.	
8. Довжина деталі підпорядковується нормальному закону. При вимірюванні отримані результати 48, 46, 52, 51, 47, 50, 51, 52, 49, 50. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*А. 49,6* *В. 51,6* *С. 40,2*
9. Довжина деталі підпорядковується нормальному закону. При вимірюванні отримані результати 48, 46, 52, 51, 47, 50, 51, 52, 49, 50. Знайти оцінку для дисперсії D_B.	*А. 3,84* *В. 4,08* *С. 5,12*
10. Довжина деталі підпорядковується нормальному закону. При вимірюванні отримані результати 48, 46, 52, 51, 47, 50, 51, 52, 49, 50. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,95.	*А. (48,12; 51,08)* *В. (40,1; 42,3)* *С. (51,4; 55,8)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 12

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* В учнів 15 білих, 5 чорних і 20 синіх кульок. Навмання вийняли 5 кульок. Знайти ймовірність того, що серед них будуть: а) 3 білих 2 чорних; б) 5 синіх; в) 1 біла, 3 чорних, 1 синя.	*А. а)* $\frac{C_{15}^3C_5^2}{C_{40}^5}$ *В. а)* $\frac{C_5^2C_{20}^3}{C_{40}^5}$ *С. а)* $\frac{C_{40}^2C_{15}^3}{C_{40}^5}$ *б)* $\frac{C_{20}^5}{C_{40}^5}$ *б)* $\frac{C_{20}^2C_{15}^3}{C_{40}^5}$ *б)* $\frac{C_{15}^2C_{20}^3}{C_{40}^5}$ *в)* $\frac{C_{15}^1C_5^3C_{20}^1}{C_{40}^5}$ *в)* $\frac{C_5^2C_{20}^3}{C_{40}^5}$ *в)* $\frac{C_{15}^2C_{15}^3}{C_{40}^5}$
2. *Розв'язати задачу.* На виробництві для сигналізації про аварію встановлено 4 незалежних пристрої. Ймовірність того, що при аварії спрацюють пристрої: $p_1=0{,}9$; $p_2=0{,}95$; $p_3=0{,}94$; $p_4=0{,}79$. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацюють: а) всі пристрої; б) лише 3 пристрої; в) не менше 1-ого.	*А. а) 0,151; б) 0,841; в) 0,912* *В. а) 0,7395; б) 0,3133; в) 0,9999* *С. а) 0,634; б) 2743; в) 0,999*

3. *Розв'язати задачу.* На заводи ЗБК надходить цемент, що виготовлений на заводах №1, №2, №3. Обсяг цементу для кожного заводу відповідно дорівнює: №1 – 30%; №2 – 20%; №3 – 50%. Надійшло 5 вагонів з заводу № 1, 10 – із заводу №2, 15 – із №3. Навмання взятий вагон, розвантажується. Знайти ймовірність того, що в ньому знаходиться цемент та ймовірність того, що цемент з заводу №2.	*A. а) 0,367; б) 0,181* *B. а) 0,22; б) 0,3* *C. а) 0,1; б) 0,7*
4. *Розв'язати задачу.* Ймовірність появи події в кожному експерименті дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що в 245 експериментах подія з'явиться: а) рівно 100 разів; б) не менше 50 та не більше 200.	*A. а) 0,0001; б) 0,0474* *B а) 0,005; б) 0,54* *C а) 0,000014; б) 0,9515*
5. З ймовірністю 0,4 стрілець влучив в ціль за один постріл. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, середньоквадратичне відхилення σX, функцію розподілу $F(x)$, якщо стрілець вистрілив 4 рази. *X* - число влучень.	*A. а) MX=1,6; б) ДХ=0,954; в)* $\sigma(X)=0{,}976$ *B. а) MX= 2,1; б) ДХ=4; в)* $\sigma(X)=2$ *C а) MX=4,3; б) ДХ=0; в)* $\sigma(X)=0$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le\frac{-\pi}{2}\\ \frac{1}{2}\cos x, \frac{-\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2},\ x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right).\\ 0,\ x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$$ Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX*, *ДX*, σX та ймовірність того, що в результаті випробувань *X* набуде значення, що належить інтервалу *(а, в)*.	$A.\ F(x)=\frac{1}{2}\sin x\cos x+1;\ MX=1;\ \sigma(x)=0;$ $DX=0$ $B.\ F(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4};\ MX=1;\ \sigma(x)=\frac{\pi}{2};$ $DX=\frac{\pi^2}{4}$ $C.\ F(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2};\ MX=0;\ \sigma(X)=\frac{\pi^2}{4}-2;$ $DX=\frac{\pi^2}{4}-2$

7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\|X-a\|<\xi$, де $a=2$; $\sigma=4$; $\alpha=-2$; $\beta=3$; $\xi=4$.	*A. а) 0,511; б) 0,1112* *B а) 0,44; б) 0,6826* *C а) 0,4393; б) 0,6826*
8. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 3,3* *B. 4,2* *C. 5,8*
9. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Знайти оцінку для дисперсії $\overline{D_B}$.	*A. 4,61* *B. 5,82* *C. 6,91*
10. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,95.	*A. (1,6827; 4,9173)* *B. (2,695; 3,784)* *C. (4,895; 5,194)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 13

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* Із партії 30 деталей, серед яких 25 стандартних, вийняли 5 деталей. Знайти ймовірність того, що: а) всі стандартні; б) всі нестандартні; в) одна стандартна, 4 – нестандартні.	*A. а)* $\frac{C_{25}^5}{C_{30}^5}$ *B. а)* $\frac{C_{20}^1}{C_{30}^5}$ *C. а)* $\frac{C_{25}^2 C_5^3}{C_{30}^5}$ *б)* $\frac{C_5^5}{C_{30}^5}$ *б)* $\frac{C_{25}^5}{C_{30}^5}$ *б)* $\frac{C_5^1 C_{25}^1}{C_{30}^5}$ *в)* $\frac{C_{25}^1 C_5^4}{C_{30}^5}$ *в)* $\frac{C_{30}^1 C_{20}^1}{C_{30}^5}$ *в)* $\frac{C_5^5}{C_{30}^5}$
2. *Розв'язати задачу.* На будівництві об'єкта працюють незалежно 6 бульдозерів із ймовірністю роботи 0,8. Знайти ймовірність того, що на будівництві а) працює лише 4 бульдозери; б) не менше 5-ти; в) жоден не працює.	*A. а)* $(0,2)^4(0,8)^2$; *б)* $(0,2)^3(0,8)^3$; *в)* $(0,8)^6$ *B. а)* $C_6^4(0,8)^4(0,2)^2$; *б)* $C_6^5(0,8)^5(0,2)+C_6^6(0,8)^6$; *в)* $(0,2)^6$ *C. а)* $(0,2)^6$; *б)* $C_6^5(0,85)^5(0,2)^2$; *в)* $(0,8)^6$
3. *Розв'язати задачу.* На 3 заводах	*A. а) 0,47; б) 0,35*

виготовляються конструкції для будівництва. Процент браку для першого заводу – 0,2%; для другого – 0,3%; для третього – 0,5%.На об'єкт доставлено 200 виробів першого заводу; 100 – другого; 30 – третього. Навмання взятий виріб виявився бракованим. Знайти ймовірність того, що: а) бракована конструкція поставлена першим заводом; б) брак поставлено другим заводом.	*B. а) 0,11; б) 0,48* *C. а) 0,91; б) 0,81*
4. *Розв'язати задачу.* Ймовірність влучити в ціль для стрільця 0,7. Зроблено 100 пострілів. Знайти ймовірність того, що стрілець влучив в ціль: а) 90 разів; б) не менше 75 разів.	*A. а) 0,112; б) 0,54* *B. а) 0,2; б) 0,97* *C. а) 0,0001; б) 0,861*
5. Гральний кубик кинуто 3 рази; *X* – число появ «шістки». Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, середньоквадратичне відхилення σX, функцію розподілу $F(x)$.	*A. а) MX=0,42; б) ДX=0,3825; в)* $\sigma(X)$ *=0,621* *B. а) MX= 0; б) ДX=9,1; в)* $\sigma(X)$ *=3,05* *C. а) MX=2,3; б) ДX=0; в)* $\sigma(X)$ *=0*
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \frac{1}{2}\sin x, 0<x\le\pi,\ x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right).\\ 0,\ x>\pi\end{cases}$ Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX*, *ДX*, σX та ймовірність того, що в результаті випробувань *X* набуде значення, що належить інтервалу *(а, в)*.	*A.* $F(x)=\frac{1}{2}\sin x\cos x-1;\ MX=3;\ \sigma(x)=0;$ $DX=0$ *B.* $F(x)=\frac{1}{2}\sin x+1;\ MX=\frac{\pi^2}{4};\ \sigma(x)=1;\ DX=1$ *C.* $F(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2};\ MX=\frac{\pi}{2};\ \sigma(x)=\frac{\pi}{2};$ $DX=\frac{\pi^2}{4}$
7. Відомі математичне сподівання *а*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де	*A. а) 0,975; б) 0,112* *B. а) 0,295; б) 0,9876* *C. а) 0,541; б) 0,627*

a=3; σ *=2*; $\beta = 2$; $\xi = 5$.	
8. Показники вологості повітря розподілені нормально. Дослідження дали результати: 0,63; 0,66; 0,65; 0,67; 0,62; 0,61; 0,65; 0,60. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 0,64;* *B. 0,71;* *C. 0,91.*
9. Показники вологості повітря розподілені нормально. Дослідження дали результати: 0,63; 0,66; 0,65; 0,67; 0,62; 0,61; 0,65; 0,60. Знайти оцінку для дисперсії $\overline{D_B}$.	*A. 0,0004* *B. 0,08* *C. 0,071*
10. Показники вологості повітря розподілені нормально. Дослідження дали результати: 0,63; 0,66; 0,65; 0,67; 0,62; 0,61; 0,65; 0,60. Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,95.	*A. (0,624; 0,656)* *B. (0,721; 0,823)* *C. (0,834; 0,981)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 14

