

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Числові ряди

методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни

„Вища математика” для студентів інженерних спеціальностей

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри АТ та ГМ,
протокол № 10 від 18.05. 2018р.

Чернігів ЧНТУ 2018

Числові ряди. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни „Вища математика” для студентів інженерних спеціальностей./Укл.: В.П. Мурашківська, Л.А. Руновська– Чернігів: ЧНТУ,2018, - 45с.

Укладачі: Мурашківська Віра Петрівна, ст. викл.

Руновська Людмила Анатоліївна, ст. викл.

Відповідальний за випуск: Кальченко Віталій Іванович, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, професор, доктор технічних наук

Рецензент: Венжега Володимир Іванович – доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, Чернігівського національного технологічного університету

Зміст

Вступ.....	4
1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	5
1.1. Числові ряди.....	5
1.2. Ряди з додатними членами	6
1.3. Знакозмінні ряди.....	8
2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ	10
2.1. Сума ряду	10
2.2. Ознака Даламбера.....	11
2.3. Радикальна ознака Коші	11
2.4. Інтегральна ознака Коші.....	11
2.4. Ознака порівняння.....	12
2.5. Гранична ознака порівняння	13
2.6. Знакопочережні ряди	13
3. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ.....	16
4. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ.....	19
5. КОНТРОЛЬНА РОБОТА	31
Список рекомендованої літератури.....	45

Вступ

Ці методичні вказівки укладені у відповідності до Навчальної програми з вищої математики для технічних, технологічних та природничих спеціальностей вищих навчальних закладів.

Поняття числового ряду широко застосовується як в прикладній математиці, так і в різних інженерних дисциплінах. Вони є зручним апаратом для розв'язання задач в різних галузях науки і техніки.

Мета даного видання – допомогти студентам краще оволодіти математичним апаратом, який застосовується в числових рядах, виробити у студентів уміння, навички обчислювати різні задачі з теми «Числові ряди».

Основне завдання цих методичних вказівок – надати студентам теоретичну та практичну допомогу в самостійній роботі по вивченню розділу «Числові ряди» з дисципліни «Вища математика». Методичні вказівки містять теоретичний матеріал, необхідний для самостійного виконання студентами індивідуальних домашніх завдань. Наведені приклади розв'язання основних стандартних задач.

В розділі «Завдання для самостійної роботи» наведено 26 варіантів індивідуальних завдань. Завдання охоплюють в цілому матеріал розділу, який в тому чи іншому обсязі вивчається студентами.

Методичні вказівки можуть бути використані під час аудиторних занять, як довідковий матеріал та в якості задачника при проведенні самостійних та контрольних робіт.

1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Числові ряди

❶ **Числовий ряд.** Нехай задано числову послідовність $\{a_n\}$. Числовим рядом (рядом) називають вираз $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — члени ряду; $a_n = f(n)$ — n -й член ряду;

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ — n -та часткова сума ряду;

$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ — n -й залишок числового ряду.

❷ **Збіжність числового ряду.** Числовий ряд називають **збіжним**, якщо послідовність часткових сум $\{S_n\}$ збігається до деякого числа S , яке

називають **сумою ряду**, і пишуть $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Якщо не існує скінченної границі послідовності $\{S_n\}$, то ряд називають **розбіжним**.

❸ **Ознаки збіжності рядів.**

❶ **Необхідна умова збіжності ряду.** Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. **Достатня ознака розбіжності ряду.** Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

❷ **Критерій збіжності ряду.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний тоді й лише тоді, коли збіжний довільний його залишок.

❹ **Властивості збіжних рядів.**

❶ Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається до суми S , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$, де $c \in \mathbb{R}$, збігається до суми cS .

❷ Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються до сум S_1 та S_2 , то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ збігаються до сум $S_1 \pm S_2$.

❸ Переставлення, відкидання або приєднання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність (розбіжність).

1.2. Ряди з додатними членами

❶ **Перша ознака порівняння (у формі нерівності).** Якщо задано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ з невід'ємними членами і для всіх n виконано нерівність $0 \leq a_n \leq b_n$, то:

- 1) зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- 2) з розбіжністю ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

❷ **Друга ознака порівняння (гранична).** Якщо задано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

з додатними членами і існує скінченна, відмінна від нуля, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, то ряди

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

Для **порівняння** часто використовують ряди:

❸ **геометричний** ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – $\begin{cases} \text{збіжний,} & |q| < 1 \\ \text{розбіжний,} & |q| \geq 1 \end{cases}$

