МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Чернігівський національний технологічний університет

АЛГОРИТМИ ТА МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з дисципліни

“ Алгоритми та методи обчислень ”
для студентів спеціальності
123 - "Комп'ютерна інженерія"

Частина 1

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри
інформаційних та комп'ютерних систем
Протокол № 7 від 28.02.2018 р

Чернігів 2018

Алгоритми і методи обчислень. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни “Алгоритми і методи обчислень” для студентів спеціальності 123 “Комп'ютерна інженерія”.Частина 1 / Укл. доц. В.А. Бичко, – Чернігів: ЧДТУ, 2018. – 24 с. Укр. мовою.

Укладач:	Бичко В.А., кандидат фізико-математичних наук, доцент
Відповідальний за випуск:	Зайцев С.В., завідувач кафедри інформаційних та комп'ютерних систем, доктор технічних наук.
Рецензент:	Пріла О.А., кандидат технічних наук, доцент

Зміст

ВСТУП

Дисципліна "Алгоритми та методи обчислень" відноситься до розряду обов'язкових дисциплін професійно-орієнтованого напряму "Комп'ютерна інженерія".

Необхідною передумовою для освоєння даної дисципліни є знання студентами таких навчальних курсів, як "Вища математика", "Програмування" та "Дискретна математика".

Вивчення дисципліни сприяє глибшому розумінню інженерних задач в області оптимізації процесів і освоєння сучасних методів їх вирішення.

1 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Мета роботи: отримати первинні навички автоматизації чисельного інтегрування

1.1 Теоретичні відомості

В інженерних розрахунках часто приходиться обчислювати визначений інтеграл чисельними методами. Це буває у тих випадках, коли або не вдається виразити інтеграл у замкненій формі, або вона настільки складна, що простіше скористатися чисельним інтегруванням. Чисельне інтегрування являє собою стійкий процес і в протиставлення чисельному розв'язанню диференційних рівнянь зменшує дію похибок у початкових даних на кінцевий результат.

1.1.1 Метод прямокутників

Найпростіший метод наближеного обчислення інтеграла на ЕОМ є метод прямокутників, суть якого зводиться до знаходження визначеного інтегралу як суми площ *N* прямокутників (з висотою *f(x)* та основою $h = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$), отриманих шляхом розбиття відрізка інтегрування *[a, b]* на *N* рівних частин. В цьому випадку розділити на прямокутники можна або зліва на право (рис.1.1,*а*),

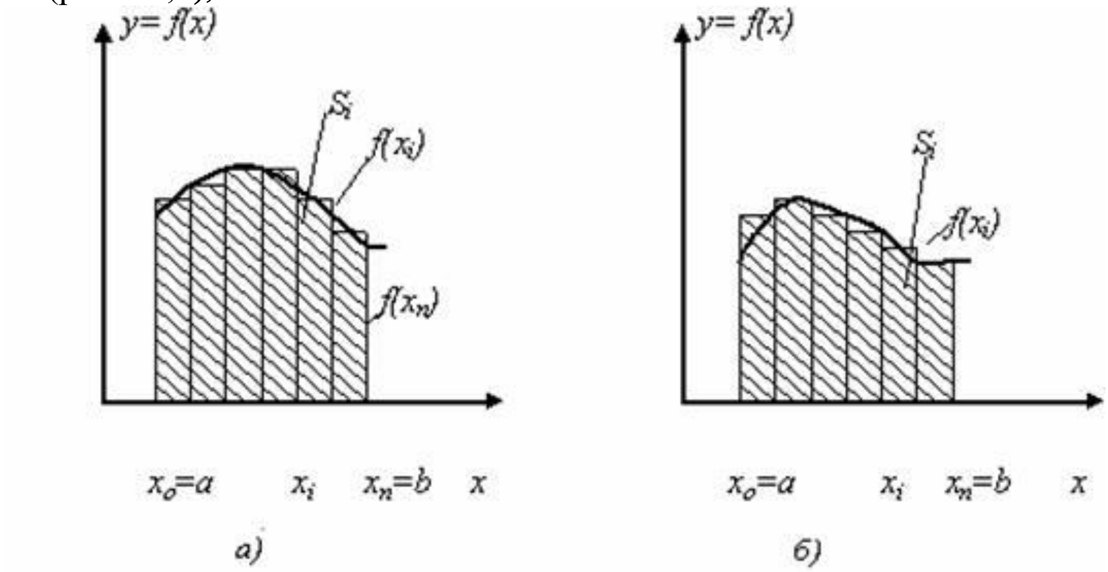


Рисунок 1.1 – Геометрична інтерпретація методу прямокутників

тоді отримаємо *формулу лівих прямокутників (1.1а)*,

$$I_{np} = \int_a^b f(x)dx \approx h \cdot [\, f(x_n) + f(x_{n-1}) + \ldots + f(x_1)] = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) \quad (1.1а)$$

або справа наліво (рис.1.1,б), тоді отримаємо *формулу правих прямокутників (1.1)*:

$$I_l = \int_a^b f(x)dx \approx h \cdot [f(x_n) + f(x_{n-1}) + \ldots + f(x_1)] = \frac{b-a}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \quad (1.1б)$$

Схема алгоритму обчислення визначеного інтегралу методом прямокутників показана на рис.1,2