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* В бригаді 20 робітників, серед яких 11 дівчат, решта хлопці. На нараду послали 4-х представників від бригади. Знайти ймовірність того, що серед них:а)одні чоловіки;б) одні жінки;в)дві жінки і два чоловіки.	*A. а) 0,02 б) 0,068 в) 0,4* *B. а) 0,01 б) 0,01 в) 0,5* *C. а) 0,03 б) 0,037 в) 0,3*
2. *Розв'язати задачу.* Троє студентів складають іспит. Ймовірність того, що 1-й студент складе іспит дорівнює 0,8; 2-й - 0,7; 3-й - 0,4. Обчислити ймовірність того, що не складуть іспит:а) всі студенти;б)тільки один;в)хоча б один.	*A. а) 0,031; б) 0,321; в) 0,031* *B. а) 0,036; б) 0,05; в) 0,25* *C. а) 0,037; б) 0,488; в) 0,776*
3. *Розв'язати задачу.* На складі в трьох ящиках знаходяться деталі для ремонту автомобілів. Відомо, що в першому ящику 50 деталей, з яких 6 бракованих, у другому - 30 деталей,	*A. а) 0,320; б) 0,03;* *B. а) 0,401; б) 0,2;* *C. а) 0,1409; б) 0,294.*

з яких 5 бракованих, у третьому - 40 деталей, з яких 6 бракованих. Майстер навмання вибирає деталь з будь-якого ящика. Знайти ймовірність того, що взята деталь бракована, й того, що майстер взяв її з другого ящика.	
4. *Розв'язати задачу.* Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 народжених: а) рівно 50 хлопчиків; б) не менше 30 і не більше 70.	*A. а) 0,95; б) 0,002* *B. а) 0,002; б) 0,102* *C. а) 0,079; б) 0,102*
5. В білеті 4 запитання. З ймовірністю 0,4 студент правильно відповідає на кожне з них. *X* – число правильних відповідей студента. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДХ*, середньоквадратичне відхилення σX .	*A. а) MX=1,6; б) ДХ=0,96; в)* $\sigma(X)$*=0,97* *B. а) MX= 1,6; б) ДХ=2,1; в)* $\sigma(X)$*=1,7* *C. а) MX=1,4; б) ДХ=2,3; в)* $\sigma(X)$*=1,9*
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}5e^{-5e}, x\geq 0\\ 0\ при\ x<0\end{cases}$ $x\in(0;2)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX, ДХ* та ймовірність того, що в результаті випробувань *X* набуде значення, що належить інтервалу *(а, в)*.	*A.* $F(x)=-e^{-5x}$; $MX=0{,}1$; $DX=0{,}0283$ *B.* $F(x)=e^{-5x}$; $MX=0{,}4$; $DX=0{,}002$ *C.* $F(x)=5e^{-5x}$; $MX=0{,}3$; $DX=0{,}0784$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально, обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де *a=5*; σ *=4*; $\alpha=0$; $\beta=6$; $\xi=9$.	*A. а) 0,317; б) 0,323* *B. а) 0,254; б) 0,975* *C. а) 0,4931; б) 0,975*
8. Показники насиченості повітря отруйними парами підкорюються нормальному закону. Дослідження дали наступні результати: 0,10; 0,12;	*A. 0,21;* *B. 0,11;* *C. 1,2.*

0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	
9. Показники насиченості повітря отруйними парами підкорюються нормальному закону. Дослідження дали наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{D_B}$.	*A. 0,98* *B. 0,098* *C. 0,2*
10. Показники насиченості повітря отруйними парами підкорюються нормальному закону. Дослідження дали наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання.	*A. (0,0945; 0,314)* *B. (0,1; 0,5)* *C. (0,17; 1)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 15

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.*В цеху працюють 6 чоловіків і 4 жінки. За табельними номерами вибирають семеро чоловік. Знайти ймовірність того, що серед вибраних:а) три жінки;б) 5 чоловіків і 2 жінки;в) три чоловіки.	*A. а)* $\frac{1}{4}$ *B. а)* $\frac{1}{2}$ *C. а)* $\frac{1}{5}$ *б) 0,4* *б) 0,3* *б) 0,3* *в)* $\frac{1}{6}$ *в)* $\frac{1}{6}$ *в)* $-\frac{1}{6}$
2. *Розв'язати задачу.*Троє студентів складають іспит. Ймовірність того, що 1-й студент складе іспит дорівнює 0,8; 2-й - 0,7; 3-й - 0,4. Обчислити ймовірність того, що не складуть іспит:а) всі студенти;б)тільки один;в)хоча б один.	*A. а) 0,99; б) 0,17; в) 0,23* *B. а) 0,036; б) 0,488; в) 0,776* *C. а) 0,915; б) 0,23; в) 0,012*
3. *Розв'язати задачу.*На будівництво надходять однакові деталі, виготовлені на 3-х заводах, з продуктивністю заводів 1:2:4. Ймовірність браку на 1-му заводі дорівнює 0,3, 2-му – 0,6, 3-му – 0,1. Взята навмання деталь – бракована.	*A. 0,3* *B. 0,210* *C. 0,63*

Знайти ймовірність того, що вона виконана на 3-му заводі.	
4. *Розв'язати задачу.* З ймовірністю 0,7 продається кожна партія деякого товару. На аукціон виставлено 700 партій. Знайти ймовірність того, що буде продано: а) 300 партій; б) не менше 500 партій.	*A. а) 0,35; б) 0,2061* *B. а) 0,007; б) 0,415* *C. а) 0,000008; б) 0,7938*
5. Ймовірність виграти по 1 лотерейному білету дорівнює 0,02. Х – число виграних білетів для володаря чотирьох білетів. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, середньоквадратичне відхилення σX .	*A.а)MX=0,08;б)ДX=0,4728; в)* $\sigma(X)$*=0,68* *B.а)MX= 0,04; б) ДX=0,0276; в)* $\sigma(X)$*=0,12* *C.а) MX=0,216; б) ДX=0,15; в)* $\sigma(X)$*=1,3*
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases} 0 \ при \ x<1 \\ \frac{1}{4}x \ при \ 1\le x\le 3 \\ 0 \ при \ x>3 \end{cases}$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX, ДX.*	$A.\ M(x)=0.5;\ DX=3{,}5;\ \sigma X=2{,}296$ $B.\ M(x)=1;\ DX=4{,}06;\ \sigma X=2{,}015$ $C.\ M(x)=2{,}16;\ DX=0{,}33;\ \sigma X=0{,}57$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально, обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де *a=5;* σ *=4*; $\alpha=0$; $\beta=6$; $\xi=9$.	*A. а) 0,4235; б) 0,83* *B. а) 0,207; б) 0,764* *C. а) 0,4931; б) 0,975*
8. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 23; 29; 25; 26; 27; 29; 30; 24; 25; 26; 25. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 27;* *B. 26,2;* *C. 15.*
9. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати:	*A. 0,12* *B. 1015* *C. 4099*

23; 29; 25; 26; 27; 29; 30; 24; 25; 26; 25. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{D_B}$.	
10. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 23; 29; 25; 26; 27; 29; 30; 24; 25; 26; 25. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання.	*A. (0; 3120)* *B. (2; 4)* *C. (-348,76; 3540,16)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 16

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* В ящику 25 деталей, серед яких 10 кольорові. Навмання витягують 5 деталей. Знайти ймовірність того, що серед взятих деталей: а) всі кольорові; б) всі не кольорові; в) 2 кольорові та 3 не кольорові.	*A. а) 0,005; B. а) 0,003; C. а) 0,012* *б) 0,057; б) 0,017; б) 0,0019* *в) 0,38; в) 0,15; в) 0,38*
2. *Розв'язати задачу.* Ймовірність непопадання в ціль для 1-го стрільця дорівнює 0,2; для 2-го – 0,1; для 3-го – 0,3. Обчислити ймовірність попадання в ціль: а) хоча б одного; б) двох; в) всіх.	*A. а) 0,994; б) 0,398; в) 0,504* *B. а) 0,305; б) 0,27; в) 0,45* *C. а) 0,804; б) 0,672; в) 0,903*
3. *Розв'язати задачу.* Для 10 студентів 1-ї групи ймовірність скласти іспит дорівнює 0,9, для 12 (2-га група) – 0,6, для 15 (3-тя група) – 0,8. Навмання викликаний студент склав іспит. Знайти ймовірність того, що студент, що склав іспит, належить до 2-ї групи.	*A. 0,3* *B. 1,24* *C. 0,25*
4. *Розв'язати задачу.* Ймовірність появи події в кожному із 900 незалежних експериментів дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а) рівно 450 разів; б) не менше 50 та не більше 350.	*A. а) 0,16; б) 0,33* *B. а) 0,121; б) 0,5* *C. а) 0,026; б) 0*
5. Зроблено чотири постріли в ціль. Ймовірність попадання при одному пострілі 0,6. X – число попадань.	*A. а) MX=2,9; б) ДX=0,73; в)* $\sigma(X)$*=0,117* *B. а) MX= 2,4; б) ДX=0,64; в)* $\sigma(X)$*=0,805* *C. а) MX=2,4; б) ДX=0,96; в)* $\sigma(X)$*=0,979*

Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, середньоквадратичне відхилення σX .	
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-4\\ \frac{1}{8}(x+4) \text{ при } -4\le x\le 0\\ 0 \text{ при } x>0\end{cases}$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX, ДX*.	A. $F(x)=\frac{x^2}{4}+x;\ MX=0{,}3;\ DX=\frac{23}{5}$ B. $F(x)=\frac{x^2}{8}-\frac{1}{2}x;\ MX=-\frac{8}{9};\ DX=\frac{17}{9}$ C. $F(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{1}{2}x;\ MX=-\frac{4}{3};\ DX=\frac{8}{9}$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=8;\sigma=10;\ \alpha=0;\ \beta=20;\ \xi=16$.	*A. а) 0,904; б) 0,63* *B. а) 0,673; б) 0,8904* *C. а) 0,215; б) 0,18*
8. Показники насиченості повітря отруйними парами підпорядковуються нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 0,11;* *B. 0,13;* *C. 0,21.*
9. Показники насиченості повітря отруйними парами підпорядковуються нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{D_B}$.	*A. 0,0013* *B. 0,098* *C. 0,2*

10. Показники насиченості повітря отруйними парами підпорядковуються нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання.	*A. (0,109; 0,1100914)* *B. (0,3; 0,8)* *C. (0,12; 0,15)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 17

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. Розв'язати задача. В ящику 10 яблук – 1-го сорту, 20 – 2-го і 30 – 3-го. Навмання вибирають 10 яблук. Знайти ймовірність того, що серед вибраних: а) всі третього сорту; б) 2 – 1-го і 8 – 2-го; в) 5 – 1-го 2 – 2-го і 3-го.	*А. а)* $\frac{C_{30}^{10}}{C_{60}^{10}}$; *б)* $\frac{C_{10}^{2}C_{20}^{8}}{C_{60}^{10}}$; *в)* $\frac{C_{10}^{5}C_{10}^{2}C_{30}^{3}}{C_{60}^{10}}$; *Б. а)* $\frac{C_{20}^{5}}{C_{60}^{10}}$; *б)* $\frac{C_{10}^{1}C_{30}^{2}C_{5}^{3}}{C_{60}^{10}}$; *в)* $\frac{C_{30}^{2}C_{15}^{2}C_{5}^{2}}{C_{60}^{10}}$.
2. Розв'язати задача. Ймовірність того, що радіоприймач бракований – 0,99. На перевірку взято 10 приймачів. Знайти ймовірність того, що серед них: а) хоча б три браковані; б) жоден не бракований; в) всі браковані.	*A. а) 0,1819; б) 0,4118;* в) $(0,1)^9$ *B. а) 0,1719; б) 0,398;* в) $(0,09)^{10}$ *C. а) 0,1415; б) 0,4119;* в) $(0,1)^8 0,9$
3. Розв'язати задача. На біржу поступили чотири партії товару. В першій 100 одиниць товару, у II-й – 300; у III-й – 50 та у VI-й – 500. З ймовірністю 06; 0,5; 0,3 та 0,4 відповідно вони можуть бути продані в перший день торгу. Знайти ймовірність того, I-а партія не буде продана у перший день торгу.	*A. 0,076* *B. 0,18* *C. 0,41*
4. Розв'язати задача. Ймовірність появи події A в кожному із 1000 експериментів дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що подія не з'явиться: а) рівно 900 разів; б) н менше 500 разів.	*A. а) 0,0106; б) 0,065* *B. а) 0,216; б) 0,112* *C. а) 0,318; б) 0,918*
5. Знайти З ймовірністю 0,3 рибак	*A. а) MX=1,2; б) ДX=0,84;*

може спіймати на одного черв'яка одну рибину. Насаджено чотири черв'яка. X – число спійманих рибин. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, $F(X)$.	*в)* $F(X)=\begin{cases}0,x<0\\0.2401,0\le x\le 1\end{cases}$ *B. а) MX= 0,8; б) ДX=1,4;* *в)* $F(X)=\begin{cases}0,x<0\\0.6517,1\le x<2\end{cases}$ *C. а) MX=1,9; б) ДX=2,7; в)* $F(X)=\begin{cases}0,x<0\\0.9163;2\le x<3\end{cases}$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}0\ при\ x<1\\x-\frac{1}{2}\ при\ 1\le x\le 2\\0\ при\ x>2\end{cases}.$ Знайти *MX, ДX* .	*A.* $MX=1;\ DX=0{,}14$ *B.* $MX=0{,}5;\ DX=2{,}1$ *C.* $MX=1{,}5;\ DX=1{,}7$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=4;\sigma=1;\ \alpha=-3;\ \beta=4;\ \xi=6$.	*A. а) 0,1517; б) 0,217* *B. а) 0,0866; б) 0,135* *C. а) 0,1213; б) 0,1719*
8. Показники вогнестійкості обладнання розподілення нормально. Дослідження дали результати: 57; 58; 59; 60; 59; 58; 56; 59; 60; 61. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 58,45;* *B. 61,14;* *C. 48,19.*
9. Показники вогнестійкості обладнання розподілення нормально. Дослідження дали результати: 57; 58; 59; 60; 59; 58; 56; 59; 60; 61. Знайти оцінку для дисперсії $\overline{D_B}$.	*A. 2,43* *B. 4,12* *C. 3,17*
10. Показники вогнестійкості обладнання розподілення нормально. Дослідження дали результати: 57; 58; 59; 60; 59; 58; 56; 59; 60; 61. Оцінити довірчий	*A. (56,89; 60,01)* *B. (71,4; 73,21)* *C. (61,15; 62,3)*

інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,95.	

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 18

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. Розв'язати задача. В колоді 36 карт. Навмання витягнуто три карти. Знайти ймовірність того, що серед них будуть: а) дама, валет, король; б) дві десятки ті сімка; в) всі тузи.	*А. а)* $\frac{C_4^1 C_4^1 C_4^1}{C_{36}^3}$; *б)* $\frac{C_4^2 C_4^1}{C_{36}^3}$; *в)* $\frac{C_4^3}{C_{36}^3}$; *Б. а)* $\frac{C_4^1 C_4^2}{C_{36}^3}$; *б)* $\frac{C_{36}^2 C_4^1}{C_{36}^3}$; *в)* $\frac{C_{18}^1 C_{18}^2}{C_{36}^3}$.
2. Розв'язати задача. У цеху чотири верстата. Ймовірність відмови 1-го верстата дорівнює 0,3; 2-го – 0,4; 3-го – 0,6; 4-го – 0,1. Знайти ймовірність роботи: а) хоча б одного верстата; б) двох верстатів; в) всіх верстатів.	*А. а) 0,8488; б) 0,4144; в) 0,072* *В. а) 0,918; б) 0,5114; в) 0,09* *С. а) 0,851; б) 0,5114; в) 0,01*
3. Розв'язати задача. У піраміді 10 гвинтівок, з яких 4 з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу – 0,8. Стрілок вразив ціль. Що ймовірніше: стрілок влучив з гвинтівки з оптичним прицілом чи ні?	*А.* $\frac{19}{43} < \frac{24}{43}$ *В.* $\frac{18}{41} > \frac{17}{41}$ *С.* $\frac{21}{32} < \frac{25}{32}$
4. Розв'язати задача. В страховій компанії застраховано 1000 автомобілів. Ймовірність поломки довільного автомобіля 0,006. Кожний володар сплачує в рік 450 грн., а страхова компанія виплачує в результаті аварії 1000 грн. Знайти ймовірність подій: А= $\{$*за рік страхова компанія не отримає прибутку*$\}$ В= $\{$*прибуток компанії не менше 8000 гривень*$\}$	*А. а) 0,718; б) 0,834* *В. а) 0,083; б) 0,9713* *С. а) 0,693; б) 0,534*
5. В партії з 6 деталей 4 стандартних. Навмання взято 3 деталі. Х – число	*А. а) МХ=2; б) ДХ=0,4;* *в)* $\sigma(X) = 0{,}63$

стандартних серед вибраних. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, $F(X)$.	*B. а) MX= 4; б) ДX=1;* *в)* $\sigma(X)=1$ *C. а) MX=5; б) ДX=0,01; в)* $\sigma(X)=0,1$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases} 0\ при\ x<-4 \\ \frac{2}{9}(x+4)\ при\ -4\le x\le -1 \\ 0\ при\ x>-1 \end{cases}.$ Знайти *MX, ДX* .	*A.* $MX=6,1;\ DX=0,83$ *B.* $MX=5,1;\ DX=9,1$ *C.* $MX=13,83;\ DX=0,111$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=10;\sigma=6;\ \alpha=3;\ \beta=4;\ \xi=11$.	*A. а) 0,036; б) 0,932* *B. а) 0,114; б) 0,814* *C. а) 0,171; б) 0,784*
8. Показники вологості повітря розподілення нормально. Дослідження дали результати: 0,83; 0,85; 0,7; 0,75; 0,8; 0,79; 0,81; 0,88. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 0,8013;* *B. 0,9117;* *C. 0,7113.*
9. Показники вологості повітря розподілення нормально. Дослідження дали результати: 0,83; 0,85; 0,7; 0,75; 0,8; 0,79; 0,81; 0,88. Знайти оцінку для дисперсії $\overline{D_B}$.	*A. 0,00281* *B. 0,482* *C. 0,0372*
10. Показники вологості повітря розподілення нормально. Дослідження дали результати: 0,83; 0,85; 0,7; 0,75; 0,8; 0,79; 0,81; 0,88. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,99.	*A. (0,731; 0,871)* *B. (0,432; 0,584)* *C. (0,931; 0,999)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 19

