МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

методичні вказівки та завдання
до самостійної роботи з дисципліни
“Вища математика” для студентів інженерних спеціальностей

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри АТ та ГМ,
протокол № 10 від 18.05. 2018р.

Чернігів ЧНТУ 2018

Функціональні ряди. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей./Укл.: В.П. Мурашковська, Л.А. Руновська– Чернігів: ЧНТУ,2018, - 54с.

Укладачі:

Мурашковська Вірв Петрівна, ст. викл.
Руновська Людмила Анатоліївна, ст. викл.

Відповідальний за випуск: Кальченко Віталій Іванович, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, професор, доктор технічних наук

Рецензент: Венжега Володимир Іванович – доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, Чернігівського національного технологічного університету

Зміст

Вступ 4
1.ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ 5
1.1Основні відомості з теорії функціональних рядів 5
1.2 Схема знаходження області збіжності степеневого ряду 7
1.3 Розклад функцій в ряди Тейлора і Маклорена 8
1.4 Основні табличні розкладання функцій 9
1.5 Схема розкладу функції в ряд Маклорена 10
2. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ 12
3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ 13
4. ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ 36
5. КОНТРОЛЬНА РОБОТА 42
Список рекомендованої літератури 53

Вступ

Ці методичні вказівки укладені у відповідності до Навчальної програми з вищої математики для технічних, технологічних та природничих спеціальностей вищих навчальних закладів.

Дана робота призначена для студентів, які вивчають вищу математику і містить теоретичні вправи, контрольні питання, розрахункові завдання і приклади виконання завдань до модулю «Функціональні ряди».

Поняття функціонального ряду широко застосовується як в прикладній математиці, так і в різних інженерних дисциплінах. Вони є зручним апаратом для розв'язання задач в різних галузях науки і техніки.
Мета даного видання – допомогти студентам краще оволодіти математичним апаратом, який застосовується в функціональних рядах, виробити у студентів уміння, навички обчислювати різні задачі з теми «Функціональні ряди».

Основне завдання цих методичних вказівок – надати студентам теоретичну та практичну допомогу в самостійній роботі по вивченню розділу «Функціональні ряди» з дисципліни «Вища математика». Методичні вказівки містять теоретичний матеріал, необхідний для самостійного виконання студентами індивідуальних домашніх завдань. Наведені приклади розв'язання основних стандартних задач. Завдання охоплюють в цілому матеріал розділу, який в тому чи іншому обсязі вивчається студентами.

Методичні вказівки можуть бути використані під час аудиторних занять, як довідковий матеріал та в якості задачника при проведенні самостійних та модульно – контрольних робіт.

1.ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1Основні відомості з теорії функціональних рядів

Нехай задана нескінченна послідовність функцій
$U_1(x), U_2(x), ..., U_n(x), ...$,
які мають спільну область визначення.

Означення: *Функціональним рядом називається складений з цих функцій вираз*

$$U_1(x)+U_2(x)+...+U_n(x)...=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x). \quad (1)$$

Якщо у членів ряду (1) зафіксувати значення аргумента $x = x_0$,
то отримаємо числовий ряд

$$U_1(x_0)+U_2(x_0)+...+U_n(x_0)+... = \sum_{n=1}^{\infty}U_n(x_0).$$

Якщо при $x = x_0$ такий числовий ряд збіжний, то точка x_0 називається *точкою збіжності* функціонального ряду (1).

Означення: *Областю збіжності функціонального ряду називається множина всіх точок збіжності цього ряду.*

Якщо значення належить області збіжності ряду (1), то можна говорити про суму цього ряду в точці $x = x_0$:
$U_1(x_0)+U_2(x_0)+...+U_n(x_0)+... = S(x_0).$

Таким чином, значення суми функціонального ряду залежить від значення x_0 змінної *x*, т.б. сума функціонального ряду сама є функцією змінної *x*:
$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ - *сума ряду,*
$R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ - *залишок ряду,*
де $S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + ... + U_n(x),$ а *x* належить області збіжності.

Окремим випадком функціонального ряду є *степеневий ряд*.

Означення: *Степеневим рядом за степенями x-x_0 називається функціональний ряд виду*

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

Числа $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ називаються *коефіцієнтами степеневого ряду* (деякі з них можуть бути рівні нулю).

При x_0 =0 степеневий ряд має вид

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n . \quad (2)$$

Дослідження питання про збіжність степеневого ряду (2) приводить до наступних висновків:

1. Степеневий ряд розбіжний для всіх значень x, крім $x=0$ (при $x=0$ степеневий ряд збігається і його сума дорівнює a_0. Це тривіальний випадок.)

2. Степеневий ряд збігається при будь-якому значенні x. Тоді його називають усюди збіжним.

3. Степеневий ряд збігається при одних значеннях x і розбігається при
інших значеннях x.

Теорема Абеля дозволяє визначити форму області збіжності степеневого ряду.

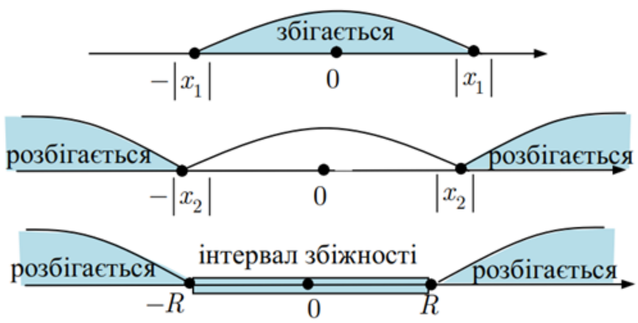
Теорема Абеля: Якщо ряд (2) збігається при де якому значенні $x = x_0$, то він збігається, і притому абсолютно, при всіх значеннях x, для яких $|x| < x_0$.

Якщо ряд (2) розбігається при $x = x_0$, то він розбігається і при всіх значеннях x, для яких $|x| > x_0$.

Зауваження: З теореми випливає, що якщо при $x = x_0$ ряд (4) збігається, то для всіх значень x з інтервалу $(-x_0, x_0)$ ряд збігається абсолютно. Якщо при $x = x_0$ ряд (2) розбігається, то він розбігається для всіх значень x, які більші за x_0 і менше ніж мінус x_0.

Означення: *Інтервалом збіжності степеневого ряду називається проміжок (-R, R) такий, що для будь якої точки x, яка лежить в всередині цього інтервалу, ряд збігається (абсолютно), а для точок x, які лежать поза ним, ряд розбігається.*

Число R називається *радіусом збіжності*.



Радіус збіжності ряду (2) можна визначити через його коефіцієнти.

Якщо

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

де a_n, a_{n+1}- коефіцієнти відповідного n – го і *(n+1)* – го членів ряду, то радіус збіжності степеневого ряду (2) визначається за формулою

$$R = \frac{1}{L}.$$

Ряд буде абсолютно збіжним при значеннях *x,* які задовольняють нерівність $|x| < \frac{1}{L}$, т.б. для всіх значень з інтервалу $(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L})$.

Якщо

$L = 0,$ то $R = \infty.$

Це означає, що *степеневий ряд збігається при будь якому значенні x* (збігається всюди).

Якщо

$L = \infty,$ то $R = 0$

т.б. *інтервал збіжності вироджується в точку (ряд (2) розходиться при будь якому значенні x*, крім *x=0*).

Дослідити степеневий ряд на збіжність означає знайти його інтервал збіжності і встановити збіжність або розбіжність ряду в граничних точках інтервалу, тобто при $x = R$ *і* $x = -R$.

1.2 Схема знаходження області збіжності степеневого ряду

*Постановка задачі***.** Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

План рішення.

1) Знайти коефіцієнти a_n і a_{n+1} n – го і *(n+1)* – го членів ряду.

2) Скласти відношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ і взяти його по абсолютній величині.

3) Знайти $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Нехай ця границя дорівнює L, тоді радіус збіжності степеневого ряду $R = \frac{1}{L}$, а його інтервалом збіжності буде інтервал $-R < x - x_0 < R$.

4) Дослідити поведінку степеневого ряду в граничних точках інтервалу збіжності $x = x_0 \pm R.$

Приклад. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n}.$$

Рішення.

1) Коефіцієнт n – го члена $a_n=\frac{1}{(n+1)2^n}$; коэффициент *(n+1)* – го члена $a_{n+1}=\frac{1}{(n+2)2^{n+1}}$.

2) Їх відношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)2^n}{(n+2)2^{n+1}}=\frac{(n+1)}{(n+2)2}$.

3) Обчислюємо $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{(n+2)2}\right|=\frac{1}{2}$.

Радіус збіжності $R=\frac{1}{L}=2$. Отже, інтервал збіжності визначається нерівностями $-2<x+1<2$. Таким чином, ряд абсолютно збігається для всіх значень x з інтервалу (-3,1).

4) Досліджуємо збіжність ряду в граничних точках інтервалу збіжності.

Підставляємо в заданий ряд $x=-3$. Отримаємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^n},$$

який абсолютно збігається за ознакою збіжності знакопочережного ряду. На правому кінці інтервалу збіжності $x=1$; підставляючи це значення в заданий ряд, отримаємо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$, який розбігається за теоремо (*гранична форма ознаки порівняння*).

Відповідь. Область збіжності степеневого ряду [-3,1).

1.3 Розклад функцій в ряди Тейлора і Маклорена

Розглянемо функцію *f(x)*, яка визначена в околиці точки x_0 і в цій точці має кінцеві похідні будь-якого порядку, тоді

Означення: Рядом Тейлора функції *f(x)* називається степеневий ряд виду

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+.......+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+Rn(x)$$

де $Rn(x)=\frac{f^{n}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n$ - залишковий член у формі Лагранжа ($0<\theta<1$).

Необхідною і достатньою умовою наявності рівності

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+.......+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+Rn(x) \quad (1)$$

для значень x з деякого проміжку є умова

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

для всіх значень x з цього проміжку.

Формула (1), вірна при зазначеній умови, дає розкладання функції *f(x)* в *ряд Тейлора*.

Якщо у формулі (1) покласти $x_0=0$, то ряд

$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+Rn(x)$ називається *рядом Маклорена* функції *f(x)*, де $Rn(x)=\frac{f^{n}(c)}{n!}x^n$ – залишковий член у формі Лагранжа (0<c< x).

1.4 Основні табличні розкладання функцій

Тейлорові розвинення деяких елементарних функцій з центром у точці x=0.

