МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

# НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни "Вища математика" для студентів і нженерних спеціальностей

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри АТ та ГМ,
протокол № 7 від 18.02. 2019р.

Чернігів ЧНТУ 2019

Невизначений інтеграл. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» для студентів інженерних спеціальностей. /Укл.:С.П.Казнадій, В.П. Мурашковська– Чернігів: ЧНТУ,2019, - 105с.

**Укладачі:**

Казнадій Світлана Петрівна, ст. викл.
Мурашковська Вірв Петрівна, ст. викл.

**Відповідальний за випуск:** Кальченко Віталій Іванович, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, професор, доктор технічних наук

**Рецензент:** Венжега Володимир Іванович – доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, Чернігівського національного технологічного університету

# Зміст

# Вступ

Ці методичні вказівки укладені у відповідності до Навчальної програми з вищої математики для інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Дана робота призначена для студентів, які вивчають вищу математику і містить теоретичні вправи, контрольні питання, розрахункові завдання і приклади виконання завдань до модулю «Невизначений інтеграл».

Поняття невизначеного інтегралу широко застосовується як в прикладній математиці, так і в різних інженерних дисциплінах. Вони є зручним апаратом для розв'язання задач в різних галузях науки і техніки. Основне завдання цих методичних вказівок – надати студентам теоретичну та практичну допомогу в самостійній роботі по вивченню розділу «Невизначений інтеграл» з дисципліни «Вища математика». Методичні вказівки містять теоретичний матеріал, необхідний для самостійного виконання студентами індивідуальних домашніх завдань. Наведені приклади розв'язання основних стандартних задач. Завдання охоплюють в цілому матеріал розділу, який в тому чи іншому обсязі вивчається студентами. В даних вказівках відібрано мінімально необхідний матеріал до невизначеного інтегралу. Також дані рекомендації для більш успішного засвоєння цього матеріалу. Деякі методи інтегрування /зокрема інтегрування правильних раціональних дробів/ викладаються нетрадиційними методами, що сприяє кращому засвоєнню цього матеріалу для студента.

Методичні вказівки можуть бути використані під час аудиторних занять, як довідковий матеріал та в якості задачника при проведенні самостійних та модульно – контрольних робіт.

# 1. ПЕРВІСНА

***Визначення.*** Функція F(x) називається первісною для заданої на проміжку <a;b> функції f(x), якщо на всьому цьому проміжку F\`(x) = f(x)

**Приклад.** Серед функцій $\sin x$; $e^{2x}$; $x^4$; $\frac{x^4}{4}$; $\frac{x^4}{4}+2$; $\frac{x^4}{4}-\pi$ вказати первісні для даної функції f(x) = $x^3$:

*Розв'язок:* $\sin x\ ' = \cos x \neq f\ x\ ;$ $(e^{2x})' = 2e^{2x} \neq f(\ (x^4)' = 4x^3 \neq f(x);$ $(\frac{x^4}{4})' = \frac{4x^3}{4} = x^3 = f(x);$ $(\frac{x^4}{4}+2)' = x^3 = f(x);$ $(\frac{x^4}{4} - \pi)' = x^3 = f(x)$ .

Тому функції $\sin x; e^{2x}; x^4$ не будуть первісними для $f\ x\ = x^3$. А функції
$\frac{x^4}{4}$; $\frac{x^4}{4}+2$; $\frac{x^4}{4}-\pi$ будуть первісними для $f\ x\ = x^3$.

Легко помітити, що якщо F(x) - одна з первісних для функції $f(x)$, то всі функції виду $F\ x\ + \mathrm{C}$ ( де C- випадковий числовий доданок або адитивна константа ) також є первісними для функції $f(x)$, так як
$F\ x\ + \mathrm{C}\ ' = F'\ x\ + \mathrm{C}' = f\ x\ + 0 = f(x)$.

Виникає питання: чи всі первісні для функції $f\ x$ охоплює вираз $F\ x\ + \mathrm{C}$? Відповідь на це питання дає наступна теорема:

*Для заданої на проміжку функції будь які її дві первісні відрізняються одна від одної тільки адитивною константою.*

# 2. ПОНЯТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

***Визначення.*** Невизначений інтеграл даної функції $f\ x$ - це множина всіх первісних цієї функції.

Невизначений інтеграл для функції $f\ x$ позначають $f\ x\ dx$. В цьому позначенні:

а) символ $\int$ - знак невизначеного інтегралу;

б) $f\ x\ dx$ – підінтегральний вираз;

в) $f(x)$ – підінтегральна функція;

г) буква $x$ – змінна інтегрування;

д) буква $d$ – знак диференціалу.

*Наприклад:* $\frac{dx}{cos^3 x} = \frac{1}{cos^3 x} dx.$

$\frac{dx}{cos^3x}$ – підінтегральний вираз;

$\frac{1}{cos^3x}$ – підінтегральна функція;

$x$ – змінна інтегрування.

***<u>Визначення</u>.*** Процес обчислення невизначеного інтегралу для функції $f(x)$ називають невизначеним інтегруванням (або інтегруванням) функції $f(x)$.

Припустимо, що якимось чином знайдена одна яка-небудь первісна $F(x)$даної функції $f(x)$. Тоді з розділу 1 слідує загальна формула для обчислення невизначеного інтегралу: $f\ \ x\ \ dx = F\ \ x\ \ + C$, де $C$ - адитивна константа, яку називають в цьому випадку також константою інтегрування.

**Приклад .** Обчислити $x^2dx$.

*Розв'язок:* Іншими словами це означає: знайти всі первісні для функції

$f\ \ x\ \ = x^2$. Вміння в обчислюванні похідних (зокрема, добре знання таблиці похідних) дає можливість визначити, що одною з первісних для $x^2$ буде $\frac{x^3}{3}$. Тому $x^2dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Аналогічно $\cos xdx = \sin x + C$.

Далі наведена таблиця невизначених інтегралів. В даній таблиці:

а) номер 1.2. наприклад, позначає другий частинний випадок базової формули 1;

б) $a^2$ і $a$ – додатні числа, С – константа інтегрування.

## ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. $x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

1.1. $\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

1.2. $\frac{dx}{\overline{x}} = 2\ \ \overline{x} + C$

1.3. $\frac{dx}{x^\rho} = -\frac{1}{\rho-1\ \ x^{\rho-1}} + C, \rho \neq 1$

1.4. $\frac{dx}{x} = \ln\ x\ \ + C$

1.5. $dx = x + C$

2. $a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

2.1. $e^x dx = e^x + C$

8. $ctgxdx = \ln\ sinx\ \ + C$

9. $\frac{dx}{\sin x} = \ln\ \ tg\frac{x}{2}\ \ + C$

10. $\frac{dx}{\cos x} = \ln\ \ tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\ \ + C$

11. $\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$

11.1. $\frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

12. $\frac{dx}{\overline{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C$

12.1. $\frac{dx}{\overline{1-x^2}} = arcsinx + C$

13. $\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\ \frac{a+x}{a-x}\ \ + C$

3. $\sin x dx = -\cos x + C$

4. $\cos x dx = \sin x + C$

5. $\frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$

6. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

7. $\operatorname{tg} x\, dx = -\ln \cos x \;\; + C$

14. $\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \;\frac{a-x}{a+x}\; + C$

15. $\frac{dx}{\overline{x^2 \pm a^2}} = \ln \;x + \;\; \overline{x^2 \pm a^2}\;\; + C$

16. $\overline{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} arcsin \frac{x}{a} +$
$\frac{x}{2} \;\; \overline{a^2 - x^2} + C$

17. $\overline{x^2 \pm a^2} dx = \frac{\pm a^2}{2} \ln \;x +$
$\overline{x^2 \pm a^2} \;\; +$
$+ \frac{x}{2} \;\; \overline{x^2 \pm a^2} + C$

Обґрунтувати цю таблицю можна у одних випадках за допомогою таблиці похідних.

*Наприклад:* 1) Оскільки $\operatorname{tgx}' = \frac{1}{\cos^2 x}$; то $\frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

Так як $ctgx' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, то $-ctgx \;\; ' = \frac{1}{\sin^2 x}$ і $\frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

2) Функцію $f \;\; x \;\; = \frac{1}{x}$ можна розглядати на будь-якому з інтервалів ОДЗ $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$.

Для $x \in (-\infty; 0)$ функція $\ln \;\; -x$ має сенс і $\ln \;\; -x \quad ' = \frac{1}{-x} \;\; -1 \;\; = \frac{1}{x}$. Тому
$\frac{dx}{x} = \ln \;\; -x \;\; + C$ на інтервалі $\;\; -\infty; 0 \;$. На інтервалі $(0; +\infty)$ має сенс функція $\ln(x)$ і $\ln \;\; x \quad ' = \frac{1}{x}$. Тому $\frac{dx}{x} = \ln \;\; x \;\; + C$ на інтервалі $(0; +\infty)$.

Обидва випадки можна представити так:
$\frac{dx}{x} = \ln \;\; x \;\; + C$, так як $\ln \;\; x \quad ' = \frac{1}{x}$.

В інших випадках таблицю невизначених інтегралів можна просто перевірити.

**Приклад.** Перевірити, що $\frac{dx}{\overline{x^2+a^2}} = \ln x + \;\; \overline{x^2 + a^2} \;\; + C$.

*Розв'язок:* Знаходимо

$$(\ln \;\; x + \;\; \overline{x^2 + a^2} \;\; )' = \frac{1}{x + \;\; \overline{x^2 + a^2}} (1 + \frac{2x}{2 \;\; \overline{x^2 + a^2}})$$

$$= \frac{1}{x + \;\; \overline{x^2 + a^2}} \frac{x + \;\; \overline{x^2 + a^2}}{\overline{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\overline{x^2 + a^2}}$$

Тому $\ln x + \;\; \overline{x^2 + a^2}$ є одна з первісних для $\frac{1}{\overline{x^2+a^2}}$

**Приклад.** Обчислити 1) $\frac{dx}{\overline{9-x^2}}$ ; 2) $\frac{dx}{\overline{14-x^2}}$ ; 3) $\frac{dx}{46-x^2}$ ; 4) $\overline{x^2 - 12} dx$ ; 5) $\frac{dz}{a^2+z^2}$ ; 6) $\frac{dx}{x^3}$ ; 7) $^6 \; \overline{x} dx$ .

*Розв'язок:*

1) $\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} ==$

Додатне число 9 позначимо $a^2$, тобто $9 = a^2$

отримаємо табличний інтеграл $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Для написання відповіді потрібно знати $a$

Знаходимо з $a^2 = 9$: $a = +\sqrt{9} = 3$

$=$

$arcsin\frac{x}{3} + C$ ;

2) $\frac{dx}{\sqrt{14-x^2}} = \begin{matrix} a^2 = 14, \\ a = \sqrt{14} \end{matrix} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{14}} + C$ ;

3) $\frac{dx}{46-x^2} = \begin{matrix} a^2 = 46 \\ a = \sqrt{46} \end{matrix} = \frac{1}{2\sqrt{46}}\ln\left|\frac{\sqrt{46}+x}{\sqrt{46}-x}\right| + C$ ;

4) $\sqrt{x^2-12}dx =$ $a^2 = 12$; приходимо до табличного значення $\sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{-a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-12} + C$ $=$

$\frac{-12}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-12}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-12} + C = -6\ln\left|x + \sqrt{x^2-12}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-12} + C$ ;

5) $\frac{dz}{a^2+z^2} =$

Тут змінна інтегрування $z$

при змінній інтегрування $x$:

$\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$

$=$

$\frac{1}{a}arctg\frac{z}{a} + C$ ;

6) $\frac{dx}{x^3} = \frac{dx}{x^\rho} = -\frac{1}{(\rho-1)x^{\rho-1}} + C$ при $\rho = 3 \neq 1$ $= -\frac{1}{(3-1)x^{3-1}} + C =$

$-\frac{1}{2x^2} + C$ ;

7) $\sqrt[6]{x}dx = x^{\frac{1}{6}}dx = x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ при $\alpha = \frac{1}{6} \neq -1$ $= \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + C =$

$\frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} + C = \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + C$ .