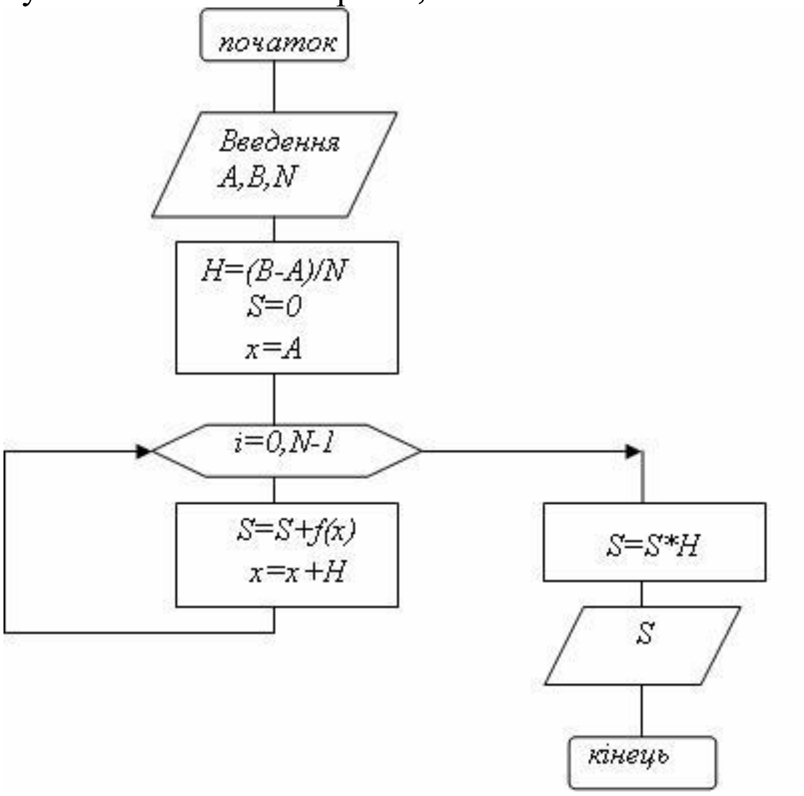


Рисунок 1.2 – Схема алгоритму обчислення визначеного інтегралу методом прямокутників

1.1.2 Наближене обчислення інтеграла за формулою Сімпсона

Спосіб наближеного обчислення визначеного інтегралу за формулою Сімпсона оснований на тому, що на відрізку $[x_0; x_0+2h]$ дугу кривої $y=f(x)$ замінюють дугою квадратичної параболи, яка проходить через точки $A(x_0; f(x_0)), B(x_0+h; f(x_0+h)), C(x_0+2h; f(x_0+2h))$ (див. Рис. 1.2.), тобто відбувається квадратне інтерполювання функції $y=f(x)$.

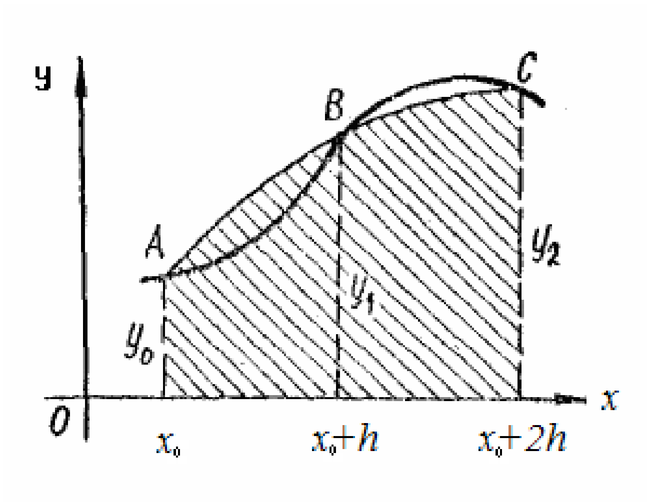


Рисунок 1.3 – Геометрична інтерпретація методу Сімсона

Тоді за наближене значення площі криволінійної трапеції приймають площу параболічної трапеції, з тією ж основою $[x_0;\ x_0+2h]$ і обмежена зверху дугою параболи. Для того, щоб скласти рівняння цієї параболи, скористаємося першою інтерполяційною формулою Ньютона. Складемо многочлен другого ступеня по вузлах інтерполяції: x_0, $x_1=x_0+h$, $x_2 = x_0+2h$. Отримаємо, $P_2(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)$

Перепишемо цей вираз.

Так, як $x_1=x_0+h$,то $(x-x_0)(x-x_1)=(x-x_0)((x-x_0)-h)=(x-x_0)^2-(x-x_0)h$ і $P_2(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}((x-x_0)^2-(x-x_0)h)$.

Площа параболічної трапеції

$$S_{тр}=\int_{x_0}^{x_0+2h}P_2(x)dx=\int_{x_0}^{x_0+2h}(y_0+\frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)^2-(x-x_0)h))dx=$$

$$=(y_0x+\frac{\Delta y_0}{h}\frac{(x-x_0)^2}{2}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(\frac{(x-x_0)^3}{3}-\frac{(x-x_0)^2}{2}h)\Big|_{x_0}^{x_0+2h}=$$

$$=2hy_0+2h\Delta y_0+\frac{h}{3}\Delta^2 y_0=\frac{h}{3}(6y_0+6(y_1-y_0)+(y_2-2y_1+y_0))=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$

Якщо ввести позначення $y_0=y_п$ - ордината початку відрізка, $y_2=y_к$ ордината кінця відрізка і $y_1=y_{ср}$ - ордината середини відрізка, то отримана формула матиме вигляд

$$S_{тр}=\frac{h}{3}(y_п+4y_{ср}+y_к), \qquad (1,2)$$

де $x_к-x_п=2h$

Розділимо тепер відрізок $[a;b]$ на n рівних частин, причому вважаємо, що n- число парне, тобто $n=2m$, тоді $h=\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{2m}$.