❹ **гармонічний** ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний

❺ ряд **Діріхле (узагальнений гармонічний)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ – $\begin{cases} \text{збіжний,} & a > 1 \\ \text{розбіжний,} & a \leq 1 \end{cases}$

При дослідженні деяких завдань на збіжність числових рядів зручно при застосуванні ознак порівняння використовувати слідства першої і другої чудових границь: стосовно до рядів вважаємо α n нескінченно малою величиною, тобто $\alpha n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Таблиця еквівалентностей

$\sin(\alpha) \sim \alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha) \sim \alpha$	$(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha$
$\arcsin(\alpha) \sim \alpha$	$\operatorname{arctg}(\alpha) \sim \alpha$	$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$
$1 - \cos(\alpha) \sim \frac{\alpha^2}{2}$	$\operatorname{ctg}(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$	$\log_b(1+\alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln(b)}$
$\pi/2 - \arccos(\alpha) \sim \alpha$	$e^\alpha - 1 \sim \alpha$	$b^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \ln(b)$

Ⓔ **Д'Аламберова ознака.** Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, то: 1) для $L < 1$ ряд збігається; 2) для $L > 1$ ряд розбігається*;

3) для $L = 1$ ряд потребує додаткового дослідження**.

Ⓕ **Радикальна ознака Коші.** Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, то: 1) для $L < 1$ ряд збігається; 2) для $L > 1$ ряд розбігається; 3) для $L = 1$ ряд потребує додаткового дослідження.

Ⓖ **Інтегральна ознака Коші.** Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мають вигляд $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, починаючи з $n = k \in \mathbb{N}$, де $f(x)$ — неперервна невід'ємна спадна функція на проміжку $[\frac{1}{k}; +\infty[$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається (розбігається) тоді й лише тоді, коли збігається (розбігається) інтеграл $\int_k^{\infty} f(x) dx$.

* Із розбіжності ряду за ознакою д'Аламбера (або радикальною ознакою Коші) випливає,

що загальний член ряду не прямує до нуля

** Приміром, за достатньою ознакою розбіжності, за ознаками порівняння.

1.3. Знакозмінні ряди

❶ **Знакозмінний ряд.** Числовий ряд, який містить нескінченну кількість додатних і нескінченну кількість від'ємних членів, називають *знакозмінним*.

Знакопозаочеревний ряд. Числовий ряд, знаки членів якого строго чергуються, називають *знакопозаочеревним*.

❷ **Абсолютна та умовна збіжність ряду.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ та *умовно збіжним*, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, проте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається*.

❸ **Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду.** Якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, утворений з модулів членів знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

❹ **Лейбніцова ознака.** Нехай задано знакопозаочеревний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, де $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Якщо: 1) $a_n \geq a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то цей ряд збігається. Сума його не перевищує першого члена a_1 і $|R_n| \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.

❺ **Властивості знакозмінних рядів.**

① Абсолютно збіжні ряди з сумами S_1 та S_2 можна додавати (віднімати), дістаючи ряд із сумою $S_1 + S_2$ ($S_1 - S_2$).

② **Теорема Діріхле.** Абсолютно збіжний ряд за будь-якого переставлення його членів залишається абсолютно збіжним, і його сума не змінюється.

③ **Теорема Рімана.** Переставленням членів умовно збіжного ряду можна одержати ряд з будь-якою заданою сумою або розбіжний ряд.