Функції	**Розклад в ряд Маклорена**	**Умова збіжності ряду**
e^x	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....$	$\lvert x\rvert<\infty$
sinx	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+.......$	$\lvert x\rvert<\infty$
cosx	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+.....$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+......$	*-1<x<1*
$(1+x)^m$	$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot(m-2)\cdot...\cdot(m-n+1)}{n!}x^n=1+mx+\frac{m(m-1)x^2}{2!}+$ $+\frac{m(m-1)\cdot(m-2)}{3!}x^3+....$	*-1<x<1*

ln(1+x)	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots$	$-1<x\le 1$
arctgx	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\ldots$	$-1\le x\le 1$

1.5 Схема розкладу функції в ряд Маклорена

Постановка задачі. Розкласти функцію *f(x)* в ряд Маклорена.

План рішення.

1) Перетворимо функцію *f(x)*до виду, що допускає використання табличних розкладів e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(x+1)$, arctgx.

2) Знайдемо розкладання функції в ряд Маклорена, використовуючи табличні розкладання, додавання (віднімання) рядів, множення ряду на число.

3) Визначимо область збіжності отриманого ряду до функції *f(x)*.

Приклад. Розкласти функцію

$$f(x)=\frac{5}{6-x-x^2}$$

в ряд Маклорена.

Рішення.

1. Розкладемо цю функцію на елементарні дроби: $\frac{5}{6-x-x^2}=\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x+3}$.

2. Використовуючи табличне розкладання $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n=1+t+t^2+t^3+\ldots,\quad t\in(-1,1),$ отримаємо

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x/2}=\frac{1}{2}(1+\frac{x}{2}+(\frac{x}{2})^2+\ldots+(\frac{x}{2})^n+\ldots)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}},\quad x\in(-2,2);$$

$$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-x/3)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{3^{n+1}},\quad x\in(-3,3).$$

Отже,

$$\frac{5}{6-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)\cdot x^n.$$

3. Областю збіжності отриманого ряду є перетин $(-2,2)\cap(-3,3)=(-2,2)$.

Відповідь. $\forall\, x \in (-2,2):\ \frac{5}{6-x-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)\cdot x^n.$

2. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Дайте визначення функціонального ряду. Сформулюйте і доведіть теорему про інтегрування функціонального ряду.

2. Дайте визначення функціонального ряду. Сформулюйте і доведіть теорему про диференціювання функціонального ряду.

3. Дайте визначення степеневого ряду. Сформулюйте теорему Абеля про область збіжності степеневого ряду.

4. Доведіть теорему Абеля про область збіжності степеневого ряду.

5. Сформулюйте і доведіть теорему про інтервал збіжності степеневого ряду.

6. Дайте визначення радіуса збіжності степеневого ряду. Вкажіть спосіб визначення радіуса збіжності. Наведіть формулу для обчислення радіуса збіжності з використанням ознаки Даламбера.

7. Дайте визначення радіуса збіжності степеневого ряду. Вкажіть спосіб визначення радіуса збіжності. Наведіть формулу для обчислення радіуса збіжності з використанням ознаки Коші.

8. Наведіть формулу для ряду Тейлора. Сформулюйте і доведіть умову, при якій цей ряд збігається і дорівнює самій функції.

9. Сформулюйте і доведіть теорему про диференціювання степеневого ряду.

10. Дайте визначення ряду Маклорена. Що означає розкласти функцію в ряд Маклорена?

11. Вивести формулу розкладання в ряд функції $y = e^x$.

12. Вивести формулу розкладання в ряд функції $y = \sin x$.

13. Вивести формулу розкладання в ряд функції $y = \cos x$.

14. Вивести формулу розкладання в ряд функції $y = (1 + x)^m$.

15. Вивести формулу розкладання в ряд функції $y = \ln(1 + x)$.

16. Дайте визначення тригонометричного ряду, ряду Фур'є для функції $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$, для функції $f(x)$ на $[-\ell, \ell]$.

17. Дайте визначення тригонометричного ряду. Вивести коефіцієнти Фур'є для функції $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$.

18. Дайте визначення тригонометричного ряду. Вивести коефіцієнти Фур'є для функції $f(x)$ на $[-\ell, \ell]$.

19. Дайте визначення кусково монотонної функції. Сформулюйте теорему про розклад кусково монотонної функції в ряд Фур'є.

20. Дайте визначення тригонометричного ряду. Наведіть коефіцієнти Фур'є для парної і непарної функцій.

21. Сформулюйте і доведіть теорему про збіжність ряду Фур'є в даній точці.

22. Сформулюйте і доведіть достатню умову збіжності ряду Фур'є.

3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$**.**

1.1

а) $f_n(x)=\dfrac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{n^4+1}{2^n (x-2)^n}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{(n+1)^5}{2n+3}(x+2)^n$;

г) $f_n(x)=\dfrac{(x-2)^{2n}}{(3n+1)\cdot 9^n}$.

1.2

а) $f_n(x)=\dfrac{(x+5)^{2n+1}}{4^n (n+2)^6}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{(x-2)^n}{n\cdot 8^n}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{n^4}{(n+1)!}\cdot (x+1)^{2n}$;

г) $f_n(x)=\dfrac{(x-2)^n\cdot 2^n}{n^{n+1}}$.

1.3

а) $f_n(x)=\dfrac{(x+3)^n}{2^n\cdot n^2}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)(x-3)^n}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{(x-1)^{2n}}{(n+1)\cdot 9^n}$;

г) $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n^n}(x+1)^n$.

1.4

а) $f_n(x)=\dfrac{n(n+1)}{n-3}(x-1)^n$;

б) $f_n(x)=\dfrac{3n+8}{n^2+4}(x-2)^n$;

в) $f_n(x)=\dfrac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$;

г) $f_n(x)=\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n\cdot (x+2)^n}$.

1.5

а) $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n (x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n (x-3)^{2n}}{(2n+1)\cdot 16^n}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{3n+2}{(n^2+9n+1)(x+2)^n}$;

г) $f_n(x)=\dfrac{n^2\cdot x^n}{n!}$.

1.6

а) $f_n(x)=\dfrac{n^2+1}{3^n\cdot(x+4)^n}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n(x+1)^n}{n\cdot 2^n\cdot\ln(n+1)}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{n^3+1}{n!}(x+1)^{2n+1}$;

г) $f_n(x)=\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}\cdot(x-2)^n$.

1.7

а) $f_n(x)=\dfrac{n^2\cdot(x-1)^n}{(n^3+1)^3}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{n!}{n^n(x+3)^n}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{\sqrt{n+1}}{2^n\cdot(x+3)^n}$;

г) $f_n(x)=\dfrac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}\cdot 3^n}$.

1.8

а) $f_n(x)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$;

б) $f_n(x)=\dfrac{(2n+3)}{(n+2)^5}\cdot(x+3)^n$;

в) $f_n(x)=\dfrac{n!}{(x-1)^n}$;

г) $f_n(x)=\dfrac{n^5+2}{n^3+3n}(x-4)^n$.

1.9

а) $f_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{n^{n+1}}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{n^2+5n+1}{3^n(x-2)^n}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{(3n+1)^n}{(2n+3)(x+2)^{n+1}}$;

г) $f_n(x)=\dfrac{1}{2^n\cdot n^2(x+1)^{n+1}}$.

1.10

а) $f_n(x)=\dfrac{(x+1)^{2n}}{(n+1)^2\cdot 4^n}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{n^3}{n^4+1}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$;

в) $f_n(x)=\dfrac{x^{n^2}}{n^2\cdot 3^{n^2}}$;

г) $f_n(x)=\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)^{2n-1}\cdot(x+3)^n$.

1.11

а) $f_n(x)=\dfrac{x^{2n}(n+3)^6}{(n^2+1)^3}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot n^3}{3^n\cdot(x+2)^n}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}(x+3)^n}{(n+2)\ln(n+2)}$;

г) $f_n(x)=\dfrac{(n+2)^5}{(x+2)^n}$.

1.12

а) $f_n(x)=\dfrac{x^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}\,\ln\sqrt{n}}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{2n+1}{(n^2+3n+3)^2}(x+2)^n$;

в) $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$;

г) $f_n(x)=\dfrac{(x-4)^n}{n^{n+1}}$.

1.13

а) $f_n(x)=\dfrac{2n+3}{(n+1)(x-2)^n}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{n!}{(n+1)^3}(x-2)^{2n}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{n+1}{(2n+3)^6\cdot x^{2n}}$;

г) $f_n(x)=(-1)^n(2n+1)^2x^n$.

1.14

а) $f_n(x)=\dfrac{(x-1)^{2n+1}}{(n+1)\cdot 4^n}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 4^n}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{(n+1)!}$;

г) $f_n(x)=\dfrac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2+5n)\cdot 4^n}$.

1.15

а) $f_n(x)=\dfrac{3^n\cdot n\cdot x^n}{(2n-1)(n+1)^2}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+5)\ln(n+5)}$;

г) $f_n(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

1.16

а) $f_n(x)=\dfrac{4^n}{n}(x+1)^n$;

б) $f_n(x)=\dfrac{x^{n+1}(n+1)!}{n^{n+1}}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{4^n\cdot n^2}{(n+1)!}(x+3)^{2n+1}$;

г) $f_n(x)=\dfrac{2n+1}{(n+1)^2}(x+2)^n$.

1.17

а) $f_n(x)=\dfrac{1}{n\cdot 9^n(x+2)^n}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{6n\cdot(2n-8)}{(x-1)^{2n+1}}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{n^2+4}{3^n\cdot(n+1)}(x+1)^n$;

г) $f_n(x)=(-2)^n x^{2n}$.

1.18

а) $f_n(x)=\dfrac{(x+2)^n}{(n+3)\ln(n+3)}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{(n+1)x^n}{2^n(n^2+1)}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{(x-1)^{n+1}(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)}$;

г) $f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

1.19

а) $f_n(x)=\dfrac{(n+1)^5}{n^3}(x-2)^{2n-1}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}}$;

в) $f_n(x)=\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n\cdot x^n$;

г) $f_n(x)=\dfrac{x^{3n}}{8^n}$.

1.20

а) $f_n(x)=\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^3\cdot\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^n$;

б) $f_n(x)=(-1)^n\dfrac{n(x-5)^n}{(n+1)!}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{2^n(n^3+2)}{(n+1)!}(x+2)^{2n+1}$;

г) $f_n(x)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n x^n$.

1.21

а) $f_n(x)=\dfrac{(n+5)^2}{n^3(6n+3)}(x-1)^n$;

б) $f_n(x)=\dfrac{x^{2n-1}}{3^n}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{2n+1}{(x-3)^n}$;

г) $f_n(x)=\dfrac{n^2}{n+1}x^n$.

