МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

СТАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни "Теоретична механіка"
для студентів спеціальності
192 – "Будівництво та цивільна інженерія",
усіх форм навчання

Обговорено і рекомендовано на засіданні кафедри промислового і цивільного будівництва
Протокол №7 від 11.01.2018 р.

Чернігів ЧНТУ 2018

Статика. Конспект лекцій з дисципліни "Теоретична механіка" для студентів спеціальності 192 "Будівництво та цивільна інженерія" / Укл. : Ситников О.П. – Чернігів : ЧНТУ, 2018. – 109 с.

Укладач: Ситников Олександр Павлович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри промислового і цивільного будівництва

Відповідальний за випуск: Савченко Олена Віталіївна, завідувач кафедри промислового і цивільного будівництва, кандидат технічних наук, професор

Рецензент: Савченко Олена Віталіївна, завідувач кафедри промислового і цивільного будівництва, кандидат технічних наук, професор

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій “Статика” з теоретичної механіки підготовлений для студентів, які навчаються за галуззю знань 19 “Архітектура та будівництво”, напрям кваліфікаційної підготовки 192 “Будівництво та цивільна інженерія”.

Метою конспекта лекцій є викладання розділу теоретичної механіки “Статика” відповідно до навчальної програми підготовки фахівців за означеною спеціальністю.

Навчальний матеріал поданий у вигляді лекцій, які є складовою частиною структури змістовних модулів. Кожна лекція закінчується запитаннями для самоконтролю, які призначені для організації самостійної роботи студентів. Для більш детального вивчення окремих питань використовується рекомендована література.

Побудова і логіка викладення матеріалу дають можливість розкривати взаємозв'язки розділу теоретичної механіки “Статика” із спеціальними дисциплінами.

Конспект лекцій орієнтований на дистанційну форму навчання.

Лекція №1

тема “Основні поняття та аксіоми статики”

1.1. Завдання та об'єкти вивчення теоретичної механіки.
1.2. Поняття рівноваги, сили, системи сил. Зосереджені та розподілені сили.
1.3. Аксіоми статики та їх наслідки.

1.1. Механіка – це наука про механічний рух та механічні взаємодії. **Механічний рух** – це зміна взаємного розташування тіл або їхніх частин у просторі з часом. **Механічні взаємодії** – це матеріальні зв'язки між тілами, які ведуть до зміни механічного руху тіл або до їх деформації.

За методами своїх досліджень механіку поділяють на теоретичну та прикладну. **Теоретична механіка** – це наука, яка вивчає загальні закони механічного руху та механічних взаємодій матеріальних тіл, вважаючи своїм *головним завданням* пізнання кількісних та якісних закономірностей, що спостерігаються у природі. **Прикладна механіка** охоплює цілий комплекс дисциплін, який включає гідравліку, теорію механізмів і машин, опір матеріалів, балістику, аеромеханіку, біомеханіку, будівельну механіку тощо.

У теоретичній механіці розгляд задач ґрунтується на застосуванні математичних методів до розв'язування рівнянь, складених на основі законів і принципів механіки. *Об'єктами вивчення* теоретичної механіки є не самі реальні тіла, а їхні моделі, які називають матеріальною точкою, системою матеріальних точок, абсолютно твердим тілом або твердим тілом. **Матеріальною точкою** називають будь-яке макроскопічне тіло, розмірами якого за умовою даної задачі можна нехтувати. **Системою матеріальних точок** називають сукупність матеріальних точок, які взаємодіють між собою. **Абсолютно твердим тілом** називають макроскопічне тіло, деформацією якого за умовами даної задачі можна нехтувати. Тому абсолютно тверде тіло розглядають як систему матеріальних точок, що жорстко зв'язані між собою. Застосування цих моделей дають можливість зосередити дослідження на з'ясуванні основних законів механічного руху та механічних взаємодій матеріальних тіл, нехтуючи другорядними явищами.

У теоретичній механіці простір і час вважаються абсолютними. **Простір** є однорідним, ізотропним й тривимірним. **Час** протікає рівномірно завжди і всюди, тобто він є неперервно зростаючою скалярною величиною, що виконує роль незалежної змінної.

Теоретична механіка включає наступні розділи: кінематику, динаміку, статику та аналітичну механіку. **Кінематика** вивчає геометричні властивості механічного руху матеріальних тіл без врахування інертності цих тіл та діючих сил. **Динаміка** вивчає причини механічного руху та механічних взаємодій з врахуванням інертності тіл та діючих на них сил. **Статика** вивчає умови рівноваги твердих тіл під дією прикладених до них сил, а також методи еквівалентного перетворення систем сил з метою приведення їх до простішого вигляду. **Аналітична механіка** вивчає механічний рух і механічні взаємодії матеріальних тіл методами математичного аналізу.

1.2. Статика вивчає умови рівноваги твердих тіл під дією прикладених до них сил. **Рівновагою** твердого тіла називають стан його спокою або рівномірного прямолінійного руху відносно умовно нерухомої системи відліку. Стан рівноваги твердого тіла залежить від характеру взаємодії цього тіла з іншими тілами. Величина, яка є кількісною мірою механічної взаємодії матеріальних тіл, називається **силою**. Сила є *векторною величиною*. Вона характеризується *напрямом* або *лінією дії* (під напрямом сили розуміють напрям руху, який дістало б вільне тіло, що перебуває у спокої, якби на нього подіяла ця сила), *числовим значенням* або *модулем* і *точкою прикладання* (матеріальна частина тіла, на яку діє сила). Графічно сила зображується відрізком прямої, довжина якого в певному масштабі дорівнює модулю сили (рис. 1.1). Числове значення (модуль) сили вимірюється в ньютонах.

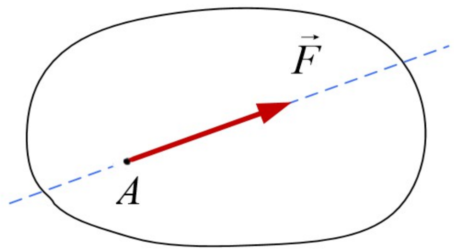


Рис. 1.1. Сила $\vec{F}$, що прикладена до тіла в точці A

Силу, як векторну величину, можна подати через її складові або проекції на координатні осі (рис. 1.2).

Сукупність сил, які діють на дане тверде тіло, називається **системою сил**. Система сил, лінії дії яких лежать в одній площині, називається **плоскою**. Якщо лінії дії сил лежать у різних площинах, то таку систему називають **просторовою**. Система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається **збіжною**.

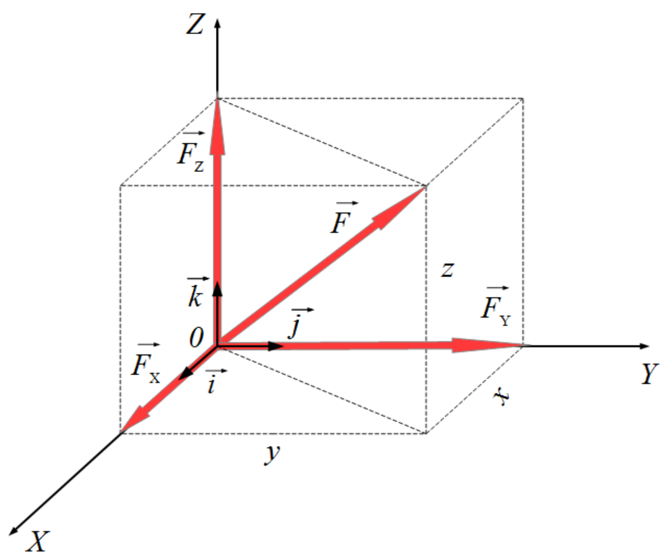


Рис. 1.2. Просторове зображення вектора сили $\vec{F}$

Якщо лінії дії сил паралельні між собою, то таку систему називають **системою паралельних сил**. Системи збіжних та паралельних сил можуть розміщуватися як у просторі так й на площині.

Якщо під час дії системи сил вільне тверде тіло не змінює свого руху або залишається в стані спокою, то така система сил називається **зрівноваженою**. Сили такої системи взаємно компенсують одна одну.

Якщо, не порушуючи стану тіла, одну систему сил можна замінити іншою системою сил й навпаки, то таки системи сил називаються **еквівалентними**.

У випадку, коли дія системи сил еквівалентна дії однієї силі, то таку силу називають **рівнодійною** даної системи сил. Виявляється, що не всяка система сил має рівнодійну.

Сили, які діють на дане тіло з боку інших тіл, називаються **зовнішніми**. Сили взаємодії між частинками даного тіла називаються **внутрішніми**.

Таким чином, тверде тіло перебуває в стані рівноваги тоді, коли діюча на нього зрівноважена система сил еквівалентна нулю.

За характером прикладання сили поділяють на зосереджені та розподілені. **Зосереджені сили –** це сили, що передаються на тіло через нескінченно малі елементи площі тобто вважається, що вони прикладені до тіла в певній точці. Зосереджена сила є абстракцією, тому що будь-яка реальна взаємодія тіл відбувається вздовж певної лінії або через поверхню з певною площею або всередині деякого об'єму. **Розподіленими** називають таки сили, що діють вздовж лінії, розподілені за поверхнею, за об'ємом. Таки сили характеризуються **інтенсивністю**, яка являє собою векторну величину, модуль якої чисельно дорівнює силі, що припадає на одиницю довжини ($\vec{g}$), одиницю площі ($\vec{p}$), одиницю об'єму ($\vec{\gamma}$).

За характером розподілу сили можуть бути *рівномірно* розподіленими та *нерівномірно* розподіленими.

Розглянемо рівномірно розподілені сили за довжиною. Дію цих сил можна замінити рівнодійною зосередженою силою $\vec{Q}$, що чисельно дорівнює площі фігури, яку називають *епюрою*: $Q = g{\cdot}l$, де l – довжина лінії (рис. 1.3). Ця рівнодійна сила $\vec{Q}$ прикладена до центра тяжіння епюри.

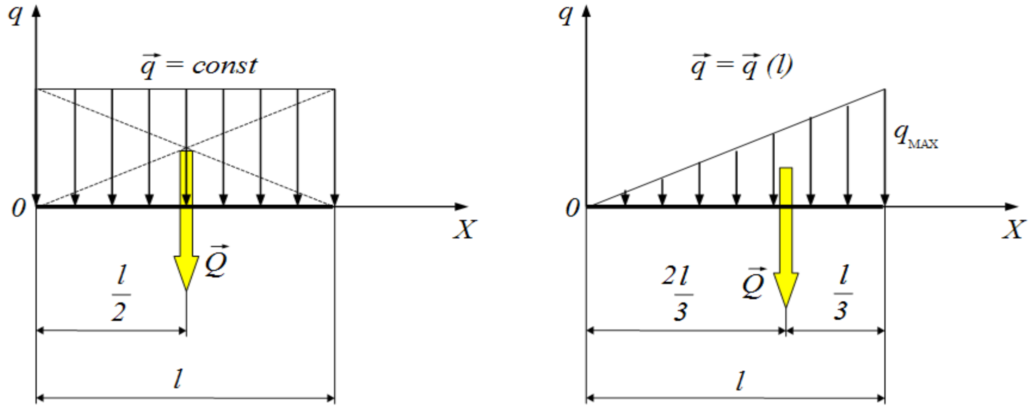


Рис. 1.3. Рівномірно та нерівномірно розподілені сили вздовж лінії

Нехай інтенсивність нерівномірно розподілених сил змінюється за лінійним законом (рис. 1.3). Модуль рівнодійної розподілених сил $\vec{Q}$ чисельно дорівнює площі епюри у вигляді трикутника $Q = \frac{1}{2} q_{MAX} \cdot l$, а точка її прикладання збігається з центром тяжіння епюри, що знаходиться в точці перетину його медіан.

Інтенсивність сил, що розподілені за поверхнею, називають *тиском*. У найпростішому випадку рівномірного розподілу сил за поверхнею дію цих сил можна замінити рівнодійною зосередженою силою $\vec{F} = \vec{p} \cdot A$, де A — площа поверхні, на який діють розподілені сили. Точка прикладання рівнодійної сили збігається з центром тяжіння поверхні, де діють розподілені сили (рис. 1.4).

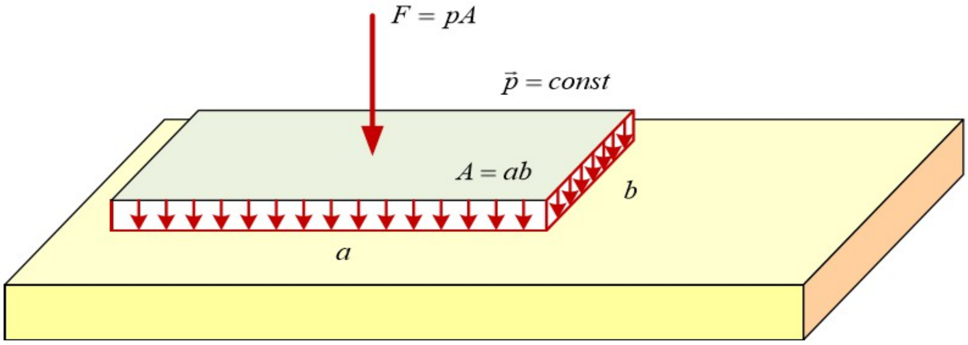


Рис. 1.4. Сили, що розподілені за поверхнею

До сил, що розподілені за об'ємом, відноситься сили тяжіння, тому що вони діють на окремі частинки, з якого складається тіло.

1.3. Аксіомами статики називають положення досвідного характеру, які приймаються без доведення. Вони встановлені багатьма безпосередніми спостереженнями, а також дослідною перевіркою наслідків, які логічно випливають з цих аксіом.

Аксіома 1: якщо на вільне тверде тіло діють дві сили, то це тіло перебуває в стані рівноваги тоді й лише тоді, коли ці сили однакові за модулем й напрямлені вздовж однієї прямої в протилежних напрямках (рис. 1.5).

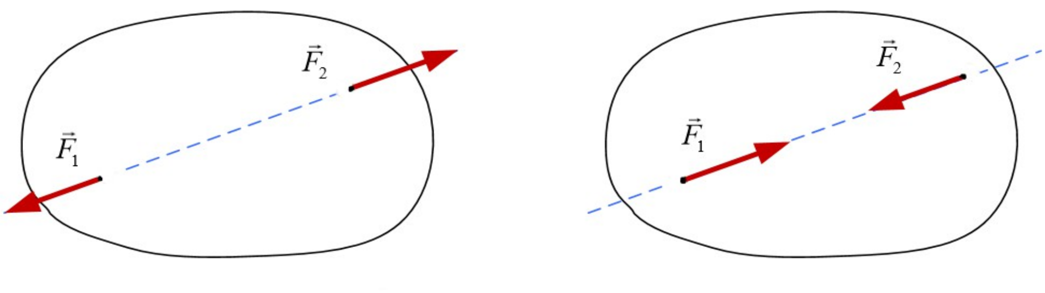


Рис. 1.5. Найпростіша зрівноважена система сил

Ця аксіома визначає найпростішу зрівноважену систему сил, оскільки досвід показує, що вільне тіло, на яке діє тільки одна сила, в рівновазі знаходитися не може.

Аксіома 2: дія даної системи сил на тверде тіло не зміниться, якщо до цієї системи сил приєднати або відкинути зрівноважену систему сил.

Наслідок з аксіоми 2: дія даної сили на тверде тіло не зміниться, якщо перенести точку прикладання цієї сили вздовж лінії її дії в будь-яку іншу точку тіла (рис. 1.6).

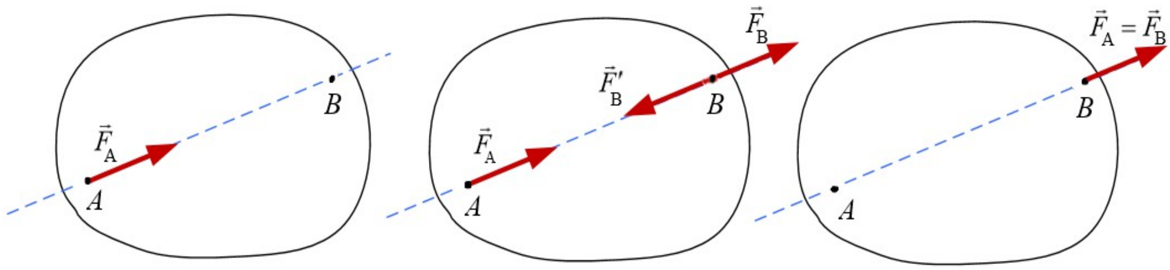


Рис. 1.6. Ілюстрація доведення наслідку з аксіоми 2

Для доведення наслідку розглянемо силу $\vec{F}_A,$ що прикладена до тіла в точці A. На лінії дії сили $\vec{F}_A$ до довільної точки В прикладемо зрівноважену систему сил $(\vec{F}_B, \vec{F}'_B) \sim 0,$ де $|\vec{F}_B| = |\vec{F}'_B| = |\vec{F}_A| = F,$ $\vec{F}'_B = -\vec{F}_A.$ Згідно аксіоми 1 сили $\vec{F}_A$ і $\vec{F}'_B$ утворюють зрівноважену систему сил $(\vec{F}_A, \vec{F}'_B) \sim 0,$ а згідно з аксіомою 2 цю зрівноважену систему сил можна відкинути. Тоді на тіло діятиме тільки одна сила $\vec{F}_B,$ яка прикладена до точки B.

Таким чином, дія сили на тіло не змінюється, оскільки $\vec{F}_B = \vec{F}_A,$ але змінюється її точка прикладання вздовж лінії дії сили $\vec{F}_A.$ Отже, наслідок доведено.

З цього наслідку можна зробити висновок про те, що сила є *ковзним* вектором, але тільки для абсолютно твердого тіла. Для реальних тіл перенос сили може викликати перерозподіл внутрішніх сил всередині цього тіла.

Аксіома 3: система з двох сил, що прикладені до тіла в одній точці під деяким кутом одна до одній, має рівнодійну, що прикладена до цієї самої точки тіла й за своїм модулем та напрямом визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах, як на сторонах (рис. 1.7).

Паралелограм, побудований на даних силах називається **паралелограмом сил**, а сам спосіб знаходження рівнодійної шляхом побудови паралелограма називається **правилом паралелограма**.

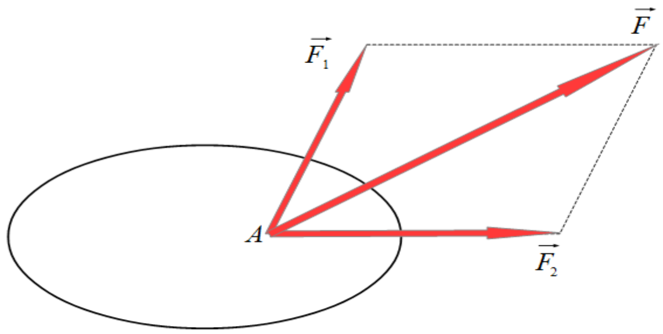


Рис. 1.7. Правило паралелограма для знаходження рівнодійної сили

Аксіома 4: сили взаємодії двох твердих тіл завжди рівні за модулем й діють по одній прямій в протилежних напрямках (рис. 1.8).

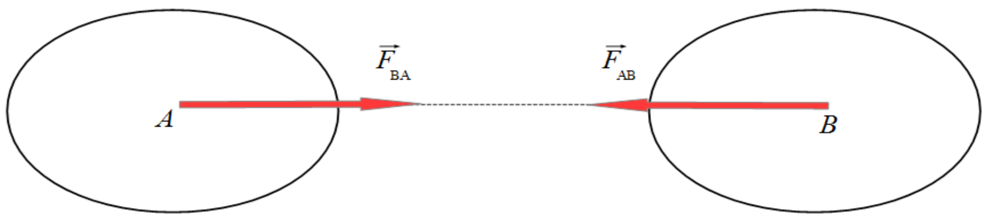


Рис. 1.8. Ілюстрація взаємодії двох тіл

Ця аксіома являє собою третій закон Ньютона, який показує на те, що коли одне тіло діє на друге з певною силою, то одночасно друге тіло діє на перше з такою самою силою. Слід зазначити, що сили взаємодії не утворюють зрівноваженої системи сил, тому що вони прикладені до різних тіл.

Аксіома 5: якщо нетверде тіло, що деформується, знаходиться в рівновазі, то рівновага цього тіла не порушиться, коли, не змінюючи форми, розмірів та положення в просторі, воно перетвориться на абсолютно тверде тіло. Ця аксіома відома ще як *принцип отвердіння*.

З принципу отвердіння слідує, що умови рівноваги, які є необхідними і достатніми для абсолютно твердого тіла, є необхідними, але недостатніми для нетвердого тіла. Наприклад, для рівноваги гнучкої нитки недостатньо того, щоб прикладені до її кінців сили були однаковими за модулем й протилежні за напрямом. Необхідно, щоб ці сили ще розтягували нитку, а не стискували.

Принцип отвердіння застосовують в інженерних розрахунках. Він встановлює зв'язок між статикою абсолютно твердого тіла і статикою нетвердого тіла. Цей принцип дозволяє результати, що викладені в статиці абсолютно твердого тіла, переносити не тільки на дослідження рівноваги тіл, що деформуються та цілих інженерних споруд, а також на рівновагу рідин.

Запитання для самоконтролю

1. Що є предметом вивчення механіки?
2. Що називають механічним рухом?
3. Що називають механічними взаємодіями?
4. Що є предметом вивчення теоретичної механіки?
5. Якими є завдання теоретичної механіки?
6. Дати визначення об'єктам вивчення теоретичної механіки: матеріальна точка, система матеріальних точок, абсолютно тверде тіло.
7. Якими розглядаються в теоретичній механіці простір й час?
8. Які розділи включає теоретична механіка? Дати визначення кожному з них.
9. Який стан твердого тіла називають рівновагою?
10. Що називають силою?
11. Чим характеризується сила як фізична величина?
12. Як подати силу як векторну величину через її складові або проекції на координатні осі?
13. Що називають системою сил?
14. Чим відрізняється плоска система сил від просторової?
15. Чим відрізняється збіжна система сил від системи паралельних сил?
16. Яку систему сил називають зрівноваженою?
17. Які системи сил називають еквівалентними?
18. Яка сила називається рівнодійною даної системи сил?
19. Яка різниця між зовнішніми й внутрішніми силами?
20. Чим відрізняються зосереджені сили від розподілених?
21. Які існують види розподілених сил?
22. Якою величиною характеризують розподілені сили?
23. За якими правилами дія розподілених сил замінюється дією їх рівнодійної сили?
24. Що називають аксіомою?
25. Сформулюйте першу аксіому статики про умову рівноваги тіл.
26. Сформулюйте другу аксіому статики про прикладання та відкидання зрівноваженої системи сил.
27. Поясніть, чому сила, що прикладена до абсолютно твердого тіла, являє собою ковзний вектор?
28. Чому не можна переносити точку прикладання сили вздовж її лінії дії для реальних тіл?
29. Сформулюйте третю аксіому статики про паралелограм сил.
30. Як застосовується правило паралелограма?
31. Сформулюйте четверту аксіому статики про взаємодію тіл.
32. Чому сили взаємодії не утворюють збіжної системи сил?
33. Сформулюйте п'яту аксіому статики про отвердіння нетвердих тіл.
34. Яка різниця між умовами рівноваги твердих й нетвердих тіл?

Лекція №2

тема **"В'язі та їх реакції"**

2.1. Вільні та невільні тіла. В'язі. Реакції в'язей. Активні та пасивні сили. Аксіома про звільнення від в'язей.
2.2. Основні типи в'язей та напрям їх реакцій.

2.1. Розрізняють вільні та невільні тверді тіла. Тіло, переміщення якого в просторі ні чим не обмежено і яке може рухатися в будь-якому напрямку, називається **вільним**. Вільне тіло в просторі має можливість здійснювати три *лінійні* переміщення вздовж координатних осей *OX*, *OY*, *OZ* та три *кутові* переміщення, якими є повороти навколо координатних осей (рис. 2.1).

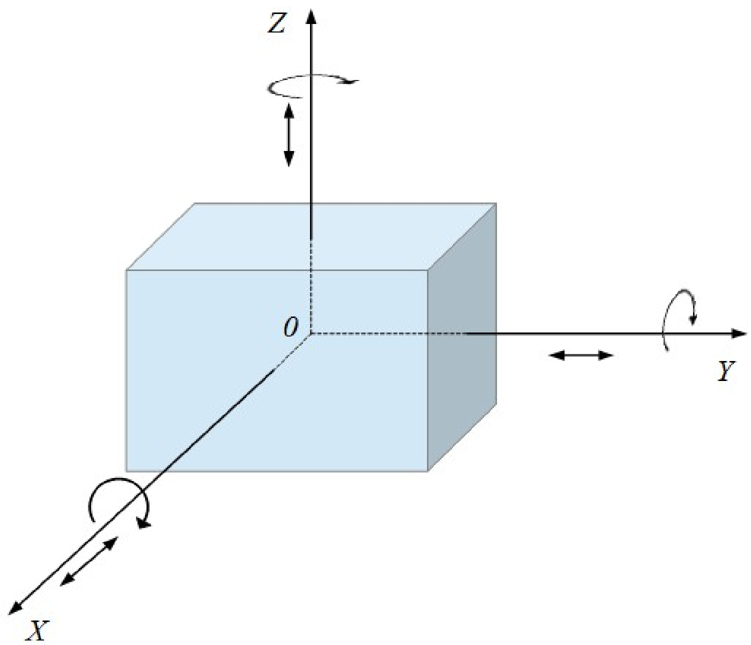


Рис. 2.1. Можливі переміщення твердого тіла в просторі

Кількість незалежних рухів тіла називають **числом ступенів вільності**. Отже, вільне тверде тіло має шість ступенів вільності. Воно знаходиться в стані рівноваги тоді, коли шість можливих переміщень дорівнюють нулю.

Тіло, переміщення якого в просторі в будь-якому напрямку обмежене деякими наперед заданими умовами, називається **невільним**. Тіло або сукупність тіл, які обмежують рух даного тіла, називають в'яззю. Отже, невільним тілом називають таке тіло, на яке накладені в'язі. Невільне тіло в просторі матиме можливість здійснювати стільки переміщень, скільки дозволено в'язнями, тобто шість мінус кількість обмежених в'язнями переміщень.

Сила, з якою в'язь діє на дане тіло, обмежуючи його рух, називається **реакцією в'язі**. Наприклад, нитка, на який підвішена куля, є в'яззю для цієї кулі, а сила натягу нитки є реакцією в'язі. Згідно аксіоми (4) про сили взаємодії двох тіл сила, з якою дане тіло тисне на в'язь та реакція цієї в'язі завжди рівні за модулем й протилежні за напрямом та не утворюють зрівноваженої системи сил.

Поряд з розподілом сил на зовнішні та внутрішні їх поділяють на **активні** та **пасивні**. Особливістю активних сил є те, що їх модуль і напрям не залежать від інших сил, що діють на тіло. Прикладом активної сили є сила тяжіння. До пасивних сил відносять реакції в'язей, які залежать як від діючих на тіло інших сил, так й від характеру руху тіл та типу накладених на нього в'язей. Вони існують тільки тоді, коли тіло під дією активної сили тисне на в'язь. Якщо нема дії активної сили на в'язь, то й нема реакції в'язі.

Модуль та напрям реакції в'язі заздалегідь можна визначити лише тоді, коли в'язь перешкоджає рухові тіла тільки в одному напрямку. Якщо в'язі перешкоджають рухові тіла одночасно в кількох напрямках, то модуль й напрям реакцій в'язей заздалегідь визначити неможливо. Вони визначаються лише під час розв'язку відповідної задачі.

Розв'язок задач статики на рівновагу невільних тіл ґрунтується на **аксіомі про звільнення від в'язей**: будь-яке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо подумки звільнити його від в'язей та замінити їх дію на тіло реакціями цих в'язей.

Використовуючи цю аксіому, можна застосовувати до невільних тіл умови рівноваги вільних тіл. При цьому в рівняннях рівноваги до активних сил слід додати реакції відкинутих в'язей. Більшість задач статики зводяться до пошуку модулів та напрямів реакцій в'язей. Це дозволяє одержати дані, які необхідні для розрахунку міцності відповідних конструкцій.

2.2. Розглянемо основні типи в'язей та покажемо напрям дії їх реакцій.

1. **Ідеально гладенька поверхня** – це така поверхня, коли між рухомим тілом й гладенькою поверхнею відсутні сили тертя. Оскільки гладенька поверхня не перешкоджає рухові тіла, то її реакція завжди напрямлена перпендикулярно до поверхонь взаємодіючих тіл у точці їх дотику. Коли одна з двох поверхонь, що дотикаються, має вістря, то реакція напрямлена вздовж нормалі до поверхні в'язі або тіла залежно від того, до якої з них можна провести нормаль (рис. 2.2). Прикладом наближення до ідеально гладенької поверхні може слугувати склера ока людини (рис. 2.3).

2. **Шарнір** – це з'єднання двох тіл, яке дає змогу одному тілу повертатися відносно іншого тіла. Шарніри поділяють на циліндричні й сферичні.

Циліндричний шарнір складається з *обойми* й *циліндричного вала*. Тіло, яке жорстко скріплене з обоймою або валом шарніра, може тільки обертатися навколо осі шарніра. Напрям реакції циліндричного шарніра, виходячи тільки з конструкції шарніра, вказати неможливо. У більшості випадків реакцію шарніра можна подати у вигляді двох взаємно перпендикулярних складових, які визначаються з рівнянь рівноваги (рис. 2.4):

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A.$$

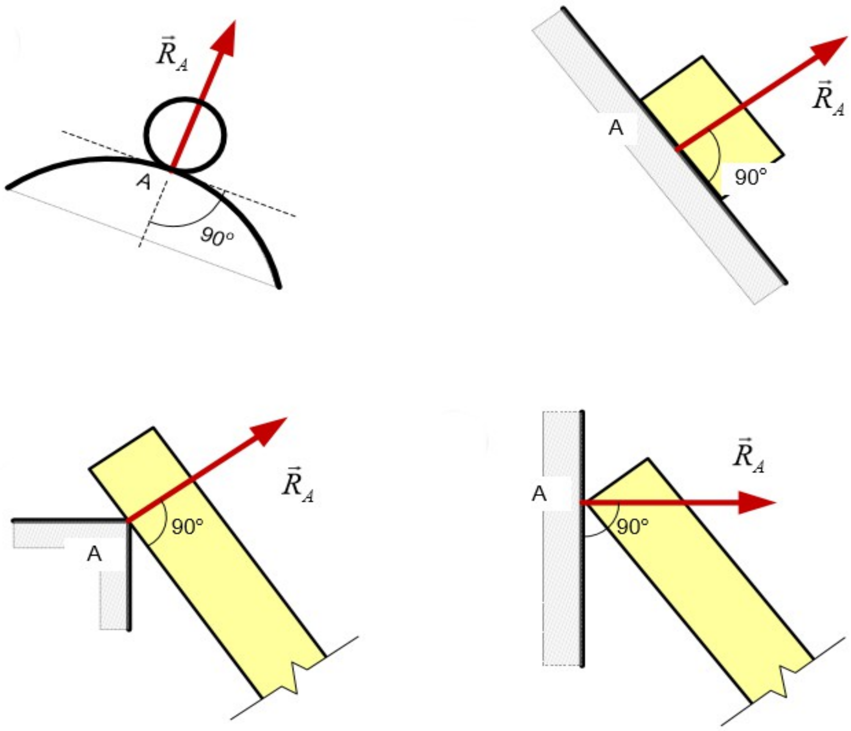


Рис. 2.2. Напрями реакцій ідеально гладенької поверхні
для різних випадків дотику з тілом

Рис. 2.3. Склера ока людини як приклад ідеально гладенької поверхні

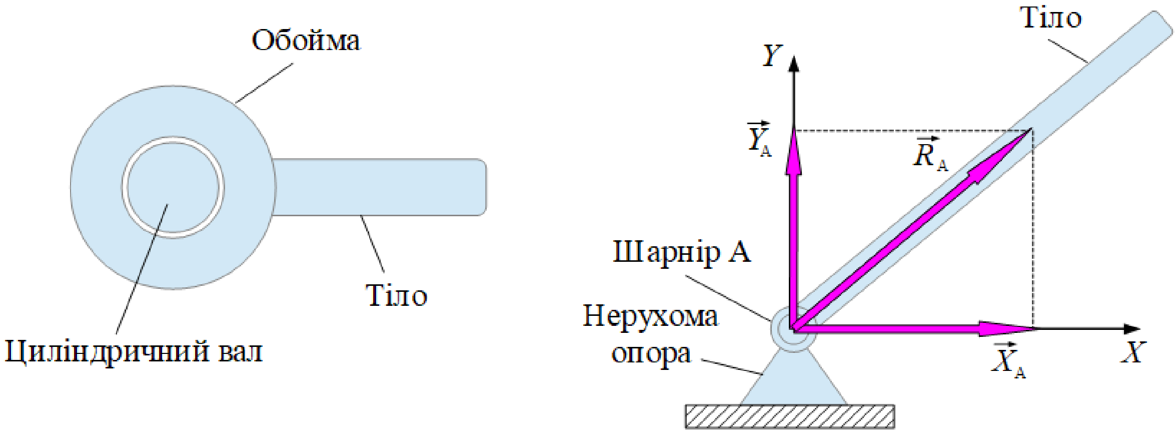


Рис. 2.4. Циліндричний шарнір

Наведемо деякі приклади використання циліндричних шарнірів.

Рис. 2.5. Дверна завіса

Рис. 2.6. Ланцюг

Сферичний шарнір дає можливість обертатися тілу навколо центра шарніра в будь-якому напрямку (рис. 2.7). При цьому напрям реакції шарніра також вказати неможливо. Він залежить від характеру прикладених до тіла сил, але проходить центром шарніра. Якщо до тіла прикладена просторову систему сил, то реакцію шарніра виражають трьома взаємно перпендикулярними складовими:

$$\vec{R} = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}.$$

Приклади сферичних шарнірів наведено на рис. 2.7 і рис. 2.8.

3. **Ідеальний стержень** – це невагомий тонкий стержень, який закріплений між двома шарнірами. Реакція ідеального стержня напрямлена вздовж осі стержня протилежно до напряму дії активної сили (рис. 2.10).

4. **Гнучка в'язь** – це нитка, канат, ланцюг тощо. Її реакція напрямлена вздовж в'язі протилежно до напряму дії активної сили (рис. 2.11).

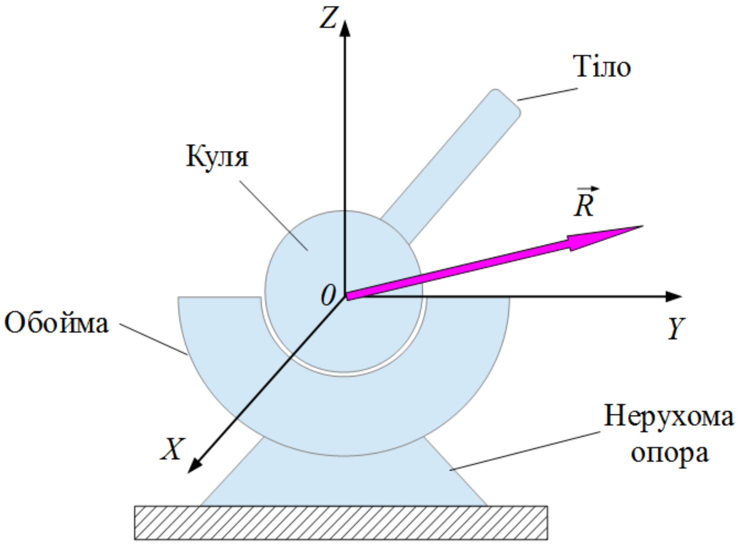


Рис. 2.7. Сферичний шарнір

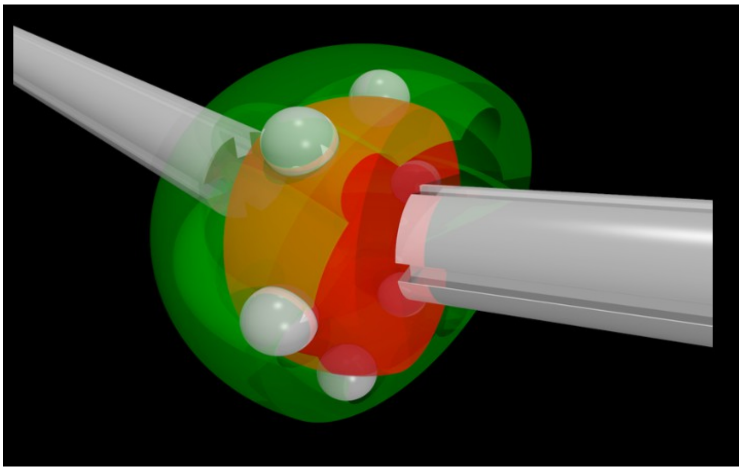


Рис. 2.8. 3-D модель сферичного шарніра

Рис. 2.9. Шарнірне з'єднання трубопроводів

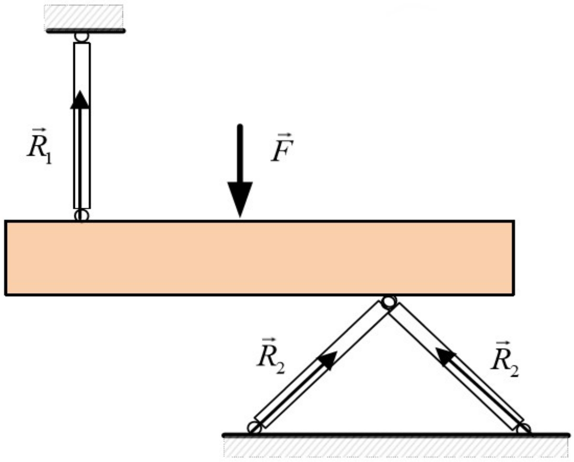


Рис. 2.10. Ідеальні стержні

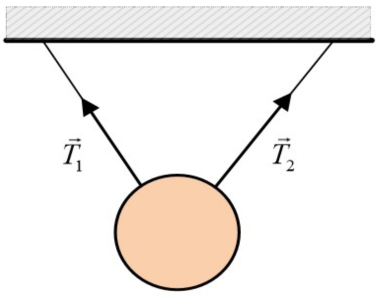


Рис. 2.11. Гнучка в'язь

5. **Опора з тертям** розглядається тоді, коли силами тертя між тілом і в'яззю не можна нехтувати. У цьому випадку реакцію опори розкладають на тангенціальну й нормальну складові, з яких тангенціальна складова є силою тертя (рис. 2.12).