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. В групі 30 студентів, серед яких 10 відмінників, 5 відстаючих, а інші встигаючі. По списку відібрали 5 студентів. Знайти ймовірність того, що серед них будуть: а) всі відмінники; б) один відмінник та 4 відстаючих; в) один відмінник, 2 відстаючих та 2 встигаючих.	*А. а) 0,0017 б) 0,0004 в) 0,074* *В. а) 0,3 б) 0,14 в) 3* *С. а) 1 б)0,2 в) 4,1*
2. Троє студентів складають іспит. Ймовірність того, що 1-й студент не складе іспит дорівнює 0,1, для 2-го – 0,2, 3-го – 0,3. Обчислити ймовірність того, що студенти складуть іспит: а) всі студенти; б) двоє студентів; в) хоча б один студент.	*А. а) 1; б) 2; в) 3* *Б. а) 0,504; б) 0,398; в) 0,994* *В. а) 0,1; б) 0,12; в) 0,3*
3. В групі з 25 чоловік, що прийшли складати іспит з теорії ймовірностей 10 відмінників, 7 – підготовлених добре, 5 задовільно та 3 – погано підготовлених студенти. Відмінники знають всі 25 питань програми, добре підготовлені – 20, задовільно підготовлені – 15, погано підготовлені 10. Викликаний навмання студент відповів на два запитання. Знайти ймовірність події: - студент підготовлений на відмінно або добре; - студент підготовлений погано.	*А. а) 0,624; б) 0,048* *В. а) 0,1; б) 3,1* *С. а) 1; б) 4*
4. Подія в кожному із 200 експериментів з’являється з постійною ймовірністю 0,4. Знайти ймовірність того, що подія з’явиться: а) 75 разів; б) не менше 30 і не більше 170 разів.	*А. а) 0,044; б) 0,998* *В. а) 0,12; б) 1,3*
5. На прилавках магазина виставлено для продажу п’ять тортів «Космос» та чотири – «Київський». Х – число проданих в даний момент «Київських» тортів. Знайти МХ, ДХ, $\sigma(X)$.	*А. а) МХ=2; б) ДХ=0,12; в)* $\sigma(X)=0{,}3$ *В. а) МХ= 1,78; б) ДХ=0,978; в)* $\sigma(X)=0{,}99$

6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases} 0\ при\ x<0 \\ 4e^{-4e}\ \ x\geq 0 \end{cases}\quad x\in(1;3).$ Знайти *МХ, ДХ*.	А. $MX=\frac{1}{4};\ DX=\frac{1}{16}$ В. $MX=0{,}2;\ DX=4$
7. Відомі математичне сподівання a, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)Х*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=6;\sigma=5;\ \alpha=1;\ \beta=6;\ \xi=10$.	*А. а) 0,341 б) 0,96* *В. а) 0,13 б) 1,2*
8. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*А. 3,3* *В. 2,1* *С. 3,0*
9. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{D_B}$.	*А. 0,63* *В. 1,2* *С. 0,9*
10. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Оцінити для математичного сподівання з надійністю 0,95.	*А. (-0,11; 0,77)* *В. (0; 0,2)* *С. (-3; -5)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 20

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. Серед кандидатів на студентську конференцію: 6 – першокурсників, 5 – другокурсників та 10 – чотирикурсників. За списками навмання вибрали чотирьох. Знайти ймовірність серед вибраних: а) всі студенти 2-го курсу, б) 2 студенти 1-го курсу та 2 чотирикурсника, в) всі студенти першого курсу.	*А. а) 0,2 В. а) 0,0008* *б) 0,13 б) 0,11* *в) 0,4 в) 0,003*

2. Ймовірність того, що стрілок може влучити в мішень при одному пострілі, дорівнює 0,7. Стрілок вистрілив чотири рази. Знайти ймовірність того, що із чотирьох разів він влучив: а) один раз; б) хоча б один раз; в) не влучив жодного разу.	*А. а)0,0756; б) 0,0081; в) 0,9919* *В. а) 0,12; б) 0,09; в) 1,3*
3. В спортивних змаганнях беруть участь 4 команди. Склад їх відповідно 10, 15, 12, 13 – спортсменів. Перемогти в іграх вони можуть з ймовірністю 0,4; 0,6; 0,7; 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що у турнірі перемогла І команда.	*А. 0,21* *В. 0,12* *С. 0,13*
4. З ймовірністю 0,9 автомат видає порцію кави. Купують за день 100 покупців. Знайти ймовірність того, що кількість людей, що випили каву: а) 90 чоловік; б) не менше 80.	*А. а)0,132; б) 0,9986; в) 0,9919* *В. а) 0,14; б) 2,1; в) 1,3*
5. З ймовірністю 0,3 кожен студент з навмання вибраних чотирьох має борг з деякою предмету. Х – число боржників серед вибраних. Знайти МХ, ДХ, $\sigma(X)$.	*А.а) МХ=0,7866;б) ДХ=1,6544;в)* $\sigma(X)=1{,}286$ *В. а) МХ= 1; б) ДХ=2,3; в)* $\sigma(X)=1{,}7$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases} 0 \ при \ x<-3 \\ \frac{2}{9}(x+3) \ при \ -3\le x\ge 0 \end{cases}$ Знайти *МХ, ДХ*.	*А.* $MX=-1;\ DX=\frac{1}{2}$ *В.* $MX=0{,}2;\ DX=4$
7. Відомі математичне сподівання a, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)Х*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\|X-a\|<\xi$, де $a=2;\sigma=4;\ \alpha=-2;\ \beta=6;\ \xi=6$.	*А. а) 0,3413 б) 0,12* *В. а) 0,3413 б) 0,8664*

8. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 61; 62; 59; 60; 59; 63; 61; 62; 58; 60; 64. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 20,03;* *B. 60,8;* *C. 15,7.*
9. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 61; 62; 59; 60; 59; 63; 61; 62; 58; 60; 64. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{D_B}$.	*A. 1,7* *B. 2,1* *C. 3,5*
10. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 61; 62; 59; 60; 59; 63; 61; 62; 58; 60; 64. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання.	*A. (62; 17)* *B. (0,3; 5)* *C. (59,17; 62,4)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 21

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* Із коробки, в якій 10 білих, 6 чорних та 4 синіх кульок, навмання вибирають 3 кульки. Знайти ймовірність того, що серед них будуть: а) всі білі; б) одна біла і дві чорні; в) одна біла, одна чорна, одна синя.	*A. а)* $\frac{C_6^1 C_4^2}{C_{20}^3}$ *B. а)* $\frac{C_{10}^3}{C_{20}^3}$ *C. а)* $\frac{C_2^1 C_3^2}{C_{20}^3}$ *б)* $\frac{C_6^2 C_6^1}{C_{20}^3}$ *б)* $\frac{C_{10}^1 C_6^2}{C_{20}^3}$ *б)* $\frac{C_7^2 C_6^1}{C_{20}^3}$ *в)* $\frac{C_3^1 C_2^1 C_4^1}{C_{20}^3}$ *в)* $\frac{C_{10}^1 C_6^1 C_4^1}{C_{20}^3}$ *в)* $\frac{C_6^1 C_8^1 C_8^1}{C_{20}^3}$
2.*Розв'язати задачу.* Для обслуговування деякого будівництва виділено 5 автомобілів за однакових і незалежних умов з ймовірністю 0,8 вони прибувають на будівництво. Знайти ймовірність того, що в даний момент будівництво обслуговують: а) всі 5 автоматів; б) не менше 3-х автомобілів; в) жоден автомобіль не прибув.	*A. а)* $(0,8)(0,2)^4$; *б)* $(0,8)^4(0,2)^2$; *в)* $(0,8)^5$ *B. а)* $(0,8)^5$; *б)* $C_5^3(0,8)^3(0,2)^2$; *в)* $(0,2)^5$ *C. а)* $(0,2)^5$; *б)* $(0,8)^3(0,2)^3$; *в)* $(0,8)^5$
3. *Розв'язати задачу.* На трьох лініях заводу виготовляються	*A. а) 0,73; б) 0,054* *B. а) 0,61; б) 0,84* *C. а) 0,054; б) 0,976*

конструкції однієї назви, причому, перша лінія випускає 60%; друга – 30%; третя – 10% виробів. Ймовірність, що конструкція є не бракованою відповідно для першої лінії – 0,8; для другої – 0,7; для третьої – 0,4. Знайти ймовірність, якщо а) конструкція є не бракованою; б) за умови, що вона не бракована, знайти ймовірність того, що її виготовлено на третій лінії.	
4. *Розв'язати задачу.* Монета кинута 100 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде: а) 60 разів; б) не менше 40 і не більше 90.	*A. а) 0,01; б) 0,04* *B. а) 0,061; б) 0,81* *C. а) 0,054; б) 0,976*
5. Монету кинуто 4 рази; *X* – число появ герба. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, середньоквадратичне відхилення σX, функцію розподілу $F(x)$.	*A. а) MX=3; б) ДX=9; в)* $\sigma X = 3$ *B. а) MX= 2; б) ДX=1; в)* $\sigma X = 1$ *C. а) MX=4; б) ДX=0; в)* $\sigma X = 0$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \frac{1}{4}, & z < x \le 4, \; x \in (2{,}5;3) \\ 0, & x > 4 \end{cases}$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX, ДX,* σX та ймовірність того, що в результаті випробувань *X* набуде значення, що належить інтервалу *(а, в).*	*A.* $F(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$; $MX = \frac{3}{2}$; $\sigma(x) = 1{,}5$; $DX = \frac{29}{12}$ *B.* $F(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$; $MX = 2$; $\sigma(x) = 1{,}6$; $DX = \frac{40}{11}$ *C.* $F(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3$; $MX = 1$; $\sigma(x) = 1$; $DX = 1$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α, β); б) абсолютна	*A. а) 0,7483; б) 0,1421* *B. а) 0,6247; б) 0,9876* *C. а) 4123; б) 0,8713*