**Задачі для самостійної роботи**

За допомогою таблиці обчислити самостійно:

1) $\frac{dx}{3+x^2}$

2) $\frac{dx}{x^2+3}$

3) $\frac{dx}{3-x^2}$

4) $\frac{dx}{x^2-3}$

5) $\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$

6) $\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$

7) $\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$

8) $\sqrt{3-x^2}dx$

9) $\sqrt{x^2-3}dx$

10) $\sqrt{x^2+3}dx$

**Відповіді:** 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

3) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}+x}\right|+C$. 4) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}+x}\right|+C$. 5) $\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+C$.

6) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. 7) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C$.

8) $\frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x}{2}\sqrt{3-x^2}+C$. 9) $-\frac{3}{2}\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-3}+C$.

10) $\frac{3}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+3}+C$.

## 3. ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. БЕЗПОСЕРЕДНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Відзначимо такі властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx$.
3. $\int df(x)=f(x)+C$.
4. $\int \beta f(x)\,dx=\beta\int f(x)\,dx, \beta-$ число.
5. $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)\,dx$.

*Примітка.* Інтеграл від добутку функції не дорівнює добутку їх інтегралів. Для інтегрування добутку функцій в загальному випадку використовується формула інтегрування по частинам (розд.11).

***Визначення.*** Обчислення невизначеного інтегралу тільки з допомогою таблиці та вказаними раніше його властивостями називається безпосереднім інтегруванням.

**Приклад.** Обчислити $\int\left(x^5-6x^2+2x-3\right)dx$.

*Розв'язок:*

$\int\left(x^5-6x^2+2x-3\right)dx=\int x^5dx-\int 6x^2dx+\int 2xdx-\int 3dx=$
$\int x^5dx-6\int x^2dx+2\int xdx-3\int dx=\left(\frac{x^6}{6}+C_1\right)-6\left(\frac{x^3}{3}+C_2\right)+$
$2\left(\frac{x^3}{2}+C_3\right)-3\left(x+C_4\right)=\frac{x^6}{6}-2x^3+x^2-3x+\left(C_1-6C_2+2C_3-3C_4\right)=$
$\frac{x^6}{6}-2x^3+x^2-3x+C$, де

$C = C_1 - 6C_2 + 2C_3 - 3C_4$ − загальна константа інтегрування.

Більш компактне розв'язання цього прикладу має вигляд

$\int (x^5 - 6x^2 + 2x - 3)\,dx = = \int x^5dx - 6\int x^2dx + 2\int xdx - 3\int dx = \frac{x^6}{6} - 2x^3 + x^2 - 3x + C.$

## 4. ЗАМІНА ЗМІННОЇ ПІД ЗНАКОМ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ.

Нехай потрібно обчислити $\int f(x)\,dx$ − основний інтеграл. При цьому основний інтеграл неможна обчислити безпосереднім інтегруванням.

Доволі часто основний інтеграл можна обчислити введенням нової змінної інтегрування під знак основного інтеграла. Або (що те ж саме) заміною змінної (підстановкою) в основному інтегралі.

Далі розглянемо два різних випадки заміни змінної в основному інтервалі.

***Перший випадок.***

Припустимо, що нова змінна інтегрування **t** зв'язана зі старою змінною інтегрування ***x*** за формулою $x = \varphi(t)$, тобто стара змінна інтегрування ***x*** є деякою функцією нової змінної інтегрування ***t***. Відносно функції $x = \varphi(t)$ припускається наступне:

а)функція $x = \varphi(t)$ взаємно однозначно і неперервно відображає проміжок $(t_1; t_2)$ на проміжок (a;b), на якому визначена функція $f(x)$;

б) існує на проміжку $(t_1; t_2)$ похідна $\varphi'(t) = \varphi'_t \neq 0$;

в) $t = \varphi^{-1}(x)$ − обернена функція для функції $x = \varphi(t)$

Утворюємо за допомогою основного інтеграла $\int f(x)\,dx$ допоміжний інтеграл $\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ з підінтегральною функцією $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ та змінною інтегрування *t*.

Нехай функція $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ має первісну $F(t)$ на проміжку $(t_1; t_2)$, тобто $(F(t))'_t = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на проміжку $(t_1; t_2)$. Тоді допоміжний інтеграл $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(t) + C$.

У такому випадку основний інтеграл $\int f(x)\,dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C$, тобто відповідь для основного інтегралу отримаємо з відповіді для допоміжного інтегралу заміною у відповіді останнього $t$ на $\varphi^{-1}(x)$.

Напишемо більш коротко схему заміни змінної $x = \varphi(t)$ в основному інтегралі $\int f(x)\,dx$:

*а)* $x = \varphi(t)$-заміна змінної в основному інтегралі;

б) утворюємо допоміжний інтеграл
$\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$;

в) обчислюємо допоміжний інтеграл $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(t) + C$;

г) $t = \varphi^{-1}(x)$ - функція, яка обернена до функції $x = \varphi(t)$;

д) основний інтеграл: $\int f(x)\,dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C$.

**Приклад .** Обчислити $\int \cos(3x-2)\,dx$.

*Розв'язок:*

$\int \cos(3x-2)\,dx$- основний інтеграл.

1) робимо заміну змінної $x = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}$;

2) утворюємо допоміжний інтеграл

$$\int \cos\left(3\left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\right) - 2\right) d\left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\right) = \int \cos t \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt;$$

3) Обчислимо допоміжний інтеграл $\frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t + C$;

4) розв'язуємо рівняння $x = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}$ відносно $t$:

$$3x = t + 2, t = 3x - 2 - \text{функція, обернена до функції } x = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}$$

5) основний інтеграл

$\int \cos(3x-2)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x-2) + C$.

На практиці вказаний процес обчислення $\int \cos(3x-2)dx$ буде оформлюватися так: $\int \cos(3x-2)\,dx = \left[\begin{matrix} x = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3},\ dx = \frac{1}{3}dt; \\ t = 3x - 2 \end{matrix}\right] =$
$\int \cos\left(3\left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\right) - 2\right)\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x-2) + C$.

***Другий випадок.***

Припустимо, що нова змінна інтегрування $\boldsymbol{z}$ зв'язана зі старою змінною інтегрування $\boldsymbol{x}$ за формулою

$z = \psi(x)$, тобто нова змінна інтегрування $\boldsymbol{z}$ є деякою функцією старої змінної інтегрування $\boldsymbol{x}$. Відносно функції $z = \psi(x)$ припускаємо наступне:

а) функція $z = \psi(x)$ неперервна на $[a; b]$, на якому визначена функція $f(x)$;

б) функція $z = \psi(x)$ відображає $[a; b]$ в $[z_1; z_2]$, який відмінний від однієї точки.

в) на $[a; b]$ існує похідна $\psi'(x) = \psi'_x(x)$.

Припустимо тепер, що вдалося якимось чином підінтегральний вираз $f(x)\,dx$ основного інтеграла $\int f(x)\,dx$ привести до виду $g(z)\,dz$, отже нехай $f(x)\,dx = g(z)\,dz$, де $z = \psi(x)$.

Тепер створимо допоміжний інтеграл $\int g(z)\,dz$ та припустимо, що функція $g(z)$

змінної z має первісну $F(z)$ на $[z_1; z_2]$, тобто $(F(z))'_z = g(z)$. Тоді допоміжний інтеграл $\int g(z)\,dz = F(z) + C$.

В даному випадку основний інтеграл $\int f(x)\,dx = F(\psi(x)) + C$, тобто відповідь для основного інтегралу виходить з відповіді для допоміжного інтегралу заміною в відповіді останнього z на $\psi(x)$.

Напишемо більш коротко схему заміни змінної виду $z = \psi(x)$ в основному інтегралі $\int f(x)\,dx$:

а) $z = \psi(x)$ – заміна змінної в основному інтегралі;

б) $f(x)\,dx = g(z)\,dz$;

в) утворимо допоміжний інтеграл $\int g(z)\,dz$;

г) обчислимо допоміжний інтеграл $\int g(z)\,dz = F(z) + C$;

д) основний інтеграл: $\int f(x)\,dx = F(\psi(x)) + C$.

**Приклад .** Обчислити $\int \cos(3x - 2)\,dx$.

*Розв'язок:* $\int \cos(3x - 2)\,dx$ – основний інтеграл

а) робимо заміну змінної $z = 3x - 2$;

б) оскільки $dz = \; 3z - 2 \;'_x dx = 3dx,$ то $dx = \frac{1}{3}dz$ та $f \;\; x \;\; dx =$

$\cos(3x - 2)\, dx = \frac{1}{3}\cos zdz = g \;\; z \;\; dz$ ;

в) утворимо допоміжний інтеграл $\; g \;\; z \;\; dz = \;\; \frac{1}{3}\cos zdz;$

г) обчислюємо допоміжний інтеграл $\; g \;\; z \;\; dz = \;\; \frac{1}{3}\cos zdz = \frac{1}{3}\sin z + C;$

д) основний інтеграл: $\; \cos \;\; 3x - 2 \;\; dx = \frac{1}{3}\sin \;\; 3x - 2 \;\; + C.$

На практиці тільки що описаний процес обчислення $\; \cos \;\; 3x - 2 \;\; dx$ оформлюється так:

$$\cos \;\; 3x - 2 \;\; dx = \begin{matrix} z = 3x - 2 \\ dz = 3dx, dx = \frac{1}{3}dz \end{matrix} \;\; = \;\; \cos z \frac{1}{3}dz = \frac{1}{3} \;\; \cos zdz =$$

$\frac{1}{3}\sin z + C = \frac{1}{3}\sin(3x - 20 + C.$

Змінну $z = \psi(x)$ в основному інтервалі $\; f \;\; x \;\; dx$ часто замінюють у спеціальному вигляді, який називають інтегруванням введенням під знак диференціалу.

Пояснимо це на прикладі.

**Приклад.** Обчислити $\; \cos(3x - 2)dx,$ інтегруючи введенням під знак диференціалу.

*Розв'язок:*

Заміняємо змінну $z = 3x - 2$. При даній заміні змінної інтеграл $\; \cos(3x - 2)dx$ перейде до $\; \cos zdx$. Останній інтеграл неможна обчислити, так як у ньому дві змінні інтегрування **z** і **x**.

Щоб в інтегралі $\; \cos zdx$ перетворити $dx$ у $dz$, замінимо $dx$ на $d \;\; 3x - 2 \;\; = dz$, тобто в $dx$ під знак $d$ диференціалу введемо замість **x** вираз $3x - 2 = z$. При цьому інтеграл $\; coszdx$ перетвориться на інтеграл, який легко обчислити $\; \cos zdz = \sin z + C$.

Однак, замінюючи $dx$ на $d(3x - 2)$, робимо помилку, так як $dx \neq d(3x - 2)$.

Насправді $d \;\; 3x - 2 \;\; = \;\; 3x - 2 \;\; dx = 3dx$ та $dx = \frac{1}{3}d \;\; 3x - 2 \;\; = \frac{1}{3}dz.$

Тому $\; \cos \;\; 3x - 2 \;\; = \frac{1}{3} \;\; \cos \;\; 3x - 2 \;\; d \;\; 3x - 2$ . Замінив під знаком останнього інтегралу скрізь $3x - 2$ на z , обчислюємо усно $\; \cos zdz =$

$sinz + C$. Заміняючи усно в $\sin z + C\ \ z$ на $3x - 2$ і враховуючи множник $\frac{1}{3}$, записуємо:

$$\cos\ 3x - 2\ dx = \frac{1}{3}\quad \cos\ 3x - 2\ \ d\ \ 3x - 2\ \ = \frac{1}{3}\sin\ 3x - 2\ \ + C.$$

Запис $\frac{1}{3}\quad \cos\ 3x - 2\ \ d\ \ 3x - 2$ назвемо проміжним.

Проміжний запис складається так:

а) вибираємо усно заміну змінної $z = \psi\ \ x$ в основному інтегралі;

б) замість $dx$ основного інтегралу записуємо $d\psi(x)$ в проміжний запис;

в) усно обчислюємо $d\psi\ \ x\ \ = \psi'_x\ \ x\ \ dx$. Якщо виявиться, що $d\psi\ \ x$ тільки числовим множником $\beta$ відрізняться від $dx$ , то заміна на $z = \psi\ \ x$ дуже вдала. В такому випадку в проміжний запис перед знаком $\int$ треба поставити множник $\frac{1}{\beta}$, корегуючи помилку яка виникнула при заміні $dx$ на $d\psi\ \ x$ .