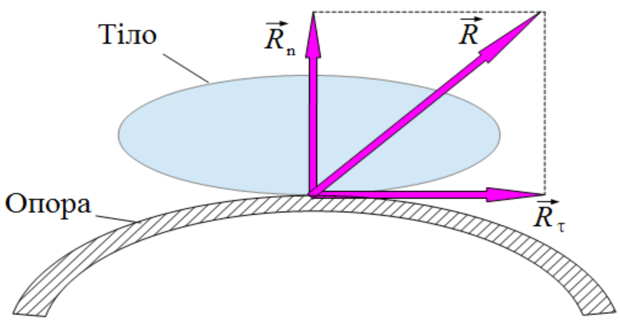


Рис. 2.12. Опора з тертям

Запитання для самоконтролю

1. Які тіла називають вільними?
2. Які переміщення в просторі може здійснювати вільне тіло?
3. Що називають числом ступенів вільності?
4. Скільки ступенів вільності має вільне тіло на площині, в просторі?
5. Яке тіло називають невільним?
6. Що називають в'яззю?
7. Скільки переміщень в просторі може здійснювати невільне тверде тіло?
8. Що називають реакцією в'язі?
9. Яку особливість мають активні сили?
10. Чим активні сили відрізняються від пасивних?
11. Сформулювати аксіому статики про звільнення від в'язей?
12. Чим відрізняються рівняння рівноваги вільних та невільних тіл?
13. Що таке ідеально гладенька поверхня?
14. В якому напрямку спрямована реакція ідеально гладенької поверхні?
15. Що таке шарнір, його види?
16. Яким є напрям реакції шарнірів?
17. Навести приклади шарнірів.
18. Що таке ідеальний стержень?
19. В якому напрямку спрямована реакція ідеального стержня?
20. Що таке гнучка в'язь?
21. В якому напрямку спрямована реакція гнучкої в'язі?
22. Що таке опора з тертям?
23. Які складові має реакція опори з тертям?

Лекція №3

тема **"Система збіжних сил"**

3.1. Аналітичний спосіб завдання сили.
3.2. Графічний, геометричний та аналітичний способи додавання сил. Головний вектор системи сил.
3.3. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної сили. Умови рівноваги твердого тіла під дією системи збіжних сил у геометричній та аналітичній формах.
3.4. Теорема про рівновагу твердого тіла під дією трьох непаралельних сил.

3.1. Аналітичний спосіб завдання сили використовує поняття проекції вектора сили на вісь та на площину. **Проекцією вектора сили на вісь** називають скалярну величину, що дорівнює довжині відрізка між проекціями на цю вісь початку й кінця вектора сили. Значення проекції вектора сили на вісь, тобто довжина відрізка, визначається добутком модуля вектора сили на косинус кута між лінією дії сили й додатним напрямом осі:

$$F_X = F \cdot \cos(\vec{F}, \vec{i}) = F \cdot \cos\alpha ,$$

де $\vec{i}$ – орт осі *OX*. У залежності від значення кута α проекція вектора сили може бути додатною, від'ємною та дорівнювати нулю (рис. 3.1).

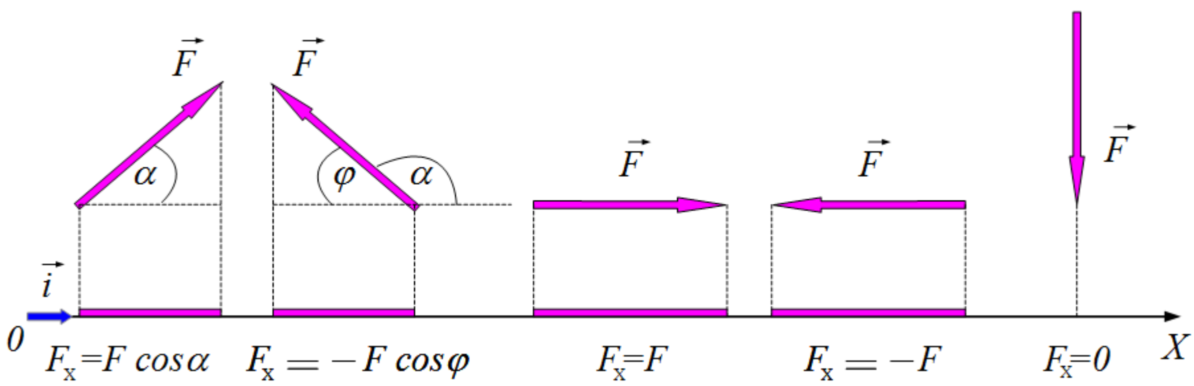


Рис. 3.1. Проекції вектора сили на вісь

Проекцією вектора сили на площину називають вектор $\vec{F}_{XY}$, що розміщений між проекціями на цю площину початку та кінця вектора сили $\vec{F}$ (рис. 3.2). Модуль цього вектора дорівнює:

$$F_{XY} = A_1 B_1 = AB = AC \cdot \cos\alpha .$$

Для визначення проекції вектора сили на вісь спочатку проектують вектор сили на площину, де лежить ця вісь, а потім знайдену проекцію проектують на вісь:

$$F_{XY} = F \cdot \cos\alpha \ , \qquad F_X = F_{XY} \cdot \cos\beta = F \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \ .$$

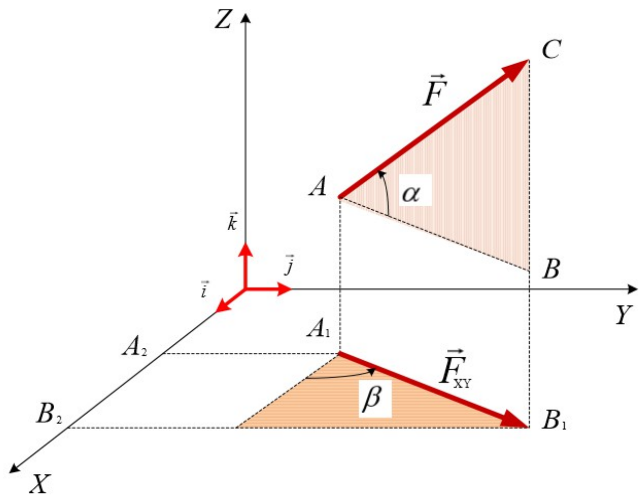


Рис. 3.2. Проекція вектора сили на площину

Аналітичний спосіб завдання сили застосовують тоді, коли відомі проекції вектора сили на координатні осі. Тоді модуль вектора сили визначається із формули:

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2} \ .$$

Вектор сили $\vec{F}$, як будь-який вектор можна подати через його складові або проекції на координатні осі:

$$\vec{F} = \vec{F}_X + \vec{F}_Y + \vec{F}_Z = F_X \cdot \vec{i} + F_Y \cdot \vec{j} + F_Z \cdot \vec{k} \ .$$

Напрям вектора сили в просторі визначається *напрямними косинусами* кутів між вектором сили та його складовими на координатні осі (рис. 3.3):

$$\cos\alpha = \frac{F_X}{F} \ , \qquad \cos\beta = \frac{F_Y}{F} \ , \qquad \cos\gamma = \frac{F_Z}{F} \ .$$

3.2. Існують три способи додавання сил: графічний, геометричний та аналітичний. Нехай до твердого тіла в точці А прикладені дві сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$.

За **графічним способом** будується паралелограм сил за допомогою олівця і лінійки в заданому масштабі, а рівнодійна сила $\vec{F}$ визначається як діагональ цього паралелограма.

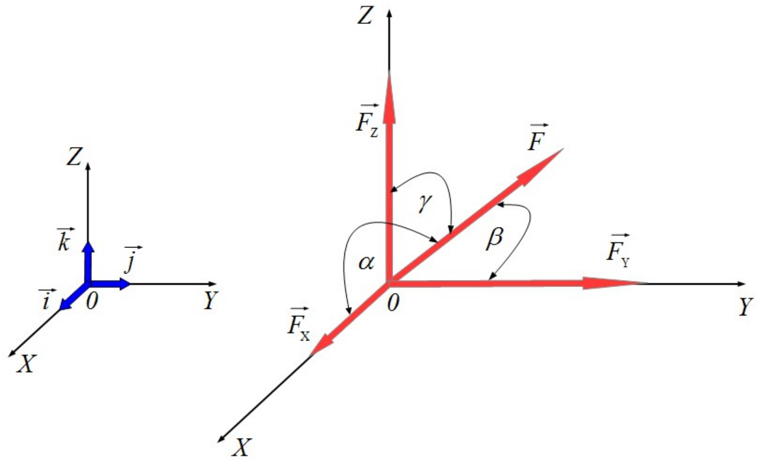


Рис. 3.3. Вектор сили та його складові на координатні осі

За **геометричним способом**, виходячи з правила паралелограма, будують *силовий трикутник* (рис. 3.4). Тоді модуль і напрям рівнодійної двох сил визначають за допомогою *теореми косинусів* та *теореми синусів.*

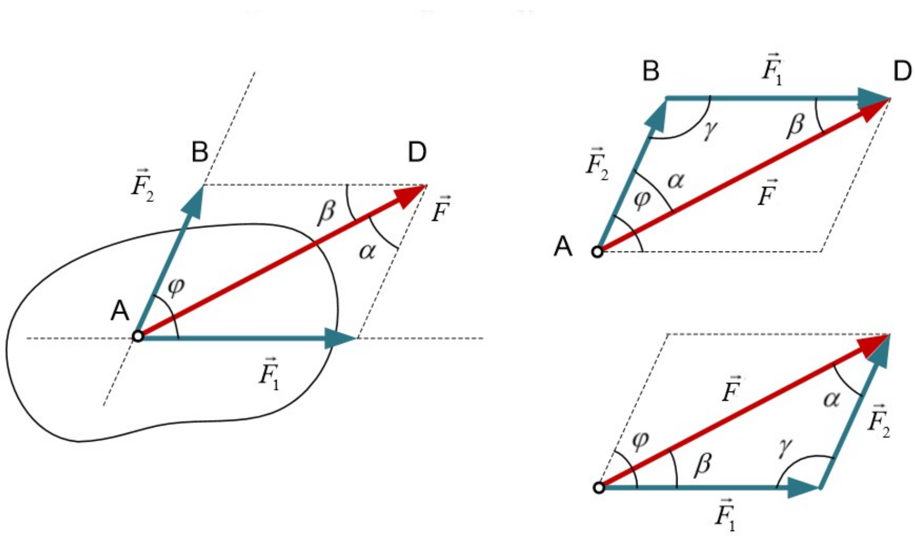


Рис. 3.4. Додавання сил за правилом паралелограма
та побудовою силового трикутника

Нехай на тверде тіло діє система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$. Вектор, що дорівнює векторній (геометричній) сумі сил системи називається **головним вектором системи сил**:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \ .$$

Оберемо в просторі довільну точку *O*, яку називають *точкою зведення* (рис. 3.5). Від цієї точки *O* в масштабі треба відкласти вектор $\vec{F}_1$, який паралельно переноситься з рисунка. Потім паралельно переноситься вектор

$\vec{F}_2$, початок якого треба з'єднати з кінцем вектора $\vec{F}_1$. Так само переносяться вектори $\vec{F}_3$ і $\vec{F}_4$. З'єднуючи початок першого вектора з кінцем останнього, одержують головний вектор системи сил $\vec{F}$. Замкнену з векторів фігуру називають **силовим багатокутником**. У силовому багатокутнику для всіх векторів, що додаються, стрілки векторів мають один напрям, але головний вектор системи сил напрямлений в протилежний бік. Модуль і напрям головного вектора системи сил не залежить від вибору в просторі точки зведення, тому його називають *векторним інваріантом* системи сил.

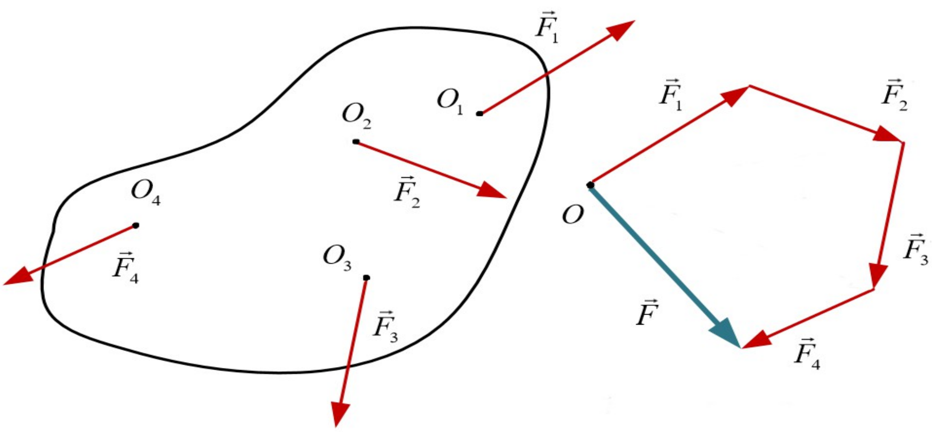


Рис. 3.5. Визначення напряму головного вектора системи сил побудовою силового багатокутника

Якщо на тверде тіло діє система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N)$, тоді головний вектор системи сил дорівнює:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i ,$$

де $\vec{F}_i$ – сили, що входять до складу системи.

Для **аналітичного способу** додавання сил застосовують наступну теорему: проекція головного вектора системи сил на будь-яку координатну вісь дорівнює сумі проекцій векторів сил, що додаються, на цю саму вісь.

Якщо головний вектор системи сил дорівнює $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$, то його проекція на вісь *OX* визначається співвідношенням (рис. 3.6):

$$F = F_{X1} + F_{X2} - F_{X3} - F_{X4} = ab + bc - ed - dc .$$

Для будь-якої плоскої системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N)$ її головний вектор $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ згідно цієї теореми має проекції на координатні осі:

$$F_X = \sum_{i=1}^{N} F_{X\,i} , \qquad F_Y = \sum_{i=1}^{N} F_{Y\,i} .$$

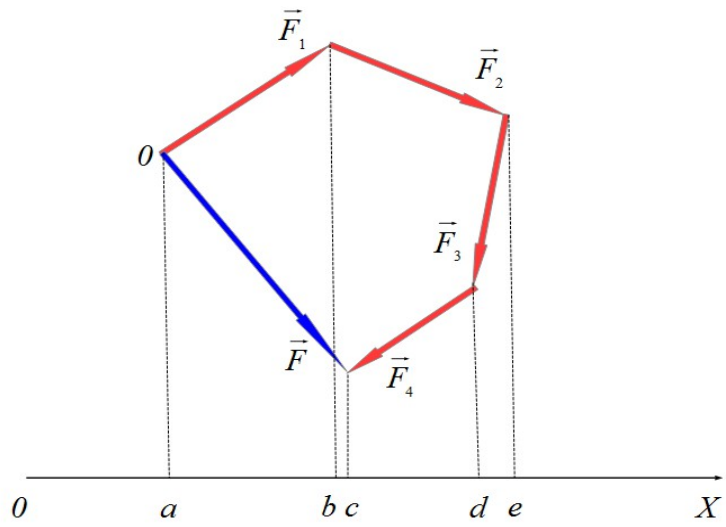


Рис. 3.6. Ілюстрація до застосування теореми про проекцію головного вектора системи сил на координатну вісь

За відомими проекціями знаходиться модуль головного вектора системи сил із формули:

$$F^2 = F_X^2 + F_Y^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} F_{X\,i}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} F_{Y\,i}\right)^2 ,$$

а його напрям визначається напрямними косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{F_X}{F} , \qquad \cos\beta = \frac{F_Y}{F} ,$$

де α і β – кути, які утворює головний вектор системи сил з координатними осями *OX* та *OY*.

Отже, суть аналітичного способу додавання сил зводиться до визначення модуля та напряму головного вектора системи сил.

3.3. Система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці (*центр сил*), називається **системою збіжних сил**. Окрім систем збіжних сил існують також системи довільно розташованих сил та системи паралельних сил. Кожен з цих типів систем сил може складатися із сил, розміщених в одній площині (*плоска система сил*) або в просторі (*просторова система сил*).

Найпростіша система збіжних сил розглянута в аксіомі про паралелограм сил, в якій показано, що рівнодійна двох сил зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах. Це означає, що система з будь-якою кількістю збіжних сил має рівнодійну.

Нехай до твердого тіла в точці *A* прикладені збіжні сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$ (рис. 3.7). Напрям рівнодійної цієї системи збіжних сил *графічним* способом можна визначити або за правилом паралелограма (випадок *а*), або побудовою силового багатокутника (випадок *б*).

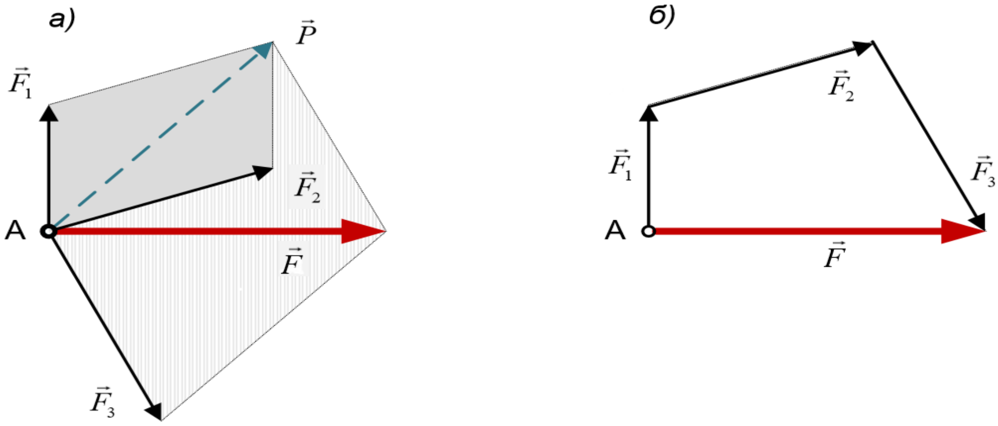


Рис. 3.7. Схема визначення рівнодійної системи трьох збіжних сил

Дія рівнодійної сили на тіло еквівалентна дії системи збіжних сил. Вона прикладена до центра сил й дорівнює геометричній сумі цих сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 .$$

Розглянутий спосіб визначення рівнодійної сили можна поширити на випадок системи, що має N збіжних сил. Визначення рівнодійної сили за правилом паралелограма вимагає спочатку переносити вектори сил вздовж їх ліній дії, як ковзні вектори, до центра сил і тільки після цього застосовувати це правило (рис. 3.8). Цього не потрібно робити, якщо рівнодійна системи збіжних сил визначається побудовою силового багатокутника. У будь-якому випадку рівнодійна такої системи збіжних сил виконує роль головного вектора системи збіжних сил і визначається рівністю:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i .$$

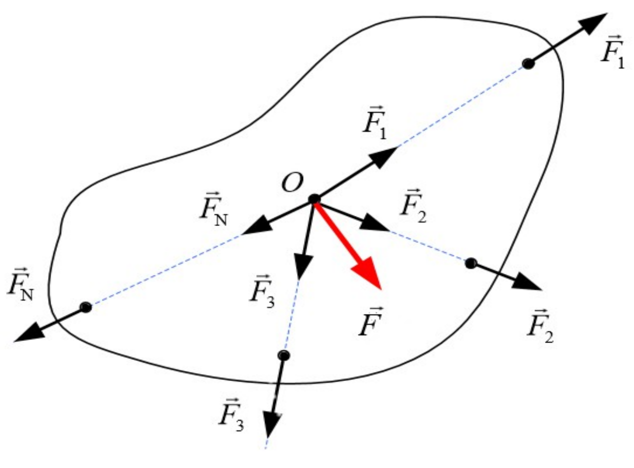


Рис. 3.8. Перенесення збіжних сил до центра сил

Таким чином, система збіжних сил зводиться до рівнодійної сили, що прикладена до точки перетину ліній дії сил (центр сил) системи, й геометрично дорівнює головному вектору цієї системи сил. Тобто, поняття рівнодійної сили й головного вектора збігаються для системи збіжних сил. Це є характерним тільки для системи збіжних сил. Для інших систем сил рівнодійну знаходять іншим шляхом. Існують системи сил, для яких рівнодійну визначити взагалі неможливо, хоч головний вектор можна визначити для будь-якої системи сил.

Зазначимо, що головний вектор системи сил може бути прикладеним до будь-якої точки простору (точка зведення) на відміну від рівнодійної сили, яка прикладена тільки до центра сил.

Розглянемо *аналітичний* спосіб визначення рівнодійної просторової системи збіжних сил. За цим способом треба знайти проекції рівнодійної просторової системи збіжних сил на координатні осі. Але вони визначаються аналогічно проекціям головного вектора на ті самі осі:

$$F_X = \sum_{i=1}^{N} F_{X\,i}\,, \qquad F_Y = \sum_{i=1}^{N} F_{Y\,i}\,, \qquad F_Z = \sum_{i=1}^{N} F_{Z\,i}\,.$$

Визначивши проекції рівнодійної сили на координатні осі, знаходять її модуль із формули:

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2}$$

та напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{F_X}{F}\,, \qquad \cos\beta = \frac{F_Y}{F}\,, \qquad \cos\gamma = \frac{F_Z}{F}\,.$$

Для рівноваги твердого тіла під дією прикладеної до нього системи збіжних сил необхідно й достатньо, щоб головний вектор системи цих сил дорівнював нулю:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0\,. \qquad (3.1)$$

Необхідність умови (3.1) випливає з того, що система збіжних сил еквівалентна дії одній силі – рівнодійній $\vec{F}$. Але тіло під дією однієї сили перебуватиме в рівновазі тільки тоді, коли ця сила дорівнюватиме нулеві. *Достатність* умови (3.1) випливає з того, що коли рівнодійна сила дорівнюватиме нулеві, то система збіжних сил є зрівноваженою, тобто, вона не впливатиме на стан рівноваги тіла.

Оскільки головний вектор системи збіжних сил можна знайти як геометричним так й аналітичним способами, то умови рівноваги твердого тіла під дією системи збіжних сил також можна подати як у геометричній так й в аналітичній формах.

Головний вектор системи збіжних сил замикає силовий багатокутник. Він перетворюється на нулю тоді, коли кінець останнього вектора збігається з початком першого вектора. Таким чином, за **геометричною умовою рівноваги** твердого тіла під дією збіжних сил необхідно й достатньо, щоб силовий багатокутник, побудований на цих силах, був замкненим.

Аналітична умова рівноваги твердого тіла під дією просторової системи збіжних сил має вигляд:

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2} = 0 \,. \tag{3.2}$$

Ця умова виконується лише тоді, коли доданки мають нульові значення:

$$F_X = \sum_{i=1}^{N} F_{X\,i} = 0 \,, \qquad F_Y = \sum_{i=1}^{N} F_{Y\,i} = 0 \,, \qquad F_Z = \sum_{i=1}^{N} F_{Z\,i} = 0 \,.$$

Таким чином, за **аналітичною умовою рівноваги** твердого тіла під дією системи збіжних сил необхідно й достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій цих сил на координатні осі дорівнювали нулю.

3.4. Доведемо *теорему про рівновагу твердого тіла під дією трьох непаралельних сил*: якщо тверде тіло під дією трьох непаралельних сил знаходиться у стані рівноваги, то всі сили лежать в одній площині, а їх лінії дії перетинаються в одній точці.

Нехай з трьох непаралельних сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$, що діють на зрівноважене тверде тіло, лінії дії двох сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, прикладених до точок *A* і *B,* перетинаються в точці *O* (рис. 3.9, *а*). Переносимо сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, як ковзні вектори, в точку *O* (рис. 3.9, б) й замінюємо їх дію рівнодійною $\vec{F}_{12}$ (рис. 3.9, в):

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \,.$$

Тоді на тіло діятиме сила $\vec{F}_{12}$, що прикладена до точки *O*, і сила $\vec{F}_3$, що прикладена до точки *C*. Якщо тіло при цьому знаходиться в стані рівноваги, то одержана система двох сил буде зрівноваженою, тобто, згідно першої аксіоми статики сили $\vec{F}_{12}$ і $\vec{F}_3$ повинні бути напрямлені вздовж однієї прямої *CO*.

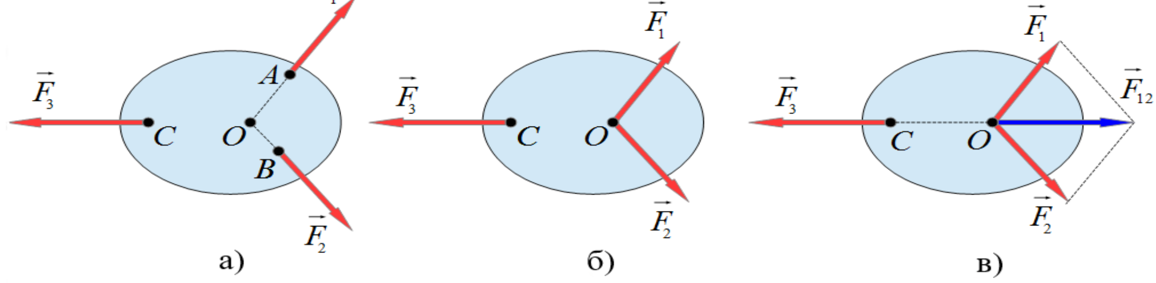


Рис. 3.9. Рівновага твердого тіла під дією трьох непаралельних сил

Отже, лінії дії всіх трьох сил перетинаються в точці *O*, а самі сили лежать в однієї площині, що й треба було довести.

Якщо в число трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, входять невідомі реакції в'язей, то за допомогою розглянутої теореми можна визначити лінію дії цих реакцій в'язей.

Так, для стержня *AB,* який закріплений через шарнір *A* з нерухомою поверхнею й спирається на виступ ідеально гладенької поверхні, лінія дії реакції шарніра $\vec{R}_A$ проходитиме центром шарніра та точкою *E* перетину ліній дії сили тяжіння $m\,\vec{g}$, що прикладена до точки *C* стержня, та реакції $\vec{R}$ ідеально гладенької поверхні (рис. 3.10).

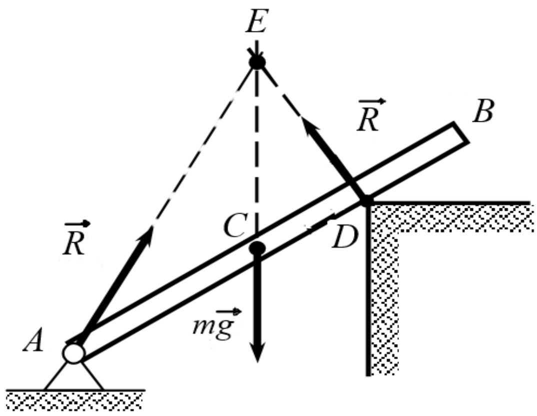


Рис. 3.10. Визначення напряму реакції шарніра

Отже, сили $m\,\vec{g}$, $\vec{R}_A$, $\vec{R}$ утворюють збіжну систему сил, а точка *E* являє собою центр сил цієї системи.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається проекцією сили на координатну вісь?
2. За яких умов проекція сили на вісь є додатною, від'ємною, нульовою?
3. Що називається проекцією сили на площину?
4. У чому суть аналітичного способу завдання сили?
5. Як відбувається додавання сил за графічним способом?
6. Як відбувається додавання сил за геометричним способом?
7. Що називається головним вектором системи сил?
8. Як за допомогою силового багатокутника визначити напрям дії головного вектора системи сил?
9. Чому головний вектор називається векторним інваріантом системи сил?
10. Сформулювати теорему про проекцію головного вектора системи сил на координатну вісь?
11. Як відбувається додавання сил за аналітичним способом?
12. Як визначити модуль й напрям головного вектора системи сил за аналітичним способом?
13. Що називається системою збіжних сил?
14. Що називається центром системи збіжних сил?
15. Чому систему збіжних сил можна зводити до рівнодійної сили?
16. Чим відрізняється головний вектор системи сил від рівнодійної сили?
17. Як знайти модуль й напрям рівнодійної сили?
18. Яка умова рівноваги твердого тіла під дією системи збіжних сил?
19. У чому полягає необхідність та достатність умови рівноваги твердого тіла під дією системи збіжних сил?
20. Сформулювати умову рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи збіжних сил у геометричній формі.
21. Сформулювати умову рівноваги твердого тіла під дією просторової системи збіжних сил в аналітичній формі.
22. Сформулювати та довести теорему про рівновагу твердого тіла під дією трьох непаралельних сил.
23. Як за допомогою теореми про рівновагу твердого тіла під дією трьох непаралельних сил визначають невідомі реакції в'язей?

Лекція №4

тема **“Момент сили відносно центра та осі”**

4.1. Момент сили відносно нерухомого центра. Теорема Варіньона про момент рівнодійної системи збіжних сил відносно нерухомого центра.
4.2. Момент сили відносно нерухомої осі.

4.1. Модуль і напрям сили характеризують здатність сили переміщувати тіло в просторі в деякому напрямку. Але дія сили на тіло не обмежується тільки поступальним рухом тіла. При певних умовах вона змушує обертатися тіло навколо нерухомого центра (точки) або нерухомої осі. Для характеристики обертальної дії сили вводиться поняття моменту сили відносно нерухомого центру й моменту сили відносно нерухомої осі.

Моментом сили відносно нерухомого центра називається векторна величина, що дорівнює векторному добутку радіус-вектора $\vec{r}$ точки тіла, до якої прикладена сила $\vec{F}$, на вектор сили:

$$\vec{M}_O = [\vec{r}\ \vec{F}].$$

Згідно властивостей векторного добутку вектор моменту сили відносно нерухомого центра (точка O) перпендикулярний до площини, в якій лежать радіус-вектор $\vec{r}$, вектор сили $\vec{F}$ і нерухомий центр, й спрямований в напрямку, звідки обертання тіла під дією сили відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис 4.1).

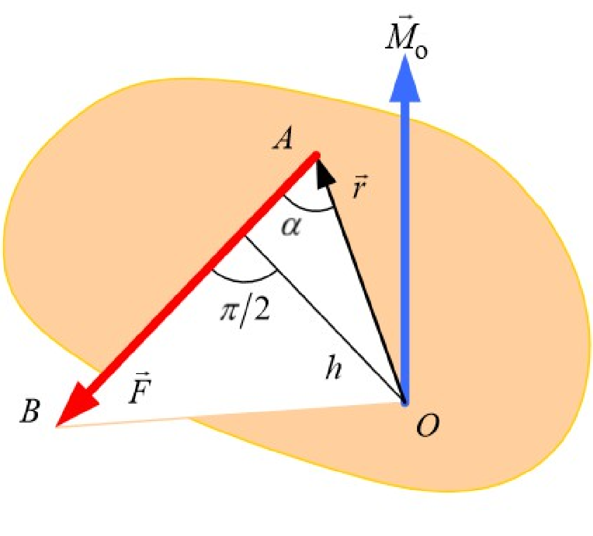


Рис. 4.1. Обертання твердого тіла під дією сили навколо нерухомого центра (точка O)

Модуль вектора моменту сили відносно нерухомого центра дорівнює:

$$M_O = rF \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F}) = Fr \cdot \sin\alpha = Fh, \tag{4.1.1}$$

де $h = r \cdot \sin\alpha$ – плече сили $\vec{F}$ відносно нерухомого центра (найкоротша відстань між центром O та лінією дії сили).

З формули (4.1.1) встановлюють умови, за яких момент сили відносно нерухомого центра дорівнює нулю: момент сили відносно нерухомого центра дорівнює нулю тільки тоді, коли модуль сили дорівнює нулю або лінія дії сили проходить через нерухомий центр O $(h = 0)$.

Момент сили відносно нерухомого центра не залежить від положення точки прикладання сили на лінії її дії, тому що під час переміщення сили вздовж лінії дії плече сили залишається сталою величиною.

Доведемо **теорему Варіньона**: *момент рівнодійної системи збіжних сил відносно довільно обраної точки твердого тіла дорівнює векторній (геометричній) сумі моментів усіх сил системи відносно тієї самої точки тіла.*

Нехай на тверде тіло діє система збіжних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$, лінії дії яких перетинаються в точці O (рис. 4.2). Довільно обираємо деяку точку A тіла, відносно якої положення точки O визначається радіус-вектором $\vec{r}$.

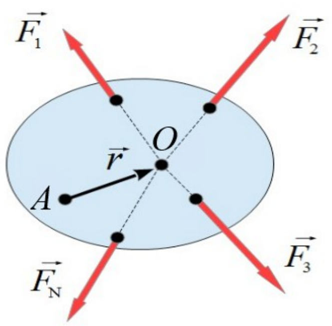


Рис. 4.2. Тверде тіло під дією системи збіжних сил

Рівнодійна заданої системи збіжних сил дорівнює:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N .$$

Згідно визначення моменту сили відносно нерухомого центра, маємо:

$$\vec{M}_A = [\vec{r}\ \vec{F}] = [\vec{r}\ (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N)] = [\vec{r}\ \vec{F}_1] + [\vec{r}\ \vec{F}_2] + \cdots + [\vec{r}\ \vec{F}_N] = \vec{M}_{A1} + \vec{M}_{A2} + \cdots \vec{M}_{AN} .$$

Отже,
$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{A\,i}\,, \tag{4.1.2}$$

де $\vec{M}_{A\,i}$ – моменти збіжних сил системи відносно довільної точки A тіла.

Формула (4.1.2) є *математичним записом* теореми Варіньона, яка узагальнюється на випадок будь-якої системи, що зводиться до рівнодійної.

4.2. Якщо момент сили відносно нерухомого центра характеризує здатність сили обертати тіло навколо цього центра, то момент сили відносно нерухомої осі характеризує здатність сили обертати тіло навколо цієї осі.

Моментом сили відносно нерухомої осі називається скалярна величина, що дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту сили відносно будь-якого вибраного на даної осі центра *O*.

Нехай сила $\vec{F}$ прикладена до деякої точки *A* твердого тіла (рис. 4.3).

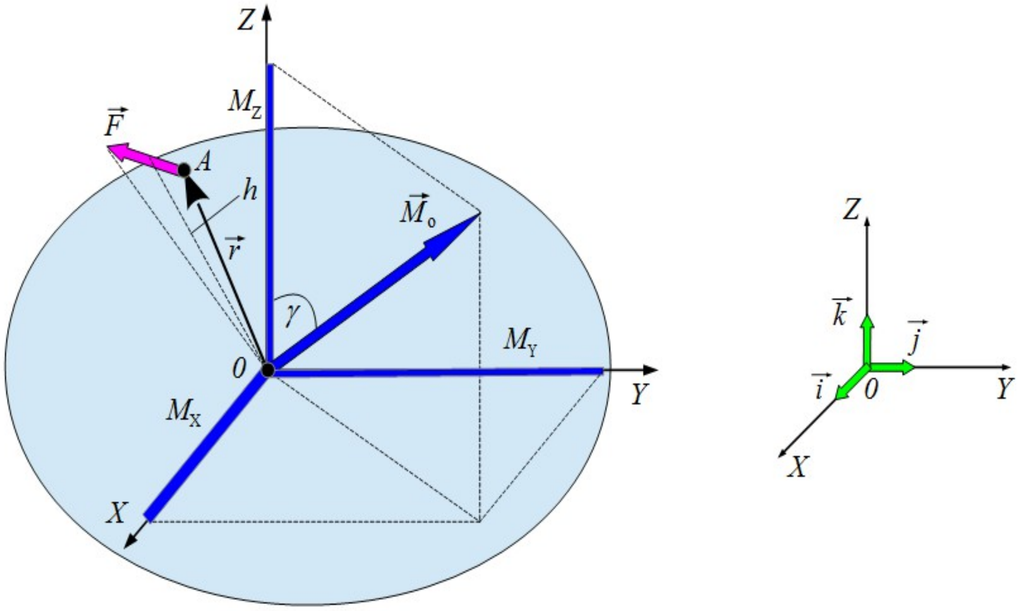


Рис. 4.3. Обертальна дія сили, що прикладена до твердого тіла в точці *A*

Момент цієї сили, наприклад, відносно осі *OZ* дорівнює:

$$M_Z = M_O \cdot \cos\gamma \ ,$$

де γ – кут між вектором $\vec{M}_O$ і віссю *OZ*. У загальному випадку момент сили відносно нерухомого центра можна подати через його проекції на координатні осі, які дорівнюють моментам сили відносно цих самих осей:

$$\vec{M}_O = M_X \cdot \vec{i} + M_Y \cdot \vec{j} + M_Z \cdot \vec{k} \ ,$$

де M_X , M_Y , M_Z – моменти сили відносно осей *OX*, *OY*, *OZ*; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орти.

Момент сили відносно нерухомої осі можна також визначити за допомогою *алгебраїчного* моменту проекції вектора сили на площину, що перпендикулярна до осі, відносно точки перетину осі з цією площиною. Наприклад, для визначення моменту сили $\vec{F}$ відносно осі *OZ* спроектуємо вектор сили $\vec{F}$ на площину *OXY* й одержимо вектор $\vec{F}_{XY}$ (рис. 4.4). Тоді алгебраїчний момент сили $\vec{F}_{XY}$ відносно центра *O* дорівнює:

$$M_Z = \pm\, F_{XY} \cdot h_{XY}\ , \tag{4.2.1}$$

де h_{XY} – плече сили $\vec{F}_{XY}$ в площині *OXY*; знаки $\pm$ означають, що момент сили відносно осі може бути як додатним, так й від'ємним.