величина відхилення $\|X-a\|<\xi$, де $a=1$; $\sigma=2$; $\alpha=0$; $\beta=4$; $\xi=5$.	
8. Довжина деталі підпорядковується нормальному закону. При вимірюванні отримані результати 48, 46, 52, 51, 47, 50, 51, 52, 49, 50. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 49,6* *B. 51,6* *C. 40,2*
9. Довжина деталі підпорядковується нормальному закону. При вимірюванні отримані результати 48, 46, 52, 51, 47, 50, 51, 52, 49, 50. Знайти оцінку для дисперсії D_B.	*A. 3,84* *B. 4,08* *C. 5,12*
10. Довжина деталі підпорядковується нормальному закону. При вимірюванні отримані результати 48, 46, 52, 51, 47, 50, 51, 52, 49, 50. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,95.	*A. (48,12; 51,08)* *B. (40,1; 42,3)* *C. (51,4; 55,8)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 22

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* В учнів 15 білих, 5 чорних і 20 синіх кульок. Навмання вийняли 5 кульок. Знайти ймовірність того, що серед них будуть: а) 3 білих 2 чорних; б) 5 синіх; в) 1 біла, 3 чорних, 1 синя.	*A. а)* $\frac{C_{15}^3 C_5^2}{C_{40}^5}$ *б)* $\frac{C_{20}^5}{C_{40}^5}$ *в)* $\frac{C_{15}^1 C_5^3 C_{20}^1}{C_{40}^5}$ *B. а)* $\frac{C_5^2 C_{20}^3}{C_{40}^5}$ *б)* $\frac{C_{20}^2 C_{15}^3}{C_{40}^5}$ *в)* $\frac{C_5^2 C_{20}^3}{C_{40}^5}$ *C. а)* $\frac{C_{40}^2 C_{15}^3}{C_{40}^5}$ *б)* $\frac{C_{15}^2 C_{20}^3}{C_{40}^5}$ *в)* $\frac{C_{15}^2 C_{15}^3}{C_{40}^5}$
2. *Розв'язати задачу.* На виробництві для сигналізації про аварію встановлено 4 незалежних пристрої. Ймовірність того, що при аварії спрацюють пристрої: $p_1=0{,}9$; $p_2=0{,}95$; $p_3=0{,}94$; $p_4=0{,}79$. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацюють: а) всі пристрої; б) лише 3 пристрої; в) не менше 1-ого.	*A. а) 0,151; б) 0,841; в) 0,912* *B. а) 0,7395; б) 0,3133; в) 0,9999* *C. а) 0,634; б) 2743; в) 0,999*
3. *Розв'язати задачу.* На заводи ЗБК	*A. а) 0,367; б) 0,181*

надходить цемент, що виготовлений на заводах №1, №2, №3. Обсяг цементу для кожного заводу відповідно дорівнює: №1 – 30%; №2 – 20%; №3 – 50%. Надійшло 5 вагонів з заводу № 1, 10 – із заводу №2, 15 – із №3. Навмання взятий вагон, розвантажується. Знайти ймовірність того, що в ньому знаходиться цемент та ймовірність того, що цемент з заводу №2.	*В. а) 0,22; б) 0,3* *С. а) 0,1; б) 0,7*
4. *Розв'язати задачу.* Ймовірність появи події в кожному експерименті дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що в 245 експериментах подія з'явиться: а) рівно 100 разів; б) не менше 50 та не більше 200.	*А. а) 0,0001; б) 0,0474* *В а) 0,005; б) 0,54* *С а) 0,000014; б) 0,9515*
5. З ймовірністю 0,4 стрілець влучив в ціль за один постріл. Знайти закон розподілу випадкової величини X, знайти математичне сподівання MX, дисперсію $ДX$, середньоквадратичне відхилення σX, функцію розподілу $F(x)$, якщо стрілець вистрілив 4 рази. X - число влучень.	*А. а) MX=1,6; б) ДX=0,954; в) $\sigma(X)$=0,976* *В. а) MX= 2,1; б) ДX=4; в) $\sigma(X)$=2* *С а) MX=4,3; б) ДX=0; в) $\sigma(X)$=0*
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases} 0, x \le \frac{-\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\cos x, \frac{-\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}, x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right). \\ 0, x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$ Знайти функцію розподілу $F(x)$, MX, $ДX$, σX та ймовірність того, що в результаті випробувань X набуде значення, що належить інтервалу *(а, в)*.	$A.\ F(x)=\frac{1}{2}\sin x\cos x+1;\ MX=1;\ \sigma(x)=0;$ $DX=0$ $B.\ F(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4};\ MX=1;\ \sigma(x)=\frac{\pi}{2};$ $DX=\frac{\pi^2}{4}$ $C.\ F(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2};\ MX=0;\ \sigma(x)=\frac{\pi^2}{4}-2;$ $DX=\frac{\pi^2}{4}-2$
7. Відомі математичне сподівання *а*, та середньоквадратичне відхилення	*А. а) 0,511; б) 0,1112* *В а) 0,44; б) 0,6826* *С а) 0,4393; б) 0,6826*

σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=2$; $\sigma=4$; $\alpha=-2$; $\beta=3$; $\xi=4$.	
8. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 3,3* *B. 4,2* *C. 5,8*
9. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Знайти оцінку для дисперсії $\overline{D_B}$.	*A. 4,61* *B. 5,82* *C. 6,91*
10. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,95.	*A. (1,6827; 4,9173)* *B. (2,695; 3,784)* *C. (4,895; 5,194)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 23

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* Із партії 30 деталей, серед яких 25 стандартних, вийняли 5 деталей. Знайти ймовірність того, що: а) всі стандартні; б) всі нестандартні; в) одна стандартна, 4 – нестандартні.	*A. а)* $\frac{C_{25}^5}{C_{30}^5}$ *B. а)* $\frac{C_{20}^1}{C_{30}^5}$ *C. а)* $\frac{C_{25}^2 C_5^3}{C_{30}^5}$ *б)* $\frac{C_5^5}{C_{30}^5}$ *б)* $\frac{C_{25}^5}{C_{30}^5}$ *б)* $\frac{C_5^1 C_{25}^1}{C_{30}^5}$ *в)* $\frac{C_{25}^1 C_5^4}{C_{30}^5}$ *в)* $\frac{C_{30}^1 C_{20}^1}{C_{30}^5}$ *в)* $\frac{C_5^5}{C_{30}^5}$
2. *Розв'язати задачу.* На будівництві об'єкта працюють незалежно 6 бульдозерів із ймовірністю роботи 0,8. Знайти ймовірність того, що на будівництві а) працює лише 4 бульдозери; б) не менше 5-ти; в) жоден не працює.	*A. а)* $(0,2)^4(0,8)^2$; *б)* $(0,2)^3(0,8)^3$; *в)* $(0,8)^6$ *B. а)* $C_6^4(0,8)^4(0,2)^2$; *б)* $C_6^5(0,8)^5(0,2)+C_6^6(0,8)^6$; *в)* $(0,2)^6$ *C. а)* $(0,2)^6$; *б)* $C_6^5(0,85)^5(0,2)^2$; *в)* $(0,8)^6$
3. *Розв'язати задачу.* На 3 заводах виготовляються конструкції для будівництва. Процент браку для	*A. а) 0,47; б) 0,35* *B. а) 0,11; б) 0,48* *C. а) 0,91; б) 0,81*

першого заводу – 0,2%; для другого – 0,3%; для третього – 0,5%.На об'єкт доставлено 200 виробів першого заводу; 100 – другого; 30 – третього. Навмання взятий виріб виявився бракованим. Знайти ймовірність того, що: а) бракована конструкція поставлена першим заводом; б) брак поставлено другим заводом.	
4. *Розв'язати задачу.* Ймовірність влучити в ціль для стрільця 0,7. Зроблено 100 пострілів. Знайти ймовірність того, що стрілець влучив в ціль: а) 90 разів; б) не менше 75 разів.	*A. а) 0,112; б) 0,54* *B. а) 0,2; б) 0,97* *C. а) 0,0001; б) 0,861*
5. Гральний кубик кинуто 3 рази; *X* – число появ «шістки». Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, середньоквадратичне відхилення σX, функцію розподілу $F(x)$.	*A. а) MX=0,42; б) ДX=0,3825; в)* $\sigma(X)$ *=0,621* *B. а) MX= 0; б) ДX=9,1; в)* $\sigma(X)$ *=3,05* *C. а) MX=2,3; б) ДX=0; в)* $\sigma(X)$ *=0*
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \frac{1}{2}\sin x, 0<x\le\pi, x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right).\\ 0, x>\pi\end{cases}$ Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX, ДX,* σX та ймовірність того, що в результаті випробувань *X* набуде значення, що належить інтервалу *(а, в).*	*A.* $F(x)=\frac{1}{2}\sin x\cos x-1;\ MX=3;\ \sigma(x)=0;$ $DX=0$ *B.* $F(x)=\frac{1}{2}\sin x+1;\ MX=\frac{\pi^2}{4};\ \sigma(x)=1;\ DX=1$ *C.* $F(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2};\ MX=\frac{\pi}{2};\ \sigma(x)=\frac{\pi}{2};$ $DX=\frac{\pi^2}{4}$
7. Відомі математичне сподівання *а*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де *а=3*; σ *=2*; $\beta=2$; $\xi=5$.	*A. а) 0,975; б) 0,112* *B. а) 0,295; б) 0,9876* *C. а) 0,541; б) 0,627*