Нехай $x_0 = a,\ x_1,\ \dots,\ x_n = b$ – точки поділу. Визначимо ординати в цих точках $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \dots,\ y_n = f(x_n)$.

З'єднаємо кінці кожних трьох сусідніх ординат дугами парабол, тобто замінимо на відрізках $[x_0;x_2]$, $[x_2;\ x_4]$, …, $[x_{n-2};x_n]$ криву дугами парабол. Застосуємо до кожного з цих відрізків формулу (1). Тоді

$$S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n), \quad (1,3)$$

або, звівши подібні члени, отримаємо

$$S_n = \frac{h}{3}((y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2m} + 4\sum_{\kappa=1}^{m} y_{2\kappa-1} + 2\sum_{\kappa=1}^{m-1} y_{2\kappa}\right) \quad (n = 2m),$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k})\right) \quad (1,4)$$

Формула (1.4) називається *параболічною формулою* або *формулою Сімпсона*. Обчислення $\int_a^b f(x)dx$ за формулою (3) реалізується наступним алгоритмом.

1.1.3 Алгоритм

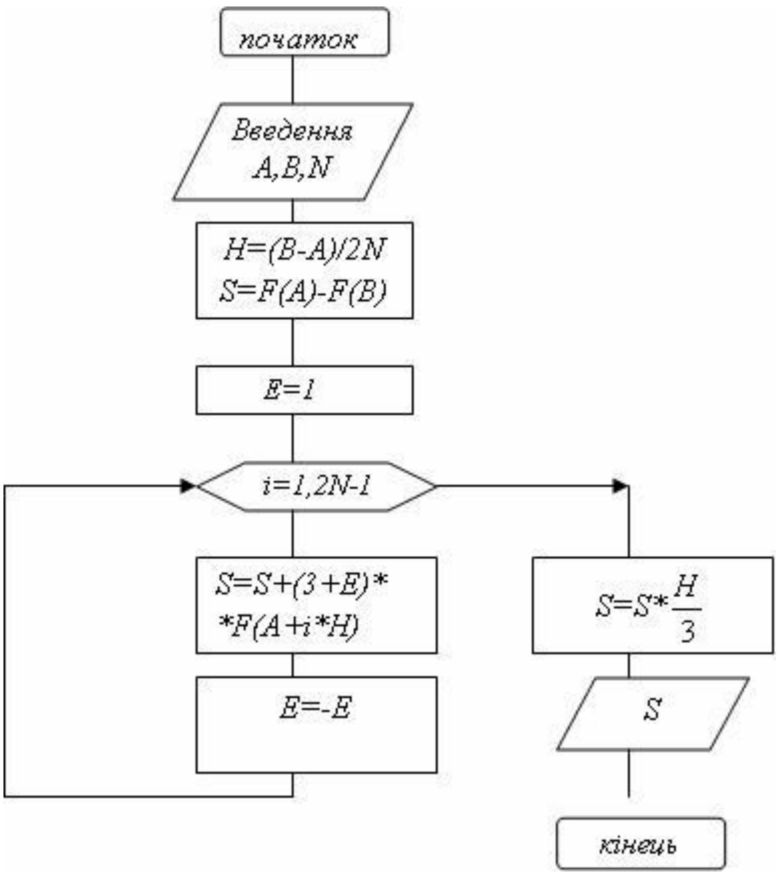


Рисунок 1.3 – Схема алгоритму метода Сімпсона

Нехай відомі функція $y=f(x)$ і відрізок інтегрування $[a;b]$.

1. Вибираємо число $n=2m$. Обчислюємо крок $h = \frac{b-a}{n}$ і точки поділу відрізка $[a;b]$: $x_0 = a, x_1 = x_0 + h, \ldots , x_n = x_0 + n\,h = b$

2. Обчислюємо значення функції $y=f(x)$ в точках поділу: $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \ldots,\ y_n = f(x_n)$.

3. Визначаємо суми: $v_0 = f(x_0) + f(x_n) = f(a) + f(b)$,

$v_1 = f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2\kappa-1}) + \ldots + f(x_{n-1}) = \sum_{\kappa=1}^{m} f(x_{2\kappa-1})$ (значення функції в точках з непарними номерами)

$v_2 = f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2\kappa}) + \ldots + f(x_{n-2}) = \sum_{\kappa=1}^{m-1} f(x_{2\kappa})$ (значення функції в точках з парними номерами).

4. Обчислюємо $S_n = \frac{h}{3}(v_0 + 4v_1 + 2v_2)$

Тоді $\int_a^b f(x)dx \approx S_n$ (дивитись формулу (1,4)).

1.1.4 Оцінка похибки формули

Формула Сімпсона (1.4) дає високу точність. Оцінка абсолютної похибки формули Сімпсона

$$\Delta_{пар} = \frac{(b-a)^5 M_4}{180n^4} = \frac{h^4 M_4}{180}(b-a), \tag{1.5}$$

де $M_4 = \max_{a\le x\le b}\left|f^{IV}(x)\right|$, $f(x)$-підінтегральна функція, $[a;b]$- відрізок інтегрування, h – крок інтегрування.