Після складання проміжного запису замінюємо в ньому усюди усно $\psi\ \ z$ на $z$ та усно обчислюємо інтеграл вже зі змінною інтегрування $z$. Потім, в отриманій відповіді усно замінимо $z$ на $\psi\ \ x$ та записуємо результат обчислень основного інтеграла з урахуванням множника $\frac{1}{\beta}$ в проміжному записі.

**Приклади.** Обчислити інтеграли

$$\sin\ 2x + 5\ \ dx = \frac{1}{2}\quad \sin\ \overset{\psi\ x}{2x + 5}\ \ d\,(2x + 5) = -\frac{1}{2}cos\,\overset{\psi\ x}{(2x + 5)} + C.$$

$$\cos\ \ x + 8\ \ dx = \quad \cos\ \ \overset{\psi\ x}{x + 8}\ \ d\,\overset{\psi\ x}{(x + 8)} = \sin\ \ x + 8\ \ + C.$$

$$\cos\ \ x - 13\ \ dx = \quad \cos\ \ \overset{\psi\ x}{x - 13}\ \ d\,\overset{\psi\ x}{(x - 13)} = \sin\ \ x - 13\ \ + C.$$

*Зауваження.* На жаль, немає загальних правил вибору заміни змінної $x = \varphi\ \ t$ , або $z = \psi\ \ x$ для обчислення любого $\ \ f\ \ x\ \ dx$. Тому фактично всі обчислення невизначених інтегралів зводяться до слідуючого: розглядаються різні типи інтегралів та для кожного типу вчиться на пам'ять відповідна заміна змінної. Ця обставина, а також погане знання таблиці інтегралів надзвичайно ускладнять обчислення інтегралів. Студенту треба постійно пам'ятати, що в інтегруванні кожний наступний крок дається тільки після чіткого засвоєння усього попереднього матеріалу.

## 5. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ $(\boldsymbol{kx+b})^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{dx}$; $\boldsymbol{a^{kx+b}dx}$; $\mathbf{cos}\ \boldsymbol{kx+b}\ \boldsymbol{dx}$; $\mathbf{sin}\ \boldsymbol{kx+b}\ \boldsymbol{dx}$; $\boldsymbol{tg}\ \boldsymbol{kx+b}\ \boldsymbol{dx}$; $\boldsymbol{ctg}\ \boldsymbol{kx+b}\ \boldsymbol{dx}$; $\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{cos^2(kx+b)}}$; $\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{sin^2(kx+b)}}$; $\frac{\boldsymbol{dx}}{\mathbf{sin}(\boldsymbol{kx+b})}$; $\frac{\boldsymbol{dx}}{\mathbf{cos}(\boldsymbol{kx+b})}$

***<u>Правило.</u>*** Усі ці інтеграли обчислюються заміною змінної $z = kx + b$. Після цієї заміни одразу ж приходимо до табличних інтегралів (зі змінною інтегрування z).

*<u>Вимоги</u>:* а) інтегрування робити введенням під знак диференціалу;

б) обчислювати такі інтеграли усно, використовуючи табличні інтеграли.

**Приклади.**

1. $(x-3)^{100}dx = \quad x-3\ ^{100}d\ x-3\ = \frac{(x-3)^{101}}{101} + C.$

2. $\frac{dx}{(2x+5)^{12}} = \frac{1}{2}\ \ \frac{d(2x+5)}{(2x+5)^{12}} = -\frac{1}{22\ 2x+5\ ^{11}} + C.$

3. $\frac{dx}{6x-7} = \frac{1}{6}\ \ \frac{d(6x-7)}{6x-7} = \frac{1}{6}\ln\ 6x-7\ + C.$

4. $\frac{dx}{1-3x} = -\frac{1}{3}\ \ \frac{d\ 1-3x}{1-3x} = -\frac{1}{3}\ln\ 1-3x\ + C.$

5. $\frac{dx}{\overline{5x-3}} = \frac{1}{5}\ \ \frac{d\ 5x-3}{\overline{5x-3}} = \frac{2}{5}\ \ \overline{5x-3} + C.$

6. $\frac{dx}{\overline{8-7x}} = -\frac{1}{7}\ \ \frac{d\ 8-7x}{\overline{8-7x}} = -\frac{2}{7}\ \ \overline{8-7x} + C.$

7. $5^{2x-1}dx = \frac{1}{2}\ \ 5^{2x-1}d\ 2x-1\ = \frac{5^{2x-1}}{2\ln 5} + C.$

8. $e^{4x+5}dx = \frac{1}{4}\ \ e^{4x+5}\,d\ 4x+5\ = \frac{1}{4}e^{4x+5} + C.$

9. $e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\ \ e^{-3x}\,d\ -3x\ = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C.$

10. $e^{-x}dx = -\ \ e^{-x}\,d\ -x\ = -e^{-x} + C.$

11. $\cos\ 8x-9\ dx = \frac{1}{8}\ \ \cos\ 8x-9\ d\ 8x-9\ = \frac{1}{8}\sin\ 8x-9\ + C.$

12. $\sin\ 3x+13\ dx = \frac{1}{3}\ \ \sin\ 3x+13\ d\ 3x+13\ = -\frac{1}{3}\cos\ 3x-13\ + C.$

13. $\sin\ 5-6x\ \ dx=-\frac{1}{6}\ \ \sin\ 5-6x\ \ d\ 5-6x\ \ =\frac{1}{6}cos\,(5-6x)+C.$

14. $\frac{dx}{\cos^2\ 2x+9}=\frac{1}{2}\ \ \frac{d\ \ 2x+9}{\cos^2\ 2x+9}=\frac{1}{2}tg\ \ 2x+9\ \ +C.$

15. $\frac{dx}{\sin^2(8-3x)}=-\frac{1}{3}\ \ \frac{d(8-3x)}{\sin^2(8-3x)}=\frac{1}{3}ctg\ \ 8-3x\ \ +C.$

16. $tg\ \ 6x-2\ \ dx=\frac{1}{6}\ \ tg\ \ 6x-2\ \ d\ \ 6x-2\ \ =-\frac{1}{6}\ln\ \cos(6x-2)\ \ +C.$

17. $ctg\ \ 5-10x\ \ dx=-\frac{1}{10}\ \ ctg\ \ 5-10x\ \ d\ \ 5-10x\ \ =-\frac{1}{10}\ln\ \sin(5-10x)\ \ +C.$

18. $\frac{dx}{\sin(10+3x)}=\frac{1}{3}\ \ \frac{d(10+3x)}{\sin(10+3x)}=\frac{1}{3}\ln\ \ tg\frac{10+3x}{2}\ \ +C.$

Рекомендується мислено відтворити процес обчислення кожного з цих інтегралів.

## 6. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ $\boldsymbol{x\ \ kx^2+b\ \ ^{\alpha}dx}$

***Правило.*** Замінити змінну $z=kx^2+b$. В проміжному запису замість $xdx$ записати $d\ \ kx^2+b$ . Після такої заміни отримуємо табличні інтеграли (зі змінною інтегрування z).

*Вимоги:* а) інтегрування здійснювати шляхом введення під знак диференціалу;

б) обчислювати отримані інтеграли усно.

**Приклади**

$x(3x^2+2)^4\,dx=\frac{1}{6}\ \ \ 3x^2+2\ \ ^4d\ \ 3x^2+2\ \ =\frac{1}{6}\frac{3x^2+2\ \ ^5}{5}+C=\frac{3x^2+2\ \ ^5}{30}+C.$

$\frac{xdx}{2x^2+9}=\frac{1}{4}\ \ \frac{d(2x^2+9)}{2x^2+9}=\frac{1}{4}\ln\ \ 2x^2+9\ \ +C.$

$\frac{xdx}{x^2+3\ \ ^7}=\frac{1}{2}\ \ \frac{d\ \ x^2+3}{x^2+3\ \ ^7}=-\frac{1}{12\ \ x^2+3\ \ ^6}+C.$

$\frac{xdx}{\overline{5x^2-3}}=\frac{1}{10}\ \ \frac{d\ \ 5x^2+3}{\overline{5x^2-3}}=\frac{1}{5}\ \ \overline{5x^2+3}+C.$

$\frac{xdx}{\overline{6-11x^2}}=-\frac{1}{22}\ \ \frac{d\ \ 6-11x^2}{\overline{6-11x^2}}=-\frac{1}{11}\ \ \overline{6-11x^2}+C.$

Рекомендується мислено відтворити процес обчислення кожного з цих інтегралів.

## 7. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ $\frac{dx}{ax^2+m}$, $\frac{dx}{\sqrt{ax^2+m}}$, $\sqrt{ax^2+m}\,dx$

***Правило.*** Зробити заміну змінної

$$z = \begin{cases} \sqrt{a}x \text{ при } a > 0; \\ \sqrt{-a}x \text{ при } a < 0; \end{cases}$$

Після такої заміни отримуємо табличні інтеграли.

*Вимоги:* а) інтегрування здійснювати шляхом введення під знак диференціалу; б) ці інтеграли обчислювати усно.

*Зауваження.* При заміні змінної простіше спочатку вирішити, що прийняти за $z^2$, а потім вже вибирати z.

*Наприклад:*

*В* інтегралі $\frac{dx}{5+21x^2}$ за $z^2$ приймаємо $21x^2$ (тобто $z^2 = 21x^2$) тоді $z = \sqrt{21}x$.

*В* інтегралі $\frac{dx}{5-21x^2}$ за $z^2$ приймаємо $21x^2$ тоді $z = \sqrt{21}x$.

Тут в якості $z^2$ не можна брати $-21x^2$, так як рівність $z = -21x^2$ в загальному випадку неможлива: в ньому зліва стоїть не від'ємна величина, справа – не додатна.

**Приклади.** Обчислити інтеграли

$$\frac{dx}{5+21x^2} = \left[z = \sqrt{21}x\right] = \frac{1}{\sqrt{21}}\frac{d\left(\sqrt{21}x\right)}{5+\left(\sqrt{21}x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{21}}\frac{1}{\sqrt{5}}drctg\frac{\sqrt{21}x}{\sqrt{5}} + C.$$

$$\frac{dx}{8-13x^2} = \left[z = \sqrt{13}x\right] = \frac{1}{\sqrt{13}}\frac{d\left(\sqrt{13}x\right)}{8-\left(\sqrt{13}x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{13}}\frac{1}{2\sqrt{8}}\ln\left|\frac{\sqrt{8}+\sqrt{13}x}{\sqrt{8}-\sqrt{13}x}\right| + C.$$

$$\frac{dx}{24x^2-29} = \frac{1}{\sqrt{24}}\frac{d\left(\sqrt{24}x\right)}{\left(\sqrt{24}x\right)^2-29} = \frac{1}{2\sqrt{24}\sqrt{29}}\ln\left|\frac{\sqrt{29}-\sqrt{24}x}{\sqrt{29}+\sqrt{24}x}\right| + C.$$

$$\frac{dx}{\sqrt{17-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{d\left(\sqrt{5}x\right)}{\sqrt{17-\left(\sqrt{5}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{17}} + C.$$

$$\frac{dx}{\sqrt{45x^2+8}} = \frac{1}{\sqrt{45}}\frac{d(\sqrt{45}x)}{\sqrt{\left(\sqrt{45}x\right)^2+8}} = \frac{1}{\sqrt{45}}\ln\left|\sqrt{45}x + \sqrt{\left(\sqrt{45}x\right)^2+8}\right| + C =$$

$$\frac{1}{\sqrt{45}}\ln\left|\sqrt{45}x + \sqrt{45x^2+8}\right| + C.$$

$$\frac{dx}{\sqrt{24x^2-29}} = \frac{1}{\sqrt{24}}\frac{d(\sqrt{24}x)}{\sqrt{24x^2-29}} = \frac{1}{\sqrt{24}}\ln\left|\sqrt{24}x + \sqrt{24x^2-29}\right| + C.$$

$\int\sqrt{9-4x^2}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{9-(2x)^2}\,d(2x)=\frac{9}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+\frac{2x}{2}\sqrt{9-(2x)^2}+C=$
$\frac{9}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+x\sqrt{9-4x^2}+C.$

$\int\sqrt{5x^2+3}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\sqrt{(\sqrt{5}x)^2+3}\,d(\sqrt{5}x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2+3}\right|+\right.$
$\left.\frac{\sqrt{5}x}{2}\sqrt{5x^2+3}+C\right).$

$\int\sqrt{8x^2-6}dx=\frac{1}{\sqrt{8}}\int\sqrt{(\sqrt{8}x)^2-6}\,d(\sqrt{8}x)=\frac{1}{\sqrt{8}}\left(\frac{-6}{2}\ln\left|\sqrt{8}x+\sqrt{8x^2-6}\right|+\right.$
$\left.\frac{\sqrt{8}x}{2}\sqrt{8x^2-6}\right)+C.$

Рекомендується усно вивчити кожний з цих інтегралів.