1.22

а) $f_n(x)=\dfrac{(x-3)^{2n-1}}{(3n+8)^2}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{(n+1)^2}{2^n}x^n$;

в) $f_n(x)=\dfrac{2^n\cdot n\cdot(x-2)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n^2+3)}$;

г) $f_n(x)=\dfrac{n^5x^n}{(n+1)^n}$.

1.23

а) $f_n(x)= \dfrac{n(n+2)}{5^n(x+1)^n}$;

б) $f_n(x)= \dfrac{x^n}{\sqrt{n^2+1}}$;

в) $f_n(x)= \dfrac{n^2+8}{3n^2+5}(x-1)^n$;

г) $f_n(x)= \dfrac{x^n}{1+2^n}$.

1.24

а) $f_n(x)= \dfrac{x^{n^2}}{4n^2\cdot 3^{n^2}}$;

б) $f_n(x)= \left(\dfrac{2n+3}{n+6}\right)^n x^n$;

в) $f_n(x)= \dfrac{\sqrt{n}\cdot x^n}{n!}$;

г) $f_n(x)= \dfrac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2n}$.

1.25

а) $f_n(x)= \dfrac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$;

б) $f_n(x)= \dfrac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}$;

в) $f_n(x)= \dfrac{x^n}{n\ln(n+1)}$;

г) $f_n(x)=$
$$\frac{n+1}{(x-2)^n(n^2+2n+1)\ln(n+1)}.$$

2. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$**.**

2.1

а) $f_n(x)= \dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{(x^2+x+1)^n}$;

б) $f_n(x)=$
$$\frac{n^3+1}{n^2+2n-3}\cdot\frac{1}{(5x^2+5x+2)^n};$$

в) $f_n(x)= \dfrac{n^2}{n+1}\cdot\dfrac{1}{(2x^2+x+1)^n}$;

г) $f_n(x)= \dfrac{n(5x^2+6x+4)^n}{(6n^3+18n+13)^n}$.

2.2

а) $f_n(x)= \dfrac{n^2}{n+1}\cdot\dfrac{(2x^2+3x+2)^n}{2^n}$;

б) $f_n(x)=$
$$\frac{2n^2}{n^3+8}\cdot(2x^2+5x+3)^n;$$

в) $f_n(x)= \dfrac{n^3}{n^2+2}\cdot\dfrac{2^n}{(2x^2-x+3)^n}$;

г) $f_n(x)= \dfrac{n^3}{(n+1)3^n}\cdot(x^2+4x+6)^n$.

2.3

а) $f_n(x)= \dfrac{(x^2-2x+3)^n}{3^n}$;

б) $f_n(x)= \dfrac{(4x^2+3x+1)^n}{2^n (n+1)^2}$;

в) $f_n(x)= \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2^n}{(x^2+x+2)^n}$;

г) $f_n(x)= \dfrac{n+8}{2n^2+1}\cdot(3x^2-x+1)^n$.

2.4

а) $f_n(x)= \dfrac{3^n}{n^3+1}\cdot\dfrac{1}{(x^2-5x+7)^n}$;

б) $f_n(x)= \dfrac{3^n}{n^4+1}\cdot\dfrac{1}{(3x^2+2x+1)^n}$;

в) $f_n(x)= \dfrac{n^3}{n^4+1}\cdot\dfrac{1}{(x^2+2x+2)^n}$;

г) $f_n(x)= \dfrac{(n+1)^4}{n+2}\cdot\dfrac{3^n}{(x^2+3x+3)^n}$.

2.5

а) $f_n(x)=$
$\dfrac{n^2}{5^n (n+1)}\cdot(3x^2-4x+1)^n$;

б) $f_n(x)=$
$\dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}\cdot(2x^2-5x+3)^n$;

в) $f_n(x)= \dfrac{3n+2}{(n^2+9n+1)(x+2)^n}$;

г) $f_n(x)=$
$\dfrac{3^n}{n^4+n^2+1}\cdot\dfrac{1}{(2x^2+3x+3)^n}$.

2.6

а) $f_n(x)= \dfrac{(0,5)^n}{n^4+2}\cdot(6x^2+4x+1)^n$;

б) $f_n(x)= \dfrac{(n+1)^4}{n^8+2}\cdot\dfrac{1}{(x^2-3x+3)^n}$;

в) $f_n(x)= \dfrac{n^2}{n^4+3}\cdot\dfrac{1}{(4x^2+6x+3)^n}$;

г) $f_n(x)=$
$\dfrac{n^4+n^3+1}{2^n\cdot n^2}\cdot(x^2-3x+4)^n$.

2.7

а) $f_n(x)= \dfrac{(4x^2+2x+3)^n}{5^n\cdot n^2}$;

б) $f_n(x)=$
$\dfrac{1}{(n+1)^4}\cdot\dfrac{(2x^2+5x+5)^n}{2^n}$;

в) $f_n(x)= \dfrac{(3x^2+5x+3)^n}{n(n+1)(n+2)}$;

г) $f_n(x)= \dfrac{n^2+n}{(n+1)^5}\cdot\dfrac{(x^2+4x+5)^n}{2^n}$.

2.8

а) $f_n(x)=\dfrac{1}{n^3+3}\cdot\dfrac{(3x^2-2x+6)^n}{6^n}$;

б) $f_n(x)=\dfrac{n+8}{n+7}\cdot\dfrac{7^n}{(3x^2+x+5)^n}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{n^2+1}{n^3+8}\cdot\dfrac{1}{(2x^2-5x+4)^n}$;

г) $f_n(x)=$
$\dfrac{4n^2}{n^3+n^2+1}\cdot\dfrac{1}{(3x^2+x+1)^n}$.

2.9

а) $f_n(x)=\dfrac{2n^3}{n+1}\cdot\dfrac{1}{(6x^2+x+1)^n}$;

б) $f_n(x)=$
$\dfrac{1}{5(n+1)^2}\cdot\dfrac{3^n}{(3x^2-2x+2)^n}$;

в) $f_n(x)=\dfrac{(n+1)^3}{n^2\cdot 3^n}\cdot(3x^2-2x+2)^n$;

г) $f_n(x)=\dfrac{(3x^2+7x+5)^n}{5^n}\cdot(n+2)^3$.

2.10

а) $f_n(x)=$
$\dfrac{(n+1)^3}{n^6}\cdot\dfrac{2^n}{(7x^2+6x+1)^n}$;

б) $f_n(x)=$
$\dfrac{1}{3^n\cdot(n+4)^2}\cdot(2x^2+2x+1)^n$;

в) $f_n(x)=\dfrac{(n+5)^6}{9^n}\cdot(x^2+2x+5)^n$;

г) $f_n(x)=\dfrac{(n+2)^2}{(n+3)^3}\cdot(4x^2-x+1)^n$.

2.11

а) $f_n(x)=\dfrac{1}{n^8+2}\cdot\dfrac{(x^2+2x+4)^n}{12^n}$;

б) $f_n(x)=$
$\dfrac{1}{5n^2+6}\cdot\dfrac{(-5x^2+6x-2)^n}{3^n}$;

в) $f_n(x)=$
$\dfrac{(n+1)(n^2+5)}{2^n\cdot(n+6)}\cdot(3x^2+6x+4)^n$;

г) $f_n(x)=$
$\dfrac{(n+1)^2}{n^3+1}\cdot(-2x^2-3x+2)^n$.

2.12

а) $f_n(x)=$
$\dfrac{n^3}{(n+8)^4}\cdot\dfrac{1}{(6x^2+2x+1)^n}$;

б) $f_n(x)=$
$\dfrac{(n+5)^2}{(n+6)^2}\cdot\dfrac{1}{(3x^2-7x+5)^n}$;

в) $f_n(x)=$

$$\frac{(n+1)^3}{n^3}\cdot\frac{5^n}{(3x^2+4x+6)^n};$$

г) $f_n(x)=$

$$\frac{n^4+2n^2}{3^n}\cdot(5x^2+2x+1)^n.$$

2.13

а) $f_n(x)=$

$$\frac{2^n}{(n+3)^3}\cdot\frac{1}{(2x^2+5x+4)^n};$$

б) $f_n(x)= \dfrac{(4x^2+7x+4)^n}{4^n(n+1)};$

в) $f_n(x)= \dfrac{n^2+n}{n^4+1}\cdot(4x^2+5x+2)^n;$

г) $f_n(x)= \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^{1/3}}.$

2.14

а) $f_n(x)=$

$$\frac{n}{2n^2+3}\cdot\frac{1}{(-5x^2+3x-1)^n};$$

б) $f_n(x)= \dfrac{n}{n+1}\cdot\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n;$

в) $f_n(x)=$

$$\frac{4^n}{(n+1)^6}\cdot\frac{1}{(5x^2+2x+1)^n};$$

г) $f_n(x)= \dfrac{x(x+n)^n}{n^n}.$

2.15

а) $f_n(x)=$

$$\frac{n^2+3n^3}{4^n}\cdot(3x^2-3x+1)^n;$$

б) $f_n(x)=$

$$\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)};$$

в) $f_n(x)=$

$$\frac{(n+1)^3}{(n+5)^2n^2}\cdot\frac{1}{(-2x^2+5x-4)^n};$$

г) $f_n(x)= \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^3}.$

2.16

а) $f_n(x)=$

$$\frac{2^{3n}}{(n+5)^2}\cdot\frac{1}{(5x^2+2x+5)^n};$$

б) $f_n(x)= \dfrac{1}{n+1}\cdot\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n;$

в) $f_n(x)=$

$$\frac{n^3}{(n+1)^4}\cdot(-6x^2+3x+1)^n;$$

г) $f_n(x)= \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^{1/2}}.$

2.17

а) $f_n(x)= \frac{2n^4+1}{3^n(n^2+2n)} \cdot (x^2+5x+7)^n$;

в) $f_n(x)= \frac{n^5+3n}{n^4+3n^6} \cdot (x^2+7x+7)^n$;

б) $f_n(x)= \frac{n \cdot 3^n}{2^n} \cdot x^n \cdot (1-x)^n$;

г) $f_n(x)= \frac{n+2}{n+3} \cdot \left(\frac{x}{1+3x}\right)^n$.

2.18

а) $f_n(x)= \frac{2^n+5}{n^2+3} \cdot \frac{1}{(x^2-6x+10)^n}$;

в) $f_n(x)= \frac{1}{1+x^n}$;

б) $f_n(x)= \frac{(-1)^n}{(x+n)^4}$;

г) $f_n(x)= \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \left(\frac{x}{4x+2}\right)^n$.

2.19

а) $f_n(x)= x^{n^2}$;

б) $f_n(x)= \frac{n \cdot 5^n}{2^n} \cdot x^n \cdot (1-x)^n$;

в) $f_n(x)= \frac{(-1)^n}{(x+n)^{1/4}}$;

г) $f_n(x)= \frac{(-1)^n}{(x+n)^{1/5}}$.