Але користуватись формулою (1.5) незручно, так як необхідно оцінювати четверту похідну, яку не завжди легко знайти, існує більш простий метод.

З формули (4) видно, що $\Delta_{пар}$ має такий же малий порядок, як і h_4 (або $\frac{1}{h^4}$), і при збільшенні кроку h вдвічі похибка збільшується в 16 разів: $\Delta_{2h} = 16\Delta_h$. Тому якщо $S(h)$,$S(2h)$- наближенні значення визначеного інтеграла, обчислені з кроками h, $2h$, то $|S(h) - S(2h)| \le 15\Delta_h$, і при співпадінні в числах $S(h)$, $S(2h)$ k-десяткових знаків буде $15\Delta_h < 10^{-\kappa}$ або $\Delta_h < 0{,}7*10^{-(\kappa+1)}$, тобто в $S(h)$ буде правильних $k+1$ десяткових знаків.

На практиці для оцінки отриманого наближення $S(h)$ можна повторити обчислення за формулою (1,4), але з кроком $2h$. Число

$$\Delta_h = |S(h) - S(2h)| : 15 \tag{1,6}$$

приймають за оцінку похибки наближення $S(h)$.

Зазначимо, що взагалі спочатку обчислюють $S(2h)$, а потім подвоюють n і обчислюють $S(h)$ (це гарантує можливість застосування формули Сімпсона).

1.2 Завдання до виконання роботи

1) Ознайомитися з прийомами і теоретичними принципами роботи в МК.

2) Створити програмний модуль (ПМ), який обчислює інтеграл методом прямокутників/трапецій/Сімпсона при $n = 80$. та обчислити інтеграл заданої функції.

3) Доповнити ПМ, щоб він будував графік функції з варіанту завдання.

4) Доповнити ПМ, можливістю побудови графіка інтегральної кривої функції з варіанту завдання.

5) За допомогою МП побудувати 2 графіки функцій з варіанту завдання без використання ранжируваних змінних та з їх використанням.

6) Порівняти результати обчислень інтегралу та візуалізації графіків та зробити висновки.

1.3 Завдання для самостійної роботи

1) За допомогою МК побудувати 2 графіки функцій з варіанту завдання та її інтегральної кривої без використання ранжируваних змінних та 2 графіки з їх використанням. У якості другої змінної треба використовувати незалежну змінну довільного характеру.

2) За допомогою математичного пакету побудувати 1 тривимірний графік для довільної функції двох змінних без використання ранжируваних змінних та 1 тривимірний графік з їх використанням.