## 8. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

$$\int\frac{dx}{a(x+l)^2+m},\qquad\int\frac{dx}{\sqrt{a(x+l)^2+m}},\qquad\int\sqrt{a(x+l)^2+m}\,dx$$

***Правило.*** Замінити змінну

$z=\begin{cases}\sqrt{a}\,(x+l) & \text{при } a>0;\\ \sqrt{a}\,(x+l) & \text{при } a<0;\end{cases}$

Після такої заміни отримуємо табличні інтеграли.

*Вимоги:* а) інтегрування здійснювати шляхом введення під знак диференціалу;

б) інтеграли обчислювати усно.

*Зауваження.* При заміні змінної з початку простіше вибрати $z^2$, а потім вже визначити $z$.

**Приклади.** Обчислити інтеграли

1. $\int\frac{dx}{5+12(x-3)^2}=\left|\begin{matrix}z^2=12(x-3)^2\\ z=\sqrt{12}(x-3)\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{12}}\int\frac{d[\sqrt{12}(x-3)]}{5+\left(\sqrt{12}(x-3)\right)^2}=$
$\frac{1}{\sqrt{12}\sqrt{5}}arctg\left(\frac{\sqrt{12}(x-3)}{\sqrt{5}}\right)+C.$

2.
$\int\frac{dx}{7-18(x+5)^2}=\left|\begin{matrix}z^2=18(x+5)^2\\ z=\sqrt{18}(x+5)\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{18}}\int\frac{d[\sqrt{18}(x+5)]}{7-\left(\sqrt{18}(x+5)\right)^2}=$
$\frac{1}{\sqrt{18}*2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{18}(x+5)}{\sqrt{7}-\sqrt{18}(x+5)}\right|+C.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{28-23\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{23}} \int \frac{d\left(\sqrt{23}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{28-\left(\sqrt{23}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{23}}\arcsin\frac{\sqrt{23}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{28}} + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{47\left(x+0{,}1\right)^2+35}} = \frac{1}{\sqrt{47}} \int \frac{d\left(\sqrt{47}\left(x+0{,}1\right)\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{47}\left(x+0{,}1\right)\right)^2+35}} = \frac{1}{\sqrt{47}}\ln\left|\sqrt{47}\left(x+0{,}1\right) + \right.$

$\left.\sqrt{47\left(x+0{,}1\right)^2+35}\right| + C.$

5. $\int \sqrt{15-6\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \sqrt{15-[\sqrt{6}\left(x+\frac{1}{3}\right)]^2}\,d\left(\sqrt{6}\left(x+\frac{1}{3}\right)\right) =$

$\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{15}{2}\arcsin\frac{\sqrt{6}\left(x+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{6}\left(x+\frac{1}{3}\right)}{2}\sqrt{15-6\left(x+\frac{1}{3}\right)^2} + C\right).$

6. $\int \sqrt{6\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+15}\,dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \sqrt{[\sqrt{6}\left(x+\frac{1}{3}\right)]^2+15}\,d[\sqrt{6}(x+\frac{1}{3})] =$

$\frac{1}{\sqrt{6}}(\frac{15}{2}\ln\left|\sqrt{6}\left(x+\frac{1}{3}\right) + \sqrt{6\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+15}\right| + \frac{\sqrt{6}(x+\frac{1}{3})}{2}\sqrt{6\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+15}) + C.$

Рекомендується усно обчислити кожен з цих інтегралів.

## 9. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

***Правило.*** Виділити повний квадрат у квадратного тричлена, тобто привести $ax^2+bx+c$ до виду $a\left(x+l\right)^2+m$.

Після виділення повного квадрату приходимо до інтегралу розд.8.

*Вимоги:* а) повний квадрат у квадратного тричлена виділяти письмово; б) після цього інтеграли обчислювати усно.

*Наприклад:*

Виділити повний квадрат у квадратних тричленів:

1) $3x^2-5x+1 = 3\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{25}{36}\right)+1-\frac{25}{12} = 3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{12}.$

*Пояснення:* із членів з $x^2$ та $x$ виносимо за дужки коефіцієнт при $x^2$ (число 3);

у цих дужках пишемо $x^2-\frac{5}{3}x+\cdots$;

Вільний член 1 переписуємо без змін. Коефіцієнт $\frac{5}{3}$ при $x$ в дужках усно ділимо на 2, отримуємо $\frac{5}{6}$, та в дужках замість многочлена пишемо квадрат числа $\frac{5}{6}$ тобто $\frac{25}{36}$. Вписане на місце многочлена число $\frac{25}{36}$ помножимо на число 3, яке стоїть перед $\left(x^2-\frac{5}{6}x+\frac{25}{36}\right)$, отримаємо $\frac{25}{12}$ - зайвий доданок; після до виразу $3\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{25}{36}\right)+1$ приписуємо $\frac{-25}{12}$ для винищування зайвого доданку;

$3\left(x^2-\frac{5}{3}x+\right.$

$\left.\frac{25}{36}\right)$ записуємо в вигляді $3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2$ та приписуємо сюди

результат віднімання з 1 числа $\frac{25}{12}$.

$$24x^2-x-3=4\left(x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{64}\right)-3-\frac{1}{16}=4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{49}{16}.$$

3) $-6x^2+x+5=-6\left(x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{144}\right)+5+\frac{1}{24}=-6\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{121}{24}.$

*Пояснення.* На місце многочлена в дужках вписуємо число $\frac{1}{144}$. Перед дужками стоїть множник -6. Тому зайвим доданком буде число $-6\cdot\frac{1}{144}=$ -$\frac{1}{24}$. Ліквідуємо зайвий доданок $\frac{-1}{24}$ приписуючи справа від числа 5 число $\frac{1}{24}$.

4) $1-x-x^2=-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+1+\frac{1}{4}=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2.$

**Приклади.**

$$\frac{dx}{5x^2-2x+6}=\left|\begin{array}{c}5x^2-2x+6=5\left(x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}\right)+6-\frac{1}{5}=\\=5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{29}{5}=\frac{29}{5}+5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2\end{array}\right|=$$

$$\frac{dx}{\frac{29}{5}+5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{d\left(\sqrt{5}\left(x-\frac{1}{5}\right)\right)}{\frac{29}{5}+\left(\sqrt{5}\left(x-\frac{1}{5}\right)\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{29}{5}}}arctg\frac{\sqrt{5}(x-\frac{1}{5})}{\sqrt{\frac{29}{5}}}+C.$$

Найбільш короткий запис при обчисленні цього інтегралу такий:

$$\frac{dx}{5x^2-2x+6}=\left|\begin{array}{c}5\left(x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}\right)+6-\frac{1}{5}\\=\frac{29}{5}+5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2\end{array}\right|=\;=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{\frac{29}{5}}}arctg\frac{\sqrt{5}\left(x-\frac{1}{5}\right)}{\sqrt{\frac{29}{5}}}+C.$$

$$\frac{dx}{4-3x-x^2} = \quad \begin{array}{l} -\left(-x^2+3x+\frac{9}{4}\right)+4+\frac{9}{4} = \\ = \frac{25}{4} - \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 \end{array}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{25}{4}}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{25}{4}}+\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\frac{25}{4}}-\left(x+\frac{3}{2}\right)}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{4+x}{1-x}\right| + C.$$

3. $\frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}} = \quad \begin{array}{l} 9\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)+2-1 = \\ = 9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+1 \end{array} \quad = \frac{1}{\sqrt{9}}\ln\left|\sqrt{9}\left(x+\frac{1}{3}\right)+\right.$

$\left.\sqrt{9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+1}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right| + C.$

4. $\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \quad \begin{array}{l} -\left(x^2+2x+1\right)+3+1 = \\ = 4-\left(x+1\right)^2 \end{array} \quad \arcsin\frac{x+1}{2} + C.$

## 10. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

$$\boldsymbol{\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx;\quad \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;\quad Ax+B\ \sqrt{ax^2+bx+c}dx;}$$
$$\boldsymbol{(Ax+B)\ \sqrt{ax^2+bx+c}dx}$$

Розглянемо таке питання: на що треба помножити вираз $(3x+5)$, щоб після відкриття дужок з *3x* вийшло *8x*?

Легко знайти число, на яке треба помножити вираз $(3x+5)$, щоб після розкриття дужок отримати просто *x*. Це число $\frac{1}{3}$. Тоді $(3x+5)$ треба помножити $\frac{8}{3}$, щоб після розкриття дужок з *3x* вийшло *8x*.

Аналогічно, вираз (2ax+b) треба помножити на $\frac{A}{2a}$, щоб після розкриття дужок з $2ax$ вийшло $Ax$.

Відмітимо, що після розкриття дужок у виразі $\frac{A}{2a}(2ax+b)$ крім $Ax$ з'явиться ще доданок $\frac{Ab}{2a}$.

Наступні приклади допоможуть краще засвоїти методи обчислення цих інтегралів.

**Приклади.**

$$z$$

$$\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \quad \frac{d\,(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} = \ln\ ax^2+bx+c\ \ + C.$$

$$z$$

$$\frac{2ax+b}{\overline{ax^2+bx+c}}dx = \quad \frac{d(ax^2+bx+c)}{\overline{ax^2+bx+c}} = 2\ \ \overline{ax^2+bx+c} + C.$$

$$\overline{ax^2+bx+c}\ \ 2ax+b\ \ dx = \quad \overline{ax^2+bx+c}\,d\quad \overline{ax^2+bx+c}\ \ =$$

$$z \qquad z$$

$$ax^2+bx+c\ ^{\frac{1}{2}}d\ \ ax^2+bx+c\ \ = \frac{ax^2+bx+c\ ^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2\ \ ax^2+bx+c\ ^{\frac{3}{2}}}{3} + \mathrm{C}.$$

Інтеграли, вказані в заголовку цього розділу, обчислюються за слідуючим правилом:

***<u>Правило</u>***

1) $\frac{1}{Ax}$ замінити на похідну від квадратного тричлена. Число **В** переписати без зміни.

2) записати зроблені припущення;

3) представити інтеграл у вигляді двох інтегралів.

*Наприклад:*

$$\frac{Ax+B}{\overline{ax^2+bx+c}}dx = \frac{\frac{A}{2a}\ \ 2ax+b\ \ +(B-\frac{Ab}{2a})}{\overline{ax^2+bx+c}}dx$$

$$= \frac{A}{2a}\quad \frac{(2ax+b)dx}{\overline{ax^2+bx+c}} + (B-\frac{Ab}{2a})\quad \frac{dx}{\overline{ax^2+bx+c}}$$

Обчислення інтеграла типу $\frac{(2ax+b)dx}{\overline{ax^2+bx+c}}$ і обчислення $\frac{dx}{\overline{ax^2+bx+c}}$ розглядалось раніше.