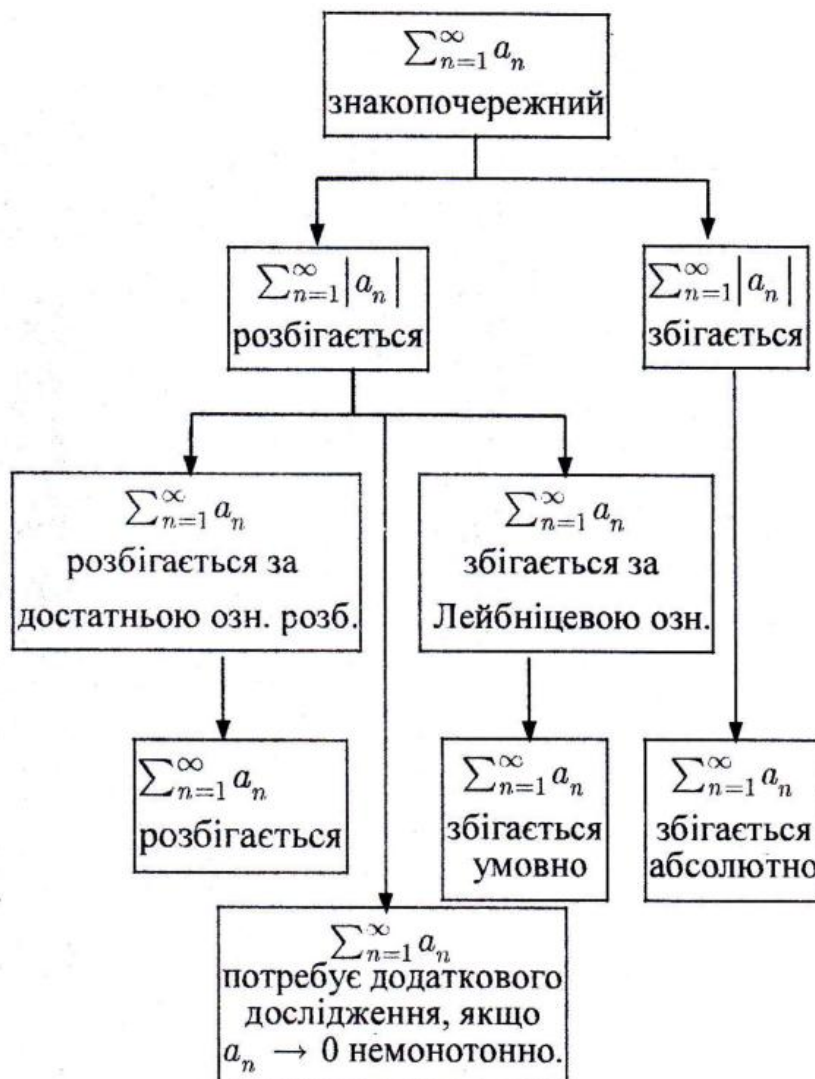
❻ **Схема дослідження знакопозаочеревного ряду на збіжність.**

① Досліджують ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на абсолютну збіжність, вивчаючи ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

② Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається, то висновують: **ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно.** Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається, то застосовують до ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Лейбніцову ознаку або достатню ознаку розбіжності.

③ Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то висновують: **ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно.** Інакше — **ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.**

* Щоб встановити абсолютну збіжність ряду використовують усі ознаки збіжності додатних рядів для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.



2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1. Сума ряду

Приклад 1. Знайти суму числового ряду $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{(n-5)(n-8)}$.

розкладемо дріб $a_n = \frac{1}{(n-5)(n-8)}$ на елементарні дроби.

$$\frac{1}{(n-5)(n-8)} = \frac{A}{n-5} + \frac{B}{n-8} = \frac{A(n-8) + B(n-5)}{(n-5)(n-8)} = \frac{(A+B)n + (-8A-5B)}{(n-5)(n-8)}$$

знайдемо A і B , вирішивши систему рівнянь

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -8A - 5B = 1. \end{cases}$$

$$\text{Отже, } A = -\frac{1}{3}, B = \frac{1}{3}, \text{ і } a_n = \frac{1}{(n-5)(n-8)} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{n-5} + \frac{1}{n-8} \right).$$

Тоді часткова сума даного ряду $S_k = a_9 + a_{10} + \dots + a_k =$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{4} + 1 \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{5} \right) + \dots +$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{k-8} + \frac{1}{k-11} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{k-7} + \frac{1}{k-10} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{k-6} + \frac{1}{k-9} \right) +$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{k-5} + \frac{1}{k-8} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{k-7} - \frac{1}{k-6} - \frac{1}{k-5} \right), \text{ и}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{k-7} - \frac{1}{k-6} - \frac{1}{k-5} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{18}.$$

Тоді, існує кінцева межа послідовності часткових сум S_k . Отже, за визначенням, ряд збігається і його сума дорівнює $\frac{11}{18}$.

2.2. Ознака Даламбера

Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p$, то при $p < 1$ ряд збігається, а при $p > 1$ – розбігається. При $p = 1$ ряд може збігатися, або розбігатися.

Приклад 2. Дослідити ряд на збіжність.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{7^n} (n^2 + 4)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{7^{n+1}} ((n+1)^2 + 4)} \cdot \frac{\sqrt{7^n} (n^2 + 4)}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n^2 + 4)}{\sqrt{7}(n^2 + 2n + 5)} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} < 1, \text{ отже, ряд збігається.} \end{aligned}$$

2.3. Радикальна ознака Коші

Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = p$, то при $p < 1$ ряд збігається, а при $p > 1$ – розбігається.