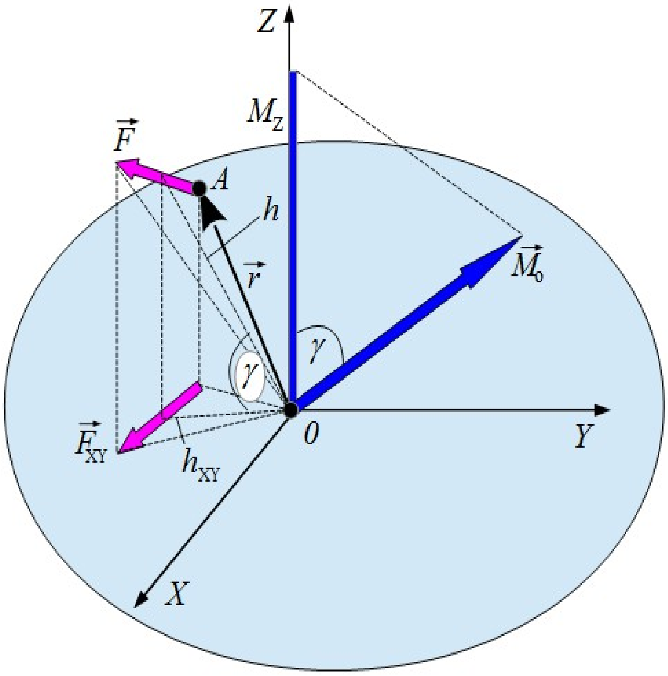


Рис. 4.4. Ілюстрація до визначення моменту сили відносно осі *OZ* за допомогою проекції вектора сили на площину *OXY*

Момент сили відносно осі вважається *додатним*, якщо з боку додатного напряму осі можна побачити намагання сили повернути тіло відносно осі проти ходу годинникової стрілки. Під час повороту тіла за ходом годинникової стрілки момент сили відносно осі вважається *від'ємним*. Так, на рис. 4.4 $M_Z > 0$.

З формули (4.2.1) встановлюють умови, коли момент сили відносно нерухомої осі дорівнює нулю (сила не здатна обертати тіло навколо осі):

1) лінія дії сили паралельна осі або збігається з нею, тобто проекція сили на площину, що перпендикулярна осі, дорівнює нулю;

2) лінія дії сили перетинає вісь, тобто плече проекції сили на площину, що перпендикулярна осі, дорівнює нулю.

В обох випадках вісь і сила лежать в одній площині. Об'єднуючи обидва випадки приходимо до висновку: момент сили відносно нерухомої осі дорівнює нулю, якщо сила і вісь лежать в одній площині.

Оскільки проекція вектора сили $\vec{F}$ і радіус-вектор $\vec{r}$ на усі паралельні площини, що перпендикулярні обраної нерухомої осі, є однаковими, то значення моменту сили відносно осі не залежать від положення на цієї осі нерухомого центра *O*.

Момент сили відносно нерухомої осі не залежить від положення точки прикладання сили на її лінії дії, тому що під час переміщення точки прикладання сили вздовж лінії дії не змінюється ні проекція сили на площину, ні її плече.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається моментом сили відносно нерухомого центра?
2. Яким є зміст поняття моменту сили відносно нерухомого центра? У яких одиницях він вимірюється?
3. Як визначити напрям вектора моменту сили відносно нерухомого центра?
4. За якою формулою визначається модуль вектора моменту сили відносно нерухомого центра?
5. Що називається плечем сили відносно нерухомого центра?
6. Чому під час переміщення вектора сили вздовж її лінії дії момент сили відносно нерухомого центра залишається сталою величиною?
7. За яких умов момент сили відносно нерухомого центра дорівнює нулю?
8. Сформулювати теорему Варіньона.
9. Довести теорему Варіньона.
10. Яким є математичний запис теореми Варіньона?
11. Що називається моментом сили відносно нерухомої осі?
12. Яким є зміст поняття моменту сили відносно нерухомої осі ?
13. Як зв'язані між собою момент сили відносно нерухомого центра з моментами сили відносно нерухомої осі ?
14. Як визначити момент сили відносно нерухомої осі за допомогою проекції вектора сили на площину?
15. Що називається плечем сили відносно осі?
16. За яким правилом визначається знак (додатний, від'ємний) моменту сили відносно нерухомої осі ?
17. За яких умов момент сили відносно нерухомої осі дорівнює нулю?
18. Чому значення моменту сили відносно нерухомої осі не залежать від положення на цієї осі центра *O*?

Чому під час переміщення вектора сили вздовж лінії її дії момент сили відносно нерухомої осі залишається сталою величиною?

Лекція №5

тема **"Системи паралельних сил та системи пар сил"**

5.1. Рівнодійна системи паралельних сил одного й протилежного напрямку.
5.2. Поняття про пару сил. Момент пари сил.
5.3. Властивості пар сил. Теореми про пари сил.
5.4. Додавання пар сил та умова рівноваги системи пар сил.

5.1. Система паралельних сил включає такі сили, лінії дії яких паралельні між собою. При цьому сили можуть мати один або протилежний напрям. Система паралельних сил зводиться до рівнодійної. Але правило паралелограма для знаходження рівнодійної безпосередньо до паралельних сил застосовувати не можна, тому що точка перетину ліній їх дії знаходиться на нескінченності.

Для визначення рівнодійної системи паралельних сил застосовується спосіб, який використовує заміну системи паралельних сил на еквівалентну систему збіжних сил.

Нехай до твердого тіла в точках *A* і *B* прикладені дві паралельні і однаково спрямовані сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ $(F_1 < F_2)$ (рис. 5.1). Знайдемо рівнодійну цих сил.

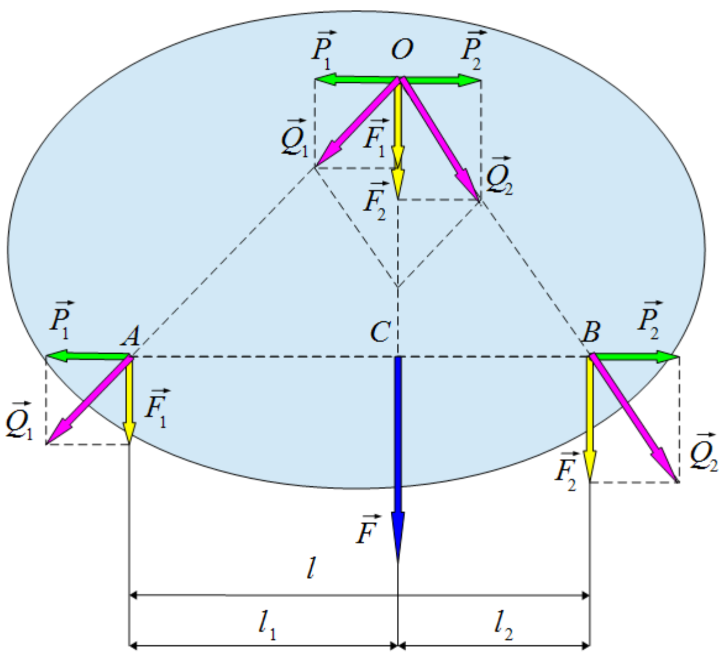


Рис. 5.1. Рівнодійна $\vec{F}$ двох паралельних сил одного напрямку

Для цього спочатку до точок *A* і *B* треба прикласти зрівноважені сили $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$ $[(\vec{P}_1, \vec{P}_2) \sim 0]$. Потім сили $\vec{F}_1, \vec{P}_1$ і $\vec{F}_2, \vec{P}_2$ треба додати за правилом паралелограма. Рівнодійні цих сил $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$ є збіжними силами. Перенесемо сили $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$ в точку *O* перетину їх ліній дії й знов розкладемо за правилом паралелограма на складові:

$$\vec{Q}_1 = \vec{F}_1 + \vec{P}_1, \quad \vec{Q}_2 = \vec{F}_2 + \vec{P}_2.$$

Отже, до точки *O* прикладані зрівноважені сили $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2,$ які за другою аксіомою статики можна відкинути. Тоді дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2,$ які діють вздовж однієї прямої в одному напрямку, мають рівнодійну:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Лінія дії рівнодійної $\vec{F}$ збігається з лініями дії сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2,$ тому її модуль дорівнює сумі модулів сил, що додаються:

$$F = F_1 + F_2.$$

Перенесемо рівнодійну $\vec{F}$ вздовж лінії її дії в точку *C*, що лежить на прямій *AB* та знайдемо її положення. Для цього розглянемо подібні трикутники *OAC* і OQ_1F_1, а також трикутники *OBC* і OQ_2F_2. З подібності трикутників складемо відношення:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{P_1}{F_1} \Rightarrow P_1 = \frac{AC}{OC} \cdot F_1,$$

$$\frac{BC}{OC} = \frac{P_2}{F_2} \Rightarrow P_2 = \frac{BC}{OC} \cdot F_2.$$

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{AC}{OC} \cdot F_1 = \frac{BC}{OC} \cdot F_2.$$

З рис. 5.1 бачимо, що $AC = l_1,$ $BC = l_2.$ Тоді $l_1 \cdot F_1 = l_2 \cdot F_2$ або $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{l_2}{l_1}.$

Таким чином, рівнодійна двох паралельних сил одного напрямку, що діють на тверде тіло, паралельна цим силам й діє в тому самому напрямку; її модуль дорівнює сумі модулів сил, а лінія її дії розташована в площині сил на відстанях, які обернено пропорційні модулям цих сил.

Нехай до твердого тіла в точках *A* і *B* прикладені дві паралельні й протилежно спрямовані сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ $(F_1 > F_2)$ (рис. 5.2). Аналогічним способом замінюємо систему паралельних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ на систему збіжних сил $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2),$ переміщуємо сили $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$ в центр сил (точка *O*) й знов розкладемо на складові: $\vec{Q}_1 = \vec{F}_1 + \vec{P}_1,$ $\vec{Q}_2 = \vec{F}_2 + \vec{P}_2.$

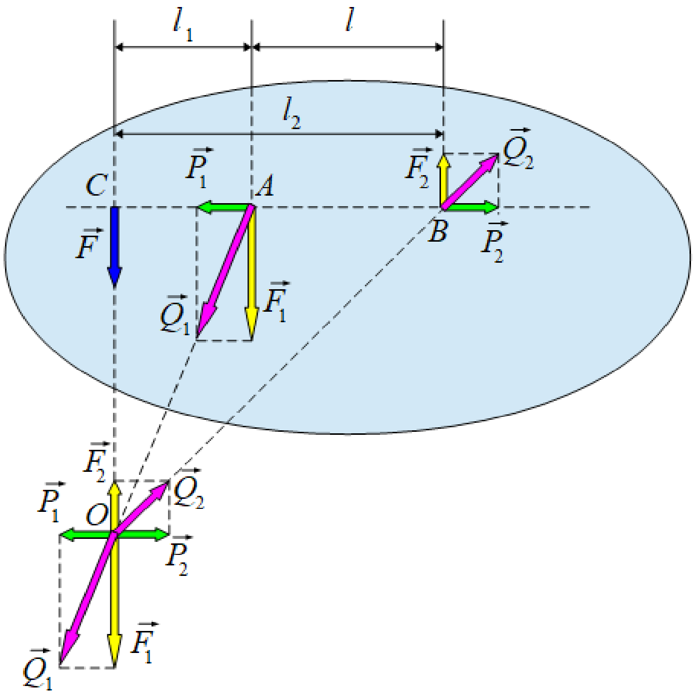


Рис. 5.2. Рівнодійна $\vec{F}$ двох паралельних сил протилежного напрямку

Отже, до точки O прикладані зрівноважені сили $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$, які за другою аксіомою статики можна відкинути. Тоді дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, які діють вздовж однієї прямої в протилежних напрямках, мають рівнодійну:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

Лінія дії рівнодійної $\vec{F}$ паралельна лініям дії сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, тому модуль рівнодійної сили дорівнює різниці модулів сил, що додаються:

$$F = F_1 - F_2 .$$

Перенесемо рівнодійну $\vec{F}$ вздовж лінії її дії в точку C, що лежить на прямій AB та знайдемо її положення. Для цього розглянемо подібні трикутники OAC і OQ_1F_1, а також трикутники OBC і OQ_2F_2. З подібності трикутників складемо відношення:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{P_1}{F_1}\ , \qquad \frac{BC}{OC} = \frac{P_2}{F_2}.$$

Проводячи аналогічні математичні перетворення з врахуванням того, що $AC = l_1,\ BC = l_2,$ одержимо:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Таким чином, рівнодійна двох паралельних сил, що діють на тверде тіло в протилежних напрямках, паралельна цим силам й діє в бік більшої сили; її модуль дорівнює різниці модулів сил, а лінія її дії розташована в площині сил на відстанях, які обернено пропорційні модулям цих сил.

Якщо система паралельних сил включає більше ніж дві сили, тоді послідовне додавання цих сил дозволяє знайти рівнодійну даної системи сил.

5.2. Умовою додавання двох паралельних сил є нерівність модулів сил, що додаються $(F_1 \neq F_2)$. Розглянемо систему з двох паралельних сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, які рівні за модулем й протилежні за напрямом $(\vec{F}_1 = -\vec{F}_2)$. Модуль рівнодійної цієї системи сил дорівнює нулю $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0)$. Рівність нулю рівнодійної може створювати ілюзію про те, що обидві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ утворюють зрівноважену систему сил. Але за першою аксіомою статики дві сили можуть бути зрівноваженими тільки тоді, коли вони діють вздовж однієї прямої у протилежних напрямках.

Отже, в даному випадку сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ не зрівноважують одна одну, тому що вони мають різні лінії дії. Рівнодійна для цих сил відсутня, тому їх не можна зрівноважити однією силою.

Система з двох паралельних сил, що рівні за модулем і протилежні за напрямком називається **парою сил**. Пара сил, так само як і сила, є самостійним елементом статики й являє собою особливу міру механічної взаємодії тіл (рис. 5.3).

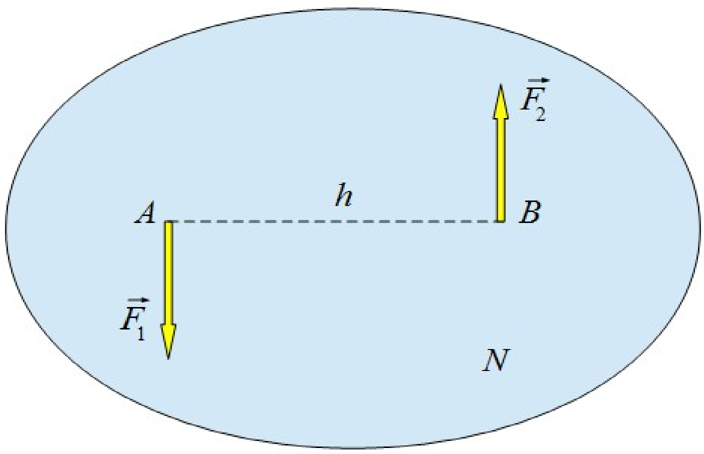


Рис. 5.3. Пара сил

Площина *N*, яка проходить через лінії дії сил пари, називається *площиною дії пари* або *площиною пари*. Найкоротша відстань *h* (перпендикуляр) між лініями дії сил пари називається *плечем пари*.

Дія пари сил на тверде тіло приводить до його обертання. Обертальний ефект пари залежить від напряму і модуля сил, від довжини плеча та положення в просторі площини пари. Обертальна здатність пари сил характеризується моментом пари.

Моментом пари називається векторна величина, що дорівнює векторному добутку радіус-вектора $\vec{r}$ точки прикладання однієї із сил пари відносно точки прикладання іншої сили, на вектор цієї самої сили:

$$\vec{M} = [\vec{r}\ \vec{F}].$$

З цього визначення випливає, що момент пари дорівнює моменту однієї із сил пари відносно точки прикладання другої сили.

Нехай вектор сили $\vec{F}_1$ прикладений до точки A, а вектор сили $\vec{F}_2$ прикладений до точки B (рис. 5.4, а, б). Момент сили $\vec{F}_2$ відносно точки A:

$$\vec{M}_A(\vec{F}_2) = [\vec{r_{AB}}\ \vec{F}_2],$$

а момент сили $\vec{F}_1$ відносно точки B:

$$\vec{M}_B(\vec{F}_1) = [\vec{r_{BA}}\ \vec{F}_1].$$

Враховуючи, що $\vec{r_{AB}} = -\vec{r_{BA}}$, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, маємо:

$$\vec{M}_A(\vec{F}_2) = [\vec{r_{AB}}\ \vec{F}_2] = [(-\vec{r_{BA}})(-\vec{F}_1)] = [\vec{r_{BA}}\vec{F}_1] = \vec{M}_B(\vec{F}_1) = [\vec{r}\ \vec{F}] = \vec{M}\ .$$

Модуль моменту пари дорівнює:

$$M = rF \cdot \sin(\vec{r}\ \vec{F}) = rF \cdot \sin\alpha = Fh\ ,$$

де $h = r \cdot \sin\alpha$ – плече пари.

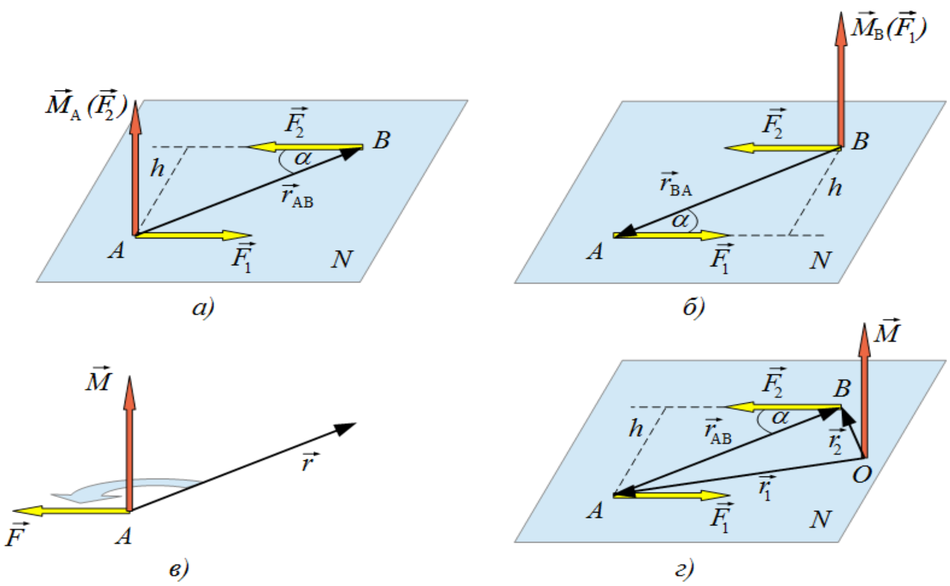


Рис. 5.4. Ілюстрація до визначення моменту пари

Згідно властивостей векторного добутку вектор моменту пари перпендикулярний до площини пари, в якій лежать вектори $\vec{r}$ і $\vec{F}$, а його напрям визначається за *правилом свердлика*: якщо рукоятка свердлика збігається з першим множником $\vec{r}$ векторного добутку й за найменшим кутом повертати її до другого множника $\vec{F}$, то поступальний рух свердлика покаже напрям вектора моменту пари $\vec{M}$ (рис. 5.4, в).

Таким чином, моментом пари називається вектор $\vec{M}$, модуль якого дорівнює добутку однієї із сил пари на її плече, спрямований перпендикулярно до площини пари в той бік, звідки напрям повороту тіла під дією пари відбувається проти ходу годинникової стрілки.

Обертальна дія пари визначається обертальною дією сил, що утворюють пару. Знайдемо суму моментів сил пари відносно довільної точки *O*, що лежить у площині її дії (рис. 5.4, г):

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = [\vec{r}_1 \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \vec{F}_2] =$$

$$= [\vec{r}_1 \vec{F}_1] + [\vec{r}_2(-\vec{F}_1)] = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\vec{F}_1] =$$

$$= [\vec{r}_{AB} \vec{F}_1] = [\vec{r}\,\vec{F}\,] = \vec{M}\ .$$

Одержана сума не залежить від положення точки *O* й визначається лише положенням точок прикладання сил, що утворюють пару.

Таким чином, сума моментів сил, що утворюють пару, є однаковою відносно будь-якої точки простору й завжди дорівнює моменту пари. Оскільки положення точки *O* обране довільно, то вектор $\vec{M}$ моменту пари можна прикласти до будь-якої точки площини її дії. Це означає, вектор $\vec{M}$ є *вільним* вектором.

5.3. Пара сил, як особлива міра взаємодії твердих тіл, має характерні властивості, які розкриваються трьома теоремами. Ці теореми встановлюють умови еквівалентного перетворення пар сил без зміни їх дії на тверде тіло і дозволяють приводити системи пар до простішого вигляду.

Теорема 1: *дія пари на тверде тіло не змінюється, якщо перенести пару в площині її дії в будь-яке інше положення.*

Нехай до точок *A* і *B* твердого тіла прикладані однакові за модулем й протилежні за напрямом сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, які утворюють пару $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$. Довжина відрізка *AB* дорівнює плечу пари *h* (рис. 5.5, а).

У площині дії пари проводимо відрізок *CD = AB* довжиною *h (*рис. 5.5, б). До точки C перпендикулярно відрізку *CD* прикладемо дві зрівноважені сили $\vec{F}_3$ і $\vec{F}_4$, а до точки *D* − дві зрівноважені сили $\vec{F}_5$ і $\vec{F}_6$ за умови, що модулі сил $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4| = |\vec{F}_5| = |\vec{F}_6|$. Проведемо лінії дії сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, а також лінії дії сил $\vec{F}_3, \vec{F}_4$ і $\vec{F}_5, \vec{F}_6$. У точку *K* перетину ліній дії сил переносимо, як ковзні вектори, сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_3$, які мають рівнодійну $\vec{F}_{13}$. У точку L перетину ліній дії сил переносимо, як ковзні вектори, сили $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_6$, які мають рівнодійну $\vec{F}_{26}$.

Сили $\vec{F}_{13}$ і $\vec{F}_{26}$ однакові за модулем і діють вздовж однієї прямої (діагональ ромба) у протилежних напрямах:

$$\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{26}.$$

Це означає, що вони зрівноважують одна одну й за другою аксіомою статики ці сили можна відкинути.

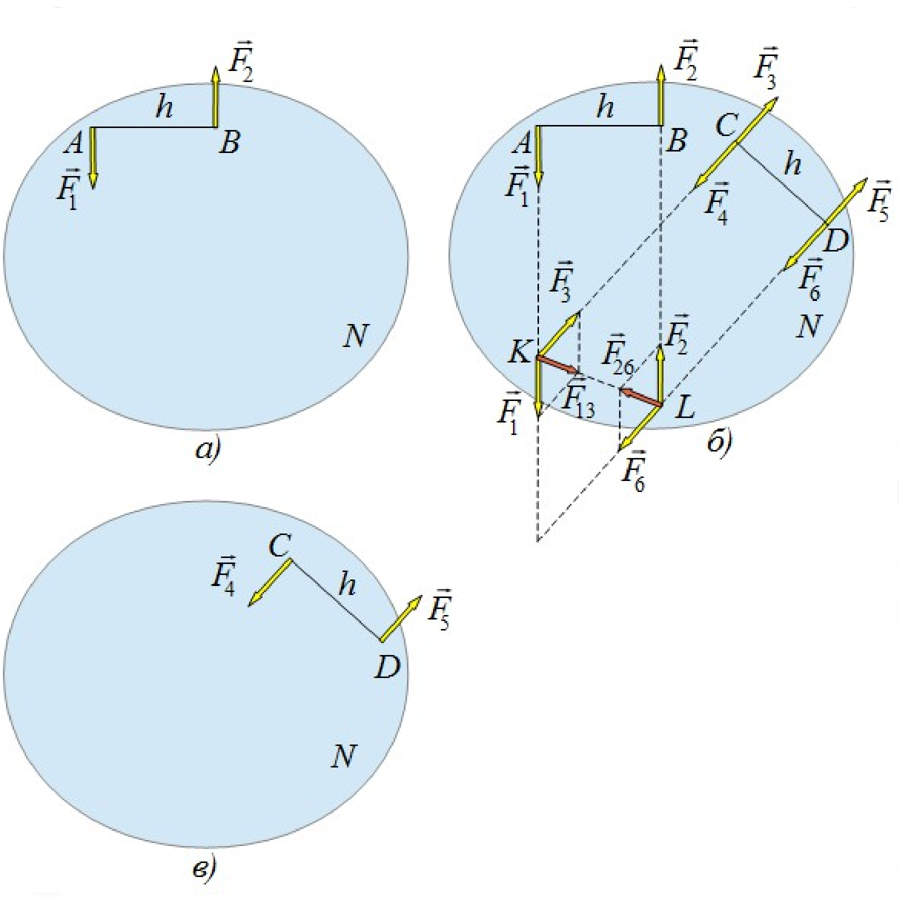


Рис. 5.5. Ілюстрація доведення теореми 1

Виявляється, що тверде тіло опиняється під дією сил $\vec{F}_4$ і $\vec{F}_5$, які утворюють пару $(\vec{F}_4, \vec{F}_5)$, що еквівалентна даній парі сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ (рис. 5.5, в). Пару сил $(\vec{F}_4, \vec{F}_5)$ можна розглядати як вихідну пару, яка переноситься в площині її дії в інше положення.

Теорема 2: *дія пари на тверде тіло не змінюється, якщо модуль сил пари та її плече змінюються так, що момент пари залишається сталою величиною.*

Нехай до точок A і B твердого тіла прикладані однакові за модулем й протилежні за напрямом сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, які утворюють пару $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ з плечем $AB = h$ і моментом $M = F_1 h$ (рис. 5.6, а).

На продовженні відрізка *AB* на відстані a $(a \neq h)$ від точки *B* довільно обираємо положення точки *C* твердого тіла й прикладаємо до цієї точки зрівноважені сили $\vec{F}_3$ і $\vec{F}_4$, лінія дії яких перпендикулярна до відрізка *BC* (рис. 5.6, б), а модуль цих сил визначається співвідношенням:

$$F_3 = F_4 = F_1 \frac{h}{a}. \tag{5.3.1}$$

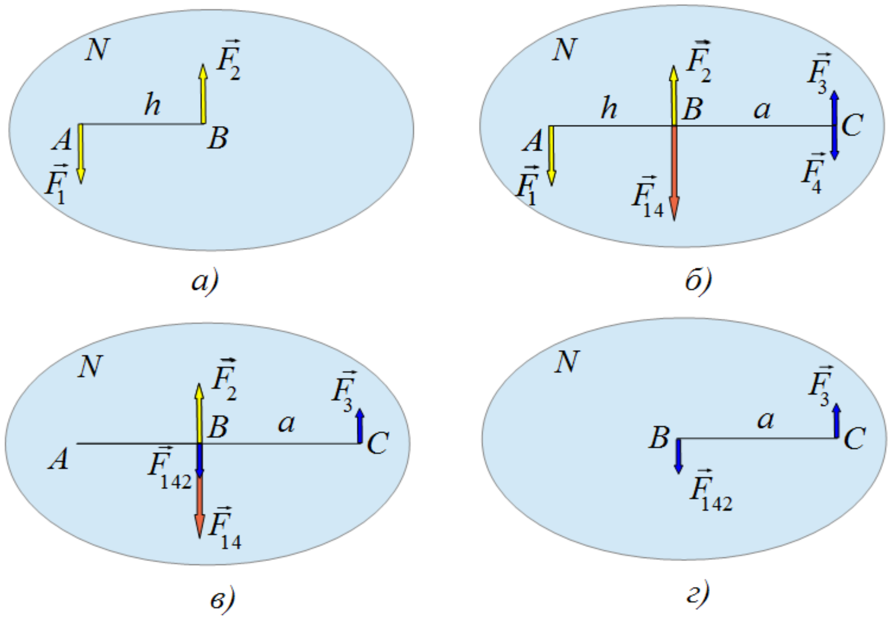


Рис. 5.6. Ілюстрація доведення теореми 2

Маємо дві паралельні сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_4$ $(F_1 \neq F_4)$, модуль рівнодійної яких дорівнює $F_{14} = F_1 + F_4$, а точка прикладання визначається співвідношенням:

$$\frac{F_1}{F_4} = \frac{a}{h}.$$

Цієї умові задовольняє точка *B*. Сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_4$ замінюємо рівнодійною силою $\vec{F}_{14}$, тому сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_4$ відкидаємо (рис. 5.6, в).

Отже, до точки *B* прикладані дві сили $\vec{F}_{14}$ і $\vec{F}_2$, що діють вздовж однієї прямої у протилежних напрямах. Рівнодійна $\vec{F}_{142}$ цих сил спрямована в бік дії сили $\vec{F}_{14}$, а її модуль дорівнює:

$$F_{142} = F_{14} - F_2 = F_1 + F_4 - F_2 = F_4 = F_3,$$

де $F_2 = F_1$. Сили $\vec{F}_{14}$ і $\vec{F}_2$ замінюємо рівнодійною силою $\vec{F}_{142}$, тому сили $\vec{F}_{14}$ і $\vec{F}_2$ відкидаємо (рис. 5.6, г).

Таким чином, дана пара сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ з плечем h замінюється на еквівалентну пару $(\vec{F}_{142}, \vec{F}_3)$ з плечем a, яка повертає тверде тіло в тому ж самому напрямку проти ходу годинникової стрілки, що і пара $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$. З формули (5.3.1):

$$F_3 a = F_1 h = M \ .$$

Це означає, що моменти обох пар сил мають не тільки однакові напрямки, а також однакові модулі.

Згідно цієї теореми дві пари сил завжди можна привести до одного плеча, відповідно змінюючи при цьому модулі сил. Цю властивість пар застосовують під час їх додавання.

Теорема 3: *дія пари на тверде тіло не змінюється, якщо цю пару перенести із даної площини в будь-яку іншу паралельну площину.*

Нехай до точок A і B твердого тіла прикладані однакові за модулем й протилежні за напрямом сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, які утворюють пару $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ в площині N_1 (рис. 5.7, а). У середині твердого тіла проведемо площину N_2, яка паралельна площині N_1. У площині N_2 відкладаємо відрізок $ED = AB$ (рис. 5.7, б).

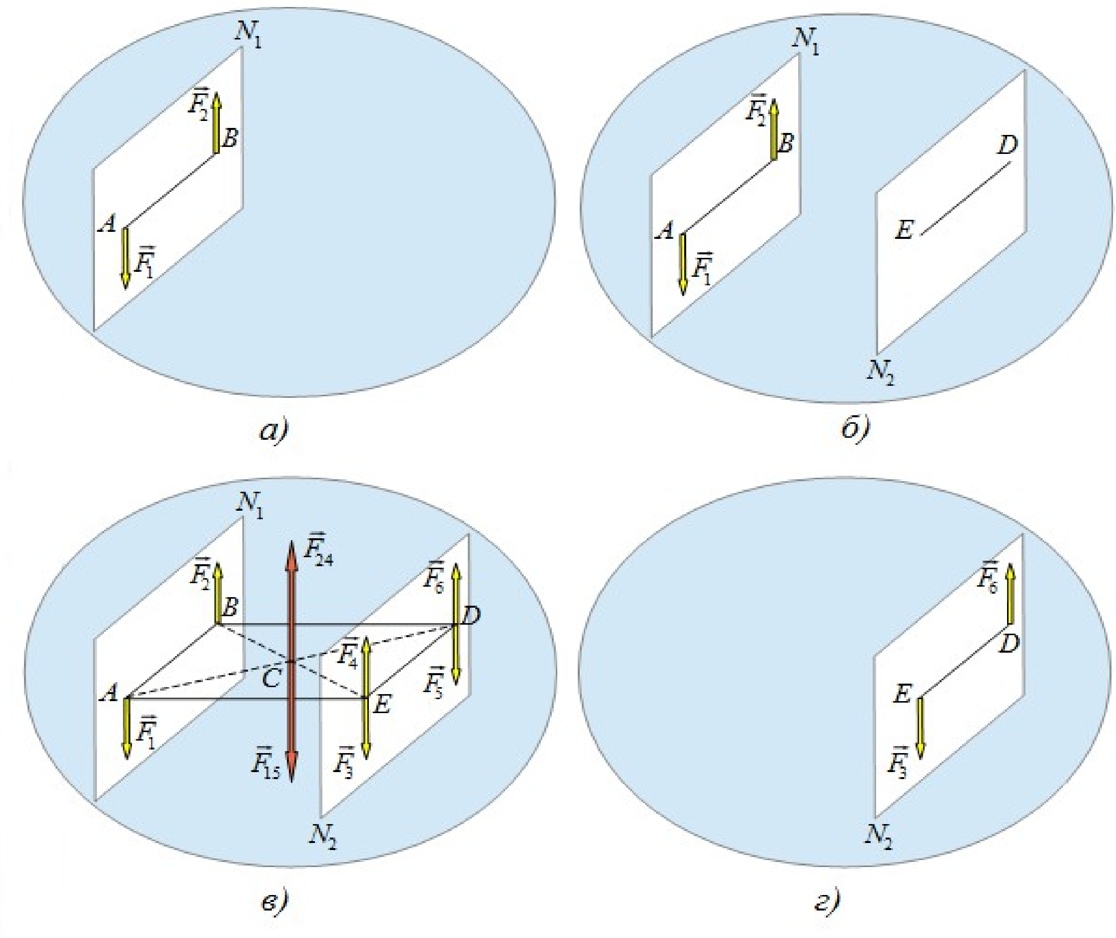


Рис. 5.7. Ілюстрація доведення теореми 3

До точок E і D прикладемо зрівноважені сили $\vec{F}_3$ і $\vec{F}_4$ та $\vec{F}_5$ і $\vec{F}_6$, модулі яких дорівнюють модулям сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$:

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4| = |\vec{F}_5| = |\vec{F}_6| = F ,$$

тобто системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ є еквівалентними. З'єднаємо точки A і E та B і D відрізками AE і BD. Фігура $ABDE$ є паралелограмом, діагоналі якого перетинаються в точці C і поділяються навпіл (рис. 5.7, в).

Додамо паралельні сили $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_4$. Рівнодійна цих сил $\vec{F}_{24} = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$ прикладена до точки C й має модуль:

$$F_{24} = F_2 + F_4 = 2\ F .$$

Рівнодійна паралельних сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_5$ також дорівнює $\vec{F}_{15} = \vec{F}_1 + \vec{F}_5$, прикладена до точки C в протилежному напрямі й має модуль:

$$F_{15} = F_1 + F_5 = 2\ F .$$

Отже, рівнодійні $\vec{F}_{24}$ і $\vec{F}_{15}$ утворюють зрівноважену систему сил, яку за другою аксіомою статики можна відкинути (рис. 5.7, г).

Таким чином, $\vec{F}_3$ і $\vec{F}_6$, що залишилися, утворюють пару $(\vec{F}_3, \vec{F}_6)$, яка еквівалентна даній парі $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, має такий самий момент, але розташована в паралельній площині.

Усі доведені теореми стверджують про те, що ні значення модулів сил, ні їх напрям, ні довжина плеча пари значення не мають. Єдиною повною характеристикою механічної дії пари на тверде тіло є її момент, який не зв'язаний з будь-якою точкою цього тіла. Вектор моменту пари може бути перенесеним паралельно в довільну точку твердого тіла, зберігаючи при цьому свій модуль і напрям.

З викладеного матеріалу в лекціях №1 − №5 можна зробити висновок про те, що механічні взаємодії твердих тіл у статиці характеризуються трьома типами векторів: силою − *ковзним* вектором, моментом сили відносно нерухомого центра − *прикладеним* або *зв'язаним* вектором та парою сил − *вільним* вектором.

5.4. Розглянемо додавання пар сил. Для цього доведемо **теорему**: *система пар сил з моментами $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_N$ еквівалентна одній парі, момент якої дорівнює векторній сумі моментів усіх пар системи*:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i .$$

Для доведення теореми розглянемо тверде тіло, на яке діє дві пари сил з моментами $\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ і $\vec{M}(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$. Моменти цих пар перпендикулярні до площин N_1 і N_2, які перетинаються між собою (рис. 5.8, а).

На лінії перетину площин N_1 і N_2 відкладаємо відрізок AB. Виходячи з властивостей пар, приведемо дані пари до спільного плеча AB. Тоді сили обох пар будуть прикладені до точок A і B, а їх модуль визначатиметься формулами:

$$F_1 = F_2 = \frac{M(\vec{F}_1, \vec{F}_2)}{AB}, \qquad P_1 = P_2 = \frac{M(\vec{P}_1, \vec{P}_2)}{AB}.$$

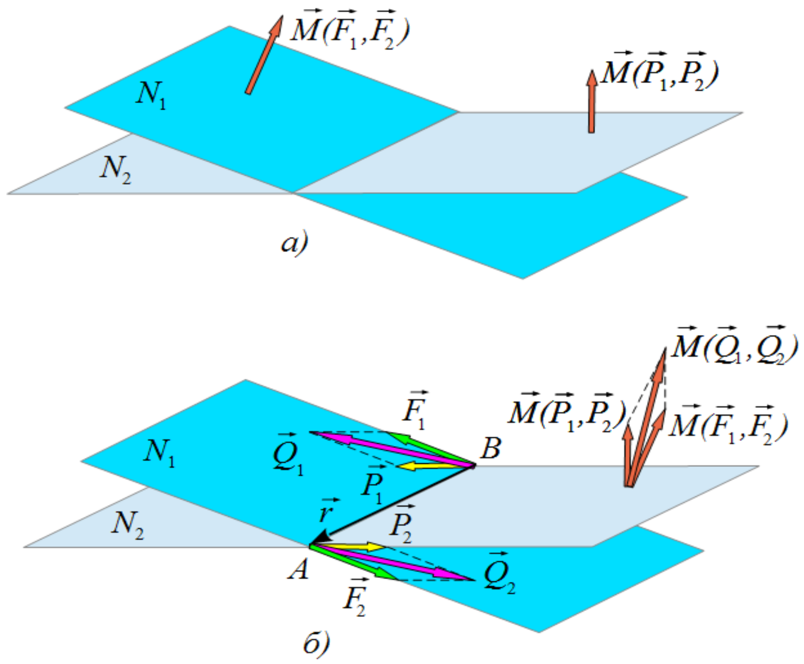


Рис. 5.8. Ілюстрація доведення теореми про додавання пар сил

Додамо сили, прикладені до точок A і B, за правилом паралелограма й одержимо рівнодійні цих сил $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$, (рис. 5.8, б):

$$\vec{Q}_1 = \vec{F}_1 + \vec{P}_1, \qquad \vec{Q}_2 = \vec{F}_2 + \vec{P}_2.$$

Сили $\vec{Q}_1 = -\vec{Q}_2$ утворюють пару $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$, яка еквівалентна спільної дії пар $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ і $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$.