*Пояснення.* Підінтегральний вираз у проміжному записі приймає послідовно такий вигляд:

$$\frac{2ax+b\ \ +B}{\overline{ax^2+bx+c}}dx;\ \frac{\frac{A}{2a}\ 2ax+b\ \ +B}{\overline{ax^2+bx+c}}dx;\ \frac{\frac{A}{2a}\ 2ax+b\ \ +B-\frac{Ab}{2a}}{\overline{ax^2+bx+c}}dx;\ \frac{\frac{A}{2a}\ 2ax+b\ \ +(B-\frac{Ab}{2a})}{\overline{ax^2+bx+c}}dx\ .$$

**Приклади.** Обчислити наступні інтеграли.

1. $\frac{3x+4}{5x^2+6x+18}dx = \frac{\frac{3}{10}\ 10x+6\ +(4-\frac{9}{5})}{5x^2+6x+18} = \frac{3}{10}\ \frac{(10x+6)dx}{5x^2+6x+18} + \frac{11}{5}\ \frac{dx}{5x^2+6x+18} =$

Для другого інтегралу:

$5\ \ x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{9}{25}\ \ + 18 - \frac{9}{5} = \ \ =$

$= \frac{81}{5} + 5\ \ x + \frac{3}{5}\ ^2$

$\frac{3}{10}\ln\ 5x^2 + 6x + 18\ + \frac{11}{5}\frac{1}{\overline{5}}\frac{1}{\frac{\overline{81}}{5}}arctg\ \frac{\overline{5}(x+\frac{3}{5})}{\frac{\overline{81}}{5}}\ + C =$

$= \frac{3}{10}\ln\ 5x^2 + 6x + 18\ + \frac{11}{45}arctg\ \frac{5x+3}{9} + C.$

2. $\frac{2-5x}{\overline{4x^2+9x+1}}dx = \frac{-\frac{5}{8}\ 8x-9\ +2+\frac{45}{8}}{\overline{4x^2+9x+1}}dx = -\frac{5}{8}\ \frac{(8x+9)dx}{\overline{4x^2+9x+1}} + \frac{61}{8}\ \frac{dx}{\overline{4x^2+9x+1}} =$

Для другого інтегралу:

$4\ \ x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{81}{64}\ \ + 1 - \frac{81}{18} = \ \ = -\frac{5}{8}2\ \ \overline{4x^2+9x+1} + \frac{61}{8}\frac{1}{2}\ln\ \ 2\ \ x + \frac{9}{8}\ \ +$

$= 41\ \ x + \frac{9}{8}\ ^2 - \frac{65}{16}$

$\overline{4\ \ x + \frac{9}{8}\ ^2 - \frac{65}{16}}\ + C =$

$-\frac{5}{4}\ \ \overline{4x^2+9x+1} + \frac{61}{16}\ln\ \ 2x + \frac{9}{4} + \ \ \overline{4x^2+9x+1}\ \ + C.$

3. $\frac{5x+4}{\overline{x-x^2}}dx = \frac{-\frac{5}{2}\ 1-2x\ +4+\frac{5}{2}}{\overline{x-x^2}}dx = -\frac{5}{2}\ \frac{1-2x}{\overline{x-x^2}}dx - \frac{13}{2}\ \frac{dx}{\overline{x-x^2}} =$

для другого інтегралу

$-\ \ x^2 - x + \frac{1}{4}\ \ + \frac{1}{4} = \ \ = -5\ \ \overline{x-x^2} + \frac{13}{2}\arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\overline{1}}{4}} + C =$

$= \frac{1}{4} - \ \ x - \frac{1}{2}\ ^2$

$-5\ \ \overline{x-x^2} +$

$+\frac{13}{2}\arcsin\ \ 2x-1\ \ + C$

4. $4x-1\ \ \overline{x^2+2x-1}dx = \ \ 2\ \ 2x+2\ \ -1-4\ \ \overline{x^2+2x-1}dx =$

$2\ \ \ \overline{x^2+2x-1}\ \ 2x+2\ \ dx -$

Для другого інтегралу

$5\ \ \ \overline{x^2+2x-1}dx = \ \ x^2+2x+1\ \ -1-1 =$

$= \ \ x+1\ ^2 - 2$

$= 2\frac{x^2+2x-1\ ^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$

$-5(-\frac{2}{2}\ln\ \ x+1 + \ \ \overline{x+1\ ^2 - 2}\ \ + \frac{x+1}{2}\ \ \overline{x+1\ ^2 - 2} + C$

$$=\frac{4}{3}\left(x^2+2x-1\right)^{\frac{3}{2}} + 5\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right| - \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}+C.$$

Розглянемо часткові випадки інтегралів з цього розділу:

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+c}dx,\quad \int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+c}}dx\ ,\quad \int(Ax+B)\sqrt{ax^2+c}\,dx.$$

Оскільки $(ax^2+c)'=2ax$ тільки числовим множником відрізняється від $Ax$, то ці інтеграли треба обчислювати так: уявити одразу кожен з них у вигляді суми двох інтегралів. Обчислення першого інтеграла в даній сумі розглянуто у розд.6, а другого в розд. 7.

**Приклади.**

1. $\int\frac{3x+4}{2x+5}dx = 3\int\frac{xdx}{2x^2+5}+4\int\frac{dx}{2x^2+5}=\frac{3}{4}\int\frac{d\overset{z}{(2x^2+5)}}{2x^2+5}+\frac{4}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\overset{z}{\sqrt{2}x})}{5+\left(\sqrt{2}x\right)^2}=$
$\frac{3}{4}\ln\left(2x^2+5\right)+\frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{5}}arctg\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}+C.$

2. $\int\frac{5x-4}{x^2+3}dx=5\int\frac{xdx}{x^3+3}-4\int\frac{dx}{x^2+3}=\frac{5}{2}\ln\left(x^2+3\right)-\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$

3. $\int\frac{7x-8}{\sqrt{3-2x^2}}dx=7\int\frac{xdx}{\sqrt{3-2x^2}}+8\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}=-\frac{7}{4}\int\frac{d\left(3-2x^2\right)}{\sqrt{3-2x^2}}+\frac{8}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{3-\left(\sqrt{2}x\right)^2}}=$
$-\frac{7}{2}\sqrt{3-2x^2}+\frac{8}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}+C.$

4. $\int(5x-11)\sqrt{2x^2+4}\,dx=5\int x\sqrt{2x^2+4}\,dx-11\int\sqrt{2x^2+4}\,dx=$
$\frac{5}{4}\int\left(2x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}d\left(2x^2+4\right)-\frac{11}{\sqrt{2}}\int\sqrt{\left(\sqrt{2}x\right)^2+4}\,d\left(\sqrt{2}x\right)$

$$=\frac{5}{4}\frac{\left(2x^2+4\right)^2}{\frac{3}{4}}-\frac{11}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{2}\ln\left|\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+4}\right|+\frac{\sqrt{2}x}{2}\sqrt{2x^2+4}\right)+C=$$

$$=\frac{5}{6}\left(2x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{22}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+4}\right|-\frac{11}{2}x\sqrt{2x^2+4}+C.$$

# 11. ФОРМУЛИ ІНТЕГРУВАННЯ ПО ЧАСТИНАМ ДЛЯ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Нехай $u, v$ –функції змінної x, які мають похідні $u', v'$. Тоді для невизначеного інтеграла справедлива формула інтегрування по частинам:

$$\int udv = uv + C - \int vdu.$$

Включимо константу C в інтеграл $\int vdu$, запишемо більш коротко:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

*Зауваження:* 1. Формула інтегрування по частинам використовується часто при обчисленні інтеграла виду $\int f(x)g(x)dx$ від похідної двох функцій $f(x), g(x)$.

2. В інтегралі $\int f(x)g(x)dx$ одну з функцій треба прийняти за u, а другу разом з множником dx прийняти за dv.

3. Якщо в інтегралі $\int f(x)g(x)dx$ приймемо за u , наприклад $f(x)$, тоді

$dv = g(x)dx$.

4. Якщо $dv = g(x)dx$, то для знаходження v треба почлено інтегрувати рівність $dv = g(x)dx$: $\int dv = \int g(x)dx$. Оскільки $\int dv = v + C$, то $v + C = \int g(x)dx$.

Тоді $v = \int g(x)dx - C$. Включаємо $-C$ в інтегралі $\int g(x)dx$, напишемо більш коротко: $v = \int g(x)dx$. Для інтегрування по частинам достатньо мати у розпорядженні тільки одну з функцій $v = \int g(x)dx$. Тому після обчислення $\int g(x)dx$ відкидають константу інтегрування й приймають за v те , що залишилось. Наприклад, якщо $dv = x^2dx$, то $v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C$. Відкидаючи C, приймаємо $v = \frac{x^3}{3}$.

5. При використанні формули інтегрування по частинам, треба правильно вибрати функцію u. Вибір u треба робити за виглядом підінтегральної функції.

| | Підінтегральна функція | Функція $u$ |
|---|---|---|
| 1 | Добуток многочлена і тригонометричної функції | Многочлен |
| 2 | Добуток многочлена і показникової функції | Многочлен |
| 3 | Добуток многочлена і логарифмічної функції | Логарифмічна функція |
| 4 | Добуток степеневої функції і логарифмічної функції | Логарифмічна функція |
| 5 | Добуток показникової функції і тригонометричної функції | Формула інтегрування по частинам використовується двічі. Обидва рази за u брати або тільки показникову або тригонометричну функцію. |
| 6 | Підінтегральна функція містить обернену тригонометричну функцію | Обернена тригонометрична функція |

**<u>Приклади.</u>**

1. $$xe^x dx = \begin{array}{c} u = x, dv = xdx; \\ du = dx, v = \quad e^x dx = e^x \end{array}$$

$$= xe^x - \quad e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Стрілки вказують напрямок ходу $u \to v \to du$.

Невірне рішення цього прикладу:

$$xe^x dx = \begin{array}{c} u = e^x, dv = xdx; \\ du = e^x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} = \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{2} \quad x^2 e^x dx.$$

Тут від вихідного інтеграла $xe^x dx$ після використання формули інтегрування по частинам прийшли до інтегралу $x^2 e^x dx$, який є більш складним ніж вихідний. Відбулося це по причині невдалого вибору u.

2. $x^5 \ln x \, dx = \begin{matrix} u = \ln x, \; dv = x^5 dx; \\ du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^6}{6} \end{matrix} = \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{x^6}{6} \frac{dx}{x} = \frac{x^6}{6} \ln x -$

$\frac{1}{6} \; x^5 dx = \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{1}{36} x^6 + C.$

$$3. \quad \ln x \, dx = \quad x \ln x \, dx = \begin{matrix} u = \ln x, dv = dx; \\ du = \frac{dx}{x}, v = x \end{matrix}$$

$$= x ln\, x - \quad dx = x \ln x - x + C \, .$$

4. $x^2 - 3x + 5 \;\; \sin x dx = \begin{matrix} u = x^2 - 3x + 5, dv = \sin x dx \, , \\ du = \;\; 2x - 3 \;\; dx, v = -\cos x \end{matrix} =$

К останньому інтегралу

$- \; x^2 - 3x + 5 \;\; \cos x + \quad 2x - 3 \;\; \cos x dx \;\; \begin{matrix} u = 2x - 3, dv = \cos x dx; \\ du = 2dx, v = sinx \end{matrix} \;\; =$

$- \; x^2 - 3x + 5 \;\; \cos x + \;\; 2x - 3 \;\; \sin x - 2 \quad \sin x \, dx \;\; = - \; x^2 - 3x +$
$5 \;\; \cos x + \;\; 2x - 3 \;\; \sin x + 2 \cos x + C.$

5. $\frac{arccos}{\overline{x+1}} dx = \begin{matrix} u = \arccos x \, , dv = \frac{dx}{\overline{x-1}} \\ du = -\frac{dx}{\overline{1-x^2}}, v = 2 \;\; \overline{x+1} \end{matrix} = 2 \;\; \overline{x+1} \arccos x +$

$2 \;\; \frac{\overline{x+1}}{\overline{1-x^2}} dx = 2 \;\; \overline{x+1} \arccos x + 2 \quad \frac{dx}{\overline{1-x}} = 2 \;\; \overline{x+1} \arccos x -$
$4 \;\; \overline{1-x} + C.$

6. $arctgxdx = \begin{matrix} u = arctgx, dv = dx; \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, v = x \end{matrix} = xarctgx - \quad \frac{xdx}{1+x^2} =$

$xarctgx - \frac{1}{2} \quad \frac{d \;\; 1+x^2}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2} \ln \;\; 1 + x^2 \;\; + C.$

7.

$$e^x \sin x \, dx = \begin{matrix} u = e^x, dv = sinx \, dx; \\ du = e^x, v = -\cos x \end{matrix} = -e^x \cos x + \quad e^x \cos x dx$$

Для останнього інтеграла

$$= \quad \begin{matrix} u = e^x, dv = \cos x \, dx; \\ du = e^x dx, v = \sin x \end{matrix}$$

$$= -e^x \cos x + (e^x \sin x - \quad e^x \sin x \, dx)$$

Отже, $\quad e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \quad e^x \sin x \, dx.$

Отримуємо алгебраїчну рівність відносно невідомого $\quad e^x \sin x \, dx$. З нього знаходимо: $2 \quad e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x; \Rightarrow$

$$e^x \sin x\, dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2}.$$

Відмітимо слідуючи обставини:

а) при розв'язанні цього прикладу двічі використовувалася формула інтегрування по частинам. Так як перший раз за u прийняли $e^x$ то і другий раз треба за u приймати $e^x$. Якщо б перший раз за u прийняли би тригонометричну функцію sin x, то в другий раз за u треба було приймати теж тригонометричну функцію cos x;

б) в відповіді відсутня константа інтегрування С, хоча інтеграл обчислювався на перший погляд вірно. Пояснити відсутність С можна, наприклад так: формула інтегрування по частинам використовувалася в скороченому вигляді : $udv = uv - \quad vdu$. В повному ж вигляді вона така: $udv = uv + C - \quad vdu$. Тому при розв'язанні прикладу підкреслений вираз треба було записати більш повно так:

$$-e^x \cos x + C + \quad e^x \sin x - \quad e^x \sin x dx \ .$$

Тоді $e^x \sin x = -e^x \cos x + e^x \sin x + C - \quad e^x \sin x\, dx$;

$$2 \quad e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + C;$$

$$e^x \sin x\, dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C,$$

Де $\frac{C}{2}$ знову попозначаємо буквою С.