8. Показники вологості повітря розподілені нормально. Дослідження дали результати: 0,63; 0,66; 0,65; 0,67; 0,62; 0,61; 0,65; 0,60. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 0,64;* *B. 0,71;* *C. 0,91.*
9. Показники вологості повітря розподілені нормально. Дослідження дали результати: 0,63; 0,66; 0,65; 0,67; 0,62; 0,61; 0,65; 0,60. Знайти оцінку для дисперсії $\overline{D_B}$.	*A. 0,0004* *B. 0,08* *C. 0,071*
10. Показники вологості повітря розподілені нормально. Дослідження дали результати: 0,63; 0,66; 0,65; 0,67; 0,62; 0,61; 0,65; 0,60. Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,95.	*A. (0,624; 0,656)* *B. (0,721; 0,823)* *C. (0,834; 0,981)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 24

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* В бригаді 20 робітників, серед яких 11 дівчат, решта хлопці. На нараду послали 4-х представників від бригади. Знайти ймовірність того, що серед них: а) одні чоловіки; б) одні жінки; в) дві жінки і два чоловіки.	*A. а) 0,02 б) 0,068 в) 0,4* *B. а) 0,01 б) 0,01 в) 0,5* *C. а) 0,03 б) 0,037 в) 0,3*
2. *Розв'язати задачу.* Троє студентів складають іспит. Ймовірність того, що 1-й студент складе іспит дорівнює 0,8; 2-й - 0,7; 3-й - 0,4. Обчислити ймовірність того, що не складуть іспит: а) всі студенти; б) тільки один; в) хоча б один.	*A. а) 0,031; б) 0,321; в) 0,031* *B. а) 0,036; б) 0,05; в) 0,25* *C. а) 0,037; б) 0,488; в) 0,776*
3. *Розв'язати задачу.* На складі в трьох ящиках знаходяться деталі для ремонту автомобілів. Відомо, що в першому ящику 50 деталей, з яких 6 бракованих, у другому - 30 деталей, з яких 5 бракованих, у третьому - 40	*A. а) 0,320; б) 0,03;* *B. а) 0,401; б) 0,2;* *C. а) 0,1409; б) 0,294.*

деталей, з яких 6 бракованих. Майстер навмання вибирає деталь з будь-якого ящика. Знайти ймовірність того, що взята деталь бракована, й того, що майстер взяв її з другого ящика.	
4. *Розв'язати задачу.* Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 народжених: а) рівно 50 хлопчиків; б) не менше 30 і не більше 70.	*A. а) 0,95; б) 0,002* *B. а) 0,002; б) 0,102* *C. а) 0,079; б) 0,102*
5. В білеті 4 запитання. З ймовірністю 0,4 студент правильно відповідає на кожне з них. *X* – число правильних відповідей студента. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, середньоквадратичне відхилення σX .	*A. а) MX=1,6; б) ДX=0,96;* *в)* $\sigma(X)=0{,}97$ *B. а) MX= 1,6; б) ДX=2,1;* *в)* $\sigma(X)=1{,}7$ *C. а) MX=1,4; б) ДX=2,3;* *в)* $\sigma(X)=1{,}9$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}5e^{-5e}, x\ge 0\\ 0\ при\ x<0\end{cases}$ $x\in(0;2)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX, ДX* та ймовірність того, що в результаті випробувань *X* набуде значення, що належить інтервалу *(a, в)*.	*A.* $F(x)=-e^{-5x}$; $MX=0{,}1$; $DX=0{,}0283$ *B.* $F(x)=e^{-5x}$; $MX=0{,}4$; $DX=0{,}002$ *C.* $F(x)=5e^{-5x}$; $MX=0{,}3$; $DX=0{,}0784$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально, обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\|X-a\|<\xi$, де *a=5;* $\sigma=4$; $\alpha=0$; $\beta=6$; $\xi=9$.	*A. а) 0,317; б) 0,323* *B. а) 0,254; б) 0,975* *C. а) 0,4931; б) 0,975*
8. Показники насиченості повітря отруйними парами підкорюються нормальному закону. Дослідження дали наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11.	*A. 0,21;* *B. 0,11;* *C. 1,2.*

Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	
9. Показники насиченості повітря отруйними парами підкорюються нормальному закону. Дослідження дали наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{D_B}$.	*А. 0,98* *В. 0,098* *С. 0,2*
10. Показники насиченості повітря отруйними парами підкорюються нормальному закону. Дослідження дали наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання.	*А. (0,0945; 0,314)* *В. (0,1; 0,5)* *С. (0,17; 1)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 25

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* В цеху працюють 6 чоловіків і 4 жінки. За табельними номерами вибирають семеро чоловік. Знайти ймовірність того, що серед вибраних:а) три жінки;б) 5 чоловіків і 2 жінки;в) три чоловіки.	*А. а)* $\frac{1}{4}$ *В. а)* $\frac{1}{2}$ *С. а)* $\frac{1}{5}$ *б) 0,4* *б) 0,3* *б) 0,3* *в)* $\frac{1}{6}$ *в)* $\frac{1}{6}$ *в)* $-\frac{1}{6}$
2. *Розв'язати задачу.* Троє студентів складають іспит. Ймовірність того, що 1-й студент складе іспит дорівнює 0,8; 2-й - 0,7; 3-й - 0,4. Обчислити ймовірність того, що не складуть іспит:а) всі студенти;б)тільки один;в)хоча б один.	*А. а) 0,99; б) 0,17; в) 0,23* *В. а) 0,036; б) 0,488; в) 0,776* *С. а) 0,915; б) 0,23; в) 0,012*
3. *Розв'язати задачу.* На будівництво надходять однакові деталі, виготовлені на 3-х заводах, з продуктивністю заводів 1:2:4. Ймовірність браку на 1-му заводі дорівнює 0,3, 2-му – 0,6, 3-му – 0,1. Взята навмання деталь – бракована. Знайти ймовірність того, що вона	*А. 0,3* *В. 0,210* *С. 0,63*

виконана на 3-му заводі.	
4. *Розв'язати задачу.* З ймовірністю 0,7 продається кожна партія деякого товару. На аукціон виставлено 700 партій. Знайти ймовірність того, що буде продано: а) 300 партій; б) не менше 500 партій.	*A. а) 0,35; б) 0,2061* *B. а) 0,007; б) 0,415* *C. а) 0,000008; б) 0,7938*
5. Ймовірність виграти по 1 лотерейному білету дорівнює 0,02. X – число виграних білетів для володаря чотирьох білетів. Знайти закон розподілу випадкової величини X, знайти математичне сподівання MX, дисперсію $ДX$, середньоквадратичне відхилення σX .	*A.а)MX=0,08;б)ДX=0,4728; в)* $\sigma(X)=0,68$ *B.а)MX= 0,04; б) ДX=0,0276; в)* $\sigma(X)=0,12$ *C.а) MX=0,216; б) ДX=0,15; в)* $\sigma(X)=1,3$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases} 0 \; при \; x<1 \\ \frac{1}{4}x \; при \; 1 \le x \le 3 \\ 0 \; при \; x>3 \end{cases}$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, *MX, ДX.*	*A.* $M(x)=0.5$; $DX=3{,}5; \sigma X=2{,}296$ *B.* $M(x)=1$; $DX=4{,}06; \sigma X=2{,}015$ *C.* $M(x)=2{,}16$; $DX=0{,}33; \sigma X=0{,}57$
7. Відомі математичне сподівання a, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально, обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\|X-a\|<\xi$, де $a=5; \sigma=4$; $\alpha=0; \beta=6$; $\xi=9$.	*A. а) 0,4235; б) 0,83* *B. а) 0,207; б) 0,764* *C. а) 0,4931; б) 0,975*
8. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 23; 29; 25; 26; 27; 29; 30; 24; 25; 26; 25. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 27;* *B. 26,2;* *C. 15.*
9. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 23; 29; 25; 26; 27; 29; 30; 24; 25; 26;	*A. 0,12* *B. 1015* *C. 4099*

25. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{D_B}$.	
10. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 23; 29; 25; 26; 27; 29; 30; 24; 25; 26; 25. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання.	*A. (0; 3120)* *B. (2; 4)* *C. (-348,76; 3540,16)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 26