Введемо радіус-вектор $\vec{r}$ точки A відносно точки B. Тоді момент пари $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ дорівнює:

$$\vec{M} = [\vec{r}\,\vec{Q}] = [\vec{r}\,(\vec{F} + \vec{P})] = [\vec{r}\,\vec{F}] + [\vec{r}\,\vec{P}] = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) + \vec{M}(\vec{P}_1, \vec{P}_2).$$

Одержаний результат можна поширити на довільну кількість пар сил. Нехай до твердого тіла прикладена система пар сил із моментами $(\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_N)$. Тоді момент еквівалентної пари дорівнює:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i .$$

Вектор моменту $\vec{M}$ еквівалентної пари зображують стороною *багатокутника моментів*, що замикає цей багатокутник, побудований на векторах $(\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_N)$ (рис. 5.9).

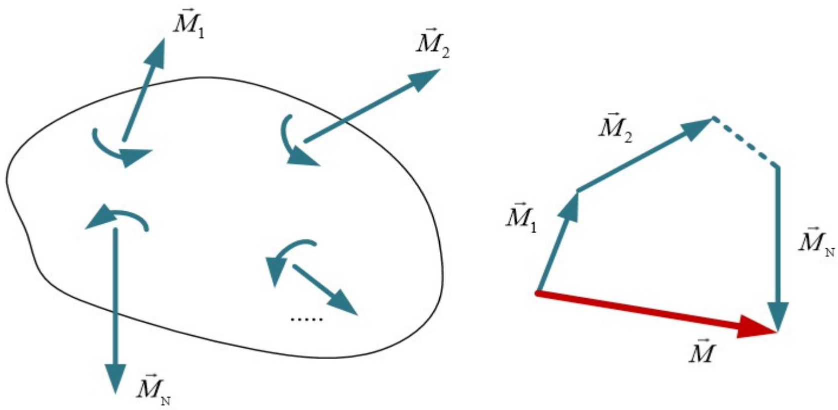


Рис. 5.9. Багатокутник моментів пар сил

Для **рівноваги** системи пар сил, що прикладені до твердого тіла, необхідно й достатньо, щоб векторна сума моментів пар системи дорівнювала нулю:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = 0 .$$

З геометричної точки зору це означає, що багатокутник моментів пар сил повинен бути замкненим.

Розглянемо випадок, коли пари сил розташовані в одній площині (рис. 5.10). Для плоскої системи пар сил вводиться поняття алгебраїчного моменту пари. **Алгебраїчним моментом** пари називається добуток однієї із сил пари на її плече:

$$M = \pm F \cdot h .$$

Знак “*плюс*” відповідає обертанню тіла під дією пари проти ходу годинникової стрілки; знак “*мінус*” відповідає обертанню тіла під дією пари за ходом годинникової стрілки. Під час розв'язку плоских задач пару інколи зображують дуговою стрілкою, яка показує напрям обертання цієї пари (рис. 5.10).

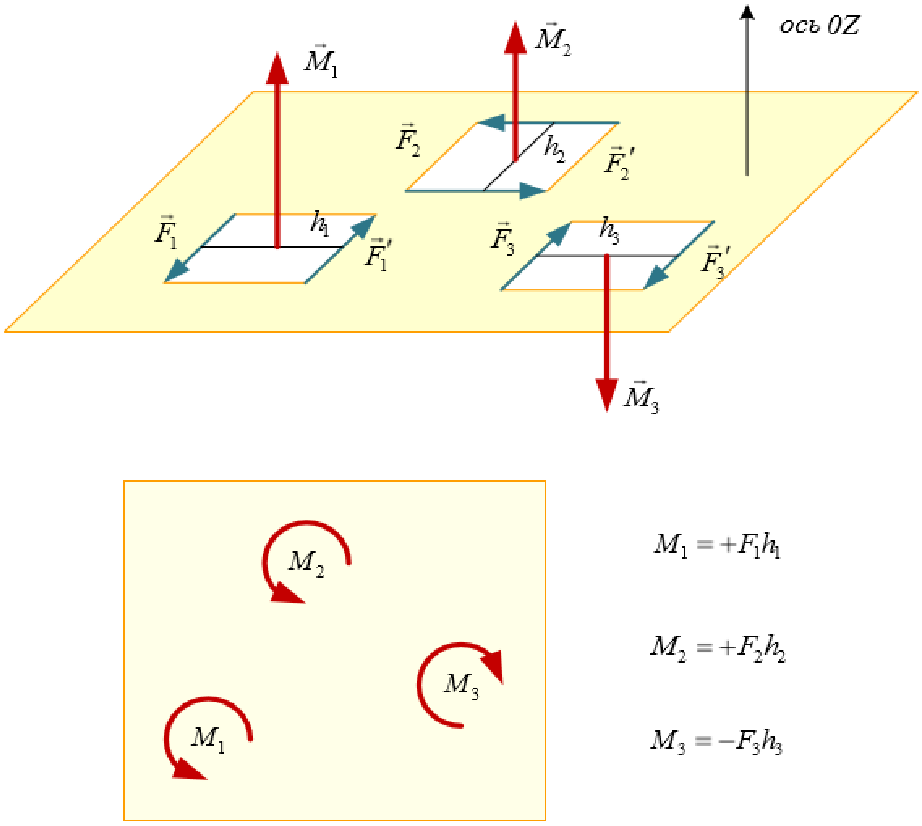


Рис. 5.10. Пари сил на площині

Додавання пар сил на площині або в паралельних площинах є частковим випадком додавання пар. При цьому векторне додавання замінюється на алгебраїчне. Згідно рис. 5.10 модуль результуючого моменту еквівалентної пари дорівнює:

$$M = M_1 + M_2 - M_3 = F_1h_1 + F_2h_2 - F_3h_3 .$$

Для рівноваги системи пар сил, що діють на тверде тіло в одній площині, необхідно й достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів пар сил дорівнювала нулю:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = 0 .$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називається системою паралельних сил?
2. Чому для визначення рівнодійної системи паралельних сил не можна застосовувати правило паралелограма?

3. Який спосіб визначення рівнодійної сили застосовується для системи паралельних сил?
4. Як знайти модуль, напрям і точку прикладання рівнодійної двох нерівних паралельних сил одного напрямку?
5. Як знайти модуль, напрям і точку прикладання рівнодійної двох нерівних паралельних сил протилежного напрямку?
6. Що називається парою сил?
7. Що називається площиною пари сил?
8. Що називається плечем пари сил?
9. Чому пара сил не знаходиться в стані рівноваги?
10. Чому пара сил є самостійним елементом статики?
11. Що відбувається з твердим тілом, коли до нього прикладена пара сил?
12. Що називається моментом пари?
13. За якою формулою визначається вектор моменту пари?
14. За якою формулою визначається модуль вектора моменту пари?
15. В яких одиницях вимірюється модуль вектора моменту пари?
16. Як визначається напрям вектора моменту пари?
17. Чому момент пари є вільним вектором?
18. Сформулювати теорему про перенесення пари в площині її дії.
19. Довести теорему про перенесення пари в площині її дії.
20. Сформулювати теорему про зміну модуля сили і плеча пари.
21. Довести теорему про зміну модуля сили і плеча пари.
22. Сформулювати теорему про перенесення пари в паралельну площину.
23. Довести теорему про перенесення пари в паралельну площину.
24. Які властивості має пара сил?
25. Чому момент пари сил є повною характеристикою механічної дії пари на тверде тіло?
26. Які типи векторів використовує статика?
27. Сформулювати теорему про додавання пар сил.
28. Довести теорему про додавання пар сил.
29. Як привести пари сил до одного плеча?
30. Яку роль виконує багатокутник моментів?
31. Як визначається результуючий момент системі пар сил, що прикладені до різних точок твердого тіла?
32. За якої умови система пар сил в знаходиться в стані рівноваги?
33. Що називається алгебраїчним моментом пари сил?
34. За якою формулою визначається алгебраїчний момент пари сил?
35. Як визначається результуючий момент системі пар сил на площині?

Лекція №6

тема **“Довільна плоска системи сил”**

6.1 Лема Пуансо про паралельне перенесення сили.
6.2. Зведення плоскої системи сил до заданого центра. Головний вектор системи сил. Головний момент системи сил відносно центра зведення. Основна теорема статики. Випадки зведення довільної плоскої системи сил або до пари сил, або до рівнодійної сили.
6.3 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил. Форми рівнянь рівноваги. Умови рівноваги системи паралельних сил, системи збіжних сил, системи пар сил на площині.

6.1. Розглянемо **лему Пуансо** про паралельне перенесення сил: не змінюючи дії сили на тверде тіло, її можна переносити паралельно самої собі в будь-яку точку тіла, якщо до сили додати пару сил із моментом, що дорівнює моменту даної сили відносно точки, в яку переноситься сила.

Нехай до твердого тіла в точці A прикладена сила $\vec{F}$ (рис. 6.1, а). Дія цієї сили на тіло не зміниться, якщо до будь-якої іншої точки B прикласти зрівноважені сили $\vec{F}\,'$ і $\vec{F}\,''$ (рис. 6.1, б).

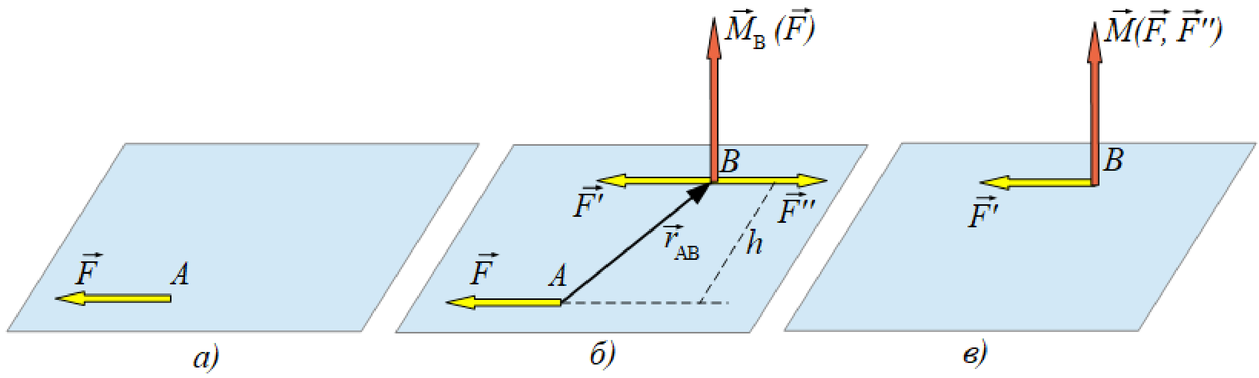


Рис. 6.1. Паралельний перенос сили на площині

Припустимо, що лінія дії сил $\vec{F}\,'$ і $\vec{F}\,''$ паралельна лінії дії сили $\vec{F}$, а модулі всіх сил є однаковими:

$$|\vec{F}\,'| = |\vec{F}\,''| = |\vec{F}| = F, \quad \vec{F}\,' = \vec{F}, \quad \vec{F}\,'' = -\vec{F}.$$

Маємо систему з трьох сил. Силу $\vec{F}\,'$ можна розглядати як силу $\vec{F}$, яка переноситься паралельно самої собі в точку B. Сили $\vec{F}$ і $\vec{F}\,''$ утворюють так звану *приєднану* пару з моментом $\vec{M}(\vec{F}, \vec{F}\,'')$, який дорівнює моменту сили $\vec{F}$ відносно точки B:

$$\vec{M}(\vec{F},\vec{F}") = \vec{M}_B(\vec{F}) = [\vec{r}_{AB}\vec{F}].$$

Таким чином, силу $\vec{F}$ можна переносити паралельно самої собі в будь-яку точку твердого тіла, а приєднана пара сил $(\vec{F},\vec{F}")$ вводиться для того, щоб не змінювати дії сили $\vec{F}$ на тіло під час її паралельного переносу.

Розглянемо приклад. Нехай до стержня (консоль), один кінець якого закріплюється (жорстке защемлення) прикладена сила $\vec{F}$ в точці *A* (рис. 6.2, а).

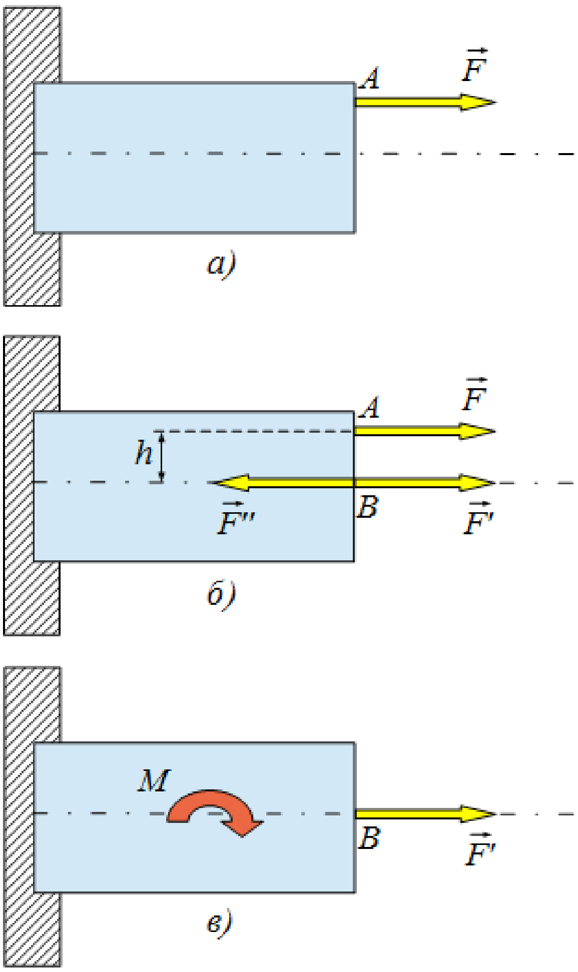


Рис. 6.2. Паралельний перенос сили в площині поздовжнього перерізу консолі

Прикладемо до точки В зрівноважені сили $\vec{F}'$ і $\vec{F}"$ (рис. 6.2, б), для яких $|\vec{F}'| = |\vec{F}"| = |\vec{F}| = F$, $\vec{F}' = \vec{F}$, $\vec{F}" = -\vec{F}$. Тоді дія на стержень сили $\vec{F}$ еквівалентна дії сили $\vec{F}'$, яка розтягує стержень, і дії приєднаної пари сил $(\vec{F},\vec{F}")$ з моментом $M(\vec{F},\vec{F}") = Fh$, яка згинає стержень.

6.2. Нехай на тверде тіло діє плоска система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N)$, що прикладені до різних точок цього тіла (рис. 6.3, а). Оберемо на площині довільну точку *O*, яку називають *центром зведення*, й, використовуючи лему Пуансо, перенесемо в цю точку діючи на тіло сили. Після цього на тверде тіло діятиме система сил $(\vec{F}_1{}' = \vec{F}_1,\ \vec{F}_2{}' = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N{}' = \vec{F}_N)$, які прикладені до точки O, й система приєднаних пар сил $[(\vec{F}_1, \vec{F}_1{}''), (\vec{F}_2, \vec{F}_2{}''), \dots, (\vec{F}_N, \vec{F}_N{}'')]$ з моментами $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_N$ (рис. 6.3, б).

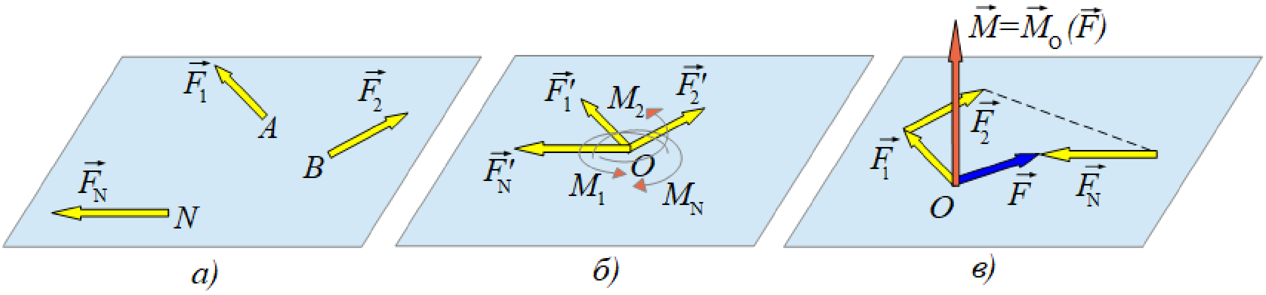


Рис. 6.3. Зведення плоскої системи сил до одного центра

Сили, що прикладені до точки O, можна замінити однією силою $\vec{F}$, яка дорівнює векторній сумі цих сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1{}' + \vec{F}_2{}' + \dots + \vec{F}_N{}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\,.$$

Ця сила називається **головним вектором** системи сил, які зведені до одного центра. Головний вектор можна знайти або геометричним способом побудовою силового багатокутника або аналітичним способом:

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{N} F_{Xi}\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{N} F_{Yi}\Big)^2}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{F_X}{F}\,, \qquad \cos\beta = \frac{F_Y}{F}.$$

Використовуючи теорему про додавання пар сил, приєднані пари можна замінити однією парою, момент якої дорівнює векторній сумі моментів цих пар:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_N\,.$$

Оскільки моменти приєднаних пар дорівнюють моментам даних сил відносно центра зведення $\vec{M}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1),\ \vec{M}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2), \dots, \vec{M}_N = \vec{M}_O(\vec{F}_N)$, то

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_N = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_N) = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{M}_O(\vec{F}).$$

Векторна сума моментів усіх сил системи відносно центра зведення називається **головним моментом** системи сил відносно того ж центра зведення:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_O(\vec{F}_i).$$

Таким чином, будь-яку систему довільно розташованих сил завжди можна замінити однією силою, яка є головним вектором системи сил й прикладена до центра зведення, та парою сил, момент якої дорівнює головному моменту даної системи сил відносно того ж центра зведення. Це твердження відоме як **основна теорема статики**.

Головний вектор довільної системи сил не можна розглядати як рівнодійну цієї системи сил, тому що він замінює дану систему сил не сам, а разом із парою сил. Модуль і напрям головного вектора не залежить від вибору положення центра зведення на площині, оскільки під час побудови силового багатокутника сили переносяться в точку *O* паралельно початковому напряму й силовий багатокутник завжди буде однаковим.

Модуль і напрям головного моменту залежить від положення центра зведення, тому що із зміною його положення змінюються моменти даних сил відносно центра зведення. Це означає, що головний момент завжди слід відносити до певного центра зведення.

З основної теореми статики випливає наслідок: якщо дві системи сил, які діють на тверде тіло, мають однакові головні вектори й однакові головні моменти відносно заданого центра зведення, то вони є еквівалентними.

Таким чином, згідно основної теореми статики довільну плоску систему сил можна привести до більш простого вигляду, замінюючи її однією силою, яка прикладена до центра зведення і дорівнює головному вектору $\vec{F}$, і парою сил із моментом $\vec{M} = \vec{M}_O(\vec{F})$, що дорівнює головному моменту системи сил відносно того ж самого центра зведення.

Оскільки всі сили системи лежать в одній площині, то головний вектор $\vec{F}$ також лежить у цій площині. Приєднані пари також лежать у цій площині, моменти яких додаються алгебраїчно. Тому для плоскої системи сил замість вектора головного моменту системи, спрямованого перпендикулярно до площини розташування сил (рис. 6.3, в), використовують поняття *алгебраїчного головного моменту сил* $M_O(\vec{F})$, який дорівнює модулю вектора моменту пари $\vec{M}$ і визначається алгебраїчною сумою моментів сил відносно заданого центра зведення *O*:

$$M_O(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} M_O(\vec{F}_i) = M .$$

У деяких випадках довільну плоску систему сил можна привести ще до більш простішого вигляду. Розглянемо ці випадки.

1. $\vec{F} = 0$, $M_O(\vec{F}) \neq 0$.

Це означає, що дана система сил зводиться до однієї пари сил, момент якої дорівнює алгебраїчному головному моменту даної системи сил відносно центра зведення. При цьому значення алгебраїчного головного моменту та його знак не залежать від вибору положення центра зведення.

2. $\vec{F} \neq 0,\ M_O(\vec{F}) = 0.$

Це означає, що дана система сил зводиться до рівнодійної сили, яка за модулем і напрямом дорівнює головному вектору системи сил, а лінія її дії проходить центром зведення.

Прикладом цього випадку є зведення системи збіжних сил до рівнодійної сили. Центром зведення для системи збіжних сил є точка перетину ліній дії цих сил, тобто центр сил, відносно якого моменти збіжних сил дорівнюють нулю (плече сил дорівнює нулю).

3. $\vec{F} \neq 0,\ M_O(\vec{F}) \neq 0.$

Це означає, що дана система сил зводиться до рівнодійної сили, яка за модулем і напрямом дорівнює головному вектору системи сил, але її лінія дії не проходить центром зведення і знаходиться від нього на відстані $h = \dfrac{M}{F}$. Розглянемо це детальніше.

Нехай система сил, довільно розташованих на площині, замінюється головним вектором системи сил $\vec{F}$, який прикладений до центра зведення O, і парою сил із моментом $M = M_O(\vec{F})$ відносно того ж самого центра зведення (рис. 6.4, а).

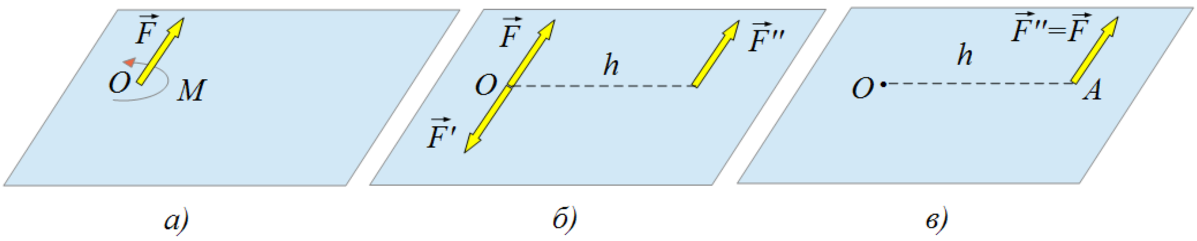


Рис. 6.4. Зведення плоскої системи сил до рівнодійної сили

Відомо,що елементи пари (модуль сил, довжина плеча) можна змінювати, зберігаючи при цьому момент пари. Припустимо, що пара утворюється силами $\vec{F}\,' = -\vec{F}\,''$, які за модулем дорівнюють головному вектору системи сил $|\vec{F}\,'| = |\vec{F}\,''| = |\vec{F}\,| = F$, а плече пари визначається співвідношенням:

$$h = \frac{M}{F},$$

де M – алгебраїчний момент пари сил.

Одну із сил пари $\vec{F}\,'$ прикладемо до центра зведення O й спрямуємо її вздовж лінії дії сили $\vec{F}$ у протилежному до не напрямку (рис. 6.4, б). Тоді сили $\vec{F}\,' = -\vec{F}$ є зрівноваженими, які за другою аксіомою статики можна відкинути. Виявляється, що вихідна система довільно розташованих сил еквівалентна однієї силі $\vec{F}" = \vec{F}$, яка є рівнодійною цієї системи сил, дорівнює головному вектору системи сил, лінія дії якої проходить на відстані *h* від центра зведення *O*.

6.3. Для рівноваги системи довільно розташованих сил на площині необхідно і достатньо, щоб одночасно головний вектор системи сил і алгебраїчний головний момент системи цих сил відносно центра зведення дорівнювали нулю:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0, \qquad M_O(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} M_O(\vec{F}_i) = 0, \tag{6.3.1}$$

де центр зведення *O* є будь-якою точкою площини, оскільки у випадку $\vec{F} = 0$ значення алгебраїчного головного моменту системи сил $M_O(\vec{F})$ не залежить від вибору положення центра зведення.

Умови (6.3.1) є необхідними тому, що у випадку, коли одна з них не виконується, то система діючих на тіло сил або зводиться до рівнодійної $(\vec{F} \neq 0)$ або до пари сил $(M \neq 0)$. Це означає, що система сил не буде зрівноваженою.

Достатність цих умов пояснюється тим, що у випадку $\vec{F} = 0$ система сил зводиться тільки до пари сил із моментом *M*. Оскільки $(M = 0)$, то має місце рівновага системи сил.

Виходячи з рівнянь (6.3.1), для довільної плоскої системи сил встановлюються аналітичні умови рівноваги в трьох формах. Нехай лінії дії сил лежать у площині *0XY*. Тоді аналітичні умови рівноваги плоскої системи сил мають вигляд:

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = \sqrt{(\sum_{i=1}^{N} F_{Xi})^2 + (\sum_{i=1}^{N} F_{Yi})^2} = 0, \qquad M_O(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} M_O(\vec{F}_i) = 0.$$

Вони виконуються тоді, коли:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Xi} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Yi} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} M_O(\vec{F}_i) = 0. \tag{6.3.2}$$

Ці рівняння є **першою формою** аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил на кожну з двох координатних осей та алгебраїчна сума моментів цих сил відносно будь-якого центра на площині дії сил дорівнювали нулю.

Перші два рівняння є умовою того, щоб тіло під дією сил не переміщувалось вздовж координатних осей; останнє рівняння є умовою відсутності обертання тіла під дією сил в площині *OXY*.

Друга форма аналітичних умов рівноваги передбачає: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів усіх сил відносно двох довільно вибраних на площині центрів *A* і *B* та сума проекцій усіх сил на координатну вісь (наприклад, *OX),* яка не є перпендикулярною до відрізка прямої *AB*, дорівнювали нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} M_A(\vec{F}_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} M_B(\vec{F}_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} F_{Xi} = 0. \tag{6.3.3}$$

Необхідність цих умов випливає з того, що невиконання хоча б однієї умови приводить або до $\vec{F} \neq 0$, або до $M_A(\vec{F}) \neq 0$ $(M_B(\vec{F}) \neq 0)$. Це означає, що порушується рівновага плоскої системи сил.

Доведемо достатність цих умов. Нехай для плоскої системи сил виконуються перші дві умови $M_A(\vec{F}) = 0$, $M_B(\vec{F}) = 0$. Тоді ця система сил може мати рівнодійну $\vec{F}\,'$, лінія дії якої одночасно проходитиме точками *A* і *B* (рис. 6.5). Оскільки вісь *OX* не перпендикулярна до прямої *AB*, то для рівноваги плоскої системи сил достатньо, щоб виконувалася третя умова $F_X = 0$.

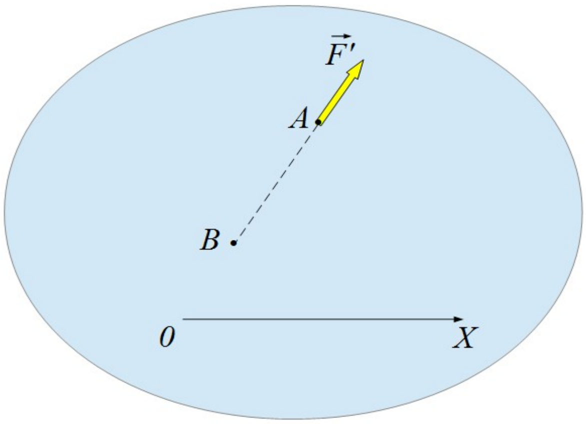


Рис. 6.5. Ілюстрація доведення достатності другої форми аналітичних умов рівноваги плоскої системи сил

Сформулюємо **третю форму** аналітичних умов рівноваги (*рівняння моментів*): для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів усіх сил відносно будь-яких трьох центрів *A*, *B* і *C*, що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} M_A(\vec{F}_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} M_B(\vec{F}_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} M_C(\vec{F}_i) = 0. \tag{6.3.4}$$

Необхідність цих умов виходить з того, що для рівноваги плоскої системи сил повинна дорівнювати нулю алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якого на площині центра зведення.

Доведемо достатність третьої форми аналітичних умов рівноваги плоскої системи сил. Нехай при одночасному виконанні всіх трьох умов (6.3.4) плоска система сил не знаходиться в рівновазі. Це означає, що тоді вона зводиться до рівнодійної $\vec{F}\,'$, лінія дії якої повинна одночасно проходити через три точки *A*, *B* і *C*. Але це неможливо, тому що точки *A*, *B* і *C* не лежать на одній прямій.

Розглянемо рівновагу плоскої системи *паралельних сил*. Оскільки плоска система паралельних сил є частковим випадком довільної плоскої системи сил, тому до неї можна застосовувати форми аналітичних умов рівноваги.

Нехай в площині *OXY* діє система паралельних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N)$. Координатні осі *OX* і *OY* можна розташувати в просторі довільно. Зорієнтуємо вісь *OX* перпендикулярно до ліній дії сил, а вісь *OY* – паралельно до ліній дії цих сил (рис. 6.6).

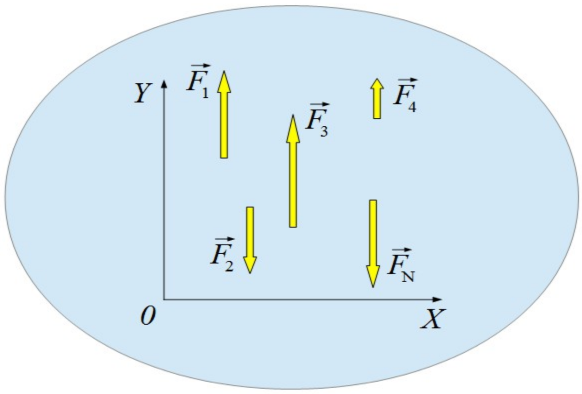


Рис. 6.6. Плоска система паралельних сил

Проекції паралельних сил на вісь *OX* дорівнюють нулю незалежно від того, чи знаходиться ця система сил в рівновазі, чи ні. Тому рівняння $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Xi} = 0$ не можна віднести до умов рівноваги і його слід відкинути.

Отже, перша форма аналітичних умов рівноваги для плоскої системи паралельних сил формулюється так: для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на паралельну їм вісь та алгебраїчна сума моментів цих сил відносно довільного центра *O* дорівнювали нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Yi} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} M_O(\vec{F}_i) = 0 .$$

Друга форма аналітичних умов рівноваги для плоскої системи паралельних сил одержується з рівнянь (6.3.3): для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно кожного з двох довільно обраних центрів *A* і *B*, які не лежать на одній прямій, паралельній лініям дії сил системи, дорівнювали нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} M_A(\vec{F}_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} M_B(\vec{F}_i) = 0.$$

Таким чином, перша та друга форми аналітичних умов рівноваги плоскої системи паралельних сил включають лише два рівняння.

Розглянемо рівновагу системи *збіжних сил*, що діють у площині *OXY.* Оскільки центром зведення для цієї системи є точка перетину ліній дії сил (центр сил), то моменти сил системи відносно центра сил дорівнюють нулю. Це означає, що до плоскої системи збіжних сил можна застосувати лише першу форму аналітичних умов рівноваги, яка включає тільки два рівняння:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Xi} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Yi} = 0.$$

Формулювання: для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на кожну з двох координатних осей дорівнювали нулю.

Розглянемо рівновагу системи *пар сил*, що мають одну площину дії. У цьому випадку всі три форми аналітичних умов рівноваги зводяться до одного рівняння:

$$M = \sum_{i=1}^{N} M_i = 0.$$

Формулювання: для рівноваги системи пар сил, що мають одну площину дії, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів цих пар сил дорівнювала нулю.

Запитання для самоконтролю

1. Сформулювати лему Пуансо про паралельне перенесення сил?
2. Що називається приєднаною парою сил?
3. Що називається центром зведення системи сил?
4. Як звести довільну плоску систему сил до одного центра?
5. Що називається головним вектором системи сил?
6. Як знайти модуль і напрям головного вектора системи сил геометричним та аналітичним способами?
7. Що називається головним моментом системи сил відносно заданого центра?
8. Сформулювати основну теорему статики.
9. Чому головний вектор довільної системи сил не можна розглядати як рівнодійну цієї системи сил?
10. Чому модуль і напрям головного вектора довільної системи сил не залежить від вибору положення центра зведення на площині?
11. Чому модуль і напрям головного моменту системи сил залежить від вибору положення центра зведення на площині?
12. За якої умови дві плоскі системи сил є еквівалентними?
13. До чого зводиться довільна плоска система сил, якщо $\vec{F} = 0,\ M \neq 0$?
14. До чого зводиться довільна плоска система сил, якщо $\vec{F} \neq 0,\ M = 0$?
15. До чого зводиться довільна плоска система сил, якщо $\vec{F} \neq 0,\ M \neq 0$?
16. За яких умов довільна плоска система сил знаходиться в стані рівноваги?
17. Записати і пояснити рівняння умов рівноваги довільної плоскої системи сил.
18. Як пояснюється необхідність умов рівноваги довільної плоскої системи сил?
19. Як пояснюється достатність умов рівноваги довільної плоскої системи сил?
20. Сформулювати першу форму аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил.
21. Записати і пояснити рівняння першої форми аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил.
22. Сформулювати другу форму аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил?
23. Записати і пояснити рівняння другої форми аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил.
24. Як пояснюється необхідність другої форми аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил?
25. Довести достатність другої форми аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил.
26. Сформулювати третю форму аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил.
27. Записати і пояснити рівняння третьої форми аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил.
28. Як пояснюється необхідність третьої форми аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил?

29. Довести достатність третьої форми аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил.
30. Сформулювати першу форму аналітичних умов рівноваги плоскої системи паралельних сил.
31. Записати і пояснити рівняння першої форми аналітичних умов рівноваги плоскої системи паралельних сил.
32. Сформулювати другу форму аналітичних умов рівноваги плоскої системи паралельних сил.
33. Записати і пояснити рівняння другої форми аналітичних умов рівноваги плоскої системи паралельних сил.
34. Сформулювати першу форму аналітичних умов рівноваги плоскої системи збіжних сил.
35. Записати і пояснити рівняння першої форми аналітичних умов рівноваги для плоскої системи збіжних сил.
36. Чому для довільної плоскої системи збіжних сил аналітичні умови рівноваги зводяться лише до їх першої форми?
37. Сформулювати аналітичну умову рівноваги системи пар сил, що мають одну площину дії.
38. Чому для системи пар сил, що мають одну площину дії, всі форми аналітичних умов рівноваги зводяться до одного рівняння рівноваги?

Лекція №7

тема **"Довільна просторова системи сил"**

7.1 Зведення довільної просторової системи сил до заданого центра. Часткові випадки зведення.
7.2. Теорема Варіньона для довільної просторової системи сил.
7.3 Умови рівноваги довільної просторової системи сил. Умови рівноваги системи збіжних сил, системи пар сил, системи паралельних сил.

7.1. Довільною просторовою системою сил називають таку систему сил, лінії дії яких довільно розташовані в просторі.

Нехай до твердого тіла прикладена довільна просторова система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N)$ (рис. 7.1, а). Будь-яку точку *O* твердого тіла обираємо за центр зведення сил й, використовуючи лему Пуансо, переносимо усі сили системи в цей центр, доповнюючи їх відповідними приєднаними парами сил (рис. 7.1, б). Тоді на тіло діятиме система сил $(\vec{F}_1' = \vec{F}_1,\ \vec{F}_2' = \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N' = \vec{F}_N)$, які прикладені до центра зведення *O*, й система пар сил $[(\vec{F}_1, \vec{F}_1''), (\vec{F}_2, \vec{F}_2''), ..., (\vec{F}_N, \vec{F}_N'')]$, моменти яких дорівнюють моментам сил системи відносно центра *O*:

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1),\ \vec{M}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2), ..., \vec{M}_N = \vec{M}_O(\vec{F}_N).$$

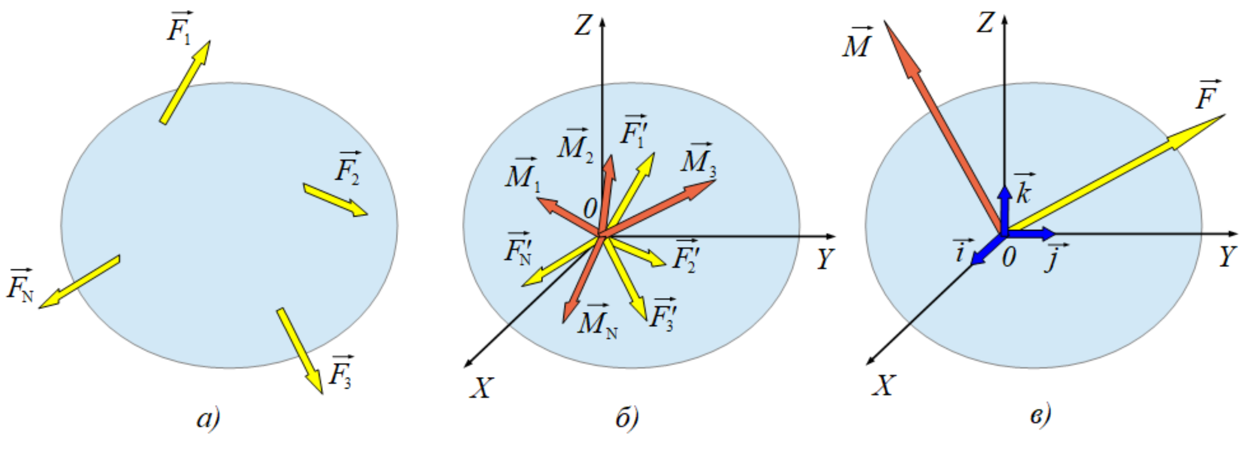


Рис. 7.1. Зведення довільної просторової системи сил до заданого центра

Сили, що зведені в центр *O*, замінюємо однією силою $\vec{F}$, яка є **головним вектором** системи сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1{}' + \vec{F}_2{}' + \ldots + \vec{F}_N{}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \, .$$

Систему пар сил замінюємо однією парою сил, момент якої дорівнює **головному моменту** системи сил відносно центра зведення *O*:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_N = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \ldots + \vec{M}_O(\vec{F}_N) = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{M}_O(\vec{F}).$$

Таким чином, згідно основної теореми статики, довільна просторова система сил, що діє на тверде тіло, еквівалентна дії однієї сили, яка прикладена до довільно обраного центра зведення, й дії однієї пари сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил відносно обраного центра зведення (рис. 7.1, в).