Неправильне розв'язання прикладу 6.

$$e^x \sin x\, dx = \begin{matrix} u = e^x, dv = \sin x\, dx; \\ du = e^x dx, b = -\cos x \end{matrix} = -e^x \cos x + \quad e^x \cos x\, dx =$$

До останнього інтеграла

$$\begin{matrix} u = \cos x, dv = e^x dx; \\ du = -\sin x\, dx, v = e^x \end{matrix} \quad = -e^x \cos x + (e^x \cos x + \quad e^x \sin x\, dx)$$

$e^x \sin x \ dx = -e^x \cos x + e^x \cos x \quad e^x \sin x \ dx$; тобто $e^x \sin x \ dx = e^x \sin x \ dx$

Встановили, що $e^x \sin x \ dx$ дорівнює самому собі, але встановити чому він дорівнює не вдалося.

Це вийшло тому що, перший раз за u прийняли показникову функцію, а другий – тригонометричну. Вийшла невизначеність в виборі u.

## 12. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА $\frac{dx}{x^2+m\ ^n} = I_n$

Розглянемо $I_n = \quad \frac{dx}{x^2+m\ ^n}$ , де $m \neq 0$, n- натуральне число.

*Наприклад*:

$$I_1 = \quad \frac{dx}{x^2+m\ ^1} = \quad \frac{dx}{x^2+m};\ I_2 = \quad \frac{dx}{x^2+m\ ^2};\ I_3 = \quad \frac{dx}{x^2+m\ ^3};\ I_{n+1} = \quad \frac{dx}{x^2+m\ ^{n+1}}$$

*Зауваження.* При m=0 $I_n$- табличний інтеграл:

$$I_n \quad \frac{dx}{x^2+0\ ^n} = \quad \frac{dx}{x^{2n}} = -\frac{1}{2n-1\ \ x^{2n-1}} + C.$$

Відмітимо, що $I_1$ – табличний інтеграл:

а) при $m > 0$ $I_1 = \quad \frac{dx}{x^2+m} = \frac{1}{\overline{m}} arctg \frac{x}{\overline{m}} + C$

б) при $m < 0$ $I_1 = \quad \frac{dx}{x^2+m} = \quad \frac{dx}{x^2-(-m)} = \frac{1}{2\ \ \overline{-m}} \ln \quad \frac{\overline{-m}-x}{\overline{-m}+x} + C$ так як $-m > 0$

В припущенні $n \geq 2$ виведемо формулу, за якої $I_n$ виражається через $I_{n-1}$:

$$I_n = \frac{dx}{x^2+m\ ^n} = \frac{1}{m} \quad \frac{x^2+m\ \ -x^2}{x^2+m\ ^n} dx = \frac{1}{m} I_{n-1} - \frac{1}{m} \quad \frac{x^2 dx}{x^2+m\ ^n} =$$

До останнього інтегралу використовуємо формулу інтегрування по частинам

$$= \quad u = x, dv = \frac{xdx}{x^2+m\ ^n};$$

$$du = dx, v = \quad \frac{xdx}{x^2+m\ ^n} = \frac{1}{2} \quad \frac{d\ \ x^2+m}{x^2+m\ ^n} = -\frac{1}{2\ \ n-1\ \ \ x^2+m\ ^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{m} I_{n-1} - \frac{1}{m} \quad -\frac{x}{2\ \ n-1\ \ \ x^2+m\ ^{n-1}} + \frac{1}{2\ \ n-1} \quad \frac{dx}{x^2+m\ ^{n-1}} = \frac{1}{m} I_{n-1} +$$

$$+\frac{x}{2m\ \ n-1\ \ \ x^2+m\ ^{n-1}} - \frac{1}{2m\ \ n-1} I_{n-1} = \frac{x}{2m\ \ n-1\ \ \ x^2+m\ ^{n-1}} +$$

$$+\frac{2n-3}{2m\ \ n-1} I_{n-1}.$$

Таким чином, для

$I_n = \quad \frac{dx}{x^2+m\;^{n}}$ при $n \geq 2$:

$I_n = \frac{x}{2m\; n-1\;\; x^2+m\;^{n-1}} + \frac{2n-3}{2m\; n-1} I_{n-1}.$

**<u>Приклади.</u>**

1. $\frac{dx}{x^2+5\;^{3}} I_3 = \quad$ за формулою при $n = 3, m\; = 5\; = \frac{x}{20\; x^2+5\;^{3-1}} +$

$\frac{6-3}{20} I_{3-1} = \frac{x}{20\; x^2+5\;^{2}} + \frac{3}{20} I_2 = \; I_2 = \begin{array}{c} \frac{dx}{x^2+5\;^{2}} \text{ використовуємо} \\ \text{формулу при } n = 2, m\; = 5 \end{array} =$

$\frac{x}{20\; x^2+5\;^{2}} + \frac{3}{20}$

$\frac{x}{2*5\; 2-1\;\; x^2+5\;^{2-1}} + \frac{2*2-3}{2*5(2-1)} I_{2-1} \;\; = \frac{x}{20\; x^2+5\;^{2}} + \frac{3x}{200(x^2+5)} + \frac{3}{200} I_1 =$

$= \begin{array}{c} I_1 = \quad \frac{dx}{x^2+5\;^{1}} = \quad \frac{dx}{5+x^2} \\ \text{табличний інтеграл} \end{array} = \frac{x}{20\; x^2+5\;^{2}} + \frac{3x}{200(x^2+5)} + \frac{3}{200\;\; 5} arctg \frac{x}{5} + C.$

2. $\frac{dx}{x^2-6\;^{2}} = I_2 = \begin{array}{c} \text{формула} \\ \text{при } n = 2 \\ m = 6 \end{array} = \frac{x}{2\; -6\;\; x^2-6\;^{2-1}} + \frac{2*2-3}{2(-6)} I_1 = -\frac{x}{12\; x^2-6} -$

$\frac{1}{12} I_1 =$

$= \begin{array}{c} I_1 = \quad \frac{dx}{x^2-6\;^{1}} = \quad \frac{dx}{x^2-6} \\ \text{табличний інтеграл} \end{array} = \frac{-x}{12(x^2-6)} - \frac{1}{24\;\; \overline{6}} \ln \; \frac{\overline{6}-x}{\overline{6}+x} \; + C.$

*Зауваження.* В посібниках розглядається $I_n$ при $m = a^2 > 0$. Тут дозволяється випадок $m < 0\;\; m = -a^2\;\;$.

## 13. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ $\frac{dx}{ax^2+bx+c\;^{n}}, \quad \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c\;^{n}} dx$

Припускається, що n-натуральне число. Частинні випадки цих інтегралів при n=1 розглядані в розд.9,10.

Обчислення $\frac{dx}{ax^2+bx+c\;^{n}}$ здійснюється наступним чином :

а) виділяють у квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ повний квадрат, тобто приводять $ax^2 + bx + c$ до вигляду $a\;\; x + l\;\;^{2} + m$;

б) заміняє змінну

$$z = \begin{array}{l} \overline{a}\;\; x + l\;\; , a > 0; \\ \overline{-a}\;\; x + l\;\; , a < 0 \end{array}$$

та знаходять значення $I_n$ зі змінною інтегрування z.

**Приклади.**

1. $$\frac{dx}{5x^2+x+2\ ^2} = \quad \begin{matrix} 5\ \ x^2-\frac{1}{5}+\frac{1}{100}\ \ +2-\frac{1}{20}=5\ \ x-\frac{1}{10}\ ^2+\frac{39}{20}; \\ z=\sqrt{5}\ \ x-\frac{1}{10}\ \ ,dz=\sqrt{5}dx, dx=\frac{1}{\sqrt{5}}dz; \\ 5x^2-x-2=z^2+\frac{39}{20} \end{matrix} \quad =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\quad\frac{dz}{z^2+\frac{39}{20}\ ^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{z}{\frac{39}{10}(z^2+\frac{39}{20})}+\frac{\frac{1}{39}}{10}\quad\frac{dz}{z^2+\frac{39}{20}}$$

$$=\frac{10z}{39\sqrt{5}(z^2+\frac{39}{20})}+\frac{10}{39\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{\frac{39}{20}}}arctg\frac{z}{\sqrt{\frac{39}{20}}}+C=$$

$$=\frac{10z}{39\sqrt{5}\ \ z^2+\frac{39}{20}}+\frac{20}{39\sqrt{39}}arctg\frac{2\sqrt{5}z}{\sqrt{39}}+C=$$

$$=\frac{10\sqrt{5}\ \ x-\frac{1}{10}}{39\sqrt{5}\ 5x^2-x+2}+\frac{20}{39\sqrt{39}}arctg\frac{2\sqrt{5}*\sqrt{5}\ \ x-\frac{1}{10}}{\sqrt{39}}+\mathrm{C}$$

$$==\frac{10x-1}{39\ 5x^2-x+2}+\frac{20}{39\sqrt{39}}arctg\frac{2\sqrt{5}*\sqrt{5}\ \ x-\frac{1}{10}}{\sqrt{39}}+C=$$

$$=\frac{10x-1}{39\ 5x^2-x+2}+\frac{20}{39\sqrt{39}}arctg\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+C\ .$$

2.

$$\frac{dx}{3x-x^2-2\ ^2}=\quad\frac{dx}{x^2-3x+2\ ^2}=$$

$$= \quad \begin{matrix} x^2-3x+\frac{9}{4}\ \ +2-\frac{9}{4}=\ \ x-\frac{3}{2}\ ^2\ -\frac{1}{4}; \\ z=x-\frac{3}{2}, dz=dx; \\ x^2-3x+2=z^2-\frac{1}{4} \end{matrix} \quad = \quad \frac{dz}{z^2-\frac{1}{4}\ ^2}=$$

$$=\frac{z}{2\ \ -\frac{1}{4}\quad 2-1\quad z^2-\frac{1}{4}\ ^{2-1}}+\frac{2*2-3}{2\ \ -\frac{1}{4}\quad 2-1}\quad\frac{dz}{z^2-\frac{1}{4}\ ^2}=$$

$$= \frac{-2z}{z^2-\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln \frac{\frac{1}{2}-z}{\frac{1}{2}+z} + C = \frac{-2z}{z^2-\frac{1}{4}} - 2\ln \frac{1-2z}{1+2z} + C = -\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x^2-3x+2} -$$

$$2\ln \frac{1-2(x-\frac{3}{2})}{1+2(x-\frac{3}{2})} + C =$$

$$= -\frac{2x-3}{x^2-3x+2} - 2\ln \frac{2-x}{x-1} + C.$$

Обчислення $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\boldsymbol{dx}$ при $n \geq 2$ відбувається так само, що і $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\boldsymbol{dx}$ (розд.10):

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

$$= \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + (B-\frac{Ab}{2a})}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \frac{A}{2a}\frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^n} +$$

$$+(B-\frac{Ab}{2a})\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

Далі маємо:

$$a)\quad \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{d\overbrace{(ax^2+bx+c)}^{z}}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$= -\frac{1}{(n-1)\underbrace{(ax^2+bx+c)}_{z}{}^{n-1}} + C.$$

б) $\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ розглянуто на початку цього розділу.