Приклад 3. Дослідити ряд на збіжність.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+8}{5n-1} \right)^{3n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+8}{5n-1} \right)^{3n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+8}{5n-1} \right)^{\frac{3n+2}{n}} = \left(\frac{3}{5} \right)^3 = \frac{27}{125} < 1,$$

ряд збігається.

2.4. Інтегральна ознака Коші

Ряд (1) збігається, якщо збігається невластний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$, де $f(x)$ – неперервна функція, яка приймає в точках $x = n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) значення $f(n)$ і монотонно спадає на проміжку $1 \leq x \leq \infty$.

Приклад 4. Дослідити ряд на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 16}$.

Так як $f(n) = \frac{n}{n^2 + 16}$, то $f(x) = \frac{x}{x^2 + 16}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{x^2 + 16} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{xdx}{x^2 + 16} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(x^2 + 16) \Big|_1^b = \infty.$$

Інтеграл розбігається, отже ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 16}$ теж розбігається.

2.4. Ознака порівняння

Нехай дано два ряди з невід'ємними членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n, u_n \geq 0, v_n \geq 0$ і, починаючи з деякого номеру n , виконується умова $u_n < v_n$. Тоді:

1) якщо ряд з більшими членами $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, то збігається і ряд з меншими членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

2) якщо ряд з меншими членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається, то і ряд з більшими членами $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ розбігається.

Для порівняння часто використовують гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який розбігається, і узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, який збігається при $\alpha > 1$, і розбігається при $\alpha < 1$.

Приклад 5. Визначити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$. Порівняємо даний ряд з розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n}$, отже вихідний ряд розбігається.

2.5. Гранична ознака порівняння

Задані два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Якщо існує кінцева і відмінна від нуля границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$, то обидва ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

Приклад 6. Визначити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3 + 1}$. Порівняємо даний ряд з узагальненим гармонійним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, де $\alpha = 2 > 1$, це означає, що ряд збігається:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^3 + 1} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2n^3 + 1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Так як границя існує, яка відмінна від 0, то обидва ряди одночасно збігаються, тому що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається.

2.6. Знакопочережні ряди

Знакопочережним називається ряд, для якого будь-які два сусідніх члена мають різні знаки: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n$, якщо $u_n > 0$.

Теорема Лейбніца. Знакопочережний ряд збігається, якщо абсолютні величини його членів монотонно спадають, а загальний член прямує до нуля, тобто 1) $u_1 > u_2 > \dots$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Причому, якщо знакопочережний ряд збігається, то його сума не перевищує модуля першого члена.

Знакопочережний ряд називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд, який складений з модулів членів даного ряду.

Знакопочережний ряд називається умовно збіжним, якщо він збігається, а ряд з модулів його членів розбігається.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n+3}.$$

Умови теореми Лейбніца для даного ряду не виконуються:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n+3} = \infty, \text{ звідси випливає, що ряд розбігається.}$$

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + 5}.$$

Складемо ряд з модулів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 5}$, він збігається, як узагальнений гармонійний ряд з показником $\alpha = 3 > 1$. Отже даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + 5}$ збігається абсолютно.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n}}.$$

Досліджуємо ряд на абсолютну збіжність. Для цього розглянемо ряд складений з модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n}}$. Порівняємо його з рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}, \text{ відзначивши, що:}$$

- обидва ряди з невід'ємними членами;
- другий ряд розбігається, як ряд Діріхле з параметром $p < 1$ ($p = \frac{1}{4}$);
- для $n > 2$ виконуються нерівності $\ln n > 1$, $\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} < \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n}}$.

Тоді за ознакою порівняння рядів з невід'ємними членами ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n}}$ розбігається, а це означає, що досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n}}$ не збігається абсолютно.

Для дослідження даного ряду на умовну збіжність застосуємо ознаку Лейбніца, зазначивши, що:

- даний ряд знакопозначений;

- межа загального члена ряду (модуля загального члена ряду) дорівнює 0 (дійсно, використовуючи правило Лопіталя,

$$\text{маємо } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{4} \cdot n^{-3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{1}{n^4}} = 0);$$

- починаючи з деякого номера члени ряду зменшуються за абсолютною величиною (дійсно, функція $f(x) = \frac{\ln x}{x^{1/4}}$ має похідну

$$\frac{df}{dx} = \frac{4 - \ln x}{4x \sqrt[4]{x}}, \text{ яка від'ємна, якщо } x > e^4).$$

Тоді за ознакою Лейбніца даний ряд збігається умовно.

3. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Дайте означення збіжності і розбіжності рядів.
2. Дослідіть збіжність ряду, який складено з членів геометричної прогресії. Наведіть приклади.
3. Дослідіть збіжність ряду Діріхле. Наведіть приклади.
4. Необхідна ознака збіжності ряду.
5. Чи можна стверджувати, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$?
6. Ч є необхідним для збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ умова:
 - а) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 1$;
 - б) не всі члени ряду - числа u_n - рівні 1;
 - в) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$;
 - г) не всі члени ряду - числа u_n - рівні 0?
7. Чи вірно, що
 - а) якщо ряд збігається, то його часткові суми обмежені;
 - б) якщо часткові суми ряду обмежені, то ряд збігається?
8. Ознаки порівняння рядів з додатними членами.
Наведіть приклади застосування цих ознак.
9. Ознака Д'Аламбера збіжності додатних рядів. Наведіть приклад застосування цієї ознаки.
10. Радикальна ознака Коші збіжності рядів з додатними членами.
Наведіть приклади застосування цієї ознаки.
11. Інтегральна ознака Коші збіжності ряду. Наведіть приклади застосування цієї ознаки.
12. Чи існує ряд, який
 - а) за ознакою Коші збігається, а за ознакою Д'Аламбера розбігається?
 - б) за ознакою Д'Аламбера розбігається, а за інтегральною ознакою збігається?
 - в) за ознакою Д'Аламбера збігається, а за ознакою Коші розбігається?
13. Дайте визначення знакозмінного ряду, його умовної і абсолютної збіжності. Наведіть приклади абсолютно і умовно збіжних рядів.
14. Чи слідує збіжність знакопозадовженого ряду з його абсолютної збіжності?
15. Дайте означення знакопозадовженого ряду, його умовної і абсолютної збіжності. Наведіть приклади абсолютно і умовно збіжних рядів.

16. Ознака Лейбніца збіжності знакопозережних рядів. Наведіть приклади їх застосування.

17. Чи вірно для знакопозережного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n$, що

- а) якщо ряд абсолютно збігається, то він збігається і умовно?
- б) якщо ряд збігається умовно, то він не збігається абсолютно?
- в) якщо ряд збігається абсолютно, то він є збіжним?

18. Чи вірно, що якщо знакопозережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n$

збігається, то $u_n \rightarrow 0$ (при $n \rightarrow \infty$) монотонно?

19. Чи вірно для знакопозережного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n$, що

- а) якщо послідовність u_n монотонна, то ряд збігається?
- б) якщо $u_n \rightarrow 0$ (при $n \rightarrow \infty$), то ряд збігається?
- в) якщо $u_n \rightarrow 0$ (при $n \rightarrow \infty$) монотонно, то ряд збігається умовно?
- г) якщо $u_n \rightarrow 0$ (при $n \rightarrow \infty$), монотонно, то ряд збігається?

20. Чи вірно для знакопозережного ряду, що

- а) ряд збігається абсолютно тоді і тільки тоді, коли збігаються два ряди - ряд з додатних членів і ряд з від'ємних членів?
- б) якщо ряд збігається умовно, то розбігаються два ряди - ряд з додатних членів і ряд з від'ємних членів?
- в) якщо один з двох рядів (з додатними членами і від'ємними членами) збігається, а інший - розбігається, то вихідний ряд розбігається?
- г) якщо ряд збігається умовно, то ряд з його додатних членів збігається?

21. Що можна сказати про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n + v_n$, якщо

а) ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігаються?

б) ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ розбігаються?

в) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ розбігається?

22. З того, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n + v_n$ збігається, чи слідує, що

а) обидва ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігаються?

б) обидва ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ розбігаються?

в) один з рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, а інший розбігається ?

4. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Знайти суму ряду:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 8n - 5}$;

б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4 - 5n}{n(n-1)(n-2)}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}$;

б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-5}{n(n^2-1)}$.

4. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}$;

б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-2}{n(n-1)(n+2)}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}$;

б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-4}{n(n-1)(n-2)}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+1)(n+2)}$.

7. а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$;

б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n-1)(n-2)}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 28n - 45}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+2)(n+3)}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12}$;

б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-4)}$.

11. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$.

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{n(n-1)(n+2)}$.