1.4 Варіанти завдань

№1

$$\int_{1,2}^{2} \frac{\lg(x+2)}{x} dx$$

№2

$$\int_{1.6}^{2.4} (x+1)\sin x dx$$

№3

$$\int_{0.2}^{1} \frac{tg(x^2)}{x^2+1} dx$$

№4

$$\int_{0.6}^{1.4} \frac{\cos x}{x+1} dx$$

№5

$$\int_{0.4}^{1.2} \sqrt{x}\cos(x^2) dx$$

№6

$$\int_{0.8}^{1.2} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx$$

№7

$$\int_{0.8}^{1.6}\frac{\lg(x^2+1)}{x}dx$$

№8

$$\int_{0.4}^{1.2}\frac{\cos x}{x+2}dx$$

№9

$$\int_{0.4}^{1.2}(2x+0{,}5)\sin x dx$$

№10

$$\int_{0.4}^{0.8}\frac{tg(x^2+0{,}5)}{1+2x^2}dx$$

№11

$$\int_{0.18}^{0.98}\frac{\sin x}{x+1}dx$$

№12

$$\int_{0.2}^{1.8}\sqrt{x+1}\cos(x^2)dx$$

№13

$$\int_{1.4}^{3}x^2\lg x dx$$

№14

$$\int_{1.4}^{2.2}\frac{\lg(x^2+2)}{x+1}dx$$

№15

$$\int_{0.4}^{1.2}\frac{\cos(x^2)}{x+1}dx$$

№16

$$\int_{0.8}^{1.6}(x^2)\sin(x-0{,}5)dx$$

№17

$$\int_{0.6}^{1.4}x^2\cos x dx$$

№18

$$\int_{1.2}^{2}\frac{\lg(x^2+3)}{2x}dx$$

№19

$$\int_{2.5}^{3.3}\frac{\lg(x^2+0{,}8)}{x-1}dx$$

№20

$$\int_{0.5}^{1.2}\frac{tg(x^2)}{x+1}dx$$

№21

$$\int_{1{,}3}^{2{,}1}\frac{\sin(x^2-1)}{2\sqrt{x}}dx$$

№22

$$\int_{0.2}^{1.0}(x+1)\cos(x^2)dx$$

№23

$$\int_{0.8}^{1.2}\frac{\sin(x^2-0{,}4)}{x+2}dx$$

№24

$$\int_{0.15}^{0.63}\sqrt{x+1}\lg(x+3)dx$$

№25

$$\int_{1.2}^{2.8}\frac{\lg(1+x^2)}{2x-1}dx$$

№26

$$\int_{0.6}^{0.72}(\sqrt{x}+1)tg2x dx$$

№27

$$\int_{0.8}^{1.2}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$$

№28

$$\int_{1.2}^{2.8}\left(\frac{x}{2}+1\right)\sin\frac{x}{2}dx$$

№29

$$\int_{0.8}^{1.6}\frac{\lg(x^2+1)}{x+1}dx$$

№30

$$\int_{1.6}^{3.2}\frac{x}{2}\lg\frac{x^2}{2}dx$$

№31

$$\int_{0.2}^{1}\frac{tg(x^2)}{x^2+1}dx$$

№32

$$\int_{0.6}^{1.4}\frac{\cos x}{x+1}dx$$

№33

$$\int_{0.4}^{1.2}\sqrt{x}\cos(x^2)dx$$

№34

$$\int_{0.2}^{1.8}\sqrt{x+1}\cos(x^2)dx$$

№35

$$\int_{1.4}^{3}x^2\lg x dx$$

№36

$$\int_{1.4}^{2.2}\frac{\lg(x^2+2)}{x+1}dx$$

1.5 Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:
- Титульну сторінку з даними про виконавця і перевіряючого.
- Тему, мету роботи, порядковий номер і номер варіанта.
- Короткі теоретичні відомості.
- Інтерфейс ПМ та його код с ПМ.
- Макет документа МК, виконаний згідно варіанту.
- Висновки про виконану роботу.

Звіт повинен бути оформлений відповідно до вимог СОКР.

2 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2

ПОШУК ЕКСТРЕМУМІВ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІЙ ЗА НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ

Мета роботи: отримати навички знаходження екстремумів функцій за наявності обмежень.

2.1 Теоретичні відомості

2.1.1 Метод множників Лагранжа

Функцією Лагранжа для класичної задачі МП називається функція

$$L(\bar{x},\bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\bar{x}) + \varphi(\bar{x}), \tag{3.1}$$

де m - число рівнянь обмежень, $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_m)$ - m-мірний вектор. Елементи вектора λ, які знаходиться у функції Лагранжа, називаються множниками Лагранжа, $\varphi(\bar{x})$ - цільова функція, $f_i(x)$ - рівняння обмежень. Дана функція має m + n змінних. Для функції Лагранжа отримаємо її стаціонарні точки:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \; j = \overline{1,n}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, i = \overline{1,m}. \tag{3.3}$$

Підмножина рівняння (4.2) збігається з системою рівнянь обмежень:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = f_i(x) = 0$$

Тоді в стаціонарних точках будемо мати, що $L(\bar{x},\bar{\lambda}) = \varphi(\bar{x})$, тобто функція Лагранжа співпадає з цільовою функцією. Це значить, що якщо в стаціонарній точці функція Лагранжа досягає мінімуму, то і цільова функція досягає мінімуму в цій точці з урахуванням обмежень. Таким чином, можна здійснити перехід від завдання на умовний екстремум функції до задачі на безумовний екстремум відповідної функції Лагранжа.

Залишається дослідити ці точки на мінімум або максимум. Для цього використовуємо похідну другого порядку. В разі коли досліджувана функція залежить від однієї змінной x, то питання про екстремуми вирішується таким чином: якщо друга похідна менше нуля, то це максимум; більше нуля - мінімум; дорівнює нулю - тоді досліджується третя похідна.

Якщо аргумент x - n-мірний вектор, тоді досліджується квадратична форма, в стаціонарній точці $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ Тоді:

$$Q(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \,, \tag{3.4}$$

де a_{ij} - елементи матриці. Вираз (3.4) називається квадратичною формою. В матричної формі він набирає наступний вигляд:

$$Q(\bar{x}) = \bar{x}^T \cdot A \cdot \bar{x} \,, \tag{3.5}$$

У разі визначення екстремуму в якості елементів a_{ij} використовуються другі похідні:

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \,. \tag{3.6}$$

Причому для визначення знака квадратичної форми використовуються визначники, складені з коефіцієнтів a_{ij}. Для наочності ми розглянемо двовимірий випадок. Одже використовуючи (3.6) ми маємо визначити 2 параметри: D_1 D_2: які, у двовимірному випадку обчислюються наступним чином:

$$D_1 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \text{, де i=j} \qquad (3,7)$$

Та D_2 ,який у двовимірному випадку обчислюється як

$$D_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial_1} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_2} \end{vmatrix}, \,. \tag{3.8}$$

Таку матрицю називають матрицьою Гессе. У загальному виді вона обчислюється як.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.8}$$

Згідно критерію Сельвестра знак D_2 несе информацію про наявність екстремуму у досліджуваній точці. Отже, якщо $D_2 > 0$, то екстремум однозначно існує, інакше – неможливо дати однозначної відповіді (це може бути сідлова точка).

Далі застосовують наступне правило: якщо всі визначники D_1 та D_2 - позитивні, то квадратична форма Q_x - позитивно визначена, і в цьому випадку в стаціонарній точці має місце мінімум. Якщо знаки визначників чергуються, тобто $D_1<0$, то квадратична форма є негативно визначеною і в стаціонарній точці має місце максимум.

2.1.2 Алгоритм методу пошуку екстремумів цільової функції із заданими обмеженнями

1. По заданій умові завдання (класичної задачі оптимізації) складають функцію Лагранжа.

2. Вирішуючи систему рівнянь (3.2) - (3.3) знаходять стаціонарні точки функції Лагранжа.