2.20

а) $f_n(x)= \frac{n}{n+3} \cdot \left(\frac{x}{2+3x}\right)^n$;

б) $f_n(x)= \frac{(-1)^n}{x+3^n}$;

в) $f_n(x)= \frac{n \cdot 4^n}{3^n} \cdot x^n \cdot (1-x)^n$;

г) $f_n(x)= \frac{nx}{1+n^5x^2}$.

2.21

а) $f_n(x)= \frac{(-1)^n}{(x+n)^{1/3}}$;

б) $f_n(x)= \frac{(-1)^n}{(x+n)^{-4}}$;

в) $f_n(x)= \frac{x^n}{1+x^{2n}}$;

г) $f_n(x)= \frac{2n-1}{3n+1} \cdot \left(\frac{x}{4x+3}\right)^n$.

2.22

а) $f_n(x)= \dfrac{1}{x^2+n^2}$;

б) $f_n(x)= \dfrac{n\cdot 5^n}{3^n}\cdot x^n\cdot(1-x)^n$;

в) $f_n(x)= \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^2}$;

г) $f_n(x)= \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^{1/5}}$.

2.23

а) $f_n(x)= \dfrac{n+1}{n+2}\cdot\left(\dfrac{x}{4x+1}\right)^n$;

б) $f_n(x)= \dfrac{(-1)^n}{x+4^n}$;

в) $f_n(x)= \dfrac{n\cdot 7^n}{3^n}\cdot x^n\cdot(1-x)^n$;

г) $f_n(x)= \dfrac{x}{1+n^3x^2}$.

2.24

а) $f_n(x)= \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^{1/2}}$;

б) $f_n(x)= \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^6}$;

в) $f_n(x)= \dfrac{(-1)^n}{x+2^n}$;

г) $f_n(x)= \dfrac{3n+1}{3n+2}\cdot\left(\dfrac{x}{2x+3}\right)^n$.

2.25

а) $f_n(x)= \dfrac{x}{1+n^4x^2}$;

б) $f_n(x)= \dfrac{n\cdot 9^n}{2^n}\cdot x^n\cdot(1-x)^n$;

в) $f_n(x)= \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^3}$;

г) $f_n(x)= \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^6}$.

3. Розкласти функцію f(x) в ряд по степеням $x - x_0$

3.1

а) $f(x)= \mathrm{Sin}(x+3)$; $x_0= 0$;

б) $f(x)= \mathrm{Ln}(10x-3)$; $x_0= 0$;

в) $f(x)= \dfrac{-3}{x^2+x-2}$; $x_0=1$;

г) $f(x)= \sqrt{2x+7}$; $x_0=1$.

3.2

а) $f(x)= \dfrac{1}{x^2-3x+2}$; $x_0= 0$;

б) $f(x)= \mathrm{Ln}(3x + 2)$; $x_0= 1$;

в) $f(x)= e^{3x+2}$; $x_0= 1$;

г) $f(x)= e^x$; $x_0= 3$.

3.3

а) $f(x)= \dfrac{2}{x^2-4x+3}$; $x_0= 0$;

б) $f(x)= x^2Cos(x + 1)$; $x_0= 0$;

в) $f(x)= Cos(x-2)$; $x_0= 0$;

г) $f(x)= \dfrac{2x+2}{3x^2-2x-1}$; $x_0= 0$.

3.4

а) $f(x)= \sqrt[3]{1+x^2}$; $x_0= 0$;

б) $f(x)= x \cdot Sin(2x + 1)$; $x_0= 0$;

в) $f(x)= Ln(x + 2)$; $x_0=0$;

г) $f(x)= \dfrac{Shx}{x}+Cos\ x$; $x_0= 0$

.

3.5

а) $f(x)= e^{2x+1}$; $x_0= 2$;

б) $f(x)= \sqrt[3]{1+x}$; $x_0= 7$;

в) $f(x)= \dfrac{x+1}{2x^2+3x-2}$; $x_0= 0$;

г) $f(x)= Ln(3x + 1)$; $x_0= 0,2$.

3.6

а) $f(x)= Sin\dfrac{\pi x}{4}$; $x_0=2$;

б) $f(x)= \dfrac{2x-1}{3x^2+5x-2}$; $x_0= -1$;

в) $f(x)= \sqrt{1+x}$; $x_0= 3$;

г) $f(x)= x\ arctg\ x$; $x_0=0$.

3.7

а) $f(x)= Ch\dfrac{x}{3}$; $x_0= 0$;

б) $f(x)= Ln(1 + 6x + 8x^2)$; $x_0=0$;

в) $f(x)= Ln(2x + 5)$; $x_0= 0$;

г) $f(x)= (3 + e^{-x})^2$; $x_0=0$.

3.8

а) $\mathbf{f(x)= \dfrac{7}{x^2-3x-10}}$**;** $\mathbf{x_0= 0}$ **;**

б) $f(x)= x\ Sin(x + 2)$; $x_0= -2$;

в) $f(x)= Sin\dfrac{x}{3}$; $x_0= 1$;

г) $f(x)= \dfrac{x-2}{6x^2+x-1}$; $x_0=0$

.

3.9

а) $f(x)= e^{3x-1}$; $x_0= 1$;

б) $f(x)= x – Ln(2x + 1)$; $x_0=0$;

в) $f(x)= \sqrt[3]{7+x}$; $x_0= 1$;

г) $f(x)= \sqrt{4+x^2}$; $x_0=0$.

3.10

а) $f(x)= Cos(3x – 1)$; $x_0=1$;

б) $f(x)= x\ Cos(x – 2)$; $x_0=2$;

в) $f(x)= Ln(2x^2 + 3x +1)$; $x_0= 0$;

г) $f(x)= e^{5x - 3}$; $x_0=1$.

3.11

а) $f(x)= \frac{x-2}{2x^2+x-1}$; $x_0= 1$;

б) $f(x)= (x – 1)Cos\ x$; $x_0=1$;

в) $f(x)= \frac{x}{3}Sin\,3x - x^2$; $x_0=0$;

г) $f(x)= \frac{Sh\ 2x}{x} + Ch\ x$; $x_0=0$.

3.12

а) $f(x)= x\ Sh\ 2x$; $x_0=0$;

б) $f(x)= Ln(3x + 4)$; $x_0=-1$;

в) $f(x)= \sqrt{x}$; $x_0=4$;

г) $f(x)= \frac{1}{2x^2-3x+1}$; $x_0=-1$.

3.13

а) $f(x)= Ln(5x + 3)$; $x_0=1$;

б) $f(x)= \frac{1}{\sqrt{1+x}}$; $x_0=0$;

в) $f(x)= \frac{x+2}{6x^2-x-1}$; $x_0=0$;

г) $f(x)= x\ arctg\,\frac{x}{2}$; $x_0=0$.

3.14

а) $f(x)= (x - tgx)\ Cosx$; $x_0= 0$;

б) $f(x)= e^{2-3x}$; $x_0=1$;

в) $f(x)= Ln(3x^2 + 4x +1)$; $x_0=0$;

г) $f(x)= (x - 1)\ Sin\ x$; $x_0=1$.

3.15

а) $f(x)= \sqrt{2x+2}$; $x_0= 1$;

б) $f(x)= \frac{2}{3x^2+4x+1}$; $x_0=1$;

в) $f(x)= \frac{x+1}{6x^2+7x+2}$; $x_0=1$;

г) $f(x)= Ln(2x – 3)$; $x_0=2$.

3.16

а) $f(x)= e^{2x+3}$; $x_0= 0$;

б) $f(x)= \frac{1}{\sqrt{4x+16}}$; $x_0=0$;

в) $f(x)= Cos(x2 + 1)$; $x_0= 0$;

г) $f(x)= \frac{arcsin\ x}{x} - Cos\ x$; $x_0=0$.

3.17

а) $f(x)= e^{2x+1}$; $x_0= 3$;

б) $f(x)= e^{3-2x}$; $x_0=1$;

в) $f(x)= (1 + x)^5$; $x_0=2$;

г) $f(x)= \frac{5}{6x^2+x-1}$; $x_0=1$.

3.18

а) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}-\cos x$; $x_0=0$;

б) $f(x)=\ln(5x^2+6x+1)$; $x_0=0$;

в) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x^2+5x+2}$; $x_0=1$;

г) $f(x)=\sin(2x+3)$; $x_0=-1$.

3.19

а) $f(x)=\ln(2x+3)$; $x_0=-1$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}}$; $x_0=0$;

в) $f(x)=\sin(x^2+1)$; $x_0=0$;

г) $f(x)=e^{4x+1}$; $x_0=1$.

3.20

а) $f(x)=(x-1)^6$; $x_0=2$

б) $f(x)=(3-e^x)^2$; $x_0=0$

в) $f(x)=\dfrac{\operatorname{Sh} x}{x}-\operatorname{Ch} x$; $x_0=0$

г) $f(x)=\dfrac{x-7}{2x^2+17x+8}$; $x_0=-1$.

3.21

а) $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+3x+1}$; $x_0=1$;

б) $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x^2}+1$; $x_0=;0$

в) $f(x)=\ln(12x^2+7x+1)$; $x_0=0$;

г) $f(x)=e^{6x-1}$; $x_0=1$.

3.22

а) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $x_0=0$;

б) $f(x)=\dfrac{5}{2x^2-x-3}$; $x_0=2$;

в) $f(x)=\dfrac{7}{6x^2+11x+3}$; $x_0=1$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$; $x_0=7$.

3.23

а) $f(x)=\ln(6x^2+5x+1)$; $x_0=0$;

б) $f(x)=(1+2x)^5$; $x_0=1$;

в) $f(x)=\dfrac{8}{3x^2+10x+3}$; $x_0=1$;

г) $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$; $x_0=1$.

3.24

а) $f(x)=\cos(2x+1)$; $x_0=0$;

б) $f(x)=\ln(10x^2+7x+1)$; $x_0=0$

в) $f(x)=\dfrac{5}{x^2+x-6}$; $x_0=1$;

г) $f(x)=(2+3x)^5$; $x_0=1$.

3.25

а) $f(x)= e^{2-5x}$; $x_0=2$;
б) $f(x)= (\mathrm{Sh}\, x - x)\cdot 6 - x^3$; $x_0=0$;
в) $f(x)= x^3\, \mathrm{Ln}\, x$; $x_0=1$;
г) $f(x)= \mathrm{Sin}(2x + 1)$; $x_0=1$.