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5}$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$.

$$14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 84n - 13};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}.$$

$$16. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 35n - 6};$$

$$\text{б) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}.$$

$$17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 20};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 42n - 40};$$

$$\text{б) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{8n-10}{(n+1)(n-1)(n-2)}.$$

$$19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 21n - 10};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n-1)(n+1)}.$$

$$21. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+3)}.$$

$$22. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}.$$

$$23. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 35n - 6};$$

$$\text{б) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}.$$

$$24. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$25. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35};$$

$$\text{б) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n^2-1)}.$$

$$26. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{49n^2 + 21n - 10};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+9}{n(n+1)(n+3)}.$$

2. Дослідити ряди на збіжність, використовуючи ознаки порівняння:

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n(n+1)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n-\ln(n)}$.

2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+(-1)^n}{6^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n} \ln(n+1)}$.

3. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(3n)}{n\sqrt{n}}$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \ln(n)}{n^3-5}$.

4. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(n)}{n^2+1}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+\cos(\pi n))}{2n^2-1}$.

5. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(n^2+1)}{n \cdot 5^n}$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin((n-1)/n)}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$.

6. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin^4(n)}{(n+1) \cdot 3^n}$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$.

7. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4(\pi n/2)}{4^n+n^2}$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot \ln(n)}{n^2-3}$.

8. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3 \cdot (2+\sin(\pi n/2))}$.

9. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(3n)}{9^n+3}$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \cdot \sin\left(\frac{1}{3}n\right)$.

10. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n^2\sqrt{n}}$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot \arctg \sqrt{n^2-1}}{\pi \cdot \sqrt{n^2-n}}$.

11. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(\pi n/2)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(2+(-1)^n)}{\ln(1+n)}$.

12. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt[3]{n^7}}$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\cos^2(6n)}$.

13. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2+5}$;

б) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{n-4}$.

14. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin(\pi n/2)}{n^2}$;
15. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + \cos(\pi n/2)) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7 + 10}}$;
16. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+2}}$;
17. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n(n+2)}}$;
18. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos^2(n)}{n^4 + 4}$;
19. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3 + n + 1}$;
20. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(\pi n/3)}{3^n + 21}$;
21. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n^5 + n + 1}}$;
22. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n + n} \cdot \arcsin\left(\frac{3 + (-1)^n}{4}\right)$;
23. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 6} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + (-1)^n}{2} n\right)$;
24. a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2} \cdot \arccos\left(\frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}\right)$;
25. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2^n)}{n^2}$;
26. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(4^n)}{n^4 + 2}$;
- б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n-1} \cdot \ln(n)}$;
- б) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^3 \cdot \ln(n)}{n^4 - 4n^3}$;
- б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 + \sin(\pi n + \pi/2)}{3n - 2}$;
- б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arccos((n^2 - 1)/n^2)}{\sqrt[4]{n^4 - 2}}$;
- б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{\sqrt[3]{n^3 - n^2}}$;
- б) $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n-5}$;
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2(2 + \cos(\pi n/2))}$;
- б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3 - 4n}} \cdot \cos\left(\frac{2 + (-1)^n}{6}\right)$;
- б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{n^2 - 1}}{\pi \cdot \sqrt[4]{n^4 - 2n^3}}$;
- б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - \sin^2(3n)}$;
- б) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1 + \cos^2(2^n)}{\sqrt{n} - 2}$;
- б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(4 + (-1)^n)}{\ln(n)}$;
- б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5 + (-1)^n}{n - \sqrt{n}}$;

3. Застосовуючи радикальну ознаку Коші, дослідити на збіжність ряди:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n (n+1)^3$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^n$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot 3^n}{(2n+1)^n}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4n}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot e^{-n}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{5^n}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n+2}}{5^n}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n \cdot (n-1)^2$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$$

4. Застосовуючи ознаки порівняння і інтегральну ознаку Коші, дослідити на збіжність ряди:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln^2(2n)}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+1)}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(n+1)}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(2n+1)}$$

$$6. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n-1)}$$

$$7. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5) \ln^2(4n-7)}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \ln^2(n+1)}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4) \ln^2(5n+2)}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+7)}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2(n\sqrt{5})}$$

$$12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1) \ln n}$$

$$13. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln(n-3)}$$

$$14. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3) \ln^2 n}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(2n)}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-3) \ln^2(n/2)}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(2n)}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5) \ln n}$$

$$19. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \ln n}$$

$$20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3) \ln n}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(n+1)}$$

$$22. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2-9) \ln(n-2)}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-3) \ln(3n+1)}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2) \ln(2n)}$$

$$25. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln^2 n}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{2}+1) \ln^2(n\sqrt{3}+1)}$$