3. Перевіряють достатні умови існування екстремуму шляхом дослідження знака квадратичної форми.

2.2 Рішення задач оптимізації засобами МК

2.2.1 Функції Maximize і Minimize

Для пошуку значень змінних x1, x2, ..., xn. при яких значення функція f (x1, x2, ..., xn) має максимальне або мінімальне значення використовуються функції Maximize і Minimize.

Обидві ці функції реалізовані досить універсальними алгоритмами оптимізації, які не вимагають обчислення похідних, що спрощує запис алгоритмів.

Define of function minimum

$y := 8$ $\quad x := 11$ $\quad$ The first value

$f(x,y) := 100\left(y - x^2\right)^2 + (1 - x)^2$ $\quad$ Rozenboc function

Given $\quad$ Defining the minimum of function

$\frac{d}{dx}f(x,y) = 0 \quad \frac{d}{dy}f(x,y) = 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \mathrm{Minerr}(x,y)$

$x = 0.998 \quad y = 0.996 \quad f(x,y) = 4.612 \times 10^{-6}$ $\quad$ Result

Verify of design $\quad n := 10$

$i := 1..2 \cdot n \quad j := 1..2 \cdot n \quad a_i := 0.01 \cdot i - 0.5 \quad b_j := 0.01 \cdot j - 0.5 \quad m_{(i,j)} := f\left(a_i, b_j\right)$

Plot graphic

Рисунок 2.1 – Документ з рішенням завдання пошуку мінімум і максимуму функції з урахуванням обмежень

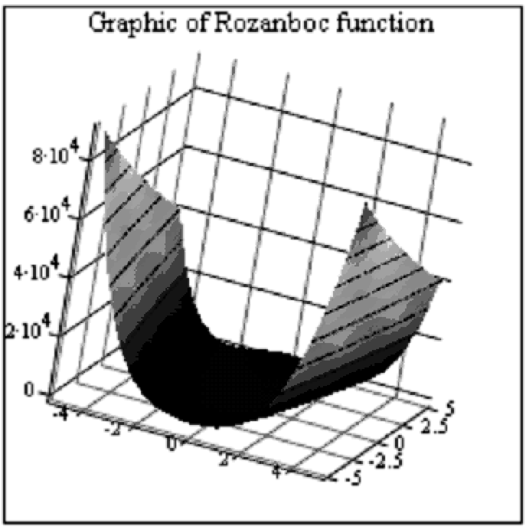
При описі умови перед блоком рішення треба задати початкові значення змінних, які треба знайти. Чим вони ближче до вірного рішення, тим швидше буде отриманий правильний результат.

Як наочний приклад знайдемо мінімум функції Розенброка за допомогою функції minerr.

Функція Розенброка - типова тестова функція, поверхня якої нагадує глибокий яр, що сильно ускладнює реалізацію багатьох алгоритмів оптимізації.

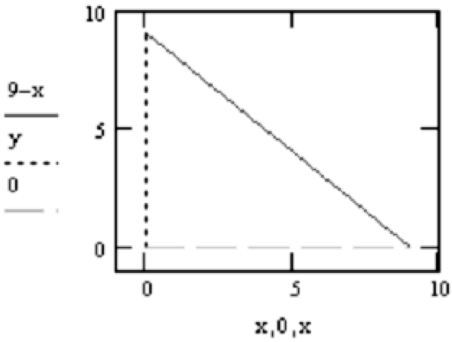
Рішення завдання на пошук мінімуму та максимуму з застосуванням функцій Maximize і Minimize. представлено на рисунках 3.1, 3.2.

Plot graphic



$x := 0..9$

$y := 0..9$



f

$x := 0 \qquad y := 0$

Given

$p := \text{Minimize}(f, x, y) \qquad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(p_0, p_1) = 1.012 \times 10^{-9}$

$x := 2 \qquad y := 0.5$

Given

$x \ge 0 \qquad y \ge 0 \qquad y \le 9 - x$

$q := \text{Minimize}(f, x, y)$

$q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(q_0, q_1) = 1.278 \times 10^{-10}$

Given

$x := 4 \qquad y := 5$

$x \ge 4 \qquad y \ge 0 \qquad y \le 9 - x$

$r := \text{Minimize}(f, x, y)$

$r = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad f(r_0, r_1) = 1.211 \times 10^{4}$

Рисунок 2,2 – Продовження документа з вирішенням задачі на пошук мінімуму функції

2.3 Завдання до виконання роботи

1. Ознайомитися з аналітичними методами пошуку екстремумів нелінійних функцій.

2. Знайти екстремум для функції, що відповідає вашому варіанту за допомогою методу Лагранжа та за допомогою дослідження квадратичної форми здійснити аналіз екстремуму на максимум (мінімум)

3. Засобами МК скласти шаблон для пошуку екстремумів функцій по вашому варіанту і вивести її на графік.

4. Доповнити шаблон умовами обмежень і вивести їх на графік. Знайти екстремум з урахуванням обмежень. Побудувати графіки поверхонь цільової функції і відповідних обмежень.

5. Порівняти результати, отримані аналітичним шляхом і методами МК. зробити висновки

6. Скласти звіт про виконану роботу.