4. Обчислити значення функції f(x) у заданій точці x_0 ($f(x_0)$) з точністю до 0,001.

4.1
а) $f(x_0)= \sqrt[3]{7}$;
б) $f(x_0)= \sqrt[3]{1{,}06}$;
в) $f(x_0)= \sin 0{,}4$;
г) $f(x_0)= \sqrt[6]{68}$.

4.2
а) $f(x_0)= \sin 0{,}21$;
б) $f(x_0)= 1/\sqrt[4]{e}$;
в) $f(x_0)= 1/\sqrt[3]{e}$;
г) $f(x_0)= \cos 0{,}26$.

4.3
а) $f(x_0)= \sqrt[3]{9}$;
б) $f(x_0)= \sqrt[3]{145}$;
в) $f(x_0)= \cos 0{,}31$;
г) $f(x_0)= \mathrm{Sin}\, 15°$.

4.4
а) $f(x_0)= \mathrm{Cos}\, 0{,}22$;
б) $f(x_0)= \sqrt{27}$;
в) $f(x_0)= \sqrt[4]{17}$;
г) $f(x_0)= \mathrm{Ln}\, 2{,}26$.

4.5
а) $f(x_0)= \cos 0{,}24$;
б) $f(x_0)= \sqrt[5]{246}$;
в) $f(x_0)= \sqrt[4]{18}$;
г) $f(x_0)= 1/\sqrt{e}$.

4.6
а) $f(x_0)= \mathrm{Ln}\, 1{,}1$;
б) $f(x_0)= \cos 18°$;
в) $f(x_0)= \sqrt[6]{556}$;
г) $f(x_0)= e^{-0{,}15}$.

4.7
а) $f(x_0)= \mathrm{Ln}\, 1{,}05$;
б) $f(x_0)= \cos 0{,}25$;
в) $f(x_0)= \sqrt[3]{72}$;
г) $f(x_0)= e^{-1/6}$.

4.8
а) $f(x_0)= \mathrm{Ln}\, 3{,}03$;
б) $f(x_0)= \sqrt[3]{1{,}06}$;
в) $f(x_0)= \sin 0{,}4$;
г) $f(x_0)= e^{-0{,}3}$.

4.9

а) $f(x_0) = \cos 10°$;

б) $f(x_0) = \ln 1{,}2$;

в) $f(x_0) = \sin 9°$;

г) $f(x_0) = e^{-0{,}1}$

.

4.10

а) $f(x_0) = \cos 0{,}21$;

б) $f(x_0) = \ln 1{,}5$;

в) $f(x_0) = \sin 0{,}22$;

г) $f(x_0) = \sqrt[5]{252}$.

4.11

а) $f(x_0) = \ln 1{,}03$;

б) $f(x_0) = \sin 36°$;

в) $f(x_0) = \cos 9°$;

г) $f(x_0) = \sqrt[5]{36}$.

4.12

а) $f(x_0) = \ln 1{,}3$;

б) $f(x_0) = \sin 0{,}25$;

в) $f(x_0) = \cos 15°$;

г) $f(x_0) = \sqrt[3]{130}$.

4.13

а) $f(x_0) = \mathrm{Sin}\, 10°$;

б) $f(x_0) = \ln 2{,}04$;

в) $f(x_0) = \cos 36°$;

г) $f(x_0) = \sqrt[3]{66}$.

4.14

а) $f(x_0) = \ln 1{,}12$;

б) $f(x_0) = \sin 18°$;

в) $f(x_0) = e^{-0{,}4}$;

г) $f(x_0) = \ln 1{,}08$

.

4.15

а) $f(x_0) = \ln 2{,}08$;

б) $f(x_0) = \ln 5{,}625$;

в) $f(x_0) = \sqrt[3]{36}$;

г) $f(x_0) = \sin 12°$.

4.16

а) $f(x_0) = \ln 1{,}125$;

б) $f(x_0) = \ln 5{,}25$;

в) $f(x_0) = \sqrt[8]{272}$;

г) $f(x_0) = \cos 0{,}32$.

4.17

а) $f(x_0) = \ln 2{,}25$;

б) $f(x_0) = \sqrt[5]{270}$;

в) $f(x_0) = \sin 0{,}3$;

г) $f(x_0) = e^{-0{,}325}$.

4.18

а) $f(x_0) = \ln 1{,}325$;

б) $f(x_0) = \sqrt[4]{89}$;

в) $f(x_0) = \sqrt[4]{89}$;

г) $f(x_0) = \cos 0{,}24$.

4.19

а) $f(x_0)=\sqrt[6]{62}$;

б) $f(x_0)=$ Cos 20°;

в) $f(x_0)=e^{-2/7}$;

г) $f(x_0)=$ Ln 3,324.

4.20

а) $f(x_0)=$ cos 0,3;

б) $f(x_0)=$ sin 0,32;

в) $f(x_0)=1/\sqrt[5]{e}$;

г) $f(x_0)=\sqrt[5]{30}$.

4.21

а) $f(x_0)=$ Cos 12°;

б) $f(x_0)=$ Sin 6°;

в) $f(x_0)=e^{-2/9}$;

г) $f(x_0)=\sqrt[5]{40}$.

4.22

а) $f(x_0)=$ cos 0,23;

б) $f(x_0)=e^{-0,25}$;

в) $f(x_0)=$ sin 0,31;

г) $f(x_0)=\sqrt[4]{72}$.

4.23

а) $f(x_0)=e^{-1/7}$;

б) $f(x_0)=$ sin 20°;

в) $f(x_0)=$ cos 5°;

г) $f(x_0)=$ Ln 2,75.

4.24

а) $f(x_0)=$ Ln 5,125;

б) $f(x_0)=$ sin 5°;

.

в) $f(x_0)=e^{-1/9}$;

г) $f(x_0)=$ sin 0,125

4.25

а) $f(x_0)=$ cos 6°;

б) $f(x_0)=$ Ln 1,625;

в) $f(x_0)=$ sin 0,23;

г) $f(x_0)=e^{-1/8}$.

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^b f(x)\,dx$ з точністю до 0,001.

5.1

а) $f(x)=$ Cos x^3; b=1 ;

б) $f(x)=\sqrt[4]{1+x^3}$; b=0,5 ;

в) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; b=0,5 ;

г) $f(x)=\dfrac{Ln\,(+x/2)}{x}$; b=1 .

5.2

а) $f(x)=\dfrac{Sin\ x}{x}-1;\ b=0{,}5$;

б) $f(x)=\dfrac{e^{2x^2}-1}{x};\ b=0{,}1$;

в) $f(x)=\dfrac{Sin\ 2x}{2}-x;\ b=0{,}5$;

г) $f(x)=\dfrac{Ln(1+3x)}{x};\ b=0{,}1$.

5.3

а) $f(x)=\dfrac{Ln(1+x^2)}{x};\ b=0{,}8$;

б) $f(x)=Sin\sqrt{\dfrac{x}{2}};\ b=0{,}5$;

в) $f(x)=e^{-2x^2};\ b=0{,}2$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}};\ b=1$.

5.4

а) $f(x)=\dfrac{Sh\ x}{x}-Ch\ x;\ b=1$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot arctg\ x;\ b=0{,}5$;

в) $f(x)=Cos\sqrt{x};\ b=1$;

г) $f(x)=x\,Ln(1+x^3);\ b=0{,}4$.

5.5

а) $f(x)=Cos\,(10x^2);\ b=0{,}1$;

б) $f(x)=\dfrac{e^{x^2}-1}{x};\ b=1$;

в) $f(x)=e^{-7x^2};\ b=0{,}5$;

г) $f(x)=arctg\sqrt{x};\ b=0{,}36$.

5.6

а) $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{2};\ b=0{,}1$;

б) $f(x)=\dfrac{Sin\sqrt{x}}{x};\ b=1$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3};\ b=0{,}2$;

г) $f(x)=\dfrac{Ln(1+x/3)}{x};\ b=1$.

5.7

а) $f(x)=Sin\dfrac{x}{3};\ b=1$;

б) $f(x)=e^{-\frac{3x^2}{5}};\ b=1$;

в) $f(x)=\dfrac{e^{4x}-1}{4x};\ b=1$;

г) $f(x)=\dfrac{Cos\ x^2}{\sqrt[3]{x}}+1;\ b=1$.

5.8

а) $f(x)=\dfrac{Cos(x/2)-1}{x^2};\ b=0{,}1$;

б) $f(x)=\sqrt[5]{32+x^5};\ b=1;$

в) $f(x)=\dfrac{Ln(1+5x)}{x};\ b=0{,}1$;

г) $f(x)=\dfrac{Ln(1+x/2)}{\sqrt{x}};\ b=1.$

5.9

а) f(x)= $\frac{Ln\left(1+x/4\right)}{x}$; b=1 ;

б) f(x)= $\frac{Sin\,3x}{x} - x^3$; b=1 ;

в) f(x)= $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; b=0,5 ;

г) f(x)= $\frac{Sh\ x}{x} - 1$; b=1.

5.10

а) f(x)= $\frac{Sin\ x}{\sqrt[3]{x}}$; b=1 ;

б) f(x)= $x \cdot Sin\ x^2$; b=1 ;

в) f(x)= $\frac{Cos\ x}{\sqrt[5]{x^2}}$; b=1 ;

г) f(x)= $\frac{Ch\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$; b=1.

5.11

а) f(x)= $\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$; b=1 ;

б) f(x)= $\frac{1-e^{3x^2}}{x}$; b=0,5 ;

в) f(x)= $\frac{arcsin\ x}{x}$; b=0,1 ;

г) f(x)= $\frac{Ln3 - Ln(3+5x)}{x}$; b=0,2.

5.12

а) f(x)= $e^{-\frac{x^2}{2}}$; b=1 ;

б) f(x)= $Cos\frac{x^3}{3}$; b=1 ;

в) f(x)= $x \cdot Cos\sqrt{x}$; b=0,25 ;

г) f(x)= $Cos\ x^2$; b=1.

5.13

а) f(x)= $\frac{Ln\left(2+4x\right) - Ln2}{x}$; b=0,2;

б) f(x)= $\frac{1}{\sqrt[5]{32+x^5}}$; b=1 ;

в) f(x)= $\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{0,2}}$; b=0,5 ;

г) f(x)= $Sin\ 9x^2$; b=$\frac{1}{3}$.

5.14

а) f(x)= e^{-5x^2+1}; b=0,2 ;

б) f(x)= $\frac{1-e^{2x^2}}{x}$; b=0,5 ;

в) f(x)= $\frac{Ln\left(1-x/2\right)}{x}$; b=0,5 ;

г) f(x)= $\frac{1}{\sqrt[5]{32x^5+1}}$; b=0,2.