5. Дослідити на збіжність ряди за ознакою Даламбера:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n(n-1)!}.$$

$$2. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{7}{(n-3)n!}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

$$4. \sum_{n=6}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot (n-5)!}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2} \cdot (n^3 + 2)}{(n-1)!}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)! \cdot 5^{n+1}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot n!}{(2n+1)!}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2 + 2)}{(n+1)!}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{4n+5} \cdot \frac{1}{7^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{(n+2)!}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)!} \cdot \frac{2}{5^n}.$$

$$12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot (n+1)!}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(4^n + 3)(2n)!}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{6^{n-1}}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n^n}.$$

$$20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n \cdot \sqrt[3]{n^2 + 1}}{(n+1)!}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2} \cdot n!}{n^n}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot (n+1)!}{(2n)!}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! \cdot 5^{n+1}}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}.$$

6. Дослідити на збіжність ряди, використовуючи відповідні ознаки збіжності:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt[3]{n} \cdot 5^n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right).$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 5n}{4n^2 - 6n} \right)^n.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)^n}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)^n.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^3}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(4n+3)^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^n - n^3}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 - n}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 1) \cdot \arctg(n)}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \cdot e^{n/2}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \left(\ln \frac{n}{n+1} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n + n^2}}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+1)}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} \right)^2.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n-1)!}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^4+1}} \right).$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n + 2^{-n}}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3(n+2)}.$$

$$24. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{-n} (n^2+1)}{n-1}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{n} \right).$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^{n^2} \cdot \sin^2 n.$$

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{n^4 + 4}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(5n)}{n^5}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arcsin(n/(n+1))}{\sqrt{n^2 + n}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-1)^n \sqrt{n^2 + 1}}{n^3}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{2n+1} \right)^n$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \sin^3 \left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}} \right)$.

5. а) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln \ln n) \ln n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$.

6. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^4 - n^2 + 1}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{2n+3}}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}} \right)}{\sqrt{3n+1}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \left(\frac{\pi}{6n} \right)$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{3^n}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$.

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \left(\frac{1}{n} \right)$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$.

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$.

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3)}{\ln^2(n+4)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin^2 n}$.

14. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.
15. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$.
16. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}$.
17. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n\sqrt{n}}$.
18. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 3n + 2}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sin\left(\frac{\pi(n^2 + n + 1)}{3n^2 + 5n + 6}\right)\right)^n$.
19. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{n+2}}{n!}$.
20. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n + \sin(\pi n/6)}$; б) $\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n - n^2}$.
21. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n + e^n)}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\ln\left(\frac{3n^2 + n + 1}{2n^2 + n + 1}\right)\right)^n$.
22. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-5n}{2n+3}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{(\ln 3)^n}$.
23. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{5^{2n+1} \cdot (n^2 + 3n)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{\sqrt{2^{n-1}}}$.
24. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+5} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^2 + 1}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{\sqrt{n^3}}$.
25. a) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n^2 - 1}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2n)^n}{n^{n+2} \cdot n!}$.
26. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2 + 1}{\sqrt{2^{n-1}}}$; б) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/2)}{\sqrt[3]{(n-3)^4}}$.

8. Дослідити на збіжність за допомогою ознак порівняння (застосовувати таблицю еквівалентностей):

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{n}+2} \right)$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 2) \ln \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right)$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (n + 1) \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{n+2} \right)$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{n + 3} \cdot \arcsin \left(\frac{1}{n^2 + 2} \right)$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}-1} \right)$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \left(\frac{n+2}{n(n-1)(n-2)} \right)$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{(n+2)(\sqrt{n}+1)} \right)$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{4n} \right)}{\sqrt[5]{2n^5 - 1}}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{n+2}{(n^2+1)\sqrt{n}} \right)$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right)$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} \right)$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right)$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}} \right)$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \operatorname{arctg}^n \left(\frac{\pi}{3n} \right)$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 4}{n^2 + 3} \right)$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{n+2}{n^2+3} \right)$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{n} \right)$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}} \right)$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \left(\frac{n}{(n^3+5)^{4/3}} \right)$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n+3} \cdot \ln \left(\frac{3n-1}{3n+1} \right)$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/(n+2)} - 1 \right)^n$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \arcsin^n \left(\frac{\pi}{n} \right)$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^2$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \arcsin \left(\frac{n+1}{n\sqrt{n}} \right)$

9. Обчислити наближено суму числового ряду з точністю $\varepsilon = 0,001$:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 2n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \cdot 2^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 3}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2 + \sqrt{n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \cdot 5^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n}{(n^2 + 1) \cdot 2^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n^3 + 2^n)}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{(-5)^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 6n + 10}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+5}}{7^n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{6^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+6) \cdot 4^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{10^{n-1}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n-1}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{1+5n} \right)^n$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-2n} \cdot 3^{n+2}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^{n-1}}{3^n + 3n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!}$

5. КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Варіант 1

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$.