Таблиця 4.1 - Варіанти завдань

№	Цільова функція	Обмеження
1	$Z=2x_1^2+x_2^2$	$2x_1+3x_2=-5$
2	$Z=x_1^2+x_2^2$	$3x_1+4x_2=-12.$
3	$Z=(x_1-1)^2+(x_2-3)^2$	$2x_1-x_2=-5$
4	$Z=2(x_1-3)^2+3(x_2-3)^2$	$x_1+x_2=-5.$
5	$Z=x_1^2+2x_1+x_2+x_2^2$	$x_1+3x_2=-6$
6	$Z=4x_1+2x_1^2+x_2+2x_2^2$	$3x_1+4x_2=-12$
7	$Z=4x_1+2x_1^2+x_2+2x_2^2$	$3x_1+4x_2=-12$
8	$Z=2x_1x_2+x_2^2$	$2x_1+4x_2=8.$
9	$Z=2(x_1-3)^2+3(x_2-3)^2$	$x_1+x_2=0.$
10	$Z=x_1^2+2x_1+x_2+x_2^2$	$x_1+3x_2=-6$
11	$Z=2x_1^2+5x_1+x_2^2+3x_2$	$x_1+5x_2=-12.$
12	$Z=2x_1^2+5x_1+x_2^2+3x_2$	$x_1+5x_2=-12.$
13	$Z=2x_1x_2+x_2^2$	$2x_1+4x_2=-8.$
14	$Z=x_1^2+x_2^2$	$3x_1+4x_2=-12.$
15	$Z=2x_1^2+6x_1+x_2^2+3x_2$	$x_1+6x_2=-15.$
16	$Z=2x_1^2+3x_1+x_2^2+5x_2$	$12x_1+4x_2=6$

2.4 Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

- Титульну сторінку з даними про виконавця і перевіряючого.
- Порядковий номер, номер варіанта, тему і мету роботи.
- Короткі теоретичні відомості про використані методи обчислення.

- Рукописний варіант розв'язання задачі на пошук умовного екстремуму методом Лагранжа.

- Шаблон розв'язуваної задачі, виконаний в МК.

- Висновки про виконану роботу.

Звіт повинен бути оформлений відповідно до вимог СОКР

3 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

ГРАФІЧНИЙ МЕТОД ВИРІШЕННЯ ЗАВДАНЬ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета роботи: отримати практичні навички вирішення задач ЛП графічним методом.

3.1 Геометрична інтерпретація і графічний метод рішення задач лінійного програмування

Рішення завдання лінійного програмування (ЛП) графічним методом досягається реалізацією наступного алгоритму:

1. Привести задачу до канонічного виду. Переконатися, що число вільних змінних не перевищує двох. Виразити m базисних змінних через дві вільні змінні (в якості вільних взяти змінні, які присутні в цільовій функції);
2. На площині, яка визначається вільними змінними, побудувати область допустимих рішень, яка визначається перетином півпросторів, відповідних нерівностям обмежень;
3. Провести пряму лінію, відповідну цільової функції. Вона проходить перпендикулярно градієнт-вектору, координати якого визначаються з коефіцієнтів при змінних у виразі для цільової функції;
4. Переміщати пряму лінію, що відповідає цільової функції в напрямку градієнт-вектора при вирішенні задачі на максимум і в зворотньому напрямку при вирішенні задачі на мінімум, поки вона не торкнеться кутової точки допустимої області рішень;
5. Знайти координати отриманої крайньої точки, розв'язавши систему рівнянь прямих, на перетині яких вона знаходиться.

Наприклад, необхідно знайти $\max\varphi\ \overline{x}\ = x_1 - x_2$ при наступних обмеженнях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}. \tag{4.1}$$

Для цього перетворимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases}. \tag{4.2}$$

Вирішуємо задачу лінійного програмування, в якій загальна кількість змінних -5, де кількість базисних змінних: m = 3, кількість вільних змінних: n = 2. Якщо в задачі число вільних змінних дорівнює двом, то для неї можна дати графічну інтерпретацію (рис. 4.1).

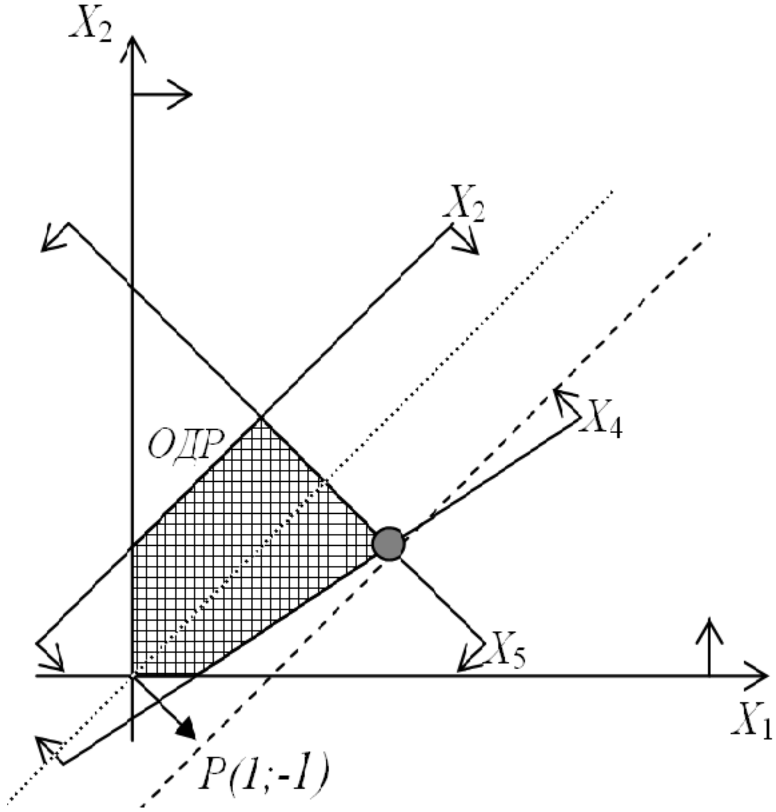


Рисунок 3.1 - Рішення задачі МП графічним методом

Оберемо змінні x1 і x2 у якості вільних, і виразимо базисні змінні через вільні.