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. *Розв'язати задачу.* В ящику 25 деталей, серед яких 10 кольорові. Навмання витягують 5 деталей. Знайти ймовірність того, що серед взятих деталей: а) всі кольорові; б) всі не кольорові; в) 2 кольорові та 3 не кольорові.	*A. а) 0,005; B. а) 0,003; C. а) 0,012* *б) 0,057; б) 0,017; б) 0,0019* *в) 0,38; в) 0,15; в) 0,38*
2. *Розв'язати задачу.* Ймовірність непопадання в ціль для 1-го стрільця дорівнює 0,2; для 2-го – 0,1; для 3-го – 0,3. Обчислити ймовірність попадання в ціль: а) хоча б одного; б) двох; в) всіх.	*A. а) 0,994; б) 0,398; в) 0,504* *B. а) 0,305; б) 0,27; в) 0,45* *C. а) 0,804; б) 0,672; в) 0,903*
3. *Розв'язати задачу.* Для 10 студентів 1-ї групи ймовірність скласти іспит дорівнює 0,9, для 12 (2-га група) – 0,6, для 15 (3-тя група) – 0,8. Навмання викликаний студент склав іспит. Знайти ймовірність того, що студент, що склав іспит, належить до 2-ї групи.	*A. 0,3* *B. 1,24* *C. 0,25*
4. *Розв'язати задачу.* Ймовірність появи події в кожному із 900 незалежних експериментів дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а) рівно 450 разів; б) не менше 50 та не більше 350.	*A. а) 0,16; б) 0,33* *B. а) 0,121; б) 0,5* *C. а) 0,026; б) 0*
5. Зроблено чотири постріли в ціль. Ймовірність попадання при одному	*A. а) МХ=2,9; б) ДХ=0,73; в)* $\sigma(X)$*=0,117* *B. а) МХ= 2,4; б) ДХ=0,64; в)* $\sigma(X)$*=0,805*

пострілі 0,6. X – число попадань. Знайти закон розподілу випадкової величини X, знайти математичне сподівання MX, дисперсію $ДX$, середньоквадратичне відхилення σX .	*С. а) MX=2,4; б) ДХ=0,96; в)* $\sigma(X)=0{,}979$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-4\\ \frac{1}{8}(x+4) \text{ при } -4\le x\le 0\\ 0 \text{ при } x>0\end{cases}$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, MX, $ДX$.	А. $F(x)=\frac{x^2}{4}+x$; $MX=0{,}3$; $DX=\frac{23}{5}$ В. $F(x)=\frac{x^2}{8}-\frac{1}{2}x$; $MX=-\frac{8}{9}$; $DX=\frac{17}{9}$ С. $F(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{1}{2}x$; $MX=-\frac{4}{3}$; $DX=\frac{8}{9}$
7. Відомі математичне сподівання a, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=8$; $\sigma=10$; $\alpha=0$; $\beta=20$; $\xi=16$.	*А. а) 0,904; б) 0,63* *В. а) 0,673; б) 0,8904* *С. а) 0,215; б) 0,18*
8. Показники насиченості повітря отруйними парами підпорядковуються нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*А. 0,11;* *В. 0,13;* *С. 0,21.*
9. Показники насиченості повітря отруйними парами підпорядковуються нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{D_B}$.	*А. 0,0013* *В. 0,098* *С. 0,2*

10. Показники насиченості повітря отруйними парами підпорядковуються нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 0,10; 0,12; 0,11; 0,13; 0,12; 0,11; 0,09; 0,10; 0,11. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання.	*A. (0,109; 0,1100914)* *B. (0,3; 0,8)* *C. (0,12; 0,15)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 27

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. Розв'язати задача. В ящику 10 яблук – 1-го сорту, 20 – 2-го і 30 – 3-го. Навмання вибирають 10 яблук. Знайти ймовірність того, що серед вибраних: а) всі третього сорту; б) 2 – 1-го і 8 – 2-го; в) 5 – 1-го 2 – 2-го і 3-го.	*А.* а) $\frac{C_{30}^{10}}{C_{60}^{10}}$; б) $\frac{C_{10}^{2}C_{20}^{8}}{C_{60}^{10}}$; в) $\frac{C_{10}^{5}C_{10}^{2}C_{30}^{3}}{C_{60}^{10}}$; *Б.* а) $\frac{C_{20}^{5}}{C_{60}^{10}}$; б) $\frac{C_{10}^{1}C_{30}^{2}C_{5}^{3}}{C_{60}^{10}}$; в) $\frac{C_{30}^{2}C_{15}^{2}C_{5}^{2}}{C_{60}^{10}}$.
2. Розв'язати задача. Ймовірність того, що радіоприймач бракований – 0,99. На перевірку взято 10 приймачів. Знайти ймовірність того, що серед них: а) хоча б три браковані; б) жоден не бракований; в) всі браковані.	*A. а) 0,1819; б) 0,4118; в) $(0,1)^9$* *B. а) 0,1719; б) 0,398; в) $(0,09)^{10}$* *C. а) 0,1415; б) 0,4119; в) $(0,1)^8 0,9$*
3. Розв'язати задача. На біржу поступили чотири партії товару. В першій 100 одиниць товару, у ІІ-й – 300; у ІІІ-й – 50 та у VІ-й – 500. З ймовірністю 06; 0,5; 0,3 та 0,4 відповідно вони можуть бути продані в перший день торгу. Знайти ймовірність того, І-а партія не буде продана у перший день торгу.	*A. 0,076* *B. 0,18* *C. 0,41*
4. Розв'язати задача. Ймовірність появи події А в кожному із 1000 експериментів дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що подія не	*A. а) 0,0106; б) 0,065* *B. а) 0,216; б) 0,112* *C. а) 0,318; б) 0,918*

з'явиться: а) рівно 900 разів; б) н менше 500 разів.	
5. Знайти 3 ймовірністю 0,3 рибак може спіймати на одного черв'яка одну рибину. Насаджено чотири черв'яка. Х – число спійманих рибин. Знайти закон розподілу випадкової величини X, знайти математичне сподівання MX, дисперсію $ДХ$, $F(X)$.	*А. а) МХ=1,2; б) ДХ=0,84;* *в)* $F(X)=\begin{cases}0, x<0\\ 0.2401, 0\le x\le 1\end{cases}$ *В. а) МХ= 0,8; б) ДХ=1,4;* *в)* $F(X)=\begin{cases}0, x<0\\ 0.6517, 1\le x<2\end{cases}$ *С. а) МХ=1,9; б) ДХ=2,7; в)* $F(X)=\begin{cases}0, x<0\\ 0.9163; 2\le x<3\end{cases}$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<1\\ x-\frac{1}{2} \text{ при } 1\le x\le 2\\ 0 \text{ при } x>2\end{cases}.$$ Знайти MX, $ДХ$.	А. $MX=1;\ DX=0{,}14$ В. $MX=0{,}5;\ DX=2{,}1$ С. $MX=1{,}5;\ DX=1{,}7$
7. Відомі математичне сподівання a, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)Х*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=4;\sigma=1;\ \alpha=-3;\ \beta=4;\ \xi=6$.	*А. а) 0,1517; б) 0,217* *В. а) 0,0866; б) 0,135* *С. а) 0,1213; б) 0,1719*
8. Показники вогнестійкості обладнання розподілення нормально. Дослідження дали результати: 57; 58; 59; 60; 59; 58; 56; 59; 60; 61. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*А. 58,45;* *В. 61,14;* *С. 48,19.*
9. Показники вогнестійкості обладнання розподілення нормально. Дослідження дали результати: 57; 58; 59; 60; 59; 58; 56; 59; 60; 61. Знайти оцінку для дисперсії $\overline{D_B}$.	*А. 2,43* *В. 4,12* *С. 3,17*

10. Показники вогнестійкості обладнання розподілення нормально. Дослідження дали результати: 57; 58; 59; 60; 59; 58; 56; 59; 60; 61. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,95.	*A. (56,89; 60,01)* *B. (71,4; 73,21)* *C. (61,15; 62,3)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 28

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. Розв'язати задача. В колоді 36 карт. Навмання витягнуто три карти. Знайти ймовірність того, що серед них будуть: а) дама, валет, король; б) дві десятки ті сімка; в) всі тузи.	*А. а)* $\frac{C_4^1C_4^1C_4^1}{C_{36}^3}$; *б)* $\frac{C_4^2C_4^1}{C_{36}^3}$; *в)* $\frac{C_4^3}{C_{36}^3}$; *Б. а)* $\frac{C_4^1C_4^2}{C_{36}^3}$; *б)* $\frac{C_{36}^2C_4^1}{C_{36}^3}$; *в)* $\frac{C_{18}^1C_{18}^2}{C_{36}^3}$.
2. Розв'язати задача. У цеху чотири верстата. Ймовірність відмови 1-го верстата дорівнює 0,3; 2-го – 0,4; 3-го – 0,6; 4-го – 0,1. Знайти ймовірність роботи: а) хоча б одного верстата; б) двох верстатів; в) всіх верстатів.	*A. а) 0,8488; б) 0,4144; в) 0,072* *B. а) 0,918; б) 0,5114; в) 0,09* *C. а) 0,851; б) 0,5114; в) 0,01*
3. Розв'язати задача. У піраміді 10 гвинтівок, з яких 4 з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу – 0,8. Стрілок вразив ціль. Що ймовірніше: стрілок влучив з гвинтівки з оптичним прицілом чи ні?	*A.* $\frac{19}{43}<\frac{24}{43}$ *B.* $\frac{18}{41}>\frac{17}{41}$ *C.* $\frac{21}{32}<\frac{25}{32}$
4. Розв'язати задача. В страховій компанії застраховано 1000 автомобілів. Ймовірність поломки довільного автомобіля 0,006. Кожний володар сплачує в рік 450 грн., а страхова компанія виплачує в результаті аварії 1000 грн. Знайти ймовірність подій: А= *{за рік страхова компанія не отримає прибутку}* В= *{прибуток компанії не менше 8000 гривень}*	*A. а) 0,718; б) 0,834* *B. а) 0,083; б) 0,9713* *C. а) 0,693; б) 0,534*