**Приклади.**

1.

$$\frac{4x+5}{(x^2+x+3)^2}dx = \frac{2(2x+1)+5-2}{(x^2+x+3)^2}dx = 2\frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+3)^2} +$$

$$+3\frac{dx}{(x^2+x+3)^2} =$$

Залишаємо місце для майбутньої відповіді і виконуємо допоміжні обчислення

$$= -\frac{2}{x^2+x+3} + \frac{6x+3}{11(x^2+x+3)} +$$

$$+\frac{12}{11\sqrt{11}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{11}} + C.$$

Допоміжні обчислення:

а)

$$\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+3\ ^2} = \frac{dx\ \ x^2+x+3}{x^2+x+3\ ^2} = -\frac{1}{x^2+x+3} + C;$$

б)

$$x^2 + x + \frac{1}{4}\ \ + 3 - \frac{1}{4} = \ \ x + \frac{1}{2}\ ^2 + \frac{11}{4};$$

$$\frac{dx}{x^2+x+3\ ^2} = \qquad z = x + \frac{1}{2}, dz = dx;$$

$$x^2 + x + 3 = z^2 + \frac{11}{4}$$

$$= \quad \frac{dz}{(z^2+\frac{11}{4})^2} =$$

$$= \frac{z}{\frac{11}{2}(z^2+\frac{11}{4})} + \frac{1}{\frac{11}{2}} \quad \frac{dz}{z^2+\frac{11}{4}} = \frac{2z}{11(z^2+\frac{11}{4})} + \frac{2}{11}\frac{1}{\overline{\frac{11}{4}}} arctg \frac{z}{\overline{\frac{11}{4}}} + C =$$

$$= \frac{2z}{11(z^2+\frac{11}{4})} + \frac{4}{11\ \ \overline{11}} arctg \frac{2z}{\overline{11}} + C = \frac{2(x+\frac{1}{2})}{11(x^2+x+3)} +$$

$$+ \frac{4}{11\ \ \overline{11}} arctg \frac{2(x+\frac{1}{2})}{\overline{11}} + C = \frac{2x+1}{11(x^2+x+3)} + \frac{4}{11\ \ \overline{11}} arctg \frac{2x+1}{\overline{11}} + C.$$

При обчисленні

$\frac{\boldsymbol{Ax+B}}{(\boldsymbol{ax^2+c})^{\boldsymbol{n}}}\boldsymbol{dx}$ більш раціональна така схема:

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+c)^n}dx = A \quad \frac{xdx}{(ax^2+c)^n} + B \quad \frac{dx}{(ax^2+c)^n}.$$

**<u>Приклад</u>.**

$$\frac{8x-3}{(2x^2+9)^2}dx = 8 \quad \frac{xdx}{(2x^2+9)^2} - 3 \quad \frac{dx}{(2x^2+9)^2} = \frac{8}{4} \quad \frac{\overset{z}{d(2x^2+9)}}{\underset{z}{(2x^2+9)^2}} -$$

$$-3 \quad \frac{dx}{(2x^2+9)^2} = -\frac{2}{2x^2+9} - 3 \quad \frac{dx}{(2x^2+9)^2} =$$

$$= \begin{matrix} z = \ \overline{2}x, dz = \ \overline{2}dx, dx = \frac{1}{\overline{2}}dz \\ 2x^2+9 = z^2+9 \end{matrix} = -\frac{2}{2x^2+9} - \frac{3}{\overline{2}} \quad \frac{dz}{(2z^2+9)^2} =$$

$$= -\frac{2}{2x^2+9} - \frac{3}{\overline{2}} \ \frac{z}{18 \ z^2+9} + \frac{1}{18}\frac{1}{3} arctg \frac{z}{3} \ + C$$

$$= -\frac{2}{2x^2+9} - \frac{3 \ \overline{2}x}{18 \ \overline{2} \ 2x^2+9} -$$

$$-\frac{3}{18 \cdot 3 \cdot \ \overline{2}} arctg \frac{\overline{2}x}{3} + C = -\frac{2}{2x^2+9} - \frac{x}{6 \ 2x^2+9} - \frac{1}{18 \ \overline{2}} arctg \frac{\overline{2}x}{3} + C.$$

## 14. ВІДОМОСТІ З АГЛЕБРИ ТА ТРИГОНОМЕТРІЇ, ЯКІ НЕОБХІДНІ ДЛЯ ПОДАЛЬШОГО ІНТЕГРУВАННЯ

Будь-яке число, яке не рівне 0, вважається многочленом нульового степеня. Число 0 теж є многочленом, степінь якого довільна.

В таблиці вказана степінь многочлена (змінної х) і його загальний вигляд.

| Степінь многочлена | Загальний вигляд многочлена |
|---|---|
| 0 | $A$ |
| 1 | $Ax + B$ |
| 2 | $Ax^2 + Bx + C$ |
| 3 | $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ |
| 4 | $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ |
| □ | □ |

II. Два многочлена змінної $x$ є рівними тоді і тільки тоді, коли рівні між собою всі їх коефіцієнти при однакових степенях х. Припускається при цьому, що в кожному многочлені будь-які два його сусідніх члена з'єднані знаком "+".

<u>**Приклад**</u>**.** Дані два рівних многочлена:

$$ax^4 - bx^2 + \ c - 1 \ x^2 + \ c - d \ x - k = x^2 - x + 3.$$

*Знайти:* $a,b,c,d,k$.

*Розв'язок:* Многочлен $x^2 - x + 3$ запишемо в вигляді многочлена четвертої степені:

$0x^4 + 0x^3 + x^2 - x + 3$ і перепишемо умову так:

$ax^4 + \ -b\ x^3 + \ c - 1\ x^2 + \ c - d\ x + \ -k\ = 0x^4 + 0x^3 + 1x^2 + \ -1\ x + 3$

Рівність коефіцієнтів при однакових степенях $x$ оформимо таким записом:

$$\begin{array}{c|c} x^4 & a = 0. \\ x^3 & -b = 0. \\ x^2 & c - 1 = 1. \\ x^1 & c - d = -1. \\ x^0 & -k = 3. \end{array}$$

<u>*Пояснення*</u>*:* рівність $a = 0$ отримана після прирівнювання між собою коефіцієнтів при $x^4$.

Рівність $-k = 3$ отримана після прирівнювання між собою вільних членів. Справа від вертикальної лінії записана система рівнянь для $a, b, c, d, k$. З цієї системи знаходимо $a = 0, b = 0, c = 2, d = 3, k = -3$.

III. При діленні многочлена на многочлен потрібно перш за все в діленому і дільнику розташувати всі їх члени в порядку зменшення степені. Степінь в діленому повинна бути завжди більше або дорівнювати степені дільника. Ділення многочлена на многочлен (ділення в "стовпчик")пояснюється в наступному прикладі.

<u>**Приклад**</u>**.** Многочлен $x^5 - x^4 + 3x^2 - x + 2$ поділити на многочлен $x^2 + 2x - 1$.

*Розв'язок:* Застосовуємо схему ділення в "стовпчик":

$$\begin{array}{l|l} -\ \ x^5 - 2x^4 + 3x^2 - x + 2 & x^2 + 2x - 1 \\ \quad x^5 + 2x^4 - x^3 & \hline \underline{x^3} - \underline{\underline{4x^2}} + 9x - 19 \\ \hline -\ \ -4x^4 + x^3 + 3x^2 - x + 2 & \end{array}$$

$$-4x^4 - 8x^3 + 4x^2$$

$$
\begin{array}{r}
9x^3 - x^2 - x + 2 \\
- \quad 9x^3 + 18x^2 - 9x \\
\hline
-19x^2 + 8x \\
+ 2 \\
- \quad -19x^2 - 38x \\
+ 19 \\
\hline
46x - 17
\end{array}
$$

*<u>Пояснення</u>*. Старший член діленого ділимо на старший член дільника (тобто $x^5$ ділимо на $x^2$). Отримуємо $x^3$. Після $x^3$ пишемо на місці, що підкреслено однією лінією. Множимо $x^3$ на весь дільник $x^2 + 2x - 1$. Отримуємо вираз $x^5 + 2x^4 - x^3$, який пишемо під діленим. Віднімаємо від діленого вираз $x^5 + 2x^4 - x^3$. Отримуємо перший залишок $-4x^4 + x^3 + 3x^2 - x + 2$.

Старший член $-4x^4$ першого залишку ділимо на старший член $x^2$ дільника. Отримуємо доданок $-4x^2$, який поміщаємо на місці, що підкреслено двома лініями. Після $-4x^2$ множимо на весь дільник $x^2 + 2x - 1$. Результат цього множення підписуємо під першим залишком. Віднімаємо від першого залишку вираз $-4x^4 - 8x^3 + 4x^2$. Отримуємо другий залишок $9x^3 - x^2 - x + 2$. З другим залишком проробляємо те ж, що було виконано з першим.

Процес ділення закінчується, якщо в залишку отримали 0, або в залишку отримали многочлен, степінь якого менший за степінь дільника. Такий залишок назвемо останнім. Після указаного ділення отримаємо $x^3 - 4x^2 + 9x - 19$ – частка від ділення многочлена на многочлен; $46x - 17$ – залишок (останній) цього ділення. Результат цього ділення можна записати в одному з інших видів:

$x^5 - 2x^4 + 3x^2 - x + 2 = \ x^2 + 2x - 1 \ \ x^3 - 4x^2 + 9x - 19 \ + 46x - 17$; або

$$\frac{x^5 - 2x^4 + 3x^2 - x + 2}{x^2 + 2x - 1} = x^3 - 4x^2 + 9x - 19 + \frac{46x - 17}{x^2 + 2x - 1}.$$

Відзначимо, що якщо число $a$ є коренем многочлена, то при діленні цього многочлена на $x - a$ останній залишок завжди буде дорівнювати 0 (теорема Безу).

IV. Всякий многочлен ненульової степені з дійсними коефіцієнтами (змінної $x$) можна представити в вигляді добутку так званих елементарних (простих) множників. Ці елементарні множники бувають двох видів:

а) елементарний множник ненульової степені 1-го типу має вигляд $(x-a)^k$;   де

$a$ – дійсне число, $k$ – одне з натуральних чисел 1,2,3…

б) елементарний множник 2-го типу має вигляд $x^2 + px + q\ ^l$;  де $p$,$q$ – дійсні числа; $p^2 - 4q < 0$, $l$ – одне з натуральних чисел 1,2,3…

Таким чином елементарний множник 2-го типу є деяка ціла додатна степінь квадратного тричлена з від'ємним дискримінантом.

<u>*Зауваження*</u>. 1. Про квадратний тричлен з від'ємним дискримінантом кажуть, що він має комплексні корені. Тому можна сказати, що елементарний множник 2-го типу – це деяка ціла додатна степінь квадратного тричлена з комплексними коренями.

2. Якщо серед множників многочлена є множник $(x^2 + px + q)^l$ то поспішно вважати його елементарним множником 2-го типу, так як у $x^2 + px + q$ можуть бути дійсні корені. В цьому випадку потрібно розв'язати квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$. Якщо в процесі розв'язку цього рівняння під квадратним коренем виявилось від'ємне число, то $x^2 + px + q$ має комплексні корені та $(x^2 + px + q)^l$ є елементарний множник 2-го типу. Якщо ж під квадратним коренем буде невід'ємне число, то $x^2 + px + q$ має дійсні корені. Знайдемо ці корені і нехай вони будуть числами $a_1$,$a_2$. Тоді $x^2 + px + q = (x - a_1)(x - a_2)$ і множник $(x^2 + px + q)^l$ потрібно замінити на $(x - a_1)^l (x - a_2)^l$.

3. При розкладанні многочлена на елементарні множники потрібно керуватися правилом:

а) спочатку розкласти многочлен на які-небудь множники (це питання досить детально розглядається в шкільній математиці);

б) елементарні множники залишити, а решту множників розкласти далі на елементарні множники;

в) об'єднати в один елементарний множник всі елементарні множники з однаковою основою.