$$\begin{cases} x_3 = 2 + 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_4 = 2 - x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_5 = 5 - x_1 - x_2 \end{cases}. \tag{4.3}$$

$$x_3, x_4, x_5, x_1, x_2 \geq 0$$

Кожне з отриманих рівнянь являє собою рівняння гіперплощини в двомірному просторі.

$$\begin{gathered} \varphi(\bar{x}) = x_1 - x_2 \to \max \\ \varphi = 1 \Rightarrow x_1 - x_2 = 1 \\ \varphi = 2 \Rightarrow x_1 - x_2 = 2 \end{gathered}. \tag{4.4}$$

Для пошуку крайньої точки допустимої області значень, яка відповідає максимуму, креслимо лінію перпендикулярно градієнт-вектору, який можна побудувати за коефіцієнтами цільової функції при x1 і x2. Потім, уявно переміщуємо отриману лінію у напрямку градієнт-вектора який вказує напрямок найшвидшого зростання цільової функції (При пошуку мінімуму пряму переміщуємо в напрямку антиградієнт-вектора). За визначенням крайня точка знаходиться на перетині двох прямих рівнянь-обмежень. Тоді її координати мають задовільняти системі відповідних рівнянь-обмежень:

$$\begin{cases} 2 - x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}. \tag{4.5}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь отримуємо:

$$x_2 = 1,$$

$$x_1 = 4,$$

$$x^* = (4;1),$$

$$\varphi^*(x^*) = 3.$$

3.2 Завдання до виконання роботи

1. Ознайомитися з геометричним методом вирішення завдань лінійного програмування.

2. Знайти рішення задачі ЛП, що відповідає вашому варіанту, геометричним методом.

3.3 Завдання для самостійної роботи

1. Створити шаблон документу МК для пошуку максимуму (мінімуму) задачі ЛП, що відповідає вашому варіанту..

2. За допомогою створенного шаблона знайти мінімум (максимум) цільової функції зазначеного завдання.

3. Доповнити створений шаблон двовимірним графіком, що візуалізує область допустимих значень вашої задачі ЛП.

5. Порівняти результати розв‘язку задачі, отримані аналітичним шляхом і засобами МК. Зробити висновки.

6. Скласти звіт про виконану роботу.

3.4 Варіанти завдань до виконання роботи

Визначити max та min (якщо вони існують) цільової функції. У випадку неіснування max або min обґрунтувати причину:

1. (x_1+2x_2) при $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_2 \ge 1 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$;

2. (x_1+3x_2) при $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30 \\ -x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$;

3. (2x_1-4x_2) при $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 11 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ -2x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$;

4. (x_1+2x_2) при $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ -x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$;

5. (x_1-3x_2) при $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30 \\ x_1 - x_2 \ge 4 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 10 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$;

6. (x_1+x_2) при $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$;

7. (x_1+2x_2) при $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ -x_1 + x_2 \le 4 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1 = 5 \end{cases}$;

8. (4x_1+3x_2) при $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 \ge -2 \\ -x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$;

9. (x_1+2x_2) при $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \ge -1 \\ x_2 \ge 1 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$;

10. (x_1+3x_2) при $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \le 30 \\ -x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 12 \\ x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$;

11. $(2x_1-4x_2)$ при $\begin{cases} x_1+2x_2 \le 11 \\ x_1+x_2 \le 6 \\ x_1-x_2 \le 2 \\ -2x_1+4x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$; 12. (x_1+2x_2) при $\begin{cases} x_1-x_2 \le 3 \\ x_1+x_2 \le 6 \\ -x_1+3x_2 \le 10 \\ x_1+3x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$;

13. (x_1-3x_2) при $\begin{cases} 5x_1+3x_2 \ge 30 \\ x_1-x_2 \ge 4 \\ -x_1+x_2 \le 3 \\ x_1+x_2 \ge 10 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$; 14. (x_1+x_2) при $\begin{cases} x_1+2x_2 \le 2 \\ x_1+x_2 \le 2 \\ x_1-2x_2 \le 3 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$;

3.5 Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

- Титульну сторінку з даними про виконавця і перевіряючого.
- Порядковий номер, номер варіанта, тему і мету роботи.
- Короткі теоретичні відомості про використані методи обчислення.
- Рукописний варіант розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом.
- Область допустимих значень, побудовану засобами МК.
- Шаблон розв'язуваної задачі, виконаний в МК.
- Висновки про виконану роботу.

Звіт повинен бути оформлений відповідно до вимог СОКР.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А.В., Холод Н.И. Математическое программирование учебное пособие. – М.: Высш.шк.., 1984, 149с.
2. Кармазов В.Г., Математическое программирование. – Издательство физ.-мат. литературы, 2004 242с.
3. Акулич И.Л., Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш.шк., 1986, 122с