Вектори $\vec{F}$ і $\vec{M}_O(\vec{F})$ визначаються аналітично, тобто через їх проекції на координатні осі:

$$\vec{F} = F_X \vec{i} + F_Y \vec{j} + F_Z \vec{k} \, ,$$

де $F_X = \sum_{i=1}^{N} F_{Xi}$, $F_Y = \sum_{i=1}^{N} F_{Yi}$ $F_Z = \sum_{i=1}^{N} F_{Zi}$ – проекції головного вектора системи сил на координатні осі *OX*, *OY*, *OZ*;

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = M_X(\vec{F})\vec{i} + M_Y(\vec{F})\vec{j} + M_Z(\vec{F})\vec{k} \, ,$$

де $M_X(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} M_X(\vec{F}_i)$, $M_Y(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} M_Y(\vec{F}_i)$ $M_Z(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} M_Z(\vec{F}_i)$ – проекції головного моменту системи сил відносно центра зведення на координатні осі *OX*, *OY*, *OZ*.

За відомими проекціями визначаються модуль головного вектора системи сил і косинуси кутів його нахилу до координатних осей:

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2} = \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{N} F_{Xi}\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{N} F_{Yi}\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{N} F_{Zi}\Big)^2} \, ,$$

$$\cos\alpha = \frac{F_X}{F}, \qquad \cos\beta = \frac{F_Y}{F}, \qquad \cos\gamma = \frac{F_Z}{F}$$

та модуль головного моменту відносно центра зведення і косинуси кутів його нахилу до координатних осей:

$$M_O(\vec{F}) = \sqrt{M_X^2(\vec{F}) + M_Y^2(\vec{F}) + M_Z^2(\vec{F})} = \sqrt{\Big[\sum_{i=1}^{N} M_X(\vec{F}_i)\Big]^2 + \Big[\sum_{i=1}^{N} M_Y(\vec{F}_i)\Big]^2 + \Big[\sum_{i=1}^{N} M_Z(\vec{F}_i)\Big]^2} \, ,$$

$$\cos\eta = \frac{M_X(\vec{F})}{M_O(\vec{F})}, \qquad \cos\mu = \frac{M_Y(\vec{F})}{M_O(\vec{F})}, \qquad \cos\nu = \frac{M_Z(\vec{F})}{M_O(\vec{F})}.$$

Розглянемо часткові випадки зведення довільної просторової системи сил до найпростішого вигляду.

1. Якщо для даної системи сил головний вектор $\vec{F} = 0$, головний момент відносно центра зведення $M_O(\vec{F}) \neq 0$, то вона зводиться до однієї пари сил із моментом, що дорівнює головному моменту системи сил відносно заданого центра зведення $\vec{M} = \vec{M}_O(\vec{F})$. У цьому випадку напрям і модуль головного моменту системи сил відносно центра зведення не залежать від положення центра зведення *O*. Вільне тіло під дією такої системи сил здійснює тільки обертальний рух.

2. Якщо для даної системи сил головний вектор $\vec{F} \neq 0$, головний момент відносно центра зведення $M_O(\vec{F}) = 0$, то вона зводиться до рівнодійної сили, яка прикладена до центра зведення *O* й має такий саме напрям і модуль, як і головний вектор $\vec{F}$ системи сил. Вільне тіло під дією такої системи сил здійснює тільки поступальний рух.

3. Якщо для даної системи сил головний вектор $\vec{F} \neq 0$, головний момент відносно центра зведення $M_O(\vec{F}) \neq 0$, то залежно від взаємної орієнтації в просторі цих векторів реалізуються наступні випадки.

3.1. Якщо головний вектор $\vec{F}$ і головний момент системи сил відносно центра зведення $\vec{M}_O(\vec{F})$ взаємно перпендикулярні $\vec{F} \perp \vec{M}_O(\vec{F})$, то система сил зводиться до рівнодійної сили, яка має такий саме напрям і модуль, як і головний вектор $\vec{F}$, але прикладена до точки твердого тіла, що віддалена від центра зведення *O* на відстань $h = \frac{M}{F} = \frac{M_O(\vec{F})}{F}$. Покажемо це.

Нехай вектори $\vec{F}$ і $\vec{M}_O(\vec{F})$ лежать в одній площині й при цьому вони взаємно перпендикулярні, тобто кут між векторами $\psi = 90^\circ$ (рис. 7.2, а).

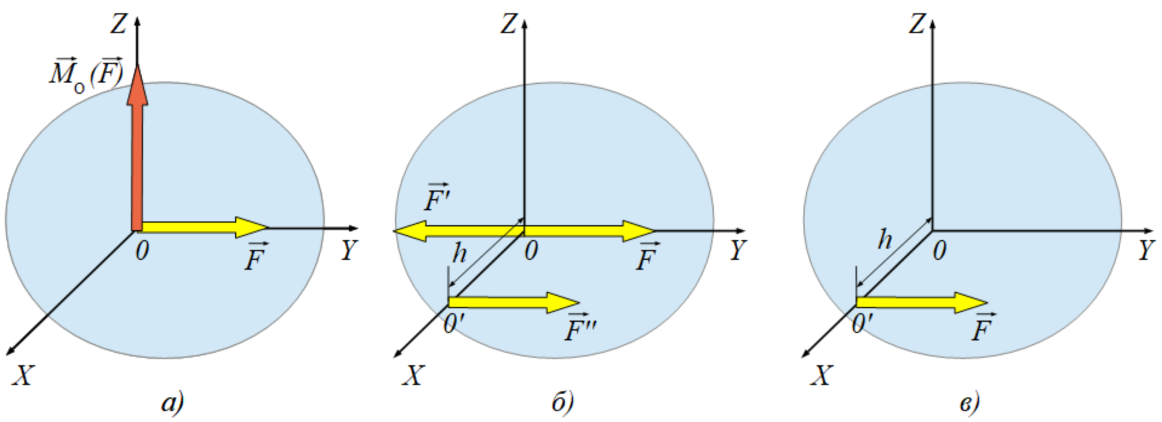


Рис. 7.2. Зведення довільної просторової системи сил до рівнодійної сили

Припустимо, що сили, які утворюють пару $(\vec{F}\,',\vec{F}\,")$ із моментом $\vec{M} = \vec{M}_O(\vec{F})$, дорівнюють за модулем головному вектору системи сил:

$$|\vec{F}\,'| = |\vec{F}\,"| = |\vec{F}\,| = F,$$

а плече пари визначається співвідношенням:

$$h = \frac{M}{F}.$$

Одну із сил пари $\vec{F}\,'$ прикладемо до центра зведення *O* й спрямуємо її вздовж лінії дії головного вектора $\vec{F}$ у протилежному до нього напрямку (рис. 7.2, б). Тоді сили $\vec{F}\,' = -\vec{F}$ є зрівноваженими, які за другою аксіомою статики можна відкинути, й довільна просторова система сил зводиться до рівнодійної сили $\vec{F}\," = \vec{F}$, яка прикладена до точки *O′*, що знаходиться від центра зведення *O* на відстані:

$$h = \frac{M}{F} = \frac{M_O(\vec{F})}{F}.$$

3.2. Якщо для даної системи сил головний вектор $\vec{F}$ і головний момент $\vec{M}_O(\vec{F})$ системи сил відносно центра зведення паралельні між собою $\vec{F} \parallel \vec{M}_O(\vec{F})$, тобто кут між векторами $\psi = 0^\circ$ (рис. 7.3, а), то довільна просторова система сил зводиться до сукупності головного вектора $\vec{F}$ та пари сил $(\vec{F}\,',\vec{F}\,")$, площина дії якої перпендикулярна до головного вектора $\vec{F}$ (рис. 7.3, б). Таку сукупність сил називають **динамічним гвинтом.** Пряма, яка проходить центром зведення *O* й збігається з лініями дії векторів $\vec{F}$ і $\vec{M}_O(\vec{F})$ називаються *віссю* динамічного гвинта. Подальше спрощення даної системи сил неможливе.

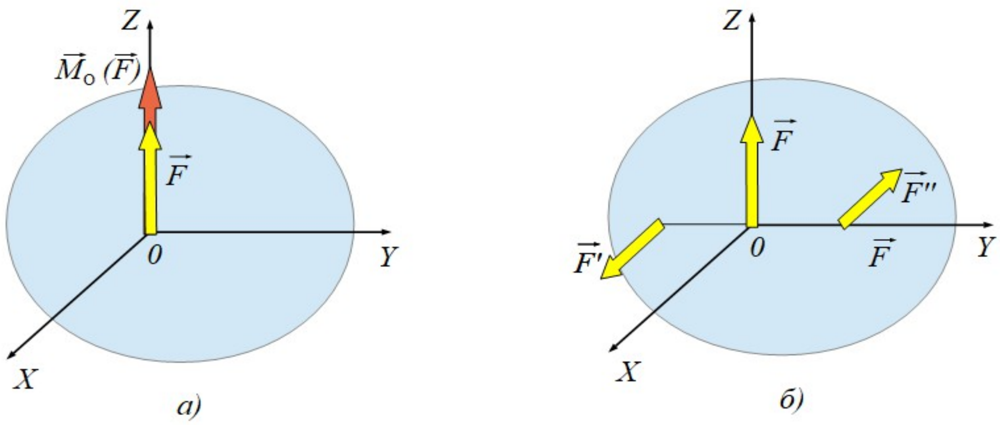


Рис. 7.3. Зведення довільної просторової системи сил до динамічного гвинта, вісь якого проходить центром зведення сил

Вільне тверде тіло під дією такої системи сил здійснює тільки гвинтовий рух. Наприклад, динамічний гвинт утворюють сили, які діють під час закручування або викручування шурупів.

3.3. Якщо для даної системи сил кут між векторами $\vec{F}$ і $\vec{M}_O(\vec{F})$ змінюється в межах $0^\circ < \psi < 90^\circ$, то така система сил також зводиться до динамічного гвинта, вісь якого проходитиме від центра зведення *O* на відстані $h = \dfrac{M \cdot \sin\psi}{F}$.

Нехай кут між векторами $\vec{F}$ і $\vec{M} = \vec{M}_O(\vec{F})$ дорівнює ψ, де $0^\circ < \psi < 90^\circ$ (рис. 7.4, а). Розкладемо вектор моменту пари сил на складові:

$$\vec{M} = \vec{M}\,' + \vec{M}\,'',$$

де складова $\vec{M}\,' \perp \vec{F}$, а складова $\vec{M}\,'' \parallel \vec{F}$ (рис. 7.4, б).

Пара сил із моментом $\vec{M}\,'$ та головний вектор $\vec{F}$ зводяться до рівнодійної сили (випадок 3.1), яка прикладена до точки O' (рис. 7.4, в), що знаходиться від центра зведення *O* на відстані:

$$h = OO' = \frac{M'}{F} = \frac{M \cdot \sin\psi}{F} = \frac{M_O(\vec{F}) \cdot \sin\psi}{F}.$$

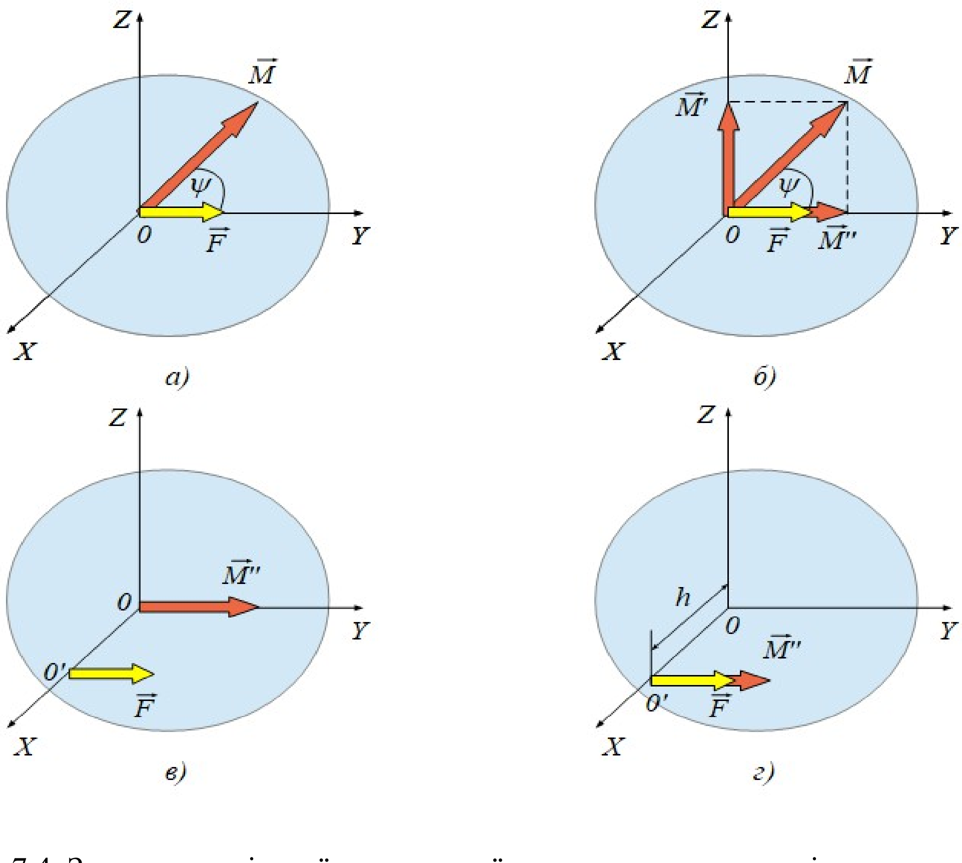


Рис. 7.4. Зведення довільної просторової системи сил до динамічного гвинта, вісь якого віддалена від центра зведення сил на відстань *h*

Таким чином, дана система сил зводиться до рівнодійної сили, яка має такий саме модуль і напрям, як головний вектор системи сил $\vec{F}$ і прикладена до точки твердого тіла O', що віддалена від центра зведення O на відстань h, та пари сил із моментом $\vec{M}''$, який переноситься в точку O' як вільний вектор, тобто до динамічного гвинта, вісь якого збігається з лінією дії векторів $\vec{F}$ і $\vec{M}''$.

7.2. Розглянемо **теорему Варіньона** для довільної просторової системи сил: якщо довільна просторова система сил зводиться до рівнодійної сили, то момент рівнодійної сили відносно будь-якої точки твердого тіла дорівнює векторній (геометричній) сумі моментів усіх сил системи відносно тієї самої точки тіла.

Нехай на тверде тіло діє просторова система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$, яка зводиться до рівнодійної сили $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$, що прикладена до центра зведення O (рис. 7.5).

Оберемо довільну точку тіла A. Тоді положення центра зведення O відносно точки A можна визначити за допомогою радіус-вектора $\vec{r}$. З точкою A поєднаємо початок системи координат $AXYZ$. Тоді момент рівнодійної сили відносно точки A дорівнює:

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = [\vec{r}\,\vec{F}] = [\vec{r}\,(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N)] = [\vec{r}\,\vec{F}_1] + [\vec{r}\,\vec{F}_2] + \cdots + [\vec{r}\,\vec{F}_N] =$$

$$= \vec{M}_A(\vec{F}_1) + \vec{M}_A(\vec{F}_2) + \cdots + \vec{M}_A(\vec{F}_N) = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_A(\vec{F}_i).$$

Теорема доведена. Отже, $\vec{M}_A(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_A(\vec{F}_i)$. (7.2.1)

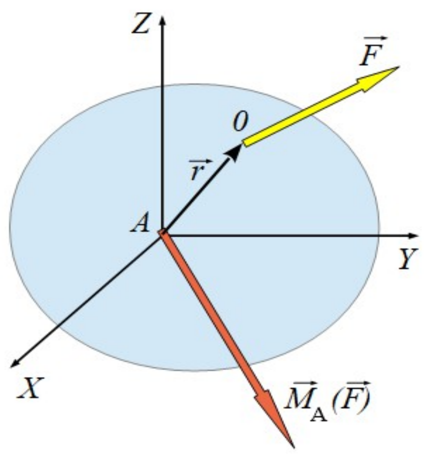


Рис. 7.5. Ілюстрація доведення теореми Варіньона

Формула (7.2.1) є математичним записом теореми Варіньона. Проектуючи рівняння (7.2.1) на координатні осі, одержимо запис теореми Варіньона відносно координатних осей:

$$M_X(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} M_X(\vec{F}_i), \quad M_Y(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} M_Y(\vec{F}_i) \quad M_Z(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} M_Z(\vec{F}_i), \tag{7.2.2}$$

тобто, моменти рівнодійної сили відносно координатних осей дорівнюють алгебраїчним сумам моментів усіх сил системи відносно тих самих осей.

Теорему Варіньона використовують в інженерних розрахунках для визначення моменту сили в тому випадку, коли складно знайти плече самої сили, але простіше знайти плечі її складових відносно координатних осей.

Покажемо це на прикладі: знайти момент сили $\vec{F}$, лінія дії якої лежить у площині *OXY*, відносно осі *OZ*, якщо відомі координати точки прикладання сили *x* та *y* і кут α між лінією дії сили $\vec{F}$ і віссю *OY* (рис. 7.6).

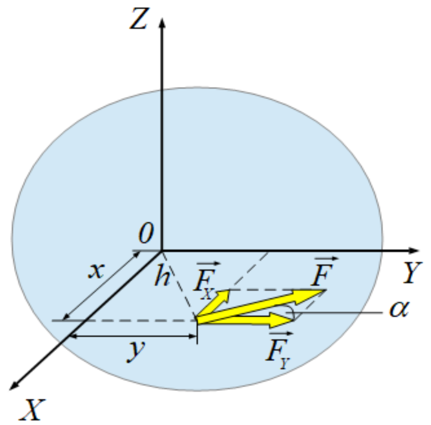


Рис. 7.6. Приклад застосування теореми Варіньона

Розкладемо силу $\vec{F}$ на складові:

$$\vec{F} = \vec{F}_X + \vec{F}_Y,$$

де $F_X = F \sin\alpha$, $F_Y = F \cos\alpha$.

За теоремою Варіньона:

$$M_Z(\vec{F}) = M_Z(\vec{F}_X) + M_Z(\vec{F}_Y) = F_X \cdot y + F_Y \cdot x = F \cdot y \sin\alpha + F \cdot x \cos\alpha =$$

$$= F(y \sin\alpha + x \cos\alpha) = Fh,$$

де $M_Z(\vec{F}_X) = F_X \cdot y > 0$ – момент сили $\vec{F}_X$ відносно осі *OZ*,
$M_Z(\vec{F}_Y) = F_Y \cdot x > 0$ – момент сили $\vec{F}_Y$ відносно осі *OZ*, $h = (y \sin\alpha + x \cos\alpha)$– плече сили $\vec{F}$ відносно осі *OZ*.

7.3. У загальному випадку довільну просторову систему сил можна звести до будь-якого центра *O*, замінюючи її дію однією силою і однією парою сил. При цьому сила дорівнює головному вектору $\vec{F}$ системи сил, який прикладений до центра зведення, а пара сил має момент, що дорівнює головному моменту системи сил відносно центра зведення $\vec{M} = \vec{M}_O(\vec{F})$.

Для рівноваги такої системи сил *необхідно* і *достатньо*, щоб виконувалися умови:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0, \qquad \vec{M}_O(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} M_O(\vec{F}_i) = 0. \tag{7.3.1}$$

У геометричній формі умови рівноваги довільної просторової системи сил означають, що силовий багатокутник і багатокутник моментів є замкненими.

В аналітичній формі умови рівноваги довільної просторової системи сил означають, що алгебраїчні суми проекції усіх сил на кожну з трьох координатних осей і алгебраїчні суми моментів цих сил відносно координатних осей дорівнюють нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Xi} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Yi} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Zi} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} M_X(\vec{F}_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} M_Y(\vec{F}_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{Zi} = 0. \tag{7.3.2}$$

Таким чином, для рівноваги довільної просторової системи сил треба скласти шість незалежних рівнянь рівноваги. Перші три рівняння відповідають за відсутність переміщень тіла вздовж координатних осей, наступні три рівняння відповідають за відсутність обертання тіла навколо цих осей.

За допомогою загальних умов рівноваги довільної просторової системи сил одержують умови рівноваги більш простих систем сил. Коли на систему сил накладені певні обмеження, то кількість незалежних рівнянь рівноваги буде меншою ніж шість, тому що частина рівнянь рівноваги перетворюються на тотожності [тотожністю називають рівність, яка виконується для будь-яких числових значень, наприклад, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]. Розглянемо окремі випадки.

Нехай тверде тіло знаходиться в стані рівноваги під дією просторової системи збіжних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$ (рис. 7.7). Оскільки лінії дії збіжних сил перетинаються в однієї точці *O*, яка є центром зведення системи збіжних сил, то моменти цих сил відносно центра зведення дорівнюють нулю. У цьому випадку рівняння моментів сил відносно координатних осей перетворюються на тотожності:

$$\sum_{i=1}^{N} M_X(\vec{F}_i) \equiv 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} M_Y(\vec{F}_i) \equiv 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{Zi} \equiv 0,$$

тобто вони виконуються незалежно від того, знаходиться чи не знаходиться тіло під дією системи сил в стані рівноваги.

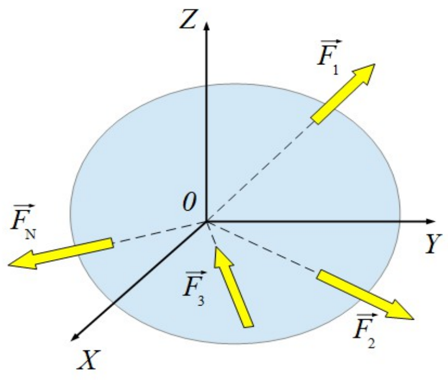


Рис. 7.7. Тверде тіло під дією просторової системи збіжних сил

Отже, рівняння моментів не можуть бути рівняннями рівноваги. Це означає, що умови рівноваги просторової системи збіжних сил включають лише три незалежних рівняння:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Xi} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Yi} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Zi} = 0. \qquad (7.3.3)$$

Таким чином, для рівноваги просторової системи збіжних сил *необхідно* і *достатньо*, щоб дорівнювали нулю алгебраїчні суми проекції усіх сил на кожну з трьох координатних осей.

Нехай тверде тіло знаходиться в стані рівноваги під дією просторової системи пар сил із моментами $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \ldots, \vec{M}_N$ (рис. 7.8).

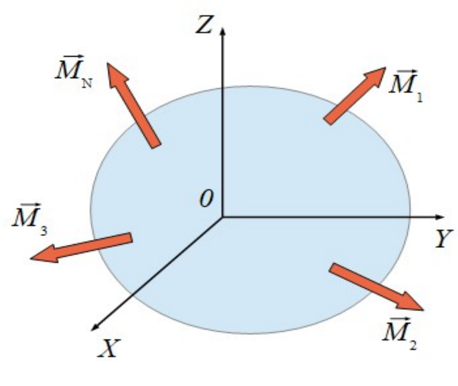


Рис. 7.8. Тверде тіло під дією просторової системи пар сил

Оскільки систему діючих на тіло пар сил завжди можна замінити однією еквівалентною парою сил, то для рівноваги системи пар сил *необхідно* і *достатньо*, щоб момент результуючої пари сил дорівнював нулю:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = 0. \qquad (7.3.4)$$

Проектуючи рівняння (7.3.4) на координатні осі, одержимо три алгебраїчні рівняння умов рівноваги просторової системи пар сил:

$$\sum_{i=1}^{N} M_{Xi} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} M_{Yi} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{Zi} = 0. \qquad (7.3.5)$$

Таким чином, для рівноваги просторової системи пар сил *необхідно* і *достатньо*, щоб дорівнювали нулю алгебраїчні суми моментів пар сил відносно трьох координатних осей.

Нехай тверде тіло знаходиться в стані рівноваги під дією просторової системи паралельних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N)$ (рис. 7.9). Систему координат *OXYZ* орієнтуємо так, щоб вісь *OZ* була паралельною лініям дії сил.

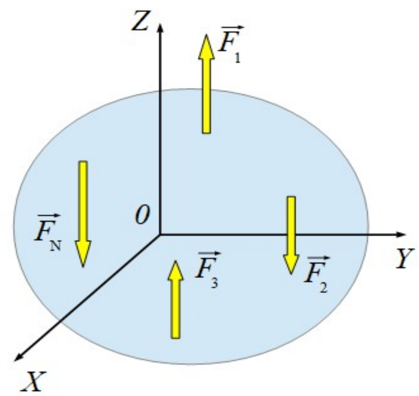


Рис. 7.9. Тверде тіло під дією просторової системи паралельних сил

Оскільки осі *OX* і *OY* перпендикулярні до даних паралельних сил, то проекції цих сил на осі *OX* і *OY* дорівнюють нулю. Це означає, що для вибраної орієнтації системи координат *OXYZ* рівняння $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Xi} = 0$, $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Yi} = 0$ перетворюються на тотожності: $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Xi} \equiv 0$, $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Yi} \equiv 0$ й не можуть бути рівняннями рівноваги. Отже, до рівняння рівноваги можна віднести тільки рівняння:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Zi} = 0.$$

З рівнянь моментів тотожністю є рівняння $\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{Zi} \equiv 0$, тому що моменти сил відносно осі *OZ,* яка паралельна лініям дії сил, завжди дорівнюють нулю (момент сили відносно осі відмінний від нуля тоді, коли сила діє в площині, що перпендикулярна до цієї осі).

Таким чином, умови рівноваги просторової системи паралельних сил визначаються трьома незалежними рівняннями:

$$\sum_{i=1}^{N} F_{Zi} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} M_X(\vec{F}_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{Yi} = 0 . \tag{7.3.6}$$

Для рівноваги просторової системи паралельних сил *необхідно* і *достатньо*, щоб дорівнювали нулю алгебраїчна сума проекцій усіх сил на паралельну координатну вісь і алгебраїчні суми моментів цих сил відносно осей, які перпендикулярні до лінії дії цих сил.

Розглянуті рівняння рівноваги є умовами рівноваги вільного твердого тіла під дією прикладеної до нього системи сил. До невільного твердого тіла ці умови застосовують з використанням аксіоми про звільнення від в'язей, тобто рівняння рівноваги включають ще реакції в'язей.

Для порівняння умов рівноваги вільного твердого тіла під дією прикладеної до нього плоскої або просторової системи сил рівняння рівноваги зведемо в таблицю:

Тип системи сил	Плоска	Просторова
Довільна система сил	$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Xi} = 0,\quad \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Yi} = 0,$ $\sum_{i=1}^{N} M_O(\vec{F}_i) = 0.$ I форма	$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Xi} = 0,\quad \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Yi} = 0,$ $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Zi} = 0,$
	$\sum_{i=1}^{N} M_A(\vec{F}_i) = 0,\quad \sum_{i=1}^{N} M_B(\vec{F}_i) = 0,$ $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Xi} = 0.$ II форма	$\sum_{i=1}^{N} M_X(\vec{F}_i) = 0,$ $\sum_{i=1}^{N} M_Y(\vec{F}_i) = 0,$ $\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_Z(\vec{F}_i) = 0 .$
	$\sum_{i=1}^{N} M_A(\vec{F}_i) = 0,\quad \sum_{i=1}^{N} M_B(\vec{F}_i) = 0,$ $\sum_{i=1}^{N} M_C(\vec{F}_i) = 0.$ III форма Всього три рівняння	Всього шість рівнянь

Тип системи сил	Плоска	Просторова
Збіжна система сил	$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Yi} = 0.$ Всього два рівняння	$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Yi} = 0,$ $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Zi} = 0.$ Всього три рівняння
Система пар сил	$M = \sum_{i=1}^{N} M_i = 0.$ Всього одне рівняння	$\sum_{i=1}^{N} M_{Xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} M_{Yi} = 0,$ $\sum_{i=1}^{N} M_{Zi} = 0.$ Всього три рівняння
Система паралельних сил	$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} M_O(\vec{F}_i) = 0.$ І форма $\sum_{i=1}^{N} M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} M_B(\vec{F}_i) = 0.$ ІІ форма Всього два рівняння	$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Zi} = 0. \quad \sum_{i=1}^{N} M_X(\vec{F}_i) = 0,$ $\sum_{i=1}^{N} M_Y(\vec{F}_i) = 0.$ Всього три рівняння

Запитання для самоконтролю

1. Що називають довільною просторовою системою сил?
2. Сформулювати основну теорему статики для довільної просторової системи сил?
3. Як аналітично визначити модуль і напрям головного вектора довільної просторової системи сил?
4. Як аналітично визначити модуль і напрям головного моменту довільної просторової системи сил відносно центра зведення сил?
5. За яких умов довільна просторова системи сил зводиться до однієї пари сил?
6. За яких умов довільна просторова системи сил зводиться до рівнодійної сили, яка прикладена до центра зведення сил?
7. За яких умов довільна просторова системи сил зводиться до рівнодійної сили, яка прикладена до точки твердого тіла на відстані h від центра зведення сил ?
8. За яких умов довільна просторова системи сил зводиться до динамічного гвинта, вісь якого проходитиме центром зведення сил?
9. За яких умов довільна просторова системи сил зводиться до динамічного гвинта, вісь якого віддалена від центра зведення сил на відстань h?
10. Сформулювати теорему Варіньона для довільної просторової системи сил.
11. Яким є математичний запис теореми Варіньона у векторному вигляді?

12. Яким є математичний запис теореми Варіньона відносно координатних осей?
13. У яких випадках для розрахунку моменту сили відносно координатних осей доцільно застосовувати теорему Варіньона?
14. Сформулювати необхідні і достатні умови рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі.
15. Записати скалярні рівняння рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі.
16. Сформулювати необхідні і достатні умови рівноваги довільної просторової системи сил в геометричній формі.
17. Сформулювати необхідні і достатні умови рівноваги просторової системи збіжних сил в аналітичній формі.
18. Записати скалярні рівняння рівноваги просторової системи збіжних сил в аналітичній формі.
19. Сформулювати необхідні і достатні умови рівноваги просторової системи пар сил в аналітичній формі.
20. Записати скалярні рівняння рівноваги просторової системи пар сил в аналітичній формі.
21. Сформулювати необхідні і достатні умови рівноваги просторової системи паралельних сил в аналітичній формі.
22. Записати скалярні рівняння рівноваги просторової системи паралельних сил в аналітичній формі.
23. Чим відрізняються рівняння рівноваги невільного твердого тіла від рівнянь рівноваги вільного твердого тіла?

Лекція №8

тема **“Центр тяжіння твердого тіла”**

8.1. Розглянемо систему паралельних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$, які мають однаковий напрям й прикладені до твердого тіла в точках N_1, N_2 і N_3 (рис. 8.1).

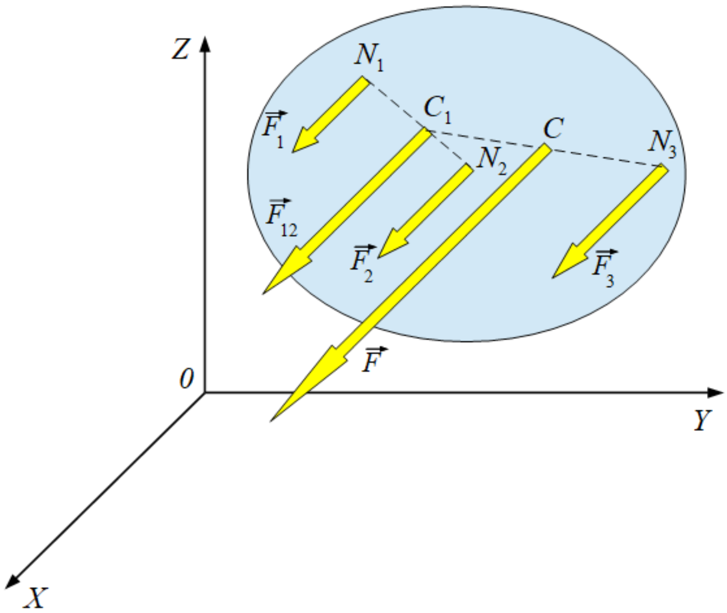


Рис. 8.1. Тверде тіло під дією системи паралельних сил

За відомим правилом спочатку знайдемо рівнодійну $\vec{F}_{12}$ сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ та її точку прикладання C_1, а потім рівнодійну $\vec{F}$ сил $\vec{F}_{12}$ і $\vec{F}_3$ та її точку прикладання C. Рівнодійна $\vec{F}$ паралельна даним силам й має такий самий напрям, а її модуль дорівнює сумі модулів сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 .$$

За точку прикладання рівнодійної $\vec{F}$ може бути прийнята будь-яка точка тіла, що знаходиться на лінії дії рівнодійної $\vec{F}$, але саме точка C має особливу властивість: якщо сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$ одночасно повернути, не порушуючи паралельності, на однаковий кут відносно точок прикладання N_1, N_2 і N_3, то лінія дії їх рівнодійної $\vec{F}$, яка повертається на такий самий кут, знов проходитиме через точку C. Точка C називається **центром паралельних сил**.

Отже, під час будь-яких поворотів паралельних сил відносно точок прикладання лінія дії їх рівнодійної завжди проходитиме центром паралельних сил.

Знайдемо координати центра паралельних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$ за допомогою теореми Варіньона. Оскільки від напряму паралельних сил положення точки C не залежить, то зорієнтуємо систему координат $OXYZ$ так, щоб сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$ були паралельними до осі OZ (рис. 8.2).

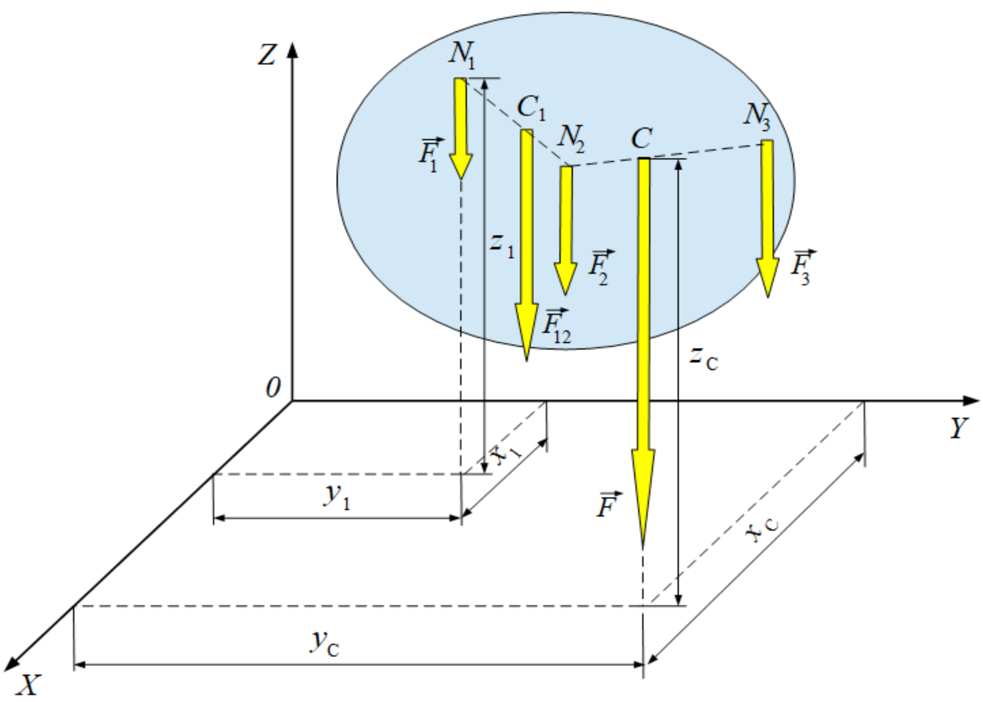


Рис. 8.2. Ілюстрація до визначення координат центра паралельних сил

Нехай x_C, y_C, z_C – координати центра паралельних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$, а точки прикладання цих сил мають координати $N_1(x_1, y_1, z_1)$, $N_2(x_2, y_2, z_2)$, $N_3(x_3, y_3, z_3)$. Згідно теореми Варіньона момент рівнодійної $\vec{F}$ відносно осі OY дорівнює сумі моментів сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$ відносно осі OY:

$$M_Y(\vec{F}) = M_Y(\vec{F}_1) + M_Y(\vec{F}_2) + M_Y(\vec{F}_3).$$

З рис. 8.2 бачимо, що $M_Y(\vec{F}) = F \cdot x_C$, $M_Y(\vec{F}_1) = F \cdot x_1$, $M_Y(\vec{F}_2) = F \cdot x_2$, $M_Y(\vec{F}_3) = F \cdot x_3$. Підставляючи ці співвідношення в попередню формулу, маємо:

$$F \cdot x_C = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3.$$

Звідки $$x_C = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3}{F}.$$

Аналогічно знаходимо інші координати центра паралельних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$:

$$y_C = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3}{F}, \qquad z_C = \frac{F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2 + F_3 \cdot z_3}{F}.$$

Одержані результати можна поширити на будь-яку кількість паралельних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N)$ одного й протилежного напрямку. Тоді формули для визначення координат центра паралельних сил набувають вигляду:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot x_i}{F}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot y_i}{F}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot z_i}{F}, \tag{8.1.1}$$

де $\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot x_i$, $\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot y_i$, $\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot z_i$ – алгебраїчні суми добутків модулів окремих сил на координати точок прикладання цих сил.