Нап*риклад*. Многочлен F(x) розкладений на множники:

$$F(x) = (x-1)^2 (x+3) x^2 (x^2-3x+2)^3 (x^2+4) (x^2+4x+5)^6.$$

Множник $(x-1)^2$ має вигляд $(x-a)^k$, де $a$=1, $k$=2, тому $(x-1)^2$ – елементарний множник 1-го типу.

Аналогічно $x+3 = (x-(-3))^1, x^2 = (x-0)^2$ – теж елементарні множники 1-го типу.

Розглянемо квадратний тричлен $x^2-3x+2$. Відповідне квадратне рівняння буде $x^2-3x+2=0$. Розв’язуємо це рівняння:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}.$$

Під коренем з’явилось число 1≥0. Тому квадратне рівняння має дійсні корені:

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = \frac{3+1}{2} = 2, x_2 = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

Тому $x^2-3x+2$ розкладаємо на множники: $x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$ і в розкладі $F(x)$ множник $(x^2-3x+2)^3$ замінюємо на $(x-2)^3(x-1)^3$.

Квадратний тричлен $x^2+4$ має комплексні корені, тому в розкладі $F(x)$ на множники $x^2+4 = (x^2+4)^1$ – елементарний множник 2-го типу.

Квадратний тричлен $x^2+4x+5$ має комплексні корені, тому $(x^2+4x+5)^6$ – елементарний множник 2-го типу для $F(x)$.

Тепер маємо

$$F(x) = (x-1)^2 (x+3) x^2 (x-2)^3 (x-1)^3 (x^2+4) (x^2+4x+5)^6.$$

V. Відношення двох многочленів (скоротних або нескоротних) називають раціональним дробом.

Раціональний дріб змінної *x* має таким чином наступну структуру:

$$\text{раціональний дріб}(x) = \frac{\text{многочлен}(x)}{\text{многочлен}(x)}.$$

Раціональний дріб називають неправильним, якщо степінь його чисельника більше або дорівнює степені його знаменника. Раціональний дріб називається правильним, якщо степінь його чисельника менше степені його знаменника.

Всякий неправильний раціональний дріб (однієї тієї ж змінної) можна представити в вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу. Вказаний многочлен в цьому випадку називається цілою частиною неправильного раціонального дробу. Якщо неправильний раціональний дріб представити в вигляді суми своєї цілої частини і правильного дробу, то кажуть, що в неправильного раціонального дробу виділена ціла частина.

Загальний прийом виділення цілої частини в неправильному раціональному дробу ґрунтується на ділені в "стовпчик" його чисельника на знаменник.

Нап*риклад* : Виділити цілу частину в неправильному раціональному дробі.

$$\frac{x^5-2x^4+3x^2-x+2}{x^2+2x-1}.$$

Маємо

$$\frac{x^5-2x^4+3x^2-x+2}{x^2+2x-1}=\underbrace{x^3-4x^2+9x-19}_{\text{ціла частина}}+\frac{46x-17}{x^2+2x-1}$$

В окремих випадках виділення цілої частини в неправильному дробі можливо зробити досить швидко штучними методами (не використовуючи ділення в "стовпчик").

Нап*риклад* :

1. $\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x^2+1\ \ -1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1};$
2. $\frac{x^3}{x^2+1}=\frac{x^2+x\ \ -x}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1};$
3. $\frac{x^5}{x^2+1}=\frac{x^5+x^3\ \ -x^3}{x^2+1}=x^3-\frac{x^3+x\ \ -x}{x^2+1}=x^3-x+\frac{x}{x^2+1};$

$$\frac{x^5}{x^3-1}=\frac{x^5-x^2\ \ +x^2}{x^3-1}=x^2+\frac{x^2}{x^3-1}.$$

VI. З усіх правильних раціональних дробів особливо виділені деякі, які називають елементарними (простими) раціональними дробами.

*Означення*. Дріб

$$\frac{A}{(x-a)^k}$$

де $A$, і $a$ – дійсні числа, $k$ – одне з натуральних чисел 1;2;3…, назвемо елементарним раціональним дробом 1-го типу. В випадку $A$=0 вважаєм 0 многочленом степені 0.

Дріб

$$\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^l}$$

в якому $x^2+px+q$ має комплексні корені, $l$ – одне з натуральних чисел 1;2;3…, назвемо елементарним раціональним дробом 2-го типу.

*Зауваження*. В підручниках може бути прийнята інша класифікація елементарних дробів

$$\frac{A}{x-a} - \text{елементарний дріб } 1 - \text{го типу;}$$

$$\frac{A}{(x-a)^k} - \text{елементарний дріб } 2 - \text{го типу} (k - \text{ціле } \geq 2);$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad \begin{pmatrix} x^2+px+q \text{ має} \\ \text{комплексні корені} \end{pmatrix} - \text{елментарний дріб } 3 - \text{го типу;}$$

$$\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^l} \quad \begin{pmatrix} x^2+px+q \text{ має} \\ \text{комплексні корені} \\ \text{та } l - \text{ціле } \geq 2 \end{pmatrix} - \text{елементарний дріб } 4 - \text{го типу;}$$

Запропонований в даних методичних вказівках класифікація має наступні переваги:

а) кількість типів елементарних дробів зведено до мінімуму;

б) встановлюється кількісна відповідність між елементарними множниками многочлена і елементарними дробами: два типи елементарних множників і два типи елементарних дробів. Остання обставина особливо впливає при розкладі правильного раціонального дробу в суму елементарних дробів.

Наприклад :

1. $$\frac{4}{x-1}=\frac{4}{(x-1)^1}; \quad \frac{6}{x+3}=\frac{6}{\left(x-(-3)\right)^1}; \quad \frac{5}{x} = \frac{5}{x-0}; \quad \frac{12}{(x-1)^2}; \quad \frac{18}{(x+4)^3};$$

$$\frac{29}{x^4}=\frac{29}{(x-0)^4} - \text{елементарні дроби } 1 - \text{го типу;}$$

2. $\frac{2x-3}{x^2+x+1}=\frac{2x-3}{(x^2+x+1)^1}$; $\frac{9x+11}{(x^2+4x+13)^2}$; $\frac{8}{x^2+x+1}=$

$=\frac{0\cdot x+8}{x^2+x+1}$; $\frac{11}{(x^2+x+1)^3}=\frac{0\cdot x+11}{(x^2+x+1)^3}$; $\frac{6x}{x^2+4x+13}=$

$=\frac{6x+0}{(x^2+4x+13)^1}$; $\frac{3x}{(x^2+4x+13)^{10}}$; $\frac{3x+1}{x^2+4}=$

$=\frac{3x+1}{(x^2+4)^1}$ – елементарні дроби 2 – го типу, так як $x^2+x+1$;

$x^2+4x+13$; $x^2+4$ мають комплексні корені.

VII. Всякий правильний раціональний дріб розкладається на суму елементарних дробів, вказаних двох типів.

Для розкладу правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів потрібно:

а) розкласти знаменник правильного раціонального дробу на елементарні множники;

б) кожному елементарному множнику $(x\text{-}a)^k$ 1-го типу знаменника правильного раціонального дробу відповідає сума $k$ елементарних дробів 1-го типу:

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\frac{A_{k-2}}{(x-a)^{k-2}}+\cdots+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_1}{(x-a)^1}.$$

Кожному елементарному множнику $(x^2+px+q)^l$ 2-го типу знаменника правильного раціонального дробу відповідає сума $l$ елементарних дробів 2-го типу:

$$\frac{A_l x+B_l}{(x^2+px+q)^l}+\frac{A_{l-1}x+B_{l-1}}{(x^2+px+q)^{l-1}}+\cdots+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^1};$$

в) при розкладі правильного раціонального дробу в суму елементарних дробів числові коефіцієнти в чисельниках всіх елементарних дробів позначають латинськими буквами в алфавітному порядку.

**Приклад.** Розкласти правильний раціональний дріб

$$\frac{x^3-x+3}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^3x^2(x^2+2x+2)}$$

на суму елементарних дробів.

*Розв'язок:* Так як знаменник цього дробу уже розкладений на елементарні множники (перевірте це), то

$$\frac{x^3-x+3}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^3x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+$$
$$+\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^3}+\frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Hx+J}{x^2+x+1}+\frac{K}{x^2}+\frac{L}{x}$$
$$+\frac{Mx+N}{x^2+2x+2}.$$

В даній формулі:

а) елементарному множнику $(x-1)^2$ 1-го типу знаменника правильного раціонального дробу відповідає сума $\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}$ двох елементарних дробів 1-го типу;

б) елементарному множнику $x+1=(x+1)^1$ 1-го типу відповідає один елементарний дріб $\frac{C}{x+1}$ 1-го типу ;

в) елементарному множнику $(x^2+x+1)^3$ 2-го типу відповідає сума $\frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^3}+\frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Hx+J}{x^2+x+1}$ трьох елементарних дробів 2-го типу;

г) елементарному множнику $x^2=(x-0)^2$ 1-го типу відповідає сума $\frac{K}{x^2}+\frac{L}{x}$ двох елементарних дробів 1-го типу;

д) елементарному множнику $x^2+2x+2=(x^2+2x+2)^1$ 2-го типу відповідає один елементарний дріб $\frac{Mx+N}{x^2+2x+2}$ 2-го типу.

VIII. В наступному прикладі показано, як визначати значення коефіцієнтів в чисельниках елементарних раціональних дробів, на суму яких розкладений раціональний дріб.

**Приклад .** Розкласти дріб $\frac{x^5+2x^4-10x+16}{x(x^2+4)^2(x^2+1)}$ на суму елементарних дробів.

*Розв'язок:*

$$\frac{x^5+2x^4-10x+16}{x(x^2+4)^2(x^2+1)}=\left(\begin{array}{c}\text{знаменник вже}\\ \text{розкладений на елемен}-\\ \text{тарні множники}\end{array}\right)=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+4)^2}+$$

$$+\frac{Dx+E}{x^2+4}+\frac{Fx+H}{x^2+1}=\begin{array}{c}\text{Приводимо суму}\\ \text{всіх елементарних}\\ \text{дробів до загального}\\ \text{знаменика}\end{array}\begin{array}{c}\text{Додаткові множники}\\ \text{для чисельника}\\ \text{елементарних дробів}\\ \text{не повині мати дужок}\end{array}=$$

$$=\frac{\cancel{Ax^6}+\cancel{9Ax^4}+\cancel{24Ax^2}+\cancel{16A}+\cancel{Bx^4}+\cancel{Bx^2}+\cancel{Cx^3}+\cancel{Cx}+\cancel{Dx^6}+\cancel{5Dx^4}+\cancel{4Dx^2}+}{x\left(x^2+4\right)^2(x^2+1)}$$

$$\underline{\frac{+\cancel{Ex^5}+\cancel{5Ex^3}+\cancel{4Ex}+\cancel{Fx^6}+\cancel{8Fx^4}+\cancel{16Fx^2}+\cancel{Hx^5}+\cancel{8Hx^3}+\cancel{16Hx}}{x\left(x^2+4\right)^2(x^2+1)}\quad(*)}$$

Далі розмірковуємо так: перший і останній дріб в $(*)$ /вони підкреслені лініями/ рівні. Рівні також знаменники цих дробів. Тому рівні і їх чисельники. Оскільки в чисельниках цих дробів стоять многочлени, то приходимо до рівності двох многочленів (які стоять в чисельниках першого і останнього дробу). Оформляємо цю рівність многочленів (враховуючи, що найбільша степінь $x$ серед них є шоста) за схемою:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^6$ | $A$<br>● | ● | ● | $+D$<br>● | ● | $+F$<br>● | ● | $=0,$ |
| $x^5$ | ● | ● | ● | ● | $E$<br>● | ● | $+H$<br>● | $=1,$ |
| $x^4$ | $9A$<br>● | $+B$<br>● | ● | $+5D$<br>● | ● | $+8F$<br>● | ● | $=2,$ |
| $x^3$ | ● | ● | $C$<br>● | ● | $+5E$<br>● | ● | $+8H$<br>● | $=0,$ |
| $x^2$ | $24A$<