5.15

а) $f(x)= Sh\sqrt{\frac{x}{2}}$; $b=0,5$;

б) $f(x)= \frac{Sin16x^2}{\sqrt{x}}$; $b=0,25$;

в) $f(x)= Cos\ 9x^2$; $b=\frac{1}{3}$;

г) $f(x)= \frac{Ln(-x/5)}{x}$; $b=1$.

5.16

а) $f(x)= \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$; $b=0,25$;

б) $f(x)= \frac{arctg\ x}{\sqrt{x}}$; $b=1$;

в) $f(x)= e^{-2x^2+3}$; $b=0,5$;

г) $f(x)= \frac{Sin\ 9x^2}{x}$; $b=\frac{1}{3}$.

5.17

а) $f(x)= \frac{1}{\sqrt[3]{1+4x^2}}$; $b=0,25$;

б) $f(x)= e^{\frac{x^2}{2}+5}$; $b=1$;

в) $f(x)= \frac{arcsin\sqrt{x}}{x}$; $b=0,5$;

г) $f(x)= \frac{Cos\ 9x^2}{\sqrt{x}}$; $b=\frac{1}{3}$.

5.18

а) $f(x)= Sin\ x^2$; $b=1$;

б) $f(x)= \frac{arcsin\ x}{x\sqrt{x}}$; $b=0,5$;

в) $f(x)= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $b=0,5$;

г) $f(x)= \frac{1}{\sqrt[4]{1+16x^2}}$; $b=0,25$.

5.19

а) $f(x)= Cos\ 16x^2$; $b=0,25$;

б) $f(x)= \frac{Ln(+x/5)}{x}$; $b=1$;

в) $f(x)= \frac{e^{2x}-1}{x}$; $b=0,5$;

г) $f(x)= \frac{Sin\ 25x^2}{\sqrt{x}}$; $b=0,2$.

5.20

а) $f(x)= \frac{Ln(-5x)}{x}$; $b=0,1$;

б) $f(x)= \sqrt[4]{1+16x^2}$; $b=0,25$;

в) $f(x)= Sin\ 16x^2$ $b=0,25$;

г) $f(x)= \frac{1-e^{x^2/2}}{x^2}$; $b=0,5$.

5.21

а) $f(x)=\dfrac{1}{1+32x^5}$; b=0,2 ;

б) $f(x)=\dfrac{\mathrm{Ln}(-x/2)}{\sqrt{x}}$; b=1 ;

в) $f(x)=\mathrm{Ch}\dfrac{x^2}{2}$; b=1 ;

г) $f(x)=\dfrac{\mathrm{Cos}\ 25x^2}{\sqrt{x}}$; b=0,2.

5.22

а) $f(x)=\sqrt{x}\cdot \mathrm{Cos}16x^2$; b=0,25 ;

б) $f(x)=\dfrac{\mathrm{Ch}\ x-1}{x^2}$; b=1 ;

в) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{1+81x^4}}$; $b=\dfrac{1}{3}$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{1+81x^4}$; $b=\dfrac{1}{6}$.

5.23

а) $f(x)=\mathrm{Sin}\ 4x^2$; b=0,5 ; **б)** $f(x)=x^3\cdot \mathrm{Sin}\ x$; b=1 ;

в) $f(x)=(-e^{\sqrt{x}})\sqrt{x}$; b=1 ;

г) $f(x)=\dfrac{1-4e^{2x}}{\sqrt{x}}$; b=1.

5.24

а) $f(x)=\mathrm{Cos}\ 4x^2$; b=0,5 ;

б) $f(x)=\dfrac{\mathrm{Ch}\ 2x-1}{x^2}$; b=1 ;

в) $f(x)=\dfrac{\mathrm{Ln}(-x/3)}{\sqrt{x}}$; b=1 ;

г) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\cdot \mathrm{Cos}\ x$; b=1.

5.25

а) $f(x)=\dfrac{\mathrm{arctg}\ \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; b=1 ;

б) $f(x)=\dfrac{\mathrm{Ln}(+2x)}{x\sqrt{x}}$; b=0,1 ;

в) $f(x)=\dfrac{\mathrm{Cos}\ 4x^2}{2\sqrt[5]{x}}$; b=0,5 ;

г) $f(x)=\dfrac{\mathrm{Cos}\ 4x^2}{2\sqrt[5]{x}}$; b=1.

6. Знайти розв'язок задачі Коші: $F(x, y, y', y'') = 0$
з початковими умовами $y(x_0) = y_0$.

6.1

а) $y' = xy + x^2 + y^2$; $y(0) = 1$

б) $y' = x^2 + 0{,}2y^2$; $y(0) = 0{,}1$;

в) $y' = e^{3x} + 2xy^2$; $y(0) = 1$;

г) $y' = x^2 - xy + 2y$; $y(0) = 1$.

6.2

а) $y' = x + e^y$; $y(0) = 0$

б) $y' = 2x + xy - y^2$; $y(0) = 1$;

в) $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 0,2$;

г) $y' = xy + x^2$; $y(0) = 1$.

6.3

а) $y' = x^2 - xy + y^2$; $y(0) = 0,5$;

б) $y' = -x^3 - xy$; $y(0) = 0,5$;

в) $y' = y\mathrm{Cos}x + 2\mathrm{Cos}y$; $y(0) = 0$;

г) $y' = y\mathrm{Cos}x - \mathrm{Sin}2x$; $y(0) = 3$.

6.4

а) $y' = e^{\mathrm{Sin}\,x} + x$; $y(1) = 0$;

б) $y' = 4xy - 4x^3$; $y(0) = -0,5$;

в) $y' = 3x^2y + \frac{x^2(1 + x^2)}{3}$; $y(0) = 1$;

г) $y' = 0,2x - 0,1y^2$; $y(0) = 1$.

6.5

а) $y' = (1+x)y^2e^{-x} - xy$; $y(0) = 1$;

б) $y' = x^2y^2 - y\,\mathrm{Cos}\,x$; $y(0) = 1$;

в) $2(xy + y') = (x-1)e^xy^2$; $y(0) = 1$;

г) $y' = e^{\mathrm{Sin}\,x} + xy$; $y(0) = 0$.

6.6

а) $y' = xy^2 - y$; $y(0) = 1$;

б) $y' = x^2 - xy$ $y(0) = 0,1$;

в) $y' = e^{3x} + 2xy^2$; $y(0) = 1$;

г) $y'' + xy = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

6.7

а) $y' = 4y^2e^{4x}(1 - x^3) - 4x^3y$;
$y(0) = -1$;

б) $y'' = x^2y + y$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$;

в) $y' = y + 2xy^2$; $y(0) = \frac{1}{2}$;

г) $y'' = x + y^2$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

6.8

а) $y' = 2x^3y^3 - 2xy$; $y(0) = \sqrt{2}$;

б) $y'' = x^2y - y'$; $y(0) = 1$;
$y'(0) = 0$;

в) $4y' = (x^3+8)e^{-2x}y^2 - x^2y$; $y(0) = 1$;

г) $y' = e^y + xy$; $y(0) = 0$.

6.9

а) $2y' = xy^2 - 2y$; $y(0) = 2$;

б) $y' = 2x - y$; $y(0) = 2$;

в) $y' + xy = (x-1)e^xy^2$; $y(0) = 1$;

г) $y' = 2y^2 + ye^x$; $y(0) = \frac{1}{3}$.

6.10

а) $y' = xy^2 + y$; $y(0) = 1$;

б) $y' = y^2 + x^3$; $y(0) = \frac{1}{2}$;

в) $y' = xy + x^2 + y^2$; $y(0) = \frac{1}{2}$;

г) $xy'' + y = 0$; $y(1) = 0$; $y'(1) = 1$.

6.11

а) $y' = xy + y^2$; $y(0) = 1$;

б) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$;

$y(1) = 1$; $y'(1) = 0$;

в) $y' = 2x - xy - 0{,}1y^2$; $y(0) = 1$;

г) $y' = \arcsin y + x$; $y(0) = \frac{1}{2}$.

6.12

а) $y' = x + y + y^2$; $y(0) = 0{,}1$;

б) $y' = xy + \mathrm{Ln}(x+y)$; $y(1) = 0{,}1$;

в) $y' = x^2 \sin x + y$; $y(0) = 1$;

г) $y' = x + y^{-1}$; $y(0) = 1$.

6.13

а) $y' = x^2 + \sin x + y^2$; $y(0) = 0{,}1$;

б) $y' = 2x + \cos y$; $y(0) = 0$;

в) $y' = \cos y + 2x \cos x$; $y(0) = 0$;

г) $y' = \frac{1 - x^2}{y} + 1$; $y(0) = 1$.

6.14

а) $y' = y \sin x - 3\sin y$; $y(0) = \frac{\pi}{2}$;

б) $y' + y \cos x - 3e^x y^2 - \sin x = 0$;

$y(0) = 1$;

в) $y' = e^{2x} - 2x^2 y$; $y(0) = 1$;

г) $2y' - (x+y)y - e^x = 0$; $y(0) = 2$.

6.15

а) $y' = 2x^2 + ye^x$; $y(0) = \frac{1}{2}$;

б) $y' - 4y + 2xy^2 - e^{3x} = 0$; $y(0) = 2$;

в) $y' - 4y + 2xy^2 - e^{3x} = 0$; $y(0) = 2$;

г) $(1+x^2)\, y'' + 5xy' + +3y = 0$;

$y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

6.16

а) $y'' = y \cos y' + x$; $y(0) = 1$;

$y'(0) = \frac{\pi}{3}$;

б) $(1+x^2)y'' + y = 0$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 1$;

в) $y'' = x^2 + y^2$; $y(-1) = 2$;

$y'(-1) = \frac{1}{2}$;

г) $(x^2 - x + 1)y'' + (4x-2)y' = -2$;

$y(0) = 2$; $y'(0) = 1$.

6.17

а) $y'' = (y')^2 + xy$;

$y(0) = 4$; $y'(0) = -2$;

б) $(1 - x)y'' - y' + e^x \cdot (x+1) = 0$;

$y(0) = 0$; $y'(0) = 1$;

в) $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$;

г) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + +2y = 0$;

$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$; $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

6.18

а) $y'' = xyy'$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$;
б) $y''' = y$; $y(0) = 0$;
$y'(0) = 0$; $y''(0) = 0$;
в) $y''' = ye^x - x(y')^2$; $y(0) = 1$;
$y'(0) = 1$; $y''(0) = 1$;
г) $y''' = xy' + y$; $y(1) = 1$;
$y'(1) = 0$; $y''(1) = 1$.