5. В партії з 6 деталей 4 стандартних. Навмання взято 3 деталі. X – число стандартних серед вибраних. Знайти закон розподілу випадкової величини *X*, знайти математичне сподівання *MX*, дисперсію *ДX*, $F(X)$.	*A. а) MX=2; б) ДX=0,4;* *в)* $\sigma(X)=0{,}63$ *B. а) MX= 4; б) ДX=1;* *в)* $\sigma(X)=1$ *C. а) MX=5; б) ДX=0,01; в)* $\sigma(X)=0{,}1$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}0\ при\ x<-4\\ \frac{2}{9}(x+4)\ при\ -4\le x\le -1\\ 0\ при\ x>-1\end{cases}.$ Знайти *MX, ДX* .	*A.* $MX=6{,}1;\ DX=0{,}83$ *B.* $MX=5{,}1;\ DX=9{,}1$ *C.* $MX=13{,}83;\ DX=0{,}111$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=10;\sigma=6;\ \alpha=3;\ \beta=4;\ \xi=11$.	*A. а) 0,036; б) 0,932* *B. а) 0,114; б) 0,814* *C. а) 0,171; б) 0,784*
8. Показники вологості повітря розподілення нормально. Дослідження дали результати: 0,83; 0,85; 0,7; 0,75; 0,8; 0,79; 0,81; 0,88. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 0,8013;* *B. 0,9117;* *C. 0,7113.*
9. Показники вологості повітря розподілення нормально. Дослідження дали результати: 0,83; 0,85; 0,7; 0,75; 0,8; 0,79; 0,81; 0,88. Знайти оцінку для дисперсії $\overline{D_B}$.	*A. 0,00281* *B. 0,482* *C. 0,0372*
10. Показники вологості повітря розподілення нормально. Дослідження дали результати: 0,83; 0,85; 0,7; 0,75; 0,8; 0,79; 0,81; 0,88. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,99.	*A. (0,731; 0,871)* *B. (0,432; 0,584)* *C. (0,931; 0,999)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 29

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. В групі 30 студентів, серед яких 10 відмінників, 5 відстаючих, а інші встигаючі. По списку відібрали 5 студентів. Знайти ймовірність того, що серед них будуть: а) всі відмінники; б) один відмінник та 4 відстаючих; в) один відмінник, 2 відстаючих та 2 встигаючих.	*А. а) 0,0017 б) 0,0004 в) 0,074* *В. а) 0,3 б) 0,14 в) 3* *С. а) 1 б)0,2 в) 4,1*
2. Троє студентів складають іспит. Ймовірність того, що 1-й студент не складе іспит дорівнює 0,1, для 2-го – 0,2, 3-го – 0,3. Обчислити ймовірність того, що студенти складуть іспит: а) всі студенти; б) двоє студентів; в) хоча б один студент.	*А. а) 1; б) 2; в) 3* *Б. а) 0,504; б) 0,398; в) 0,994* *В. а) 0,1; б) 0,12; в) 0,3*
3. В групі з 25 чоловік, що прийшли складати іспит з теорії ймовірностей 10 відмінників, 7 – підготовлених добре, 5 задовільно та 3 – погано підготовлених студенти. Відмінники знають всі 25 питань програми, добре підготовлені – 20, задовільно підготовлені – 15, погано підготовлені 10. Викликаний навмання студент відповів на два запитання. Знайти ймовірність події: - студент підготовлений на відмінно або добре; - студент підготовлений погано.	*А. а) 0,624; б) 0,048* *В. а) 0,1; б) 3,1* *С. а) 1; б) 4*
4. Подія в кожному із 200 експериментів з'являється з постійною ймовірністю 0,4. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а) 75 разів; б) не менше 30 і не більше 170 разів.	*А. а) 0,044; б) 0,998* *В. а) 0,12; б) 1,3*
5. На прилавках магазина виставлено для продажу п'ять тортів «Космос» та чотири – «Київський». Х – число проданих в даний момент	*А. а) МХ=2; б) ДХ=0,12; в)* $\sigma(X)=0{,}3$ *В. а) МХ= 1,78; б) ДХ=0,978; в)* $\sigma(X)=0{,}99$

«Київських» тортів. Знайти MX, ДX, $\sigma(X)$.	
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}0\ при\ x<0\\ 4e^{-4e}\ \ x\ge 0\end{cases}\quad x\in(1;3).$ Знайти *MX, ДX*.	*A.* $MX=\dfrac{1}{4};\ DX=\dfrac{1}{16}$ *B.* $MX=0{,}2;\ DX=4$
7. Відомі математичне сподівання *a*, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)X*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де $a=6; \sigma=5;\ \alpha=1;\ \beta=6;\ \xi=10$.	*A. а) 0,341 б) 0,96* *B. а) 0,13 б) 1,2*
8. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 3,3* *B. 2,1* *C. 3,0*
9. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{D_B}$.	*A. 0,63* *B. 1,2* *C. 0,9*
10. Показники домішок у бетоні розподілені нормально. Дослідження дали результати: 1, 3, 5, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 1. Оцінити для математичного сподівання з надійністю 0,95.	*A. (-0,11; 0,77)* *B. (0; 0,2)* *C. (-3; -5)*

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ № 30

ПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1. Серед кандидатів на студентську конференцію: 6 – першокурсників, 5 – другокурсників та 10 – чотирикурсників. За списками навмання вибрали чотирьох. Знайти ймовірність серед вибраних: а) всі студенти 2-го курсу, б) 2 студенти 1-го курсу та 2 чотирикурсника, в) всі	*A. а) 0,2 B. а) 0,0008* *б) 0,13 б) 0,11* *в) 0,4 в) 0,003*

студенти першого курсу.	
2. Ймовірність того, що стрілок може влучити в мішень при одному пострілі, дорівнює 0,7. Стрілок вистрілив чотири рази. Знайти ймовірність того, що із чотирьох разів він влучив: а) один раз; б) хоча б один раз; в) не влучив жодного разу.	*А. а)0,0756; б) 0,0081; в) 0,9919* *В. а) 0,12; б) 0,09; в) 1,3*
3. В спортивних змаганнях беруть участь 4 команди. Склад їх відповідно 10, 15, 12, 13 – спортсменів. Перемогти в іграх вони можуть з ймовірністю 0,4; 0,6; 0,7; 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що у турнірі перемогла І команда.	*А. 0,21* *В. 0,12* *С. 0,13*
4. З ймовірністю 0,9 автомат видає порцію кави. Купують за день 100 покупців. Знайти ймовірність того, що кількість людей, що випили каву: а) 90 чоловік; б) не менше 80.	*А. а)0,132; б) 0,9986; в) 0,9919* *В. а) 0,14; б) 2,1; в) 1,3*
5. З ймовірністю 0,3 кожен студент з навмання вибраних чотирьох має борг з деякою предмету. Х – число боржників серед вибраних. Знайти МХ, ДХ, $\sigma(X)$.	*А.а) МХ=0,7866;б) ДХ=1,6544;в)* $\sigma(X)=1{,}286$ *В. а) МХ= 1; б) ДХ=2,3; в)* $\sigma(X)=1{,}7$
6. Випадкова величина задана щільністю $f(x)$: $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<-3 \\ \frac{2}{9}(x+3) \text{ при } -3\le x\ge 0 \end{cases}$ Знайти *МХ, ДХ*.	А. $MX=-1;\ DX=\frac{1}{2}$ В. $MX=0{,}2;\ DX=4$
7. Відомі математичне сподівання a, та середньоквадратичне відхилення σ випадкової величини *(в.в)Х*, що розподілена нормально обчислити ймовірність того, що: а) *в.в* – прийме значення з (α,β); б) абсолютна величина відхилення $\lvert X-a\rvert<\xi$, де	*А. а) 0,3413 б) 0,12* *В. а) 0,3413 б) 0,8664*

$a=2; \sigma=4; \alpha=-2; \beta=6; \xi=6$.	
8. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 61; 62; 59; 60; 59; 63; 61; 62; 58; 60; 64. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{x_B}$.	*A. 20,03;* *B. 60,8;* *C. 15,7.*
9. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 61; 62; 59; 60; 59; 63; 61; 62; 58; 60; 64. Знайти оцінку для математичного сподівання $\overline{D_B}$.	*A. 1,7* *B. 2,1* *C. 3,5*
10. Довжина деталі підкорюється нормальному закону. При вимірі були отримані наступні результати: 61; 62; 59; 60; 59; 63; 61; 62; 58; 60; 64. Оцінити довірчий інтервал для математичного сподівання.	*A. (62; 17)* *B. (0,3; 5)* *C. (59,17; 62,4)*

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Вентцель, Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., испр. − М. : Академия, 2003.
2. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. − М. : Высш. шк., 2007. – 479 с.
3. Волощенко, А. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посібник / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладов. – К. : КНЕУ, 2005. – 256 с.
4. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 4-е изд., стер. − М. : Высш. шк., 1998. – 400 с.
5. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 6-е изд., стер. − М. : Высш. шк., 1998. – 479 с.
6. Жлуктенко, В. І. Стохастичні моделі в економіці: монографія / В.І.Жлуктенко, А. В.Бєгун. – К. : КНЕУ, 2005. – 352 с.
7. Жлуктенко, В. І. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології: навч. посіб. / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С.С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2002. – 226 с.

Додаткова

8. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посіб. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2005. – 351 с.
9. Максимов О. В. Елементи теорії масового обслуговування : навча- льний посібник / О. В. Максимов, М. О. Рашевський. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2004. – 147 с.
10. Сеньо П. С. Випадкові процеси : підручник / С. П. Сеньо ; Мін-во освіти і науки України, ЛНУ. – Львів : Компакт-ЛВ, 2006. – 288 с.
11. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник / С. П. Сеньо ; Мін-во освіти і науки України, ЛНУ. – К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 448 с.
12. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе : учеб. пособие для вузов / С. И. Шелобаев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 367 с.