8.2. На кожну частинку твердого тіла діє сила тяжіння, яка є результуючою гравітаційної сили та переносної сили інерції, що виникає внаслідок добового обертання Землі. Для тіл, розміри яких набагато менші за радіус Землі, можна вважати, що сили тяжіння для кожної частинки тіла паралельні між собою й зберігають свій напрям незалежно від положення цілого тіла. Рівнодійну паралельних сил тяжіння, діючих на окремі частинки твердого тіла, називають **силою тяжіння**, що діє на тіло.

Таким чином, під час повороту тіла або зміни його положення в просторі сили тяжіння, що діють на окремі його частинки, повертаються навколо своїх точок прикладання й залишаються паралельними між собою у напрямку вертикалі, зберігаючи при цьому свої числові значення. Під час такого повороту тіла лінія дії сили тяжіння завжди проходитиме через одну точку тіла, яка є центром паралельних сил. Ця точка є точкою прикладання сили тяжіння, що діє на тверде тіло, її називають **центром тяжіння** тіла. Слід зазначити, що центр тяжіння тіла є перш за все *геометричною* точкою тіла, тому що вона може знаходитися й поза межами тіла (кільце, порожниста куля).

Отже, лінія дії сили тяжіння при будь-якому положенні тіла в просторі завжди проходить через його центр тяжіння. Якщо підперти тверде тіло в центрі тяжіння, то воно перебуватиме в стані рівноваги, тому що момент сили тяжіння відносно осі обертання дорівнюватиме нулю, оскільки лінія дії сили тяжіння перетинає вісь обертання.

Знайдемо координати центра тяжіння твердого тіла як координати центра паралельних сил. Для цього розіб'ємо тверде тіло на елементи об'єму з масою m_i. Тоді на кожний елемент об'єму тіла діє сила тяжіння $m_i\vec{g}$, а на тіло масою m діє сила тяжіння $m\vec{g}$, де $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння для даної широти місцевості (рис. 8.3). Тоді згідно формул (8.1.1) координати центра тяжіння тіла визначаються формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g \cdot x_i}{mg}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g \cdot y_i}{mg}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g \cdot z_i}{mg}, \tag{8.2.1}$$

де x_i, y_i, z_i – координати окремого елемента об'єму тіла.

Сила тяжіння пропорційна об'єму тіла $m_i g \sim V_i$, $mg \sim V$, де V_i, V – об'єм елемента тіла і об'єм всього тіла. Коефіцієнтом пропорційності в цих співвідношеннях є об'ємна густина ρ. Для однорідного тіла $m_i g = \rho V_i$, $mg = \rho V$. Враховуючи це, формули (8.2.1) можна подати у вигляді:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho V_i \cdot x_i}{\rho V}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho V_i \cdot y_i}{\rho V}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho V_i \cdot z_i}{\rho V}. \tag{8.2.2}$$

Центр тяжіння однорідного тіла, що заповнює деякий об'єм, називається **центром тяжіння об'єму** тіла.

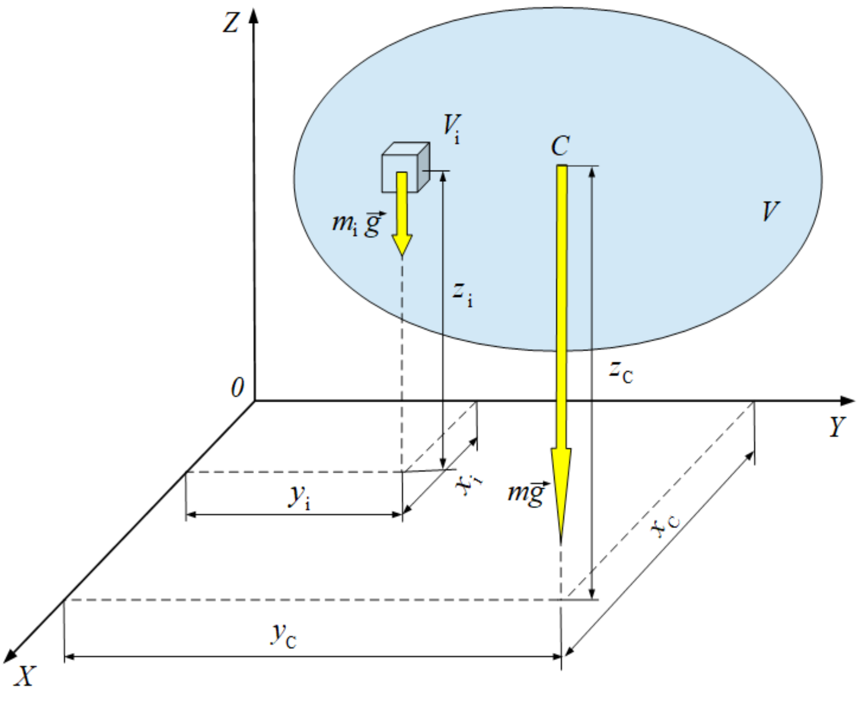


Рис. 8.3. Тверде тіло з центром тяжіння об'єму в точці *C*

Величини $\sum_{i=1}^{N} V_i \cdot x_i$, $\sum_{i=1}^{N} V_i \cdot y_i$, $\sum_{i=1}^{N} V_i \cdot z_i$ називаються *статичними моментами об'єму* тіла відносно координатних площин *OYZ*, *OXZ*, *OXY* відповідно. Якщо початок системи координат *OXYZ* (точка *O*) поєднати з центром тяжіння об'єму тіла (точка *C*), то ці величини дорівнюватиме нулю.

Нехай тверде тіло являє собою плоску тонку фігуру. Тоді сила тяжіння пропорційна площі поверхні цієї фігури $m_i g \sim A_i$, $mg \sim A$, де A_i, A – площа поверхні елемента тіла і площа поверхні всього тіла. Коефіцієнтом пропорційності в цих співвідношеннях є поверхнева густина σ. Для однорідного тіла $m_i g = \sigma A_i$, $mg = \sigma A$. Положення центра тяжіння плоскої фігури визначається двома координатами x_C, y_C (рис. 8.4). Враховуючи це, формули (8.2.1) набувають вигляду:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma A_i \cdot x_i}{\sigma A}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma A_i \cdot y_i}{\sigma A}, \tag{8.2.3}$$

де x_i, y_i – координати окремого елемента поверхні тіла. Центр тяжіння однорідного плоского тіла називається **центром тяжіння площі** плоскої фігури.

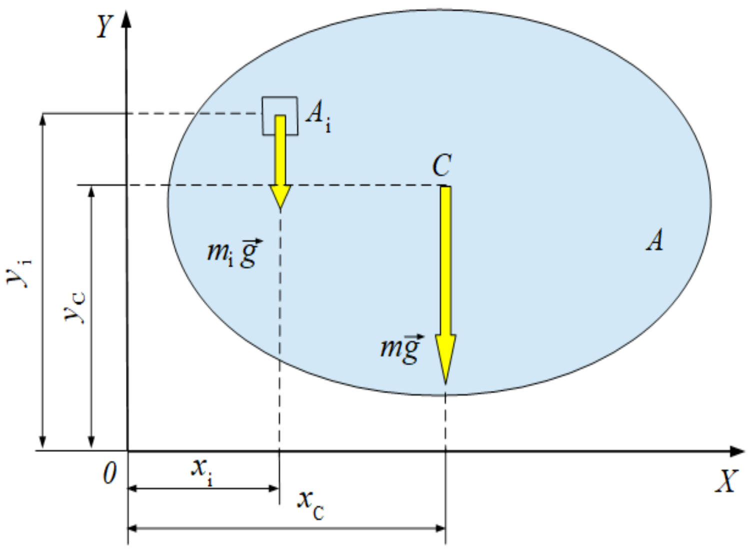


Рис. 8.4. Тверде тіло у вигляді плоскої фігури з центром тяжіння площі в точці *C*

Величини $$S_X = \sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + \dots + A_N \cdot y_N = A \cdot y_C,$$

$$S_Y = \sum_{i=1}^{N} A_i \cdot x_i = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_N \cdot x_N = A \cdot x_C$$

називаються *статичними моментами площі* тіла відносно координатних осей *OX* і *OY* відповідно.

Отже, статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі називають добуток площі фігури на алгебраїчне значення відстані від центра тяжіння площі фігури до цієї осі. Статичні моменти площі плоскої фігури відносно осі можуть бути додатними, від'ємними і дорівнюватиме нулю. Нульового значення величини S_X і S_Y набувають тоді, коли координатні осі *OX* і *OY* проходять центром тяжіння площі плоскої фігури (точка *C*). Статичні моменти площі плоскої фігури відносно осі вимірюються в одиницях довжини в третьому степені $[S_X, S_Y] \to м^3$. Коли для плоскої фігури величини S_X і S_Y відомі, то координати центра тяжіння площі плоскої фігури визначаються формулами:

$$x_C = \frac{S_Y}{A}, \qquad y_C = \frac{S_X}{A}.$$

Розглянемо тверде тіло у вигляді тонкого криволінійного стержня довжиною l і сталою площею поперечного перерізу (рис. 8.5).Тоді сила тяжіння, що діє на елемент довжини l_i так й на сам стержень, пропорційна довжині $m_i g \sim l_i, \ \ mg \sim l.$ Коефіцієнтом пропорційності в цих співвідношеннях є лінійна густина $\tau.$ Для однорідного тіла $m_i g = \tau\, l_i, \ \ mg = \tau\, l.$ Враховуючи це, формули (8.2.1) набувають вигляду:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tau\, l_i \cdot x_i}{\tau\, l}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tau\, l_i \cdot y_i}{\tau\, l}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tau\, l_i \cdot z_i}{\tau\, l}, \tag{8.2.4}$$

де величини $\sum_{i=1}^{N} l_i \cdot x_i, \quad \sum_{i=1}^{N} l_i \cdot y_i, \quad \sum_{i=1}^{N} l_i \cdot z_i$ – статичні моменти лінії відносно координатних площин *OYZ*, *OXZ*, *OXY* відповідно. Центр тяжіння однорідного тонкого стержня сталого перерізу, вісь якого збігається з деякою лінією, називається **центром тяжіння** цієї **лінії**.

З формул (8.2.2), (8.2.3), (8.2.4) бачимо, що положення центра тяжіння однорідного твердого тіла залежить тільки від його геометричної форми та розмірів.

Скорочуючи чисельник і знаменник формули (8.2.1) на величину прискорення вільного падіння *g*, одержимо формули для визначення координат центра мас або центра інерції твердого тіла:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{m}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{m}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{m}, \tag{8.2.5}$$

де $m = m_1 + m_2 + ... + m_N = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – маса твердого тіла.

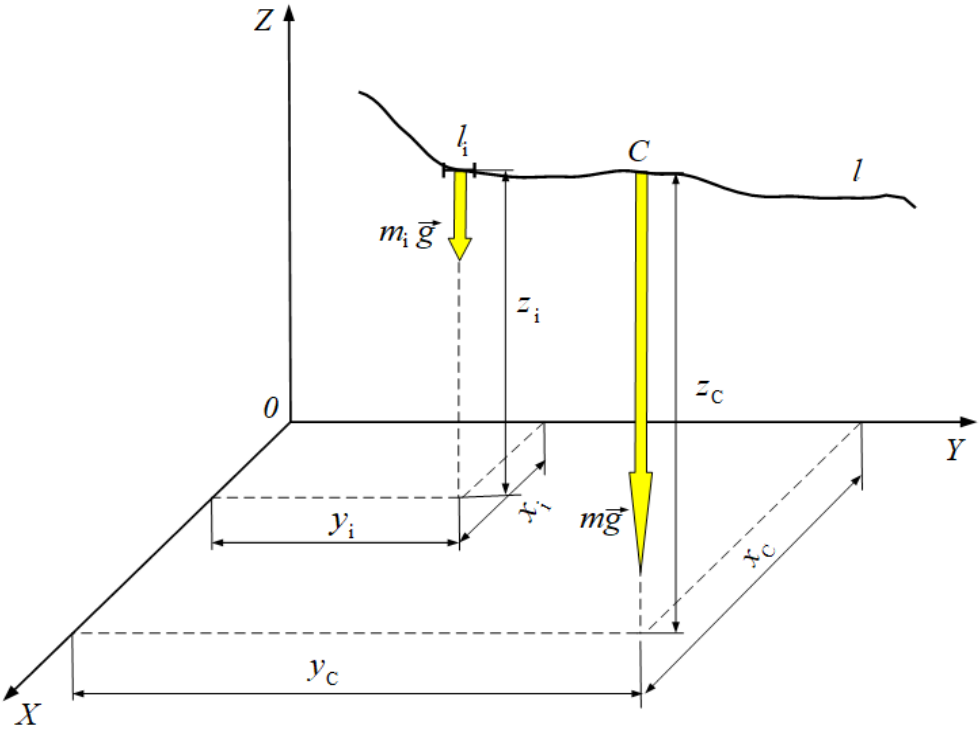


Рис. 8.5. Тверде тіло у вигляді тонкого довгого криволінійного стержня з центром тяжіння лінії в точці *C*

Центром мас твердого тіла називають таку його точку, в який зібралась б уся маса тіла, якщо б частинки твердого тіла взаємодіяли між собою із нескінченно зростаючими силами притягання.

Еквівалентність формул (8.2.1) і (8.2.5) свідчить про те, що геометрично центр мас твердого тіла збігається з його центром тяжіння, але ототожнювати центр мас і центр тяжіння не можна, тому що між ними є принципові фізичні відмінності.

Поняття центра тяжіння пов'язане з припущенням про однорідність гравітаційного поля поблизу поверхні Землі. Насправді, гравітаційне поле поблизу поверхні Землі не є однорідним, тому сили тяжіння, що діють на окремі частинки тіла, непаралельні між собою. Це означає, що поняття центра тяжіння є наближеним. Наприклад, якщо уявити собі потяг завдовжки 1870 *м* (1 морська миля), то напрями сил тяжіння, що діють на перший і останній вагони, будуть відхилятися від паралельності на одну дугову хвилину.

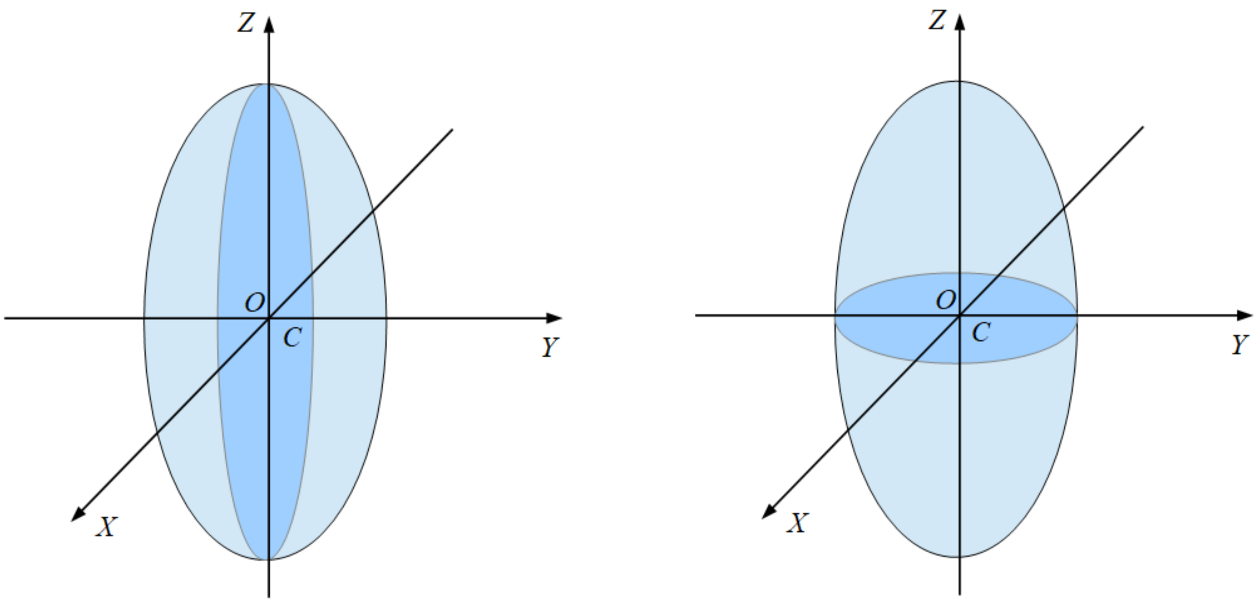
Поняття центра мас не залежить від такого роду припущень, тобто воно не пов'язане з гравітаційним полем Землі. Введення поняття про центр мас дає змогу в деяких випадках звести задачу про рух твердого тіла, яке є сукупністю матеріальних точок, до задачі про рух однієї матеріальної точки з масою, що дорівнює масі усього твердого тіла.

З формули (8.2.5) бачимо, що координати центра мас залежать тільки від розподілу мас у твердому тілі, при цьому положення центра мас є незмінним і не залежить від вибору системи координат та законів руху.

8.3. Для визначення координат центра тяжіння твердого тіла застосовують метод симетрії, метод розбивання та доповнення, метод інтегрування.

Метод симетрії застосовують тоді, коли тверде тіло має одну або кілька площин симетрії, вісь симетрії, центр симетрії. Розглянемо ці випадки окремо:

- для однорідного тіла, що має площину симетрії, центр тяжіння об'єму знаходиться в цій площині симетрії. Якщо, наприклад, для однорідного тіла площиною симетрії є координатна площина *OXY*, то його центр тяжіння об'єму $C(x_C, y_C, z_C)$ знаходяться в цій площині, а координата $z_C = 0$. Для однорідного тіла, що має кілька площин симетрії, центр тяжіння об'єму знаходиться на лінії перетину цих площин;
- для однорідного тіла, що має вісь симетрії, центр тяжіння об'єму знаходиться на цій осі симетрії. Якщо, наприклад, для однорідного тіла віссю симетрії є координатна вісь *OZ*, то його центр тяжіння об'єму $C(x_C, y_C, z_C)$ знаходиться на цій осі *OZ*, при цьому його координати $x_C = 0$. $y_C = 0$. Наприклад, тверде тіло у вигляді еліпсоїда обертання має дві взаємно перпендикулярні площини симетрії *OXZ* і *OXY* (рис. 8.6, а,б) та вісь симетрії *OZ,* тому координати його центра тяжіння об'єму $x_C = 0$, $y_C = 0$, $z_C = 0$;
- для однорідного тіла, що має центр симетрії, центр тяжіння об'єму знаходиться в цьому центрі симетрії. Якщо, наприклад, для однорідного тіла центром симетрії є початок системи координат *OXYZ,* то його центр тяжіння об'єму $C(x_C, y_C, z_C)$ знаходиться в точці *O*, при цьому $x_C = 0$, $y_C = 0$, $z_C = 0$. Прикладом такого тіла є куля (рис. 8.7).



а) *б)*

Рис. 8.6. Тверде тіло у вигляді еліпсоїда обертання

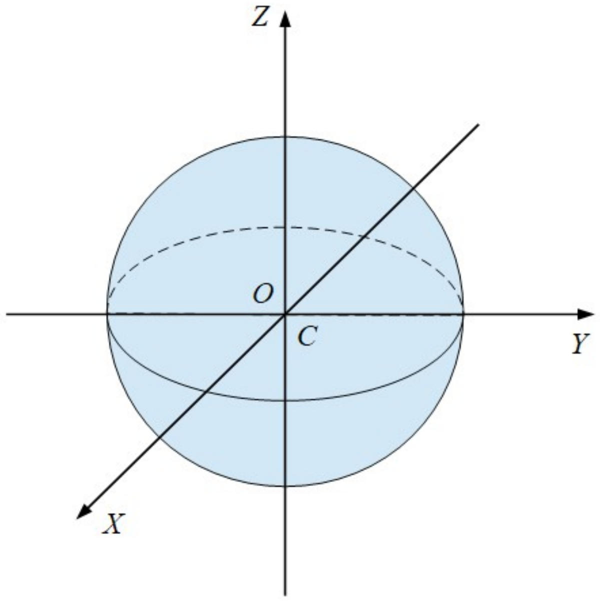


Рис. 8.7. Тверде тіло у вигляді кулі

За допомогою методу симетрії можна без розрахунків визначити положення центрів тяжіння твердих тіл, що мають наступну геометричну форму (рис. 8.8):

а) центр тяжіння площі паралелограма, прямокутника, квадрата збігається з точкою перетину їх діагоналей;

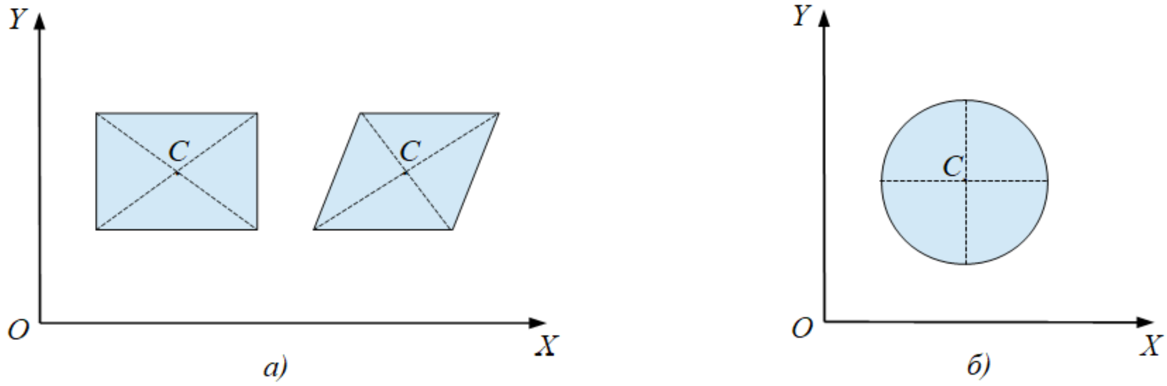
б) центр тяжіння площі круга збігається з його геометричним центром;

в) центр тяжіння площі сфери збігається з її геометричним центром;

г) центр тяжіння об'єму паралелепіпеда збігається з точкою перетину його діагоналей;

д) центр тяжіння об'єму призми і циліндра лежить на середині відрізка, який з'єднує центри тяжіння площі їх основ;

е) центр тяжіння об'єму кулі збігається з її геометричним центром



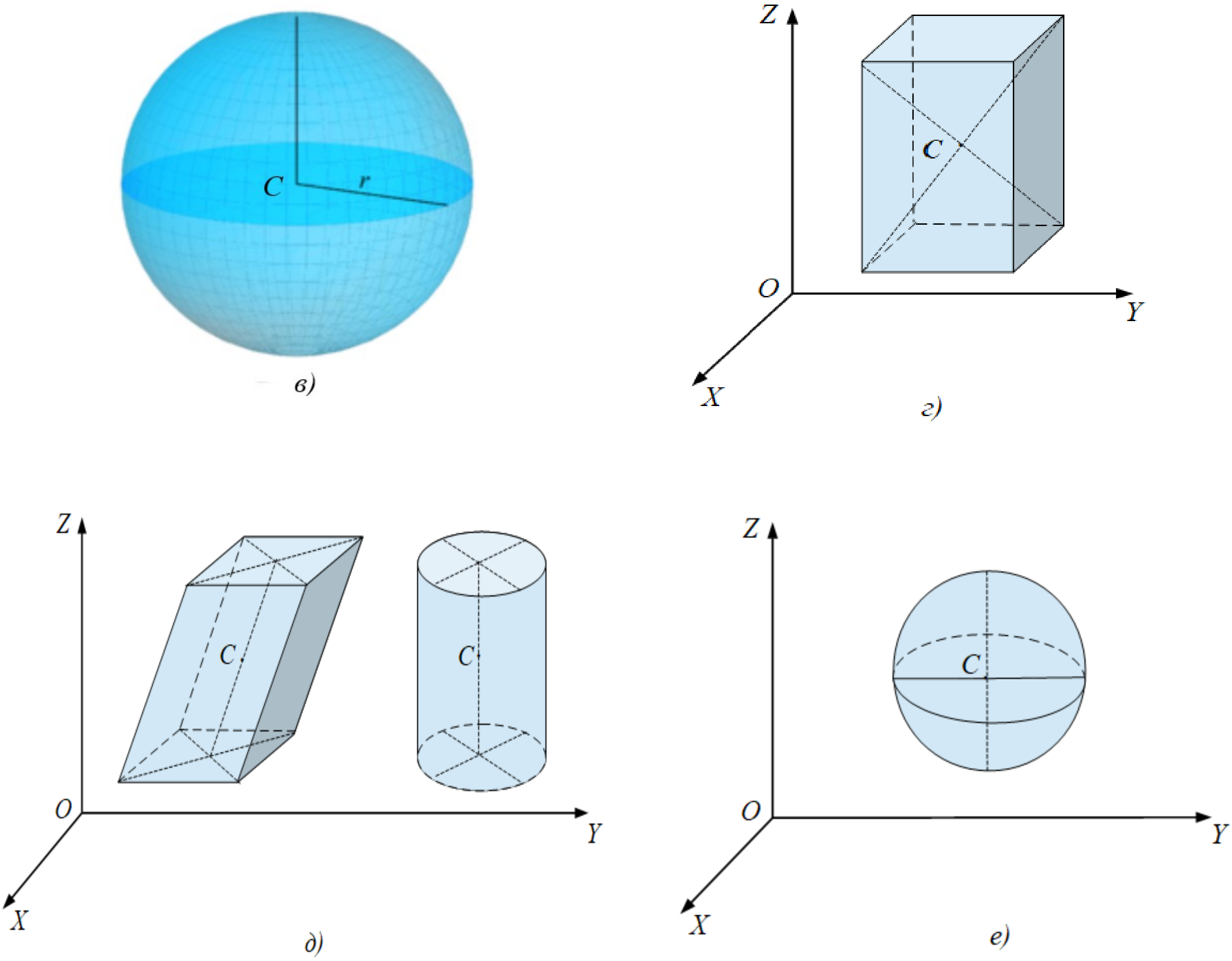


Рис. 8.8. Центри тяжіння однорідних твердих тіл правильної геометричної форми

За методом **розбивання та доповнення** тверде тіло розбивається на скінчену кількість частин правильної геометричної форми, центри тяжіння яких відомі або визначаються за відомими формулами. Координати центра тяжіння всього тіла обчислюються за формулами (8.2.2), (8.2.3), (8.2.4).

Нехай, наприклад, треба визначити положення центра тяжіння площі однорідної плоскої фігури (рис. 8.9, а). З рисунку бачимо, що фігура складається з двох більш простих фігур I і II, для яких положення центрів тяжіння площі визначається відомими способами (рис. 8.11, б).

Приймаємо, що площі частин плоскої фігури дорівнюють A_1 і A_2, а координати їх центрів тяжіння $C_1(x_1, y_1)$ і $C_2(x_2, y_2)$. Тоді статичні моменти площі плоскої фігури відносно координатних осей дорівнюють сумі статичних моментів площі окремих її частин відносно тих самих координатних осей:

$$S_X = S_{X1} + S_{X2} = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 = A \cdot y_C, \quad S_Y = S_{Y1} + S_{Y2} = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 = A \cdot x_C.$$

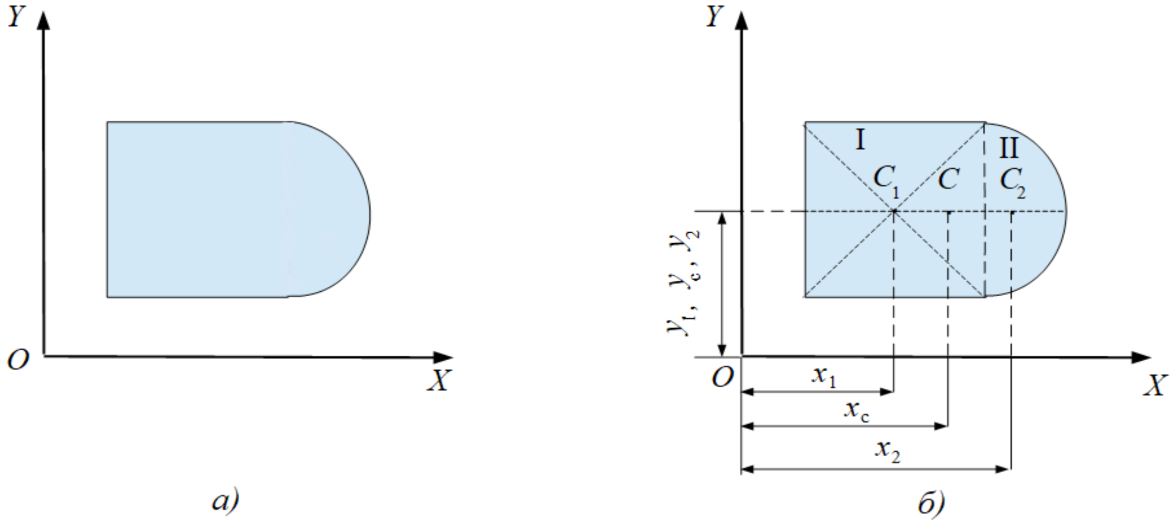


Рис. 8.9. Тверде тіло у вигляді плоскої фігури складної форми

Звідки знаходимо координати центра тяжіння площі однорідної плоскої фігури:

$$x_C = \frac{S_Y}{A} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2}, \quad y_C = \frac{S_X}{A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2}.$$

Якщо тверде тіло має вирізи або порожнини, то їх вважають заповненими матеріалом із “від'ємною” масою (метод доповнення). Координати центра тяжіння всього тіла обчислюють, застосовуючи формули (8.2.2) і (8.2.3), де доданки для вирізів (порожнин) враховують із від'ємними значеннями.

Наприклад, треба визначити координати центра тяжіння площі однорідної плоскої фігури, що має виріз (рис. 8.10). Якщо відома площа всієї фігури A_1 і координати її центра тяжіння $C_1(x_1, y_1)$, а також площа вирізаної частини фігури A_2 і координати її центра тяжіння $C_2(x_2, y_2)$, то координати центра тяжіння площі плоскої фігури з вирізом визначаються за формулами:

$$x_C = \frac{S_Y}{A} = \frac{A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2}{A_1 - A_2}, \quad y_C = \frac{S_X}{A} = \frac{A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2}{A_1 - A_2}.$$

Наприклад, треба визначити координати центра тяжіння об'єму однорідного твердого тіла з порожниною (рис. 8.11). Якщо відомий об'єм всього тіла V_1 і координати його центра тяжіння $C_1(x_1, y_1, z_1)$, а також об'єм порожнини V_2 і координати її центра тяжіння $C_2(x_2, y_2, z_2)$, то координати центра тяжіння об'єму тіла з порожниною визначаються за формулами:

$$x_C = \frac{V_1 \cdot x_1 - V_2 \cdot x_2}{V_1 - V_2}, \quad y_C = \frac{V_1 \cdot y_1 - V_2 \cdot y_2}{V_1 - V_2}, \quad z_C = \frac{V_1 \cdot z_1 - V_2 \cdot z_2}{V_1 - V_2}.$$

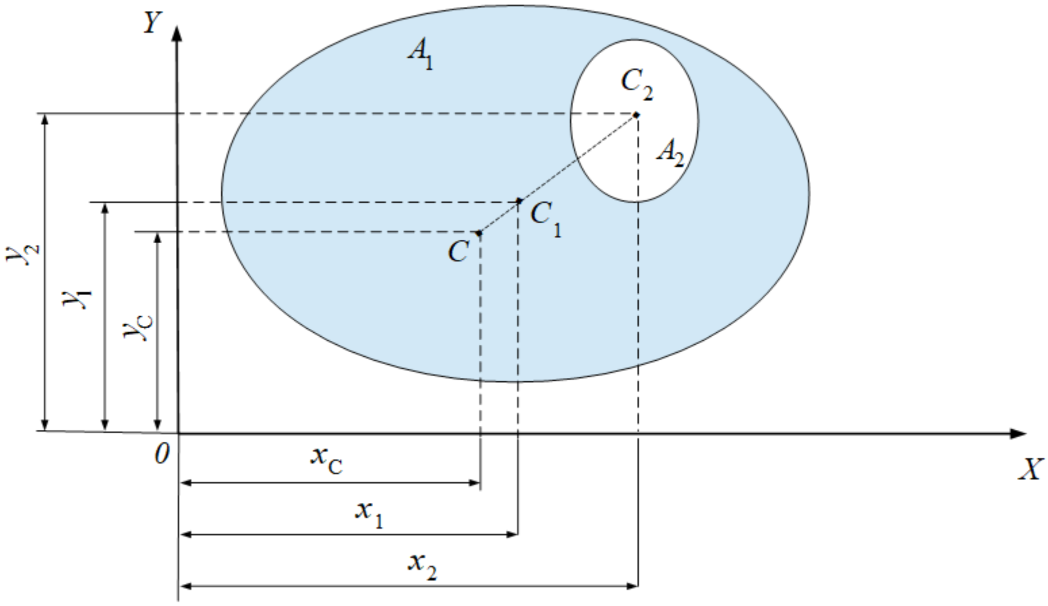


Рис. 8.10. Тверде тіло у вигляді плоскої фігури з вирізом

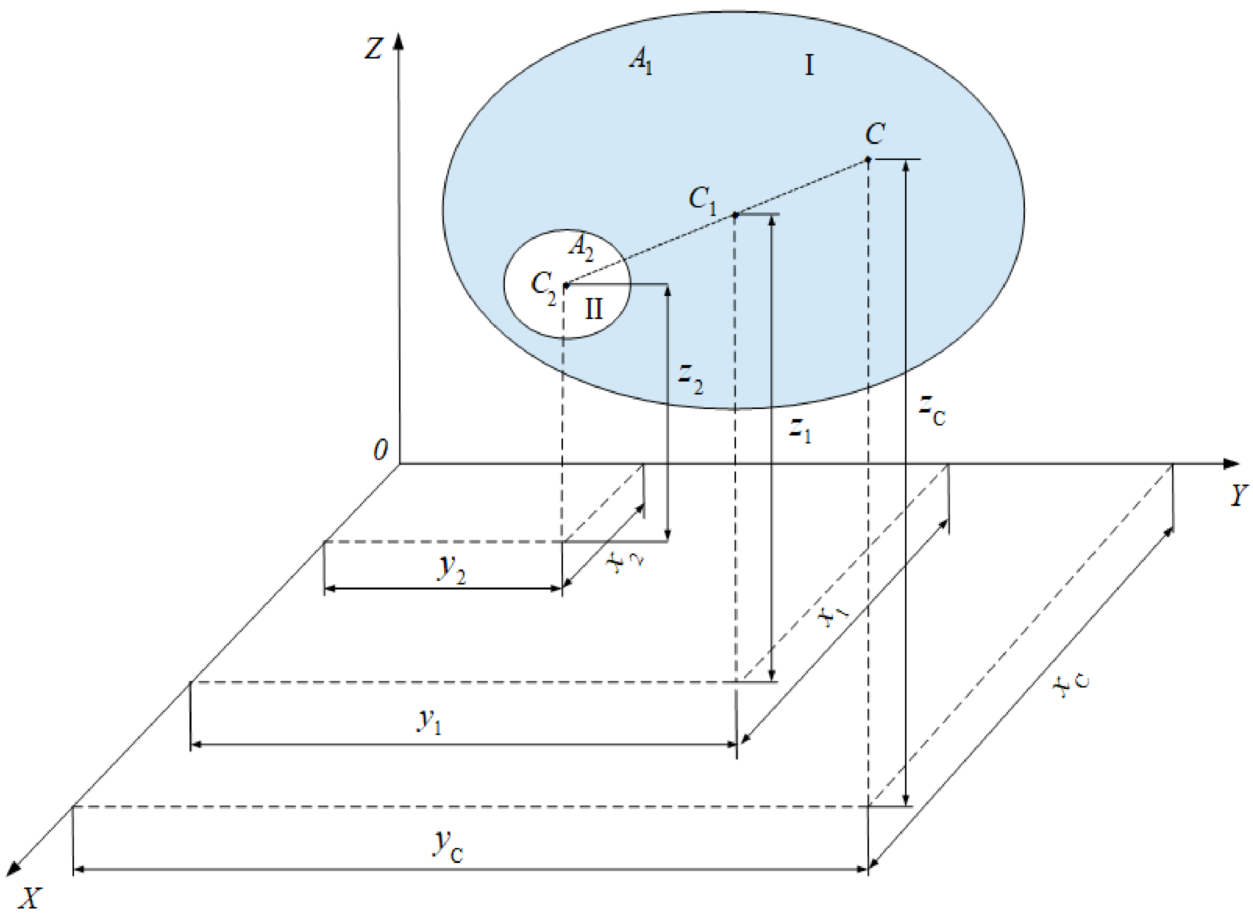


Рис. 8.11. Тверде тіло з порожниною

Метод інтегрування застосовують тоді, коли тверде тіло неможливо розбити на скінченну кількість частин, положення центрів тяжіння яких можна знайти відомими способами. У цьому випадку тіло розбивають на будь-які малі елементи об'єму $\triangle V_i$, елементи площі $\triangle A_i$, елементи довжини $\triangle l_i$. Переходячи до границі, коли $\triangle V_i \to 0$, $\triangle A_i \to 0$, $\triangle l_i \to 0$, $N \to \infty$, у формулах для визначення координат центра тяжіння твердого тіла відповідні суми перетворюються на інтеграли:

$$x_C = \frac{\lim\limits_{\triangle V_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{N} \triangle V_i \cdot x_i}{V} = \frac{1}{V}\int x \cdot dV, \quad y_C = \frac{\lim\limits_{\triangle V_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{N} \triangle V_i \cdot y_i}{V} = \frac{1}{V}\int y \cdot dV,$$

$$z_C = \frac{\lim\limits_{\triangle V_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{N} \triangle V_i \cdot z_i}{V} = \frac{1}{V}\int z \cdot dV. \qquad (8.3.1)$$

$$x_C = \frac{1}{A}\int x \cdot dA, \quad y_C = \frac{1}{A}\int y \cdot dA, \quad z_C = \frac{1}{A}\int z \cdot dA, \qquad (8.3.2)$$

$$x_C = \frac{1}{l}\int x \cdot dl, \quad y_C = \frac{1}{l}\int y \cdot dl, \quad z_C = \frac{1}{l}\int z \cdot dl, \qquad (8.3.3)$$

де x, y, z – координати центра тяжіння нескінченно малих елементів об'єму dV, площі dA, довжини dl.