6.19
а) $y''' = y'' + (y')^2 + y^3 + x$; $y(0) = 1$;
$y'(0) = 2$; $y''(0) = 0{,}5$;
б) $y''' - x^2y'' - xy' - y = 0$; $y(0) = 1$;
$y'(0) = 1$; $y''(0) = 0$;
в) $y'' = y'$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$;
г) $y' = \text{arctg}\, y + x$; $y(0) = 1$.

6.20
а) $y'' + 2xy = 0$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$;
б) $y' = e^{\text{Cos}\, x} + y$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
в) $y'' - xy' - 2y = 0$;
$y(1) = 0$; $y'(1) = 1$;
г) $y' = \text{Sin}y + 2\text{Cos}x$; $y(0) = 0$.

6.21
а) $y'' - x^2y = 0$; $y(1) = 0$; $y'(1) = 1$;
б) $y' = x + y + \text{Ln}(x + 2y)$; $y(1) = 0$;
в) $y'' + xy' + y = 0$;
$y(0) = 1$; $y'(0) = -1$;
г) $y' = 2x + \frac{3}{y}$; $y(0) = 1$.

6.22
а) $(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$; $y(0) = 1$;
$y'(0) = 1$;
б) $y' = x - \arccos y$; $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $(1 - x)y'' + xy' - y = 0$;
$y(-1) = 0$; $y'(-1) = 1$;
г) $y' = e^y + \text{Cos}x$; $y(0) = 0$.

6.23

а) $y'' + xy' = x$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$;
б) $y' + \text{Ln}(x + y) + x = 0$; $y(0) = 1$;
в) $y' + (y + \text{tg}x)\text{Cos}x = 0$; $y(0) = 1$;
г) $xy' + x^2y = \text{Ln}x$; $y(1) = 0$.

6.24
а) $y'' + xy' + \text{arctg}x = y$;
$y(0) = 1$; $y'(0) = 1$;
б) $y'' + x^2y' - e^x = 0$;
$y(0) = 1$; $y'(0) = 0$;
в) $e^xy' + yx^2 = e^x$; $y(0) = 1$;
г) $(1 + x)y' + xe^y = 1$; $y(0) = 0$.

6.25
а) $y'' + \text{arctg}x = y'$;
$y(0) = 0$; $y'(0) = 1$;
б) $y' = x^2y + y^3$; $y(1) = 1$;
в) $xy'' + y' + y = e^x$;
$y(1) = 0$; $y'(1) = e$;
г) $(1 - x)y'' + 4xy' + +y^2 = 0$;
$y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

. ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Обчислити значення функції y = Ln x в точці x_0 = 5,5 з точністю до 0,001.

За розкладом

$$\mathrm{Ln}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

Точка x_0 інтервалу збіжності розкладу не належить. Тому перетворимо вираз

Ln 5,5, використовуючи властивості логарифма, так, щоб x_0 належала інтервалу збіжності розкладу.

$$\mathrm{Ln}\,5{,}5 = -\mathrm{Ln}\frac{1}{5{,}5} = -\mathrm{Ln}\frac{10}{55} = -\mathrm{Ln}\left(1 - \frac{45}{55}\right) = -\mathrm{Ln}\left(1 - \frac{9}{11}\right).$$

Точка $-\frac{9}{11}$ належить інтервалу (-1, 1), але близька до точки –1, тому збіжність ряду буде дуже повільною, тобто знадобиться дуже багато складових для досягнення заданої точності. Представимо 5,5 як 1,1 · 5, і постараємося розкласти 1/5 на два або більше множників так, щоб збіжність відповідних рядів була якомога швидша. (Збіжність тим швидше, чим ближче x_0 до нуля).

$$\mathrm{Ln}\ 5{,}5 = \mathrm{Ln}\ (5 \cdot 1{,}1) = \mathrm{Ln}\ 5 + \mathrm{Ln}\ 1{,}1 = \mathrm{Ln}\ 1{,}1 - \mathrm{Ln}\ \frac{1}{5} = \mathrm{Ln}\ 1{,}1 - \mathrm{Ln}\ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} =$$

$$= \mathrm{Ln}\ 1{,}1 - \mathrm{Ln}\ \frac{1}{2} - \mathrm{Ln}\ \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \mathrm{Ln}\ 1{,}1 - \mathrm{Ln}\ \frac{1}{2} - \mathrm{Ln}\ \frac{2}{3} - \mathrm{Ln}\ \frac{3}{5} =$$

$$= \mathrm{Ln}(1 + 0{,}1) - \mathrm{Ln}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \mathrm{Ln}\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \mathrm{Ln}\left(1 - \frac{2}{5}\right).$$

Розкладемо кожний доданок в ряд

$$\mathrm{Ln}(1 + 0{,}1) = 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} + \frac{(0{,}1)^3}{3} - \frac{(0{,}1)^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(0{,}1)^n}{n} + \cdots, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{Ln}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} - \cdots - \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n} - \cdots, \tag{2.2}$$

$$\mathrm{Ln}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} - \cdots - \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n} - \cdots, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{Ln}\left(1 - \frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} - \cdots - \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{n} - \cdots. \tag{2.4}$$

Визначимо, скільки доданків треба взяти в кожному розкладанні, щоб досягти заданої точності.

Ряд (2.1) - знакопочережний ряд лейбніцевського типу, тому скористаємося оцінкою Лейбніца для залишку ряду:$|R_n| \le a_{n+1}$. Перший відкинутий член не повинен перевищувати 0,001

$$n = 3 \qquad a_3 = \frac{10^{-3}}{3} = \frac{1}{3}\cdot 10^{-3} \approx 0{,}3\cdot 10^{-3} = 3\cdot 10^{-4} < 0{,}001 .$$

Отже, нам достатньо взяти перші два доданка.

Ln 1,1 ≈ 0,1 – $0{,}5\cdot 10^{-2}$ = 0,1 – 0,005 = 0,095.

Ряди (2.2) – (2.4) є знаковід’ємними рядами, тому оцінкою Лейбніца скористатися не можна. Оцінимо Ln(1 + x) зверху геометричною прогресією

Тоді

$$R_n = (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+2}\frac{x^{n+2}}{n+2} + \cdots \le |x|^{n+1} + |x|^{n+2} + \cdots = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

$$R_n \le \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}. \qquad (2.5)$$

Скористаємося оцінкою (2.5) для рядів (2.2) – (2.4).

Для ряду (2.2) $R_n \le \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n} < 0{,}001.$$

Це вірно для n = 10. Отже, треба в розкладанні взяти 10 доданків для досягнення заданої точності 0,001.

$$\mathrm{Ln}\left(1-\frac{1}{2}\right) \approx -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} - \cdots - \frac{1}{10240} \approx = -0{,}693.$$

Для ряду (2.3) $R_n \le \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}\cdot\dfrac{1}{2} < 0{,}001$.

Нерівність вірна для n = 6. Отже, треба взяти лише 6 доданків розкладання

$$\mathrm{Ln}\left(1-\frac{1}{3}\right) \approx -\frac{1}{3} - \frac{1}{18} - \frac{1}{81} - \frac{1}{324} - \frac{1}{243\cdot 5} - \frac{1}{729\cdot 6} \approx -0{,}4054.$$

Для ряду (2.4) $R_n \le \dfrac{1}{1-\frac{2}{5}}\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1} = \dfrac{5}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{3\cdot 5^{n}}$,

$$\frac{2^{n+1}}{3\cdot 5^n} < 0{,}001\,.$$

Це вірно для n = 8. Отже,

$$\mathrm{Ln}\left(1-\frac{2}{5}\right) \approx -\frac{2}{5}-\frac{2}{25}-\frac{8}{3\cdot 125}-\frac{16}{4\cdot 625}-\frac{32}{5^6}-\frac{64}{5^6\cdot 6}-\frac{128}{5^7\cdot 7}-\frac{256}{5^8\cdot 8} \approx -0{,}511.$$

Отже,

$$\mathrm{Ln}\,5{,}5 = \mathrm{Ln}\,1{,}1 - \mathrm{Ln}\left(1-\frac{1}{2}\right) - \mathrm{Ln}\left(1-\frac{1}{3}\right) - \mathrm{Ln}\left(1-\frac{2}{5}\right) \approx 1{,}704.$$

Таким чином,

$$1{,}703 < \mathrm{Ln}\,5{,}5 < 1{,}705.$$

Приклад 2

Обчислити значення визначеного інтеграла $J = \int\limits_0^{0,5} \frac{\mathrm{Ln}(1-x)}{x}dx$ з точністю до 0,001.

Інтеграл J є невласним. Так як $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1-x)}{x} = -1,$ то покладемо f(0) = -1.

Розкладемо підінтегральну функцію в ряд і почленно проінтегріруємо

$$\int\limits_0^{0,5}\frac{\mathrm{Ln}(1-x)}{x}dx = \int\limits_0^{0,5}\frac{-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\dots-\frac{x^n}{n}-\dots}{x}dx =$$

$$= -\int\limits_0^{0,5}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\dots+\frac{x^{n-1}}{n}+\dots\right)dx = -\left(x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\dots+\frac{x^n}{n^2}+\dots\right)\Bigg|_0^{0,5} =$$

$$= -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2\cdot 4}+\frac{1}{2^3\cdot 9}+\dots+\frac{1}{2^n\cdot n^2}+\dots\right).$$

Визначимо, скільки доданків треба взяти, щоб похибка обчислень не перевищувала 0,001. Для цього застосуємо метод мажорування.

$$R_n=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}+\frac{1}{2^{n+2}(n+2)^2}+\frac{1}{2^{n+3}(n+3)^2}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{2(n+2)^2}+\frac{1}{4(n+3)^2}+\frac{1}{8(n+4)^2}+\cdots\right)\le$$

$$\le\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{4(n+1)^3}+\cdots\right)=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{2^{n+1}(n+1)^2}=\frac{1}{2^n(n+1)^2},$$

$$R_n\le\frac{1}{2^n(n+1)^2}<0{,}001.$$

Для $n = 5$ $\frac{1}{32\cdot 36}=\frac{1}{1152}<0{,}001$. Тому беремо 5 доданків у розкладі

$$\int_0^{0,5}\frac{\mathrm{Ln}(1-x)}{x}dx\approx-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{72}+\frac{1}{256}+\frac{1}{800}\right)=-0{,}5807.$$

$$-0{,}5817 < J < -0{,}5797.$$

Приклад 3

Обчислити значення визначеного інтеграла $y=\int_0^1\frac{e^{2x}-1}{x}dx$ з точністю до 0,001.