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)3^n}.$$

Варіант 2

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{5^n (n+1)!}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$.

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Варіант 3

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right)^7.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1}\right)^n.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}.$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}.$

Варіант 4

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+2))^n}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 3n}}.$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}.$

Варіант 5

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{3^n}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n} \right)^{3n}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}.$$

Варіант 6

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 5n + 8}{3n^2 - 2} \right)^n.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Варіант 7

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+9)(2n+7)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n n^7.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{5^n} \right)^n.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}.$$

Варіант 8

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n - 5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n + 1)}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n + 1))^{2n}}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Варіант 9

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+6)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/(n+1))^{n^2}}{2^n}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопochерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)n}.$$

Варіант 10

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{5^n} \right)^{3n}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знако-pochерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}.$$

Варіант 11

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)(n+10)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2\pi}{3^n}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+3))^n}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+1}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопochерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{(n+1)n}.$$

Варіант 12

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/2}}{n!}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1} \right)^{n^2}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопчерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}.$$

Варіант 13

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+8)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n (n+3)!}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^{n^2}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+5}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопчерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}.$$

Варіант 14

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

$$2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}.$$

$$3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{3} \right)^{2n}.$$

$$4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - n + 1}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}.$$

Варіант 15

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

$$2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!}.$$

$$3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n} \right)^n.$$

$$4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n-1)3^n}.$$

Варіант 16

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

$$2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5^n}.$$

$$3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{((n+1)/n)^{n^2}}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+4)}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n}.$$

Варіант 17

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+3)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)}{(n+1)!}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{3^n}}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{3^n}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n}.$$

Варіант 18

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n} \right)^{n^2}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знако-почерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n^2 + 1}.$$

Варіант 19

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3^n} \right)^n.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^{2n}}.$$

5. б) Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Варіант 20

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{n^2}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^n}.$$

5. б) Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n5^n}.$$

Варіант 21

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+1)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (3n-1) \sin \frac{\pi}{4^n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 - n - 1}{7n^2 + 3n + 4} \right)^n$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt[3]{n}}$.

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

Варіант 22

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 7^n}{21^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n-1}$.

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{\ln(n+1)}.$$

Варіант 23

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

$$2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{n7^n}}.$$

$$3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3n} \right)^{2n}.$$

$$4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{(n+1)5n}.$$

Варіант 24

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

$$2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}.$$

$$3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{5n}.$$

$$4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4n}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}.$$

Варіант 25

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

$$2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n!}.$$

$$3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)/n)^{n^2}}{5^n}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопо-черговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{(2n+1)^n}.$$

Варіант 26

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 8^n}{24^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdots (5n-3)}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1} \right)^n.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 5}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопо-черговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n+5}}.$$

Варіант 27

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{5n+1} \right)^n.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопозитивний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}.$$

Варіант 28

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 3^n}{24^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{(2n)!}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{1}{2n-1} \right)^{2n}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4}.$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопозитивний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+7} \right)^n.$$

Варіант 29

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)(3n+2)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n(2n-1)}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(\ln(n+5))^2}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2+3}.$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопозитивний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(3n-2)!}.$$

Варіант 30

1. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n - 2^n}{18^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n \cdot 2^n}}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+3}{2n+5} \right)^n.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+6)}.$$

5. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

Список рекомендованої літератури

1. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн. 2 / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003. — 368 с. — ISBN 966-06-0230-8.
2. Вся высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 3. — М.: Эдиториал УРСС, 2010. — 240 с. — ISBN 978-5-354-01329-6.
3. Вся высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 4. — М.: Эдиториал УРСС, 2005. — 352 с. — ISBN 978-5-354-01051-9.
4. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. . Юрик. — К: А. С. К., 2006. — 647 с. — ISBN 966-539-320-0.
5. Жевняк Р. М. Высшая математика: учеб. пособие Ч. 3. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1985. — 208 с.
6. Жевняк Р. М. Высшая математика: учеб. пособие Ч. 4. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1987. — 240 с.
7. Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. — К.: Техніка, 2000. — 792 с. — ISBN 966-575-153-0.
8. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Письменный. — М.: Айрис-Пресс, 2008. — 608 с. ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.
9. Шипачев В. С. Курс высшей математики / В. С. Шипачев. — М. Оникс, 2009. — 608 с. — ISBN 978-5-488-02067-2.