8.4. Знайдемо формули для визначення координат центрів тяжіння деяких однорідних твердих тіл.

1. **Центр тяжіння лінії дуги кола.** Нехай дуга AB кола радіуса R спирається на центральний кут 2α (рис. 8.12). Оскільки дуга AB має вісь симетрії OX, то її центр тяжіння знаходиться саме на цієї осі, а координата $y_C = 0$.

Для визначення координати x_C скористаємось інтегральним методом. Для цього розіб'ємо дугу AB на нескінченно малі елементи довжини $dl = R \cdot d\varphi$. Координата центра тяжіння такого елемента $x = R \cdot \cos\varphi$, а довжина дуги AB дорівнює $l = R \cdot 2\alpha$. Тоді

$$x_C = \frac{1}{l}\int_A^B x\, dl = \frac{1}{2\alpha R}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi \cdot R\, d\varphi = \frac{1}{2\alpha R}\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos\varphi \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{R^2}{2\alpha R}\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi \cdot d\varphi = \frac{R}{2\alpha}[\sin\alpha - \sin(-\alpha)] = \frac{R \cdot 2\sin\alpha}{2\alpha} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha},$$

де α – половина центрального кута в радіанах.

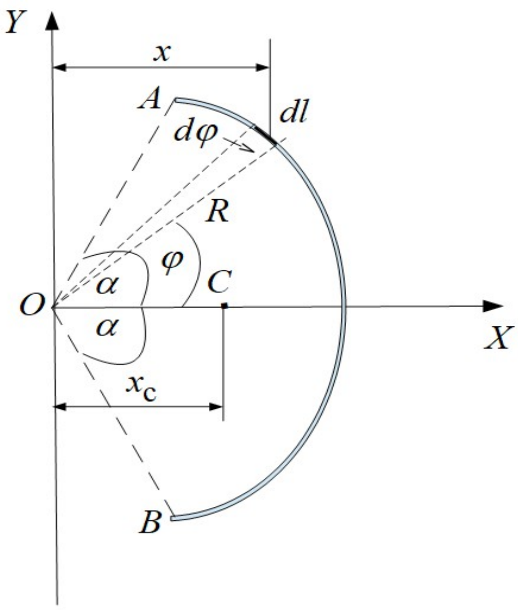


Рис. 8.12. Ілюстрація до визначення координат центра тяжіння лінії дуги кола

Отже, для дуги кола координати центра тяжіння лінії визначаються формулами:

$$x_C = \frac{R \cdot \sin\alpha}{\alpha}, \qquad y_C = 0. \tag{8.4.1}$$

Координати центра тяжіння лінії **півкола** одержимо для $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$x_C = \frac{R \cdot \sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}, \qquad y_C = 0. \tag{8.4.2}$$

2. **Центр тяжіння площі трикутника**. Розглянемо трикутник *ABD* і розіб'ємо його площу лініями, паралельними стороні *AD* на тонкі смужки (рис. 8.13). Центри тяжіння площі цих смужок будуть знаходитися на медіані *BE трикутника.* Отже, центр тяжіння площі трикутника лежить на цієї медіані.

Провівши аналогічні розбивання площі трикутника лініями, паралельними стороні *AB*, дістанемо висновку, що центр тяжіння площі трикутника знаходиться на перетині його медіан. Як відомо, медіани трикутника перетинаються на відстані однієї третини від основи трикутника і двох третин від його вершин, тому $CE = \frac{1}{3} BE.$

Якщо відомі координати вершин трикутника $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), D(x_3, y_3)$, то координати центра тяжіння площі трикутника визначаються за формулами:

$$x_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \qquad y_C = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3). \tag{8.4.3}$$

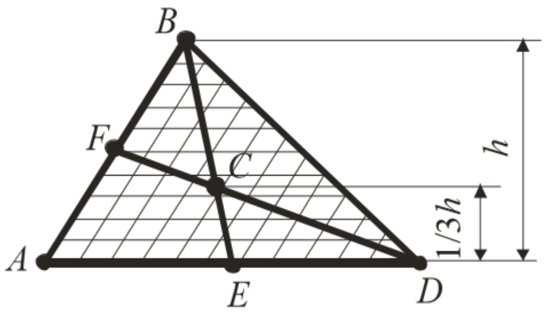


Рис. 8.13. Ілюстрація до визначення центра тяжіння площі трикутника

Для прямокутного трикутника центр тяжіння площі знаходиться на перетині перпендикулярів, поставлених до катетів з точок, розташованих на відстані однієї третини довжини катетів, рахуючи від вершини прямого кута (рис. 8.14).

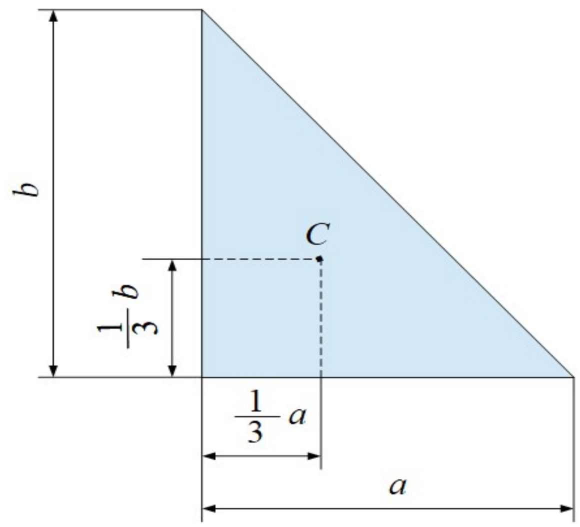


Рис. 8.14. Ілюстрація до визначення центра тяжіння площі прямокутного трикутника

3. **Центр тяжіння площі кругового сектора**. Круговим сектором називають плоску фігуру, яка є частиною круга, що обмежена двома радіусами (рис. 8.15). Оскільки круговий сектор має вісь симетрії *OX*, то центр тяжіння площі сектора знаходиться саме на цій осі, а координата $y_C = 0$.

Нехай круговий сектор *OAB* радіуса *R* має центральний кут 2α. Розіб'ємо площу сектора на елементарні однакові сектори радіусами *R*, проведеними з точки *O*. Внаслідок малості площі елементарних секторів їх можна вважати рівнобедреними трикутниками, центр тяжіння площі кожного з яких знаходиться на відстані $\frac{2}{3}R$ від вершини *O*.

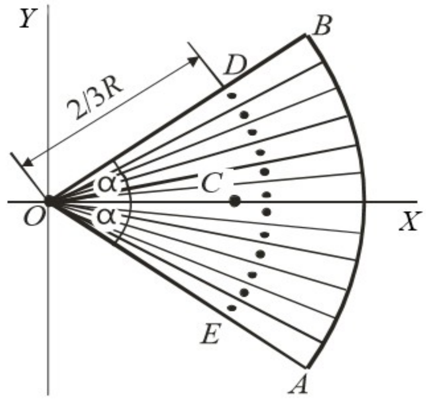


Рис. 8.15. Ілюстрація до визначення центра тяжіння площі кругового сектора

Отже, центри тяжіння площі елементарних секторів лежать на дузі DE, при цьому $OD = \frac{2}{3}R$. Тому положення центра тяжіння площі сектора OAB збігається з положенням центра тяжіння лінії дуги DE. Це означає, що відповідно до формул (8.4.1), координати центра тяжіння площі кругового сектора визначаються формулами:

$$x_C = \frac{2}{3}\frac{R \cdot \sin\alpha}{\alpha}, \qquad y_C = 0. \tag{8.4.4}$$

Коли $\alpha = \frac{\pi}{2}$, одержимо формули для визначення координат центра тяжіння площі **півкруга**:

$$x_C = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}, \qquad y_C = 0. \tag{8.4.5}$$

4. **Центр тяжіння площі кругового сегмента**. Круговий сегмент являє собою плоску фігуру, що обмежена дугою круга і хордою(рис. 8.16). Оскільки круговий сегмент має вісь симетрії OX, то центр тяжіння площі сегмента знаходиться саме на цій осі, а координата $y_C = 0$.

Розглянемо круговий сегмент ADB, обмежений дугою ADB і хордою AB, який є частиною кругового сектора $OADB$ радіусом R і центральним кутом 2α й застосуємо метод розбивання та доповнення. Круговий сегмент ADB одержується із кругового сектора $OADB$ під час вирізання з нього рівнобедреного трикутника OAB. Площа кругового сектора визначається формулою $A_{сек} = \alpha R^2$, а координата центра тяжіння площі сектора формулою $x_C^{сек} = \frac{2}{3}\frac{R \cdot \sin\alpha}{\alpha}$. Площа трикутника визначається формулою

$A_{\triangle} = \frac{1}{2} Rcos\,\alpha \cdot 2\,Rsin\,\alpha = R^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha$, а координата центра тяжіння площі трикутника формулою $x_C^{\triangle} = \frac{2}{3} R\,\cos\alpha$.

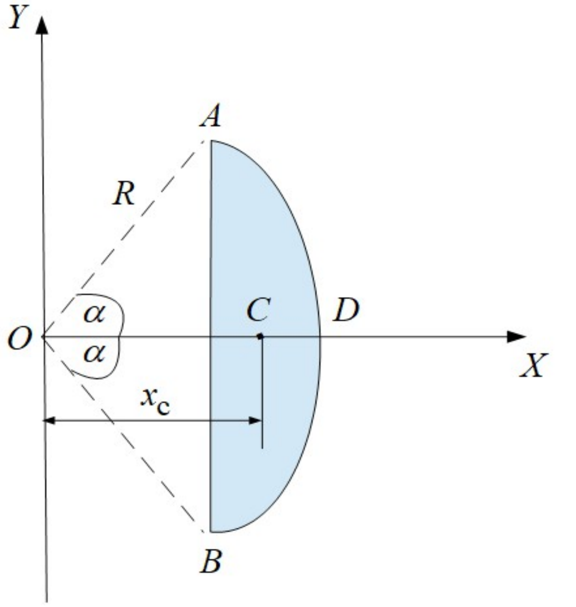


Рис. 8.16. Ілюстрація до визначення координат центра тяжіння площі кругового сегмента

Для визначення координати центра тяжіння площі кругового сегмента застосуємо формулу:

$$x_C = \frac{S_Y}{A} = \frac{A_{сек} \cdot x_C^{сек} - A_{\triangle} \cdot x_C^{\triangle}}{A_{сек} - A_{\triangle}} = \frac{\alpha\,R^2\,\frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha} - R^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \frac{2}{3} R\,\cos\alpha}{\alpha\,R^2 - R^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin\alpha \left(1 - \cos^2\alpha\right)}{R^2 \left(\alpha - \cos\alpha \cdot \sin\alpha\right)} = \frac{2\,R^3 \sin^3\alpha}{3\,R^2 \left(\alpha - \cos\alpha \cdot \sin\alpha\right)} = \frac{2\,R \sin^3\alpha}{3\left(\alpha - \cos\alpha \cdot \sin\alpha\right)}.$$

Отже, координати центра тяжіння площі кругового сегмента визначаються формулами:

$$x_C = \frac{2\,R \sin^3\alpha}{3\left(\alpha - \cos\alpha \cdot \sin\alpha\right)}, \qquad y_C = 0. \qquad (8.4.6)$$

Запитання для самоконтролю

1. Яку точку твердого тіла називають центром паралельних сил?
2. За якими формулами визначаються координати центра системи паралельних сил?
3. Що являє собою сила тяжіння?
4. Яку точку твердого тіла називають центром тяжіння?
5. Яким є геометричний зміст центра тяжіння?
6. Чому тверде тіло знаходиться в стані рівноваги, коли воно спирається на опору в точці, що відповідає центру тяжіння?
7. За якими формулами визначаються координати центра тяжіння об'єму твердого тіла?
8. За якими формулами визначаються координати центра тяжіння площі твердого тіла у вигляді плоскої фігури?
9. Що називається статичним моментом площі плоскої фігури відносно координатної осі?
10. За якими формулами визначаються координати центра тяжіння лінії твердого тіла?
11. Що називається центром мас твердого тіла?
12. За якими формулами визначаються координати центра мас твердого тіла?
13. Що є передумовою того, що геометрично центр мас твердого тіла збігається з його центром тяжіння?
14. Якими є принципові відміни між поняттями центра мас і центра тяжіння твердого тіла?
15. У чому суть методу симетрії?
16. В яких випадках застосовують метод симетрії?
17. Навести приклади застосування методу симетрії.
18. У чому суть методу розбивання та доповнення?
19. Коли застосовується метод інтегрування?
20. За якими формулами визначаються координати центра тяжіння лінії дуги кола?
21. За якими формулами визначаються координати центра тяжіння лінії півкола?
22. За якими формулами визначаються координати центра тяжіння площі трикутника?
23. Як знаходиться положення центра тяжіння площі прямокутного трикутника?
24. За якими формулами визначаються координати центра тяжіння площі кругового сектора?
25. За якими формулами визначаються координати центра тяжіння площі півкруга?
26. За якими формулами визначаються координати центра тяжіння площі кругового сегмента?

Лекція №9

тема “Рівновага невільного твердого тіла та системи тіл”

9.1 Види рівноваги невільного твердого тіла. Кут стійкості. Динамічна та статична стійкість тіла. Умови перекидання тіл. Коефіцієнт стійкості тіла.
9.2. Рівновага системи тіл.

9.1. Для невільного тіла, на яке не жорстко накладені в'язі, виділяють наступні види рівноваги: стійка, нестійка і астатична (байдужа). Рівновага тіла називається **стійкою**, якщо після виходу тіла з положення рівноваги діючи на нього сили повертають це тіло до початкового положення рівноваги. Якщо після виходу тіла з положення рівноваги діючи на нього сили віддаляють це тіло від початкового положення рівноваги, то рівновага тіла називається **нестійкою**. Якщо після виходу з положення рівноваги тіло не повертається й не віддаляється від початкового положення рівноваги, то така рівновага тіла називається **астатичною** або **байдужою**. Покажемо це на прикладах (рис. 9.1).

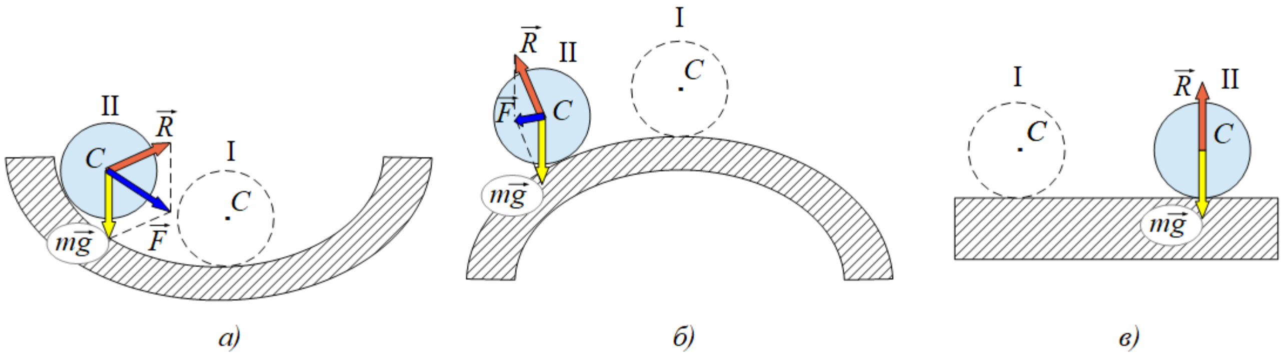


Рис. 9.1. Види рівноваги твердого тіла у вигляді кульки

Нехай кулька знаходиться в положенні рівноваги (I), яке реалізується в нижньої точці вгнутої поверхні (рис. 9.1, а), у верхньої точці опуклої поверхні (рис. 9.1, б) й на горизонтальній поверхні (рис. 9.1, в).

У випадку *а)* результуюча сила $\vec{F}$ повертає кульку з положення (II) до початкового положення рівноваги (I), яке є стійким. Ознакою стійкої рівноваги є таке положення тіла, коли його центр тяжіння (точка *C*) займає найнижче положення в порівнянні з іншими найближчими можливими положеннями. У випадку *б)* результуюча сила $\vec{F}$ віддаляє кульку від початкового положення рівноваги (I), яке є нестійким. Ознакою нестійкої рівноваги є таке положення тіла, коли його центр тяжіння (точка *C*) займає найвище положення в порівнянні з іншими найближчими можливими положеннями. У випадку *в)* результуюча $\vec{F}$ сили тяжіння $m\vec{g}$ і реакції в'язі

$\vec{R}$ дорівнює нулю, тому при будь-якому положенні кульки її рівновага є астатичною. Ознакою астатичної рівноваги є таке положення тіла, коли його центр тяжіння (точка *C*) займає однакове положення в порівнянні з іншими найближчими можливими положеннями.

Нехай тверде тіло має нерухому горизонтальну вісь обертання *OX*, що проходить через точку *O* цього тіла (рис. 9.2). Якщо центр тяжіння тіла (точка *C*) знаходиться нижче точки *O*, то під час відхилу тіла від положення рівноваги (I) сила тяжіння $m\vec{g}$ створює повертаючий момент відносно осі $M_X = mg \cdot d$ ($d -$ плече сили $m\vec{g}$), який повертає тіло до початкового положення рівноваги (рис. 9.2, а). Таке положення рівноваги є стійким.

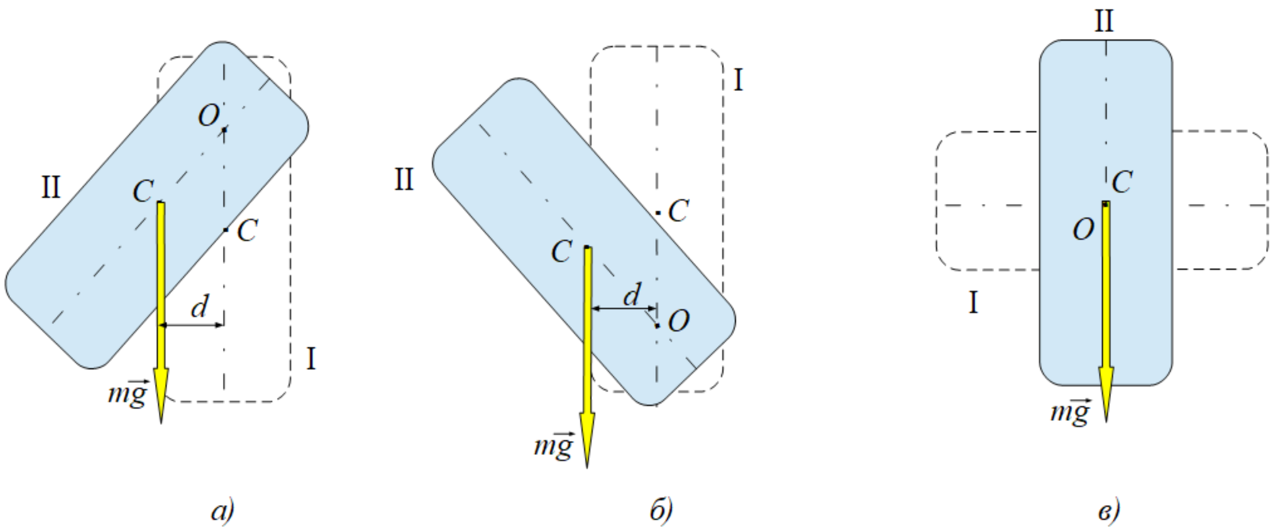


Рис. 9.2. Види рівноваги твердого тіла, що обертається навколо осі *OX*

Якщо центр тяжіння (точка *C*) знаходиться вище точки *O*, то під час відхилу тіла від положення рівноваги сила тяжіння створює повертаючий момент відносно осі $M_X = mg \cdot d$, який віддаляє тіло від положення рівноваги (рис. 9.2, б). Таке положення рівноваги є нестійким.

Якщо вісь обертання *OX* проходить через центр тяжіння тіла (точки *O* і *C* збігаються), то під час відхилу тіла від положення рівноваги центр тяжіння тіла залишається незмінним і сила тяжіння не створює повертаючого моменту відносно осі. Таке положення рівноваги є астатичним.

Розглянемо тіло *ABDO*, що знаходиться в положення стійкої рівноваги на горизонтальній поверхні (рис. 9.3, а). Будемо повертати тіло відносно горизонтальної осі *OX*, що проходить через точку *O*. Коли лінія дії сили тяжіння $m\vec{g}$ проходитиме через вісь обертання, то її момент відносно осі дорівнюватиме нулю й тіло опиниться в положенні *A'B'D'O* нестійкої рівноваги, при цьому центр тяжіння (точка C') знаходитиметься вище за вісь обертання (точка *O*). Кут повороту $\boldsymbol{\alpha}$ між положенням стійкої рівноваги і положенням нестійкої рівноваги або між лінією дії сили тяжіння $m\vec{g}$ і *лінією перекидання CO* (рис. 9.3, б) називається **кутом стійкості**.

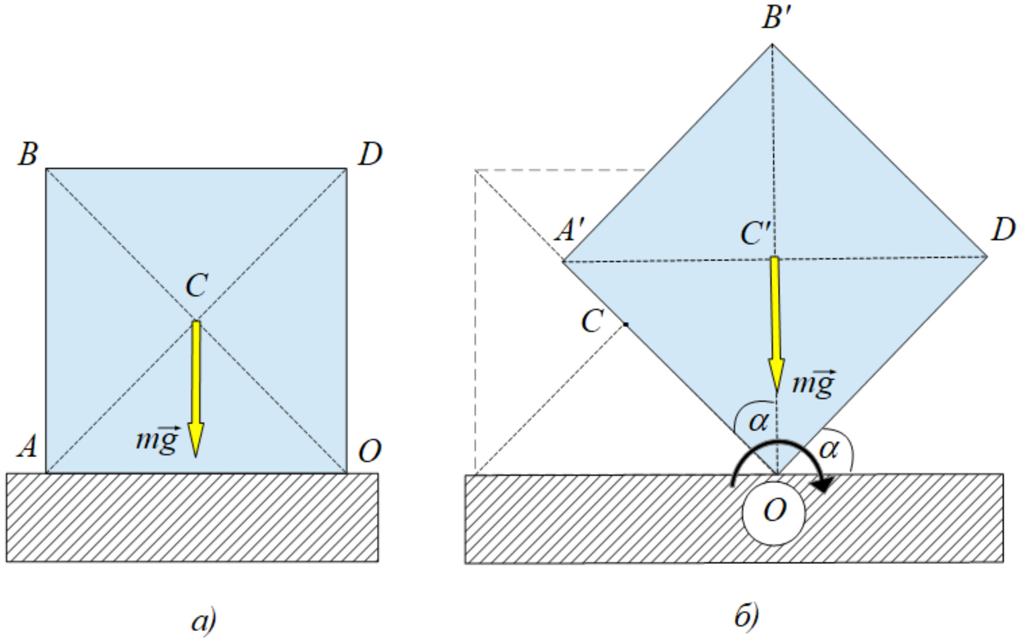


Рис. 9.3. Тверде тіло в положенні стійкої та нестійкої рівноваги

Здатність тіла повертатися до початкового положення стійкої рівноваги після припинення дії на нього зовнішнього впливу називається **динамічною стійкістю** тіла. Динамічна стійкість тіла зростає із збільшенням кута стійкості. Кут стійкості можна збільшувати, якщо збільшувати площу основи тіла або знижувати положення центра тяжіння тіла.

У будівельній практиці треба розв'язувати задачі не тільки про те, щоб тіла повертались після припинення дії зовнішніх сил в положення стійкої рівноваги (динамічна стійкість), але й про те, щоб положення стійкої рівноваги зовсім не порушувалось під час дії на тіло зовнішніх сил. Здатність тіла чинити опір будь-якому зовнішньому впливу, що порушує стан стійкої рівноваги, називається **статичною стійкістю** тіла.

Розглянемо тіло *ABDO*, що знаходиться на горизонтальній поверхні (рис. 9.4). Нехай на грань *AB* діє зовнішня сила $\vec{Q}$, яка намагається перекинути це тіло навколо горизонтальної осі *OX*, яка проходить через точку тіла *O*. У точці *C* знаходиться центр тяжіння цього тіла.

Рівновага тіла можлива лише тоді, коли лінія дії рівнодійної $\vec{F}$ сили тяжіння $m\vec{g}$ і зовнішньої сили $\vec{Q}$ перетинатиме площу опори всередині контура основи тіла (рис. 9.4, а). Якщо лінія дії рівнодійної $\vec{F}$ проходить поза контуром основи тіла, то ця рівнодійна сила $\vec{F}$ перекидає тіло навколо горизонтальної осі *OX*, що проходить через точку *O* (рис. 9.4, б).

За теоремою Варіньона момент рівнодійної $\vec{F}$ відносно осі *OX* дорівнює сумі моментів складових сил відносно цієї самої осі:

$$M_X(\vec{F}) = M_X(m\vec{g}) - M_X(\vec{Q}),$$

де $M_X(m\vec{g}) = mg \cdot d > 0$ – *момент стійкості* тіла, $M_X(\vec{Q}) = Q \cdot h < 0$ – *перекидний момент*.

У випадку, коли лінія дії рівнодійної $\vec{F}$ проходить через вісь обертання (точка О), її момент відносно осі дорівнює нулю $M_X(\vec{F}) = 0$. Тоді

$$M_X(m\vec{g}) - M_X(\vec{Q}) = 0, \quad M_X(m\vec{g}) = M_X(\vec{Q}), \quad mg \cdot d = Q \cdot h.$$

З цих співвідношень маємо **умову перекидання тіл**:

- якщо момент стійкості перевищує перекидний момент, то тіло знаходиться в положенні стійкої рівноваги

$$M_X(m\vec{g}) > M_X(\vec{Q});$$

- якщо перекидний момент перевищує момент стійкості, то тіло перекидається

$$M_X(m\vec{g}) < M_X(\vec{Q}).$$

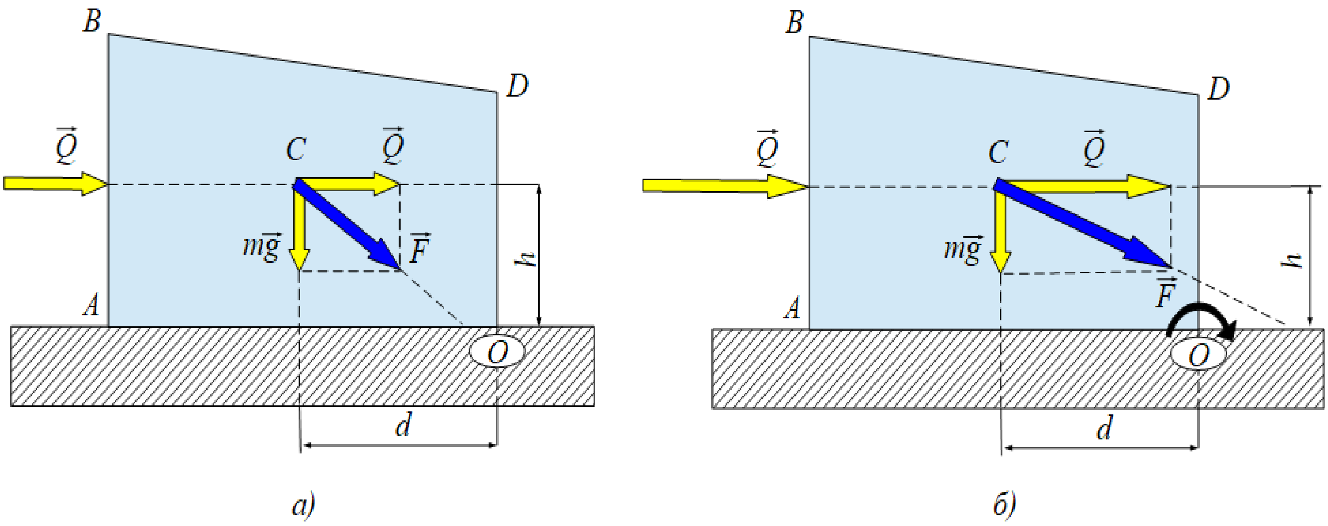


Рис. 9.4. Тверде тіло в положенні стійкої рівноваги та в положенні нестійкої рівноваги

Отже, для статичної рівноваги тіла необхідно, щоб момент стійкості тіла перевищував перекидний момент. Відношення моменту стійкості тіла до перекидного моменту називається **коефіцієнтом стійкості**:

$$k = \frac{M_X(m\vec{g})}{M_X(\vec{Q})} = \frac{mg \cdot d}{Q \cdot h}.$$

Коли $k > 1$, тверде тіло спирається на опорну площину й перебуває в стані стійкої рівноваги. Коли $k = 1$, тверде тіло перебуває в стані астатичної рівноваги. Коли $k < 1$, тверде тіло перекидається. Для будівельних споруд коефіцієнт стійкості обирають у межах $1{,}5 < k < 2$.

9.2. Відомо, що для рівноваги невільного твердого тіла в просторі кількість незалежних рівнянь рівноваги не повинно перевищувати шість. У випадку плоскої задачі для рівноваги твердого тіла кількість незалежних рівнянь рівноваги не повинно перевищувати три. Якщо кількість невідомих реакцій в'язей буде більше, ніж рівнянь рівноваги, то це означає, що методами статики дану задачу розв'язати неможливо. Така задача є статично невизначеною. Задачі, в яких кількість невідомих реакцій в'язей не перевищує кількості незалежних рівнянь рівноваги, є статично визначеними й вони розв'язуються методами статики.

Під час розв'язування задач на рівновагу систем тіл виявляється, що кількість невідомих величин перевищує кількість незалежних рівнянь рівноваги. Наприклад, це стосується рівноваги систем тіл, які з'єднані між собою шарнірами або спираються одне на одне (рис. 9.5). Система двох тіл, що спираються на шарнірно нерухомі опори *A* і *B* та з'єднані між собою через шарнір *C* (рис. 9.5, а), має чотири невідомі зовнішні реакції $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B,$ а система двох тіл, що спираються одне на одне (рис. 9.5, б), має п'ять невідомих зовнішніх реакцій $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{M}_B,$ хоч кількість незалежних рівнянь рівноваги як для першої так і для другої системи не повинно перевищувати три.

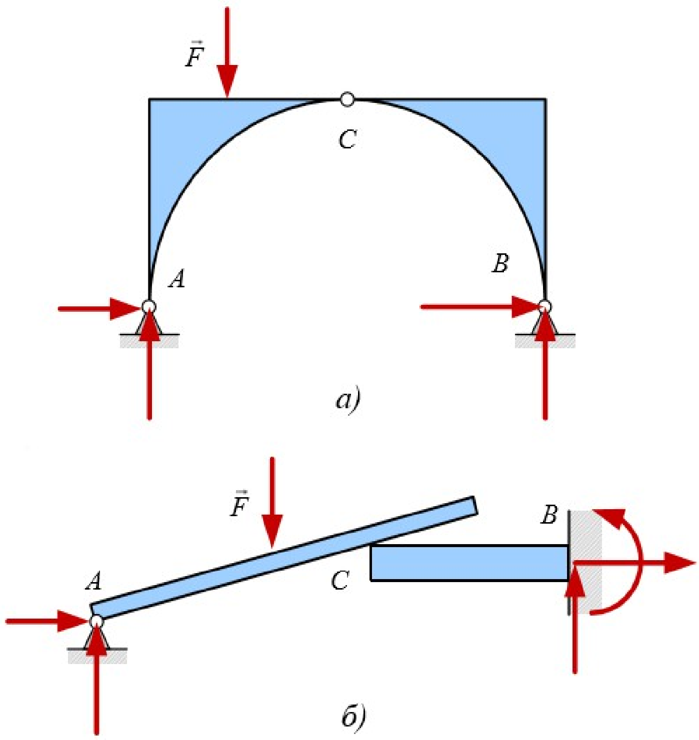


Рис. 9.5. Системи тіл під дією активної сили $\vec{F}$

Таким чином, якщо розглядати систему тіл як одне тіло в цілому, то кількість невідомих зовнішніх реакцій в'язей перевищує кількість незалежних рівнянь рівноваги й задача є статично невизначеною.

Для розв'язку задач на рівновагу систем тіл застосовують *метод розділення*, згідно якого систему тіл подумки розділяють на окремі тіла. Так для систем тіл (рис. 9.6, а, б) саме наявність шарніра *C* або точки дотику *C* дозволяють застосувати метод розділення.

Для подальшого розв'язку задачі вводяться внутрішні реакції $\vec{X}_C$, $\vec{X}'_C$ і $\vec{Y}_C$, $\vec{Y}'_C$ (рис. 9.6, а), які згідно аксіоми про взаємодію тіл попарно однакові за модулем й протилежні за напрямком:

$$\vec{X}_C = -\vec{X}'_C, \qquad \vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C,$$

де реакції $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ є силами, з якими тіло *II* діє на тіло *I*, а реакції $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ є силами, з якими тіло *I* діє на тіло *II*. Оскільки $X_C = X'_C$ і $Y_C = Y'_C$, маємо шість невідомих величин $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C$ й можна скласти шість незалежних рівнянь рівноваги, з яких три рівняння рівноваги припадає на тіло *I* і три рівняння рівноваги припадає на тіло *II* або на систему тіл, яка згідно принципу отвердіння розглядається як одне ціле тіло.

Для подальшого розв'язку задачі (рис. 9.6, б) вводяться внутрішні реакції $\vec{R}_C = -\vec{R}'_C$. Оскільки $R_C = R'_C$, то маємо шість невідомих реакцій в'язей $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_C$, $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, $\vec{M}_B$ й можна скласти шість незалежних рівнянь рівноваги, з яких три рівняння рівноваги припадає на перше тіло і три рівняння рівноваги – на друге тіло або на систему тіл як одне ціле тіло згідно принципу отвердіння.

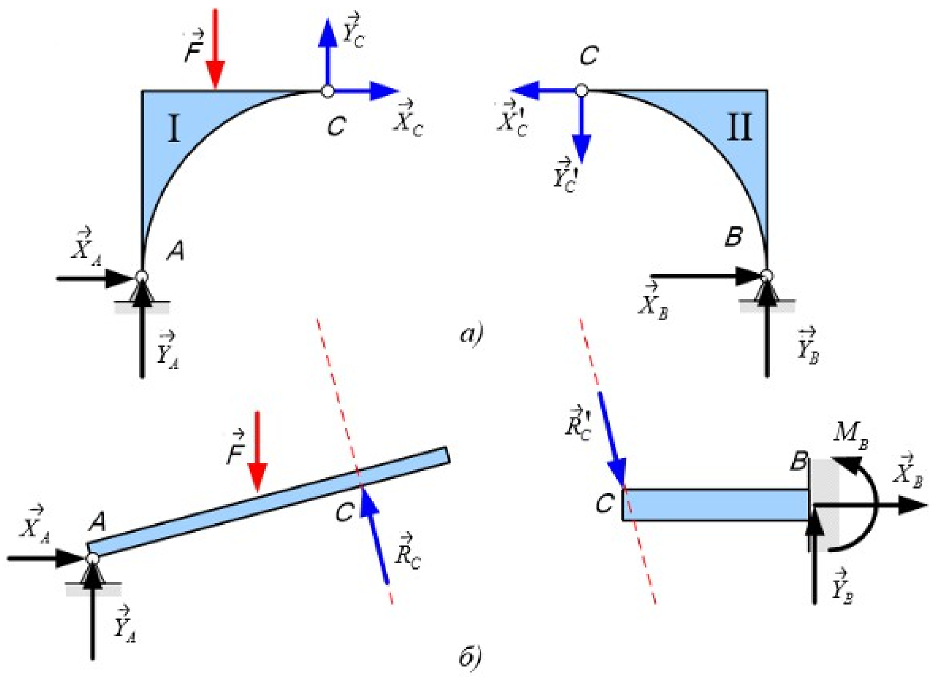


Рис. 9.6. Ілюстрація застосування методу розділення до системи тіл

Таким чином, метод розділення дозволяє перетворити статично невизначену задачу на статично визначену.

У випадках, коли тіла послідовно з'єднуються одне з одним за допомогою шарнірів, утворюючи ланцюг, кількість невідомих реакцій в'язей можна визначити за формулою:

$$N = m + 2(n - 1),$$

де m – кількість невідомих опорних реакцій, n – кількість тіл, що об'єднані в систему. Кількість незалежних рівнянь рівноваги для системи тіл дорівнює $M = 3n$. Якщо $N = M$, то система тіл статично визначена. Якщо $N > M$, то рівнянь рівноваги недостатньо для визначення усіх невідомих величин і система тіл статично невизначена. Наприклад, для системи тіл (рис. 9.6, а) $N = 4 + 2(2 - 1) = 6$, $M = 3 \cdot 2 = 6$. Отже, $N = M$ і ця система тіл є статично визначеною.

Для системи тіл (рис. 9.7) $N = 5 + 2(3 - 1) = 9$, $M = 3 \cdot 3 = 9$, тому ця система тіл є статично визначеною.

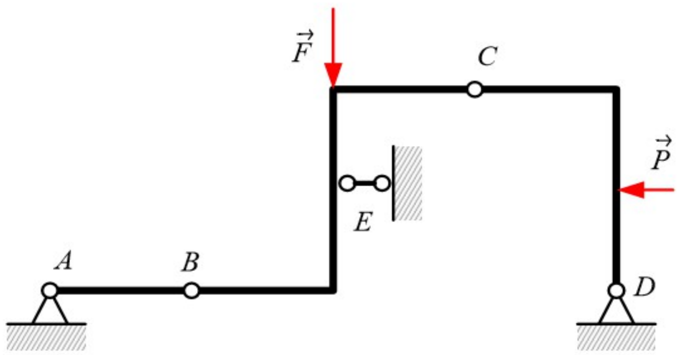


Рис. 9.7. Статично визначена система тіл

Запитання для самоконтролю

1. Що називаються стійкою рівновагою невільного твердого тіла?
2. Яке положення твердого тіла забезпечує йому стан стійкої рівноваги?
3. Що називаються нестійкою рівновагою невільного твердого тіла?
4. За якої умови тверде тіло опиняється в положенні нестійкої рівноваги?
5. Що називаються астатичною рівновагою невільного твердого тіла?
6. За якої умови тверде тіло опиняється в положенні астатичної рівноваги?
7. За яких умов тверде тіло, що має вісь обертання, опиняється в положенні: а) стійкої рівноваги; б) нестійкої рівноваги? в) астатичної рівноваги?
8. Що називається кутом стійкості?
9. За якої умови стан стійкої рівноваги твердого тіла перетворюється на стан нестійкої рівноваги?
10. Як можна змінювати значення кута стійкості?
11. Що називається динамічною стійкістю твердого тіла?
12. Як динамічна стійкість твердого тіла зв'язана з кутом стійкості?
13. Що називається статичною стійкістю твердого тіла?
14. Що називається моментом стійкості твердого тіла?
15. Що називається перекидним моментом?
16. Сформулювати умови перекидання твердого тіла, що не прикріплене до опорної поверхні?
17. Що називається коефіцієнтом стійкості?
18. Для яких значень коефіцієнта стійкості тверде тіло знаходиться в положенні стійкої рівноваги, астатичної рівноваги або перекидається?
19. Яку особливість мають задачі про рівновагу системи тіл?
20. З якою метою до розв'язку задач про рівновагу системи тіл застосовується метод розділення?
21. Яка різниця між зовнішніми та внутрішніми реакціями в'язей?
22. З якою метою вводяться внутрішні реакції в`язей?
23. За якою формулою можна визначити кількість невідомих реакцій в'язей для системи тіл?
24. За якою формулою можна визначити кількість незалежних рівнянь рівноваги для системи тіл?
25. За якою умовою задача про рівновагу системи тіл є: а) статично визначеною? б) статично невизначеною?

Лекція №10

тема **“Рівновага твердого тіла при наявності сил тертя”**

10.1. Тертя. Види тертя: зовнішнє і внутрішнє, статичне і динамічне, сухе і рідинне. Сила тертя. Закономірності тертя. Статичний та динамічний коефіцієнти тертя. Реакція шорсткої поверхні. Кут тертя та конус тертя. Умова рівноваги твердого тіла на шорсткій поверхні під впливом зовнішньої сили.

10.2. Тертя кочення. Умова рівноваги твердого тіла циліндричної форми на шорсткій поверхні під впливом зовнішньої сили. Тертя кручення. Умова рівноваги кулі на шорсткій поверхні під впливом пари сил.

10.1. Тертя – це сукупність явищ, що спричиняють опір рухові одне відносно одного макроскопічних тіл (зовнішнє тертя) або елементів одного і того ж тіла (внутрішнє тертя), при якому повна механічна енергія тіл розсіюється в навколишньому просторі у вигляді тепла.

Зовнішнє тертя відбувається на границі контакту двох твердих тіл. При цьому енергія макроскопічного механічного руху перетворюється на енергію мікроскопічного руху атомів і молекул. Людство навчилося використовувати цей процес для добування вогню. Зовнішнє тертя залежить від механічних властивостей тіл, шорсткості контактних поверхонь, від прикладених до тіл навантажень. Для тіл, що не є провідниками електричного струму, зовнішнє тертя приводить до накопичення електричних зарядів на цих тілах (електризація через дотик). *Внутрішнє* тертя виникає в потоках рідини або під час деформації тіла між його частинками, що переміщуються одна відносно одної, тобто воно обумовлене змінами об'єму. Внутрішнє тертя в рідинах і газах називається *в'язкістю*.

Розрізняють *статичне тертя* (тертя спокою), що виникає під час відносного спокою точок дотику поверхонь тіл, й *динамічне тертя* (тертя руху), що виникає під час відносного руху тіл. Залежно від характеру руху розрізняють наступні види динамічного тертя – це тертя ковзання, тертя кочення і тертя кручення. Кількісною мірою тертя спокою і тертя ковзання є *сила тертя* $(F_{тер})$. Кількісною мірою тертя кочення і тертя кручення є *момент тертя кочення* $[M_{тер(коч)}]$ і *момент тертя кручення* $[M_{тер(круч)}]$.

Тертя між тілами, поверхні яких не змащені, називається *сухим тертям*, а тертя при значному змащенні поверхонь – *рідинним тертям*. У теоретичній механіці розглядається лише сухе тертя.

Причиною зовнішнього тертя є шорсткість поверхонь контактних тіл, а також зчеплення між поверхнями за рахунок міжмолекулярної взаємодії. Шорсткість поверхонь пов'язана з їх мікроскопічними нерівностями, які перешкоджають рухові тіл одне відносно одного. Мікроскопічні нерівності притаманні для будь-якої поверхні. Навіть полірування поверхонь не позбавляє тертя між ними, тому що зростає роль взаємодії між молекулами і атомами речовин, з яких виготовлені ці тіла.

Розглянемо переміщення тіла *A* відносно тіла *B* (рис. 10.1). Поверхні цих тіл не є гладкими й мають значну кількість нерівностей. Виступаючи нерівності безпосередньо стикаються одне з одним, що й створює сухе тертя (рис. 10.1, а). У точці дотику *K* виникають опорні реакції $\vec{R}$, які спрямовані по нормалі до елементарних поверхонь дотику. Розкладемо реакцію $\vec{R}$ на нормальну $\vec{R}_n$ і тангенціальну $\vec{R}_\tau$ складові:

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_\tau.$$

Нормальні складові $\vec{R}_n$ зрівноважуються заданими нормальними навантаженнями, а тангенціальні складові $\vec{R}_\tau$ в сумі складуть деяку силу опору відносному переміщенню тіл *A* і *B*. Це і буде сила тертя $\vec{F}_{тер}$.

За умови рідинного тертя силами тертя є сили опору зсуву між окремими шарами мастила (рис. 10.1, б).

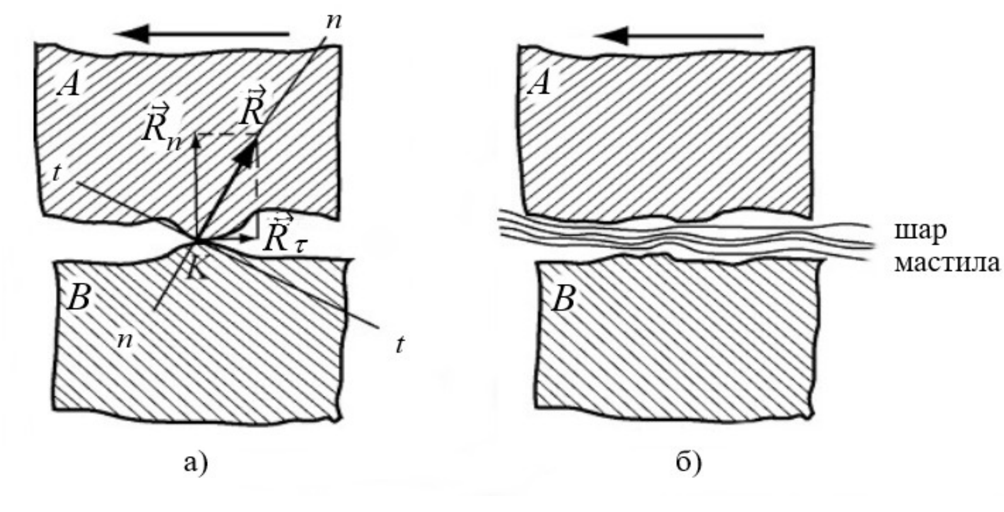


Рис. 10.1. Модель сухого (а) і рідинного (б) тертя

Експериментальні дослідження свідчать про те, що тертя являє собою складний комплекс механічних, фізичних і хімічних явищ, до того ж ті чи інші явища переважають залежно від умов, за яких відбувається процес тертя. Вивчення всіх особливостей явища тертя є досить складною фізико-механічною задачею, яка на сьогоднішній день ще не розв'язана до кінця. Тому в інженерних розрахунках використовують ряд встановлених дослідним шляхом закономірностей.

Експериментальна установка для дослідження закономірностей сухого тертя складається з нерухомої опори *B* і рухомого тіла *A*, між поверхнями яких виникає тертя (рис. 10.2). До тіла *A* прикріплюється мотузка, інший кінець якої прикріплюється до вантажу *P*. На тіло *A* діє сила тяжіння $m_A\vec{g}$, нормальна реакція $\vec{R}_n$ з боку нерухомої опори *B*, зовнішня сила $\vec{F}$, яка за модулем дорівнює силі тяжіння $m_P\vec{g}$, що діє на вантаж *P*, і сила тертя спокою $\vec{F}_{тер}$. Коли тіло *A* знаходиться в стані спокою, то зовнішня сила $\vec{F}$ зрівноважується силою тертя спокою $\vec{F}_{тер}$.

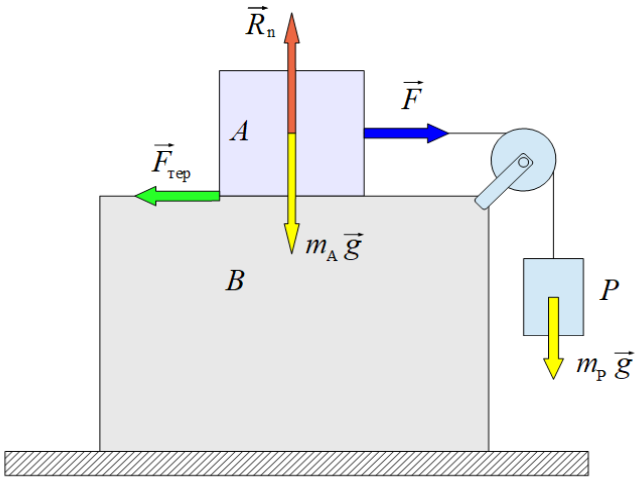


Рис. 10.2. Схема експериментальної установки для визначення закономірностей сухого тертя

Використовуючи додаткові гирі, вагу вантажу *P* поступово збільшують до значення, коли тіло *A* рушає з місця. У цей момент сила тертя досягає свого максимального значення, яке виявляється недостатнім для зрівноважування зовнішньої сили F при її подальшому збільшенні. Досягнуте максимальне значення сили тертя називається *граничною силою тертя* $F^{гр}_{тер}$. Збільшуючи вагу тіла *A* додатковими гирями, досліджують, як залежить гранична сила тертя $F^{гр}_{тер}$ від нормальної реакції $\vec{R}_n$ з боку нерухомої опори *B*.

За допомогою цих дослідів встановлені наступні **закономірності тертя**:

1) сила тертя спокою не залежить від площі поверхонь тіл, що дотикаються;

2) сила тертя спокою може приймати будь-які значення від нульового до максимального, яким є гранична сила тертя $F^{гр}_{тер}$. Сила тертя завжди напрямлена в бік, який є протилежним до напрямку дії сили, яка намагається зсунути дане тіло;

3) модуль граничної сили тертя $F^{гр}_{тер}$ дорівнює добутку статичного коефіцієнта тертя $\mu_{ст}$ на нормальну реакцію опорної поверхні R_n:

$$F^{гр}_{тер} = \mu_{ст} R_n .$$

Статичний коефіцієнт тертя – це безрозмірна величина, яка визначається дослідним шляхом:

$$\mu_{cm} = \frac{F_{тер}^{гр}}{R_n} = \frac{F}{m_A g}.$$

Статичний коефіцієнт тертя залежить від матеріалу поверхонь тіл, що дотикаються, а також від стану цих поверхонь (характер обробки, температура, вологість, наявність мастила тощо);

4) сила тертя руху завжди менша за силу тертя спокою (рис. 10.3);

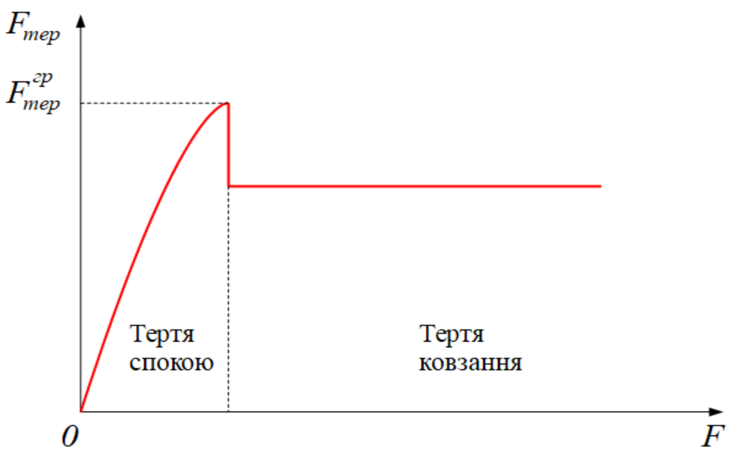


Рис. 10.3. Залежність сили тертя від зовнішньої сили, що прикладена до тіла *A* (рис. 10.2)

5) сила тертя ковзання напрямлена в бік, який є протилежним до напрямку руху даного тіла, а її модуль дорівнює добутку динамічного коефіцієнта тертя ковзання $\mu_{дин}^{ковз}$ на нормальну реакцію опорної поверхні R_n:

$$F_{тер} = \mu_{дин}^{ковз} R_n.$$

Динамічний коефіцієнт тертя ковзання – це також безрозмірна величина, яка визначається дослідним шляхом. Його значення залежить не тільки від матеріалу і стану поверхонь, але й від швидкості тіл. Динамічний коефіцієнт тертя ковзання є меншим за значенням, ніж статичний коефіцієнт тертя $(\mu_{дин}^{ковз} < \mu_{cm})$.

Якщо вважати поверхні тіла і опори гладенькими, то реакція опори $\vec{R}$ завжди напрямлена вздовж нормалі до поверхонь контактних тіл або до дотичної до цих поверхонь незалежно від того, чи знаходяться тіло і опора у стані відносного спокою або відносного руху (рис. 10.4).

Коли поверхні тіла і опори є шорсткими, то під час їх відносного спокою під впливом зовнішньої сили, яка намагається зсунути тіло відносно опорної поверхні, виникає тангенціальна складова реакції опори $\vec{R}_\tau = \vec{F}_{тер}$, яка дорівнює силі тертя й напрямлена протилежно до напрямку руху тіла. Результатом векторного додавання сили тертя $\vec{F}_{тер}$ і нормальної реакції опори $\vec{R}_n$ є повна реакція опори $\vec{R}$, яка утворює кут φ з нормаллю до поверхонь контактних тіл (рис. 10.5):

$$\vec{R} = \vec{R}_\tau + \vec{R}_n, \quad \text{де} \quad \vec{R}_\tau = \vec{F}_{тер}.$$

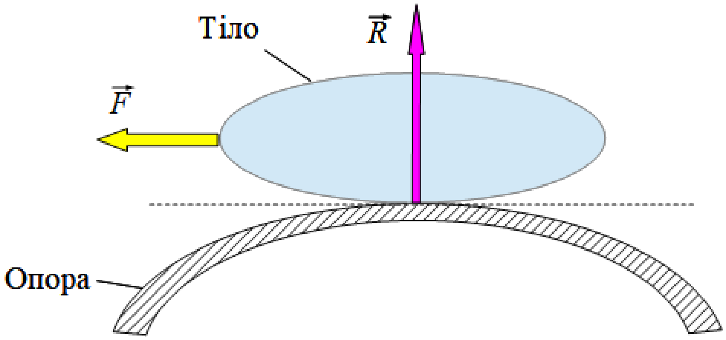


Рис. 10.4. Схема контакту гладеньких поверхонь тіла і опори

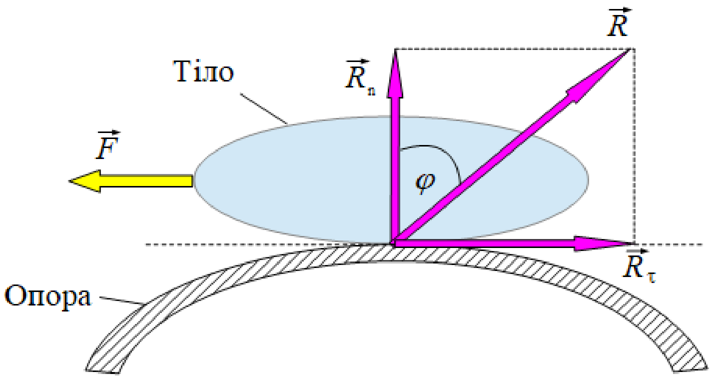


Рис. 10.5. Схема контакту шорстких поверхонь тіла і
опори під час їх відносного спокою

Якщо модуль зовнішньої сили $\vec{F}$ зростатиме, то модуль сили тертя збільшується до граничного значення $F_{тер}^{гр}$, а реакція опори $\vec{R}$ збільшується до максимального значення $\vec{R}_{max}$. При цьому кут φ зростатиме до деякого граничного значення φ_0, який називається **кутом тертя** (рис. 10.6).

З рисунку (10.6) бачимо, що $tg\,\varphi_0 = \dfrac{F_{тер}^{гр}}{R_n}$. Оскільки $F_{тер}^{гр} = \mu_{ст} R_n$, тоді одержимо зв'язок між кутом тертя і статичним коефіцієнтом тертя:

$$tg\,\varphi_0 = \frac{\mu_{cm} R_n}{R_n} = \mu_{cm}.$$

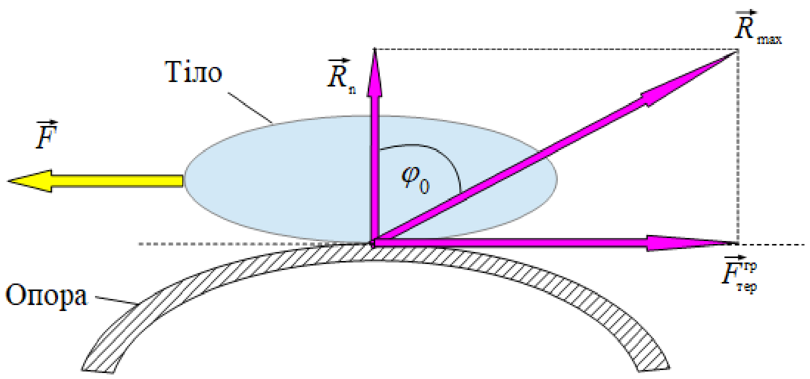


Рис. 10.6. Схема контакту шорстких поверхонь тіла і опори на межі “стан спокою-стан руху”

Коли тіло під дією зовнішньої сили переміщується вздовж опорної поверхні в будь-якому напрямку, то лінії дії максимальних реакцій $\vec{R}_{max}$ опорної поверхні утворюють конічну поверхню, яка називається **конусом тертя**. Кут між протилежними твірними конуса тертя дорівнює подвійному куту тертя $2\,\varphi_0$, вершина конуса тертя спирається на площину, що збігається з даною точкою дотику тіла з опорною поверхнею, а його вісь спрямована вздовж нормальної реакції $\vec{R}_n$ опорної поверхні (рис. 10.7).

Поняття кута тертя і конуса тертя дозволяють розглянути геометричне тлумачення стану рівноваги тіла на шорсткій поверхні. Покажемо це.

Нехай діючи на тіло активні сили разом із силою тяжіння зводяться до рівнодійної сили $\vec{F}$, лінія дії якої проходить через точку K дотику тіла з опорною поверхнею. При цьому рівнодійна $\vec{F}$ утворює кут α із нормаллю до контактних поверхонь (рис. 10.8).

Переносимо силу $\vec{F}$ вздовж лінії її дії в точку K й розкладаємо на дві складові:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Визначаємо граничне значення сили тертя:

$F^{гр}_{тер} = \mu_{cm} R_n = \mu_{cm} F_2 = F_2\, tg\,\varphi_0$, де φ_0 – кут тертя, $F_2 = R_n$.

Сила $\vec{F}_1$ намагається змусити тіло ковзати вздовж опорної поверхні. Її модуль дорівнює $F_1 = F_2\, tg\,\alpha$.

Для того, щоб тіло залишилося в стані спокою необхідно, щоб виконувалася умова:

$$F_1 \leqslant F_{тер}^{гр},\; F_2\, tg\,\alpha \leqslant F_2\, tg\,\varphi_0,\; tg\,\alpha \leqslant tg\,\varphi_0,\; \alpha \leqslant \varphi_0 .$$

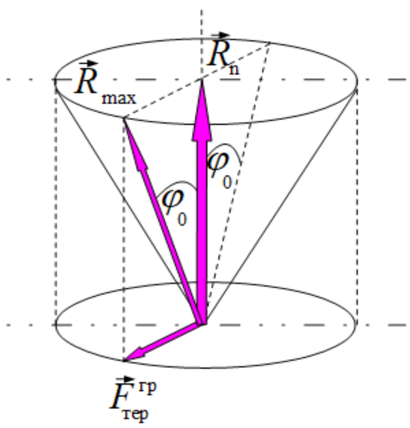


Рис. 10.7. Конус тертя

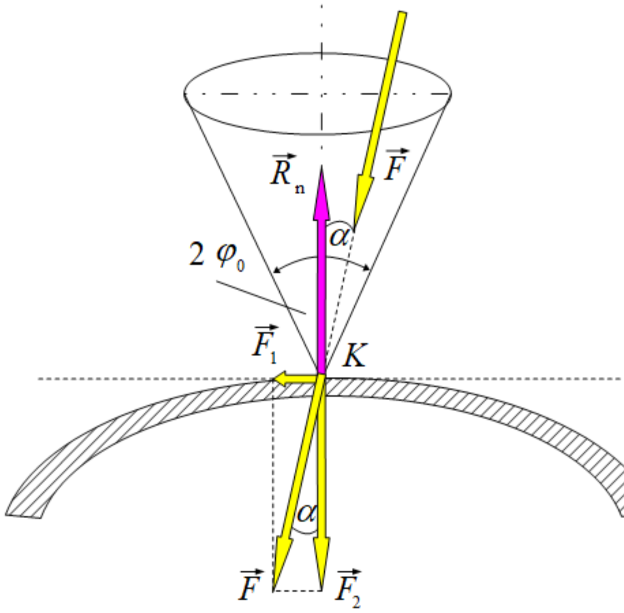


Рис. 10.8. Ілюстрація до визначення умови рівноваги тіла на шорсткій поверхні

Нерівність $\alpha \leqslant \varphi_0$ є **умовою рівноваги** твердого тіла на шорсткій поверхні.

Якщо збільшувати модуль рівнодійної сили $\vec{F}$, не змінюючи напрям її дії, то пропорційно буде зростати не тільки модуль сили $\vec{F}_1$, але й модуль сили $\vec{F}_2$, що викликає збільшення значення граничної сили тертя $F_{тер}^{гр}$. При цьому тіло залишатиметься в стані спокою. Тіло починає рухатися тільки за умови $F_1 > F_{тер}^{гр}$. Для її виконання треба змінити напрям дії рівнодійної сили $\vec{F}$ так, щоб кут α перевищував кут тертя φ_0 $(\alpha > \varphi_0)$, тобто лінія дії рівнодійної сили $\vec{F}$ повинна проходити поза конусом тертя.

Таким чином, якщо рівнодійна усіх прикладених до тіла сил, яким би не був її модуль, проходить всередині конуса тертя, то тіло залишається в стані спокою. Тіло починає рухатися лише тоді , коли рівнодійна усіх прикладених до тіла сил проходить поза конусом тертя. Саме цим пояснюється відоме явище заклинювання або самогальмування тіл.

10.2. Коли одне тіло котиться вздовж поверхні іншого тіла, то між ними виникає опір, який називається **тертям кочення**. Причиною виникнення тертя кочення є деформація поверхні контактних тіл.

Нехай тіло у вигляді циліндра радіусом r і масою m лежить на шорсткій горизонтальній поверхні, а точка P є точкою контакту циліндра з опорною поверхнею (рис. 10.9). При цьому сила тяжіння зрівноважується нормальною реакцією опорної поверхні $m\,\vec{g} = -\vec{R}_n$.

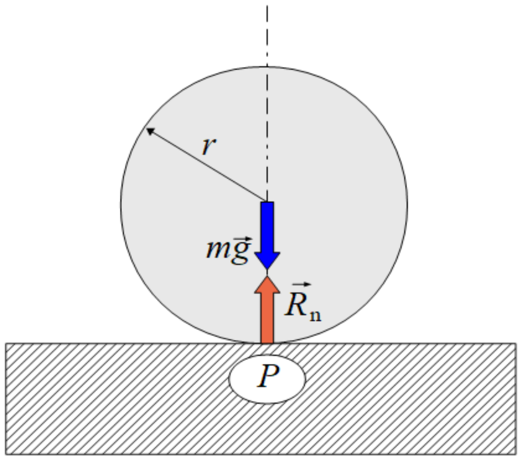


Рис. 10.9. Схема стану спокою циліндра на горизонтальній шорсткій поверхні

Подумки прикладаємо до циліндра горизонтальну силу $\vec{F}$. У точці P дотику циліндра і опорної поверхні виникне сила тертя $(\vec{F}_{тер} = -\vec{F})$. Сили $\vec{F}$ і $\vec{F}_{тер}$ утворюють пару $(\vec{F}, \vec{F}_{тер})$, яка намагається змусити циліндр котитися вздовж опорної поверхні. Для цієї моделі кочення циліндр повинен котитися під впливом будь-якої сили $\vec{F}$.

На практиці цього не відбувається й до певного значення сили $\vec{F}$ циліндр залишається в стані спокою. Це пояснюється тим, що пара сил $(\vec{F}, \vec{F}_{тер})$ компенсується дією іншої пари сил, однієї з яких є сила тяжіння $m\,\vec{g}$, а другою силою може бути лише нормальна реакція $\vec{R}_n$ опорної поверхні, лінія дії якої зсунута відносно лінії дії сили тяжіння на деяку відстань d в бік дії горизонтальної сили $\vec{F}$ (рис. 10.10, а). Це можливо тоді, коли внаслідок деформації, наприклад, опорної поверхні дотик циліндра і поверхні відбувається не в точці P, а на деякій ділянці з центром в точці P. Навантаження на правий край цієї ділянки зростає, а на лівий край ділянки – зменшується. Саме тому відбувається зміщення лінії дії нормальної реакції $\vec{R}_n$ опорної поверхні відносно лінії дії сили тяжіння.

Отже, пара сил $(\vec{F}, \vec{F}_{тер})$ з моментом $M = F\,r$ врівноважується парою сил $(m\,\vec{g}, \vec{R}_n)$ з моментом $M_{тер(коч)} = R_n\,d$, який називається *моментом тертя кочення*. При цьому циліндр відносно опорної поверхні залишається в стані спокою:

$$F\,r = R_n\,d\,,$$

де r – плече пари $(\vec{F}, \vec{F}_{тер})$, d – плече пари $(m\,\vec{g}, \vec{R}_n)$.

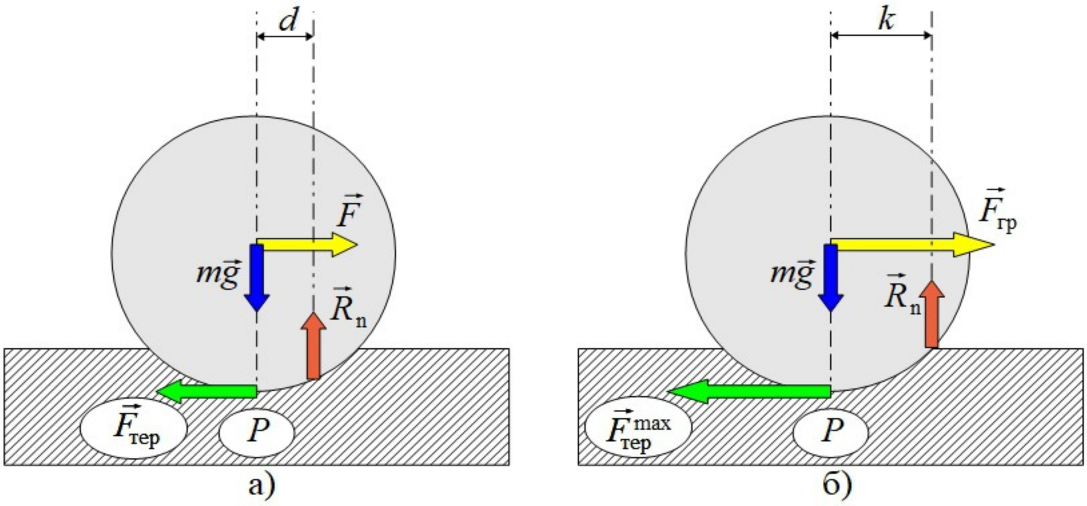


Рис. 10.10. Схема стану спокою циліндра на горизонтальній шорсткій поверхні під впливом зовнішньої сили $\vec{F}$

Будемо змінювати модуль горизонтальної сили $\vec{F}$ від нуля до деякого граничного значення $F_{гр}$ за умови, що циліндр залишається в стані спокою (рис. 10.10, б). Сила тертя також пропорційно зростатиме до деякого максимального значення $F^{max}_{тер}$. Коли $F = F_{гр}$, $F_{тер} = F^{max}_{тер}$, то відстань d також досягає свого максимального значення $d = d_{max} = k$, яке називається *коефіцієнтом тертя кочення.* Максимальним буде й момент тертя кочення $M^{max}_{тер(коч)} = k\ R_n$.

Коефіцієнт тертя кочення k не є безрозмірною величиною й вимірюється в одиницях довжини. Він визначається дослідним шляхом. Дослідженнями встановлена незалежність коефіцієнта тертя кочення від кутової швидкості циліндра. Він залежить від матеріалу контактних тіл, їх фізичного стану, площі контакту, від радіуса циліндра. Збільшення твердості контактних тіл приводить до зменшення площі контакту тіл, до зменшення коефіцієнта тертя кочення і, відповідно, до зменшення модуля активної сили $\vec{F}$, яку слід прикласти до циліндра для початку його руху. Наприклад, для кочення вагонного колеса сталевою рейкою $k = 0{,}5$ *мм.* У цьому випадку причиною виникнення тертя кочення є прогин рейки під колесом.

Для уявлення явища тертя кочення в межах статики абсолютно твердого тіла розрахункова схема виконується без розгляду деформації та зміщення нормальної реакції $\vec{R}_n$ опорної поверхні, вважаючи мірою опору кочення не силу тертя кочення, а момент тертя кочення. Це дозволяє сформулювати **умову рівноваги** циліндричного тіла на шорсткій опорній поверхні під час дії на нього зовнішньої сили $\vec{F}$: при намірі перекотити циліндричне тіло шорсткою поверхнею виникає опір коченню у вигляді моменту тертя кочення $M_{тер(коч)}$, значення якого змінюється від нульового до максимального $0 \leqslant M_{тер(коч)} \leqslant M^{max}_{тер(коч)}$. Циліндричне тіло залишається в стані спокою тоді, коли момент тертя кочення не перевищує деякого його максимального значення, яке дорівнює добутку коефіцієнта тертя кочення на нормальну реакцію опорної поверхні:

$$M_{тер(коч)} \leqslant M_{тер(коч)}^{max} = k\ R_n.$$

Якщо $M_{тер(коч)} > M_{тер(коч)}^{max}$, починається кочення циліндричного тіла шорсткою поверхнею.

Для аналізу явищ тертя корисно порівняти динамічний коефіцієнт тертя ковзання $\mu_{дин}^{ковз}$ із співвідношенням $\frac{k}{r} = \mu_{дин}^{коч}$, через яке визначається максимальна сила тертя кочення:

$$F_{тер}^{max} = F_{гр} = \frac{k}{r}\ R_n = \mu_{дин}^{коч}\ R_n,$$

де $\mu_{дин}^{коч}$ – *зведений динамічний коефіцієнт тертя кочення* (безрозмірна величина). Для більшості матеріалів зведений динамічний коефіцієнт тертя кочення значно менший ніж статичний коефіцієнт тертя $\mu_{дин}^{коч} \ll \mu_{ст}$. Цим пояснюється те, що сили тертя кочення значно менші, ніж сили тертя ковзання. Тому в техніці, коли це можливо, ковзання завжди замінюють коченням (колеса, котки, підшипники).

Якщо до кулі масою *m* і радіусом *r*, що лежить на горизонтальній шорсткій поверхні, прикласти пару сил із моментом *M*, то ця пара сил намагається повернути кулю навколо вертикальної осі, яка збігається з віссю симетрії кулі.

Досвід показує, що куля починає обертатися тоді, коли значення моменту пари досягає деякого максимального значення, яке перевищує величину $M_{тер(круч)}^{max}$:

$$M = M_{max} > M_{тер(круч)}^{max} = \lambda\ R_n,$$

де $M_{тер(круч)}^{max}$ – максимальне значення моменту тертя кручення, λ – коефіцієнт тертя кручення, R_n – нормальна реакція опорні поверхні.

Отже, коли $M_{max} \leqslant M_{тер(круч)}^{max}$, то куля знаходиться у стані рівноваги на шорсткій поверхні під дією пари сил; коли $M_{max} > M_{тер(круч)}^{max}$, то куля починає обертання навколо вертикальної осі.

Такий результат пояснюється наявністю **тертя кручення**, що виникає між поверхнею кулі і опорною поверхнею. Коефіцієнт тертя кручення також має розмірність довжини. Він в 5-10 разів менший ніж коефіцієнт тертя кочення.

Запитання для самоконтролю

1. Що називаються тертям?
2. Як виникає зовнішнє тертя?
3. Як виникає внутрішнє тертя?
4. Що називається статичним тертям?
5. Що називається динамічним тертям?
6. Які існують види динамічного тертя?
7. Що є кількісною мірою тертя?
8. Чим відрізняється сухе тертя від рідинного?
9. Що є причиною виникнення сухого тертя?
10. Що є причиною виникнення рідинного тертя?
11. З яких елементів складається експериментальна установка для визначення закономірностей сухого тертя?
12. Що означає поняття “гранична сила тертя спокою”? Як вона визначається?
13. Якими є закономірності сухого тертя?
14. Що являє собою статичний коефіцієнт тертя?
15. Якими є закономірності динамічного тертя?
16. Що являє собою динамічний коефіцієнт тертя ковзання?
17. Як впливає шорсткість поверхонь контактних тіл на реакцію опорної поверхні?
18. Пояснити поняття “кут тертя”.
19. Як зв'язані між собою кут тертя і статичний коефіцієнт тертя?
20. Пояснити поняття “конус тертя”.
21. Яким є геометричне тлумачення умови рівноваги тіла на шорсткій поверхні?
22. Що є причиною виникнення тертя кочення?
23. Що є кількісною мірою тертя кочення?
24. Що називається моментом тертя кочення?
25. Яку роль виконує момент тертя кочення під час дії зовнішньої сили на тіло, яке здатне котитися вздовж опорної поверхні?
26. Що називається коефіцієнтом тертя кочення?
27. Від яких чинників залежить коефіцієнт тертя кочення?
28. Сформулювати умову рівноваги циліндричного тіла на шорсткій опорній поверхні під час дії на нього зовнішньої сили.
29. Що називається зведеним коефіцієнтом тертя кочення?
30. Чому в техніці, коли це можливо, ковзання замінюють коченням?
31. Що є причиною виникнення тертя кручення?
32. Що є кількісною мірою тертя кручення?
33. Якою є умова рівноваги кулі на шорсткій поверхні під впливом пари сил?

ЛІТЕРАТУРА

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник. Київ: Техніка, 2002. 511с.
2. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М. Теоретична механіка. Ч. 1. Статика. Кінематика: підручник. Київ: Знання, 2004. 599 с.
3. Попов М.В. Теоретическая механика: учебник. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1986. 336 с.
4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1967. 478 с.
5. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Ч.1,2: учебник. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 489 с.
6. Бугаєнко Г.О. Курс теоретичної механіки: підручник. Вид. 2-ге, переробл. і допов. Київ: Радянська школа, 1968. 371 с.
7. Путята Т.В., Фрадлін Б.Н. Методика розв'язування задач з теоретичної механіки: навч. посібник. Київ: Радянська школа, 1952. 365 с.
8. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: учеб. Пособие. Изд. 36-е, исп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1986. 448 с.
9. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механіки. Ч.1. Статика. Кінематика: учебник. Изд. 6-е, испр. М.: Высш. шк., 1984. 343с.,
10. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механіка в примерах и задачах. Т.1. Статика и кінематика: учебник. Изд. 6-е,. испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1972. 512с., ил.
11. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. Курс теоретической механики: учебник. М.: МГТУ им. Баумана, 2005. – 736 с.
12. Лобас Л.Г., Лобас Людм.Г. Теоретична механіка: підручник. Київ: ДЕТУТ, 2008. 406с.
13. ІвановБ.О., Максюта М.В. Конспект лекцій із теоретичної механіки: навч. посібник. Київ: Видав. центр "Київський університет", 2012. 207с.
14. Теоретична механіка. Ч. 1. Статика. Кінематика: навч. посібник / Литвинов О.І., Михайлович Я.М., Бойко А.В., Березовий М.Г. Київ: Агроосвіта, 2013. 576 с.
15. Векерик В., Кузьо І., Левчук К., Цідило І. Теоретична механіка. Статика: підручник. Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2014. 325 с.
16. Теоретична механіка: підручник / Кузьо І.В. та ін. Харків: Фоліо, 2017. 780 с.
17. Теоретична механіка: підручник / Булгаков В.М., Яременко В,В., Черниш О.М., Березовий М.Г. Київ: ЦУЛ, 2017. 640 с.