Інтеграл y є невласним. Так як $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=2$, то покладемо F(0) = 2. Позначимо $f(x)=e^{2x}-1$. Розкладемо f(x) у степеневий ряд

$$f(x)=e^{2x}-1=2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+...+\frac{(2x)^n}{n!}+R_n(x),$$

де $R_n(x)$ - n-ий залишок, який допускає оцінку Лагранжа.

$$|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1},\qquad \text{де}\qquad M=\max_{x\in[0,1]}|f^{(n+1)}(x)|.$$

Так як $f^{(n+1)}(x)=e^{2x}\cdot 2^{n+1}$ і експонента досягає максимального значення на правому кінці відрізка, то $M=e^2\cdot 2^{n+1}$. Отже,

$$|R_n(x)|\le\frac{e^2\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\le\frac{9\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Маємо,

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{x}dx = \int_0^1 (2 + \frac{2^2}{2!}x + \frac{2^3}{3!}x^2 + ... + \frac{2^n}{n!}x^{n-1} + \frac{R_n(x)}{x})dx =$$

$$= (2x + \frac{2^2}{2!\cdot 2}x + \frac{2^3}{3!\cdot 3}x^2 + \frac{2^4}{4!\cdot 4}x^4 + ... + \frac{2^n}{n!\cdot n}x^n)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{R_n(x)}{x}dx =$$

$$= 2 + \frac{2^2}{2!\cdot 2} + ... + \frac{2^n}{n!\cdot n} + R_n,$$

де $R_n = \int_0^1 \frac{R_n(x)}{x}dx.$

Оцінимо R_n зверху:

$$|R_n| \le \int_0^1 \left|\frac{R_n(x)}{x}\right| dx \le \int_0^1 \frac{9\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}|x|^n\, dx = \frac{9\cdot 2^{n+1}\cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}\Big|_0^1 = \frac{9\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}.$$

Тепер підберемо n так, щоб

$$\frac{9\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!(n+1)} < 0{,}001.$$

Для цього n буде мати $|R_n| < 0{,}001$ і шукана точність

$n = 8$ $\quad \frac{9\cdot 2^9}{9!\cdot 9} = \frac{4}{2835} > 0{,}001;$

$n = 9$ $\quad \frac{9\cdot 2^{10}}{10!\cdot 10} = \frac{4}{15750} < 0{,}001.$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x} - 1}{x}dx \approx 2 + \frac{2^2}{2!2} + \frac{2^3}{3!3} + \frac{2^4}{4!4} + \frac{2^5}{5!5} + \frac{2^6}{6!6} + \frac{2^7}{7!7} + \frac{2^8}{8!8} + \frac{2^9}{9!9} \approx 3{,}7165,$$

$3{,}7155 < J < 3{,}7175.$

Треба взяти в сумі 9 доданків, і необхідна точність буде досягнута.

Приклад 4

Визначити інтервал збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{8^n\sqrt{n}}$

$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{8^{n+1}\sqrt{n+1}}{8^n\sqrt{n}} = 8\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = 8$, отже $|x| < 8$, область збіжності $-8 < x < 8$.

Перевіримо збіжність ряду на кінцях інтервалу.

При $x=8$ отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{8^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Отриманий ряд є розбіжним узагальненим гармонійним рядом так як $\alpha=\frac{1}{2}<1$.

При $x=-8$ отримали ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-8)^n}{8^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Застосуємо ознаку Лейбніца $\left.\begin{array}{l} 1)\ 1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{4}}>\ldots \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0 \end{array}\right\}$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ збігається умовно, так як ряд із модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ розбігається.
Отже інтервал збіжності $-8\le x<8$

Приклад 5

Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \cos x^2 dx$ з точністю до 0,001.

Представимо підінтегральний вираз у вигляді ряду Маклорена, для цього використовуємо розкладання в ряд функції $y=\cos x$ і замінюючи в ній x на x^2.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\ldots, x\in R$$

$$\cos x^2=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+\frac{x^{16}}{8!}-\ldots, x\in R$$

$$\int_0^1\cos x^2dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+\frac{x^{16}}{8!}-\ldots\right)dx=$$

$$=1-\frac{x^5}{5\cdot 2!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\frac{x^{11}}{11\cdot 6!}+\ldots\Big|_0^1=1-\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\frac{1}{11\cdot 6!}+\ldots$$

Четвертий член даного ряду $\frac{1}{11\cdot 6!}<0{,}001$, тому для обчислення інтеграла із заданою точністю достатньо взяти суму перших трьох членів.

$$\int_0^1\cos x^2dx=1-0{,}1+0{,}0046\approx 0{,}8954\approx 0{,}895.$$

5. КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Варіант 1

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{n^2+1}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x)=\cos 5x$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть e із заданою точністю $\alpha = 0,0001$.

Варіант 2

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{2^{n-1}3^n}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n^n \ln(1+1/n)}$.

2. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в околі точки $\sqrt[5]{250}$ та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\cos 10^\circ$ із заданою точністю $\alpha = 0,01$.

Варіант 3

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{8^n}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{2^n}$.

2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x)=\sin x^2$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .

3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\sin 1$ із заданою точністю $\alpha = 0,00001$.

Варіант 4

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n n}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n^2}$.

2. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ в околі точки $x_0 = -2$ та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\sqrt{1,3}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

Варіант 5

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+8)^n}{n^2}$.

2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\operatorname{arctg} \pi/10$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

Варіант 6

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2+x)^n$.

2. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x)=e^{x}$ в околі точки $x_0=1$ та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\ln 3$ із заданою точністю $\alpha=0,0001$.

Варіант 7

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}x^{n}}{2n-1}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n}}{2^{n}(n+3)}$.
2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x)=e^{3x}$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\operatorname{ch} 2$ із заданою точністю $\alpha=0,0001$.

Варіант 8

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n(n+1)}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n^{2}}(2+x)^{n^{2}}$.
2. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x)=\frac{1}{x-3\ ^{2}}$ в околі точки $x_0=1$

   та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть π із заданою точністю $\alpha=0,00001$.

Варіант 9

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ \ln x\ ^{n}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{n}}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^{2}+1}}$.

2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x)=\cos\frac{2x^3}{3}$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\lg e$ із заданою точністю $\alpha=0,0001$.

Варіант 10

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$;

   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(1+n)}$.
2. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$ в околі точки $x_0=2$ та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть e^2 із заданою точністю $\alpha=0,001$.

Варіант 11

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}(n(n+1))x^n$.

   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+10)^n}{n^n}$.
2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x)=\frac{2}{1-3x^2}$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\cos 2^\circ$ із заданою точністю $\alpha=0,001$.

Варіант 12

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\frac{x}{2^n}x^n$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$.

2. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \frac{1}{2x+5}$ в околі точки $x_0 = 3$ та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\sqrt[3]{80}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

Варіант 13

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$;

   б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{n+1}(x+1)^n$.

2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = e^{3x}$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\ln 5$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

Варіант 14

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1} n}$;

   б) $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$.

2. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \ln(5x+3)$ в околі точки $x_0 = 2/5$ та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\sqrt[6]{738}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

Варіант 15

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-2x)^n}{n-\ln^2 n}$.

2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x)=\frac{1}{1+x}$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\mathrm{arctg}\,1/2$ із заданою точністю $\alpha=0,001$.

Варіант 16

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

2. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x)=\ln\frac{1}{x^2-2x+2}$ в околі точки $x_0=1$ та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\sqrt[3]{e}$ із заданою точністю $\alpha=0,00001$.

Варіант 17

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(0,1)^n x^{2n}}{n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$.

2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x)=\mathrm{ch}(2x^3)$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\sin 1^\circ$ із заданою точністю $\alpha=0,0001$.

Варіант 18

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lg x^{\,n}$.

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$.

2. . Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x}}$ в околі точки $x_0 = -3$ та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\sqrt[3]{8,36}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

Варіант 19

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n$.

2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\ln 10$ із заданою точністю $\alpha = 0,0001$.

Варіант 20

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}$.

2. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x)=\cos x$ в околі точки $x_0=\pi/4$ та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\arcsin 1/3$ із заданою точністю $\alpha=0,001$.

Варіант 21

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{n^n 2^{n-1}}$.
2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x)=\operatorname{sh} x$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\lg 7$ із заданою точністю $\alpha=0,001$.

Варіант 22

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$.
2. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ в околі точки $x_0=2$ та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\sqrt{e}$ із заданою точністю $\alpha=0,0001$.

Варіант 23

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = e^{-x^4}$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\cos 10^\circ$ із заданою точністю $\alpha = 0,01$.

Варіант 24

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$;

   б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.
2. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ в околі точки $x_0 = -2$ та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

Варіант 25

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{3n-1}}$;

   б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$.
2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = 2^{-x^2}$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\sqrt[10]{1080}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

Варіант 26

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$;

   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x)=\sin x$ в околі точки $x_0=a$ та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть e^{-1} із заданою точністю $\alpha=0,0001$.

Варіант 27

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$;

   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$.

2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x)=5^x$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\sin\pi/100$ із заданою точністю $\alpha=0,0001$.

Варіант 28

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$;

   б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$.

2. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x)=\ln(5x+3)$ в околі точки $x_0=1$ та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\sqrt[4]{90}$ із заданою точністю $\alpha=0,001$.

Варіант 29

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n} x^n$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = x\cos\sqrt{x}$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції .
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\frac{1}{\sqrt[7]{136}}$ із заданою точністю $\alpha = 0{,}001$.

Варіант 30

1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

2. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \frac{1}{x+3}$ в околі точки $x_0 = 1$ та знайдіть область його збіжності.
3. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ із заданою точністю $\alpha = 0{,}001$.

Список рекомендованої літератури

1. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн. 2 / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003. — 368 с. — ISBN 966-06-0230-8.

2. Вся высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 3. — М.: Эдиториал УРСС, 2010. — 240 с. — ISBN 978-5-354-01329-6.

3. Вся высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 4. — М.: Эдиториал УРСС, 2005. — 352 с. — ISBN 978-5-354-01051-9.

4. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. . Юрик. — К: А. С. К., 2006. — 647 с. — ISBN 966-539-320-0.

5. Жевняк Р. М. Высшая математика: учеб. пособие Ч. 3. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1985. — 208 с.

6. Жевняк Р. М. Высшая математика: учеб. пособие Ч. 4. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1987. — 240 с.

7. Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. — К.: Техніка, 2000. — 792 с. — ISBN 966-575-153-0.

8. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Письменный. — М.: Айрис-Пресс, 2008. — 608 с. ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.

9. Шипачев В. С. Курс высшей математики / В. С. Шипачев. — М. Оникс, 2009. — 608 с. — ISBN 978-5-488-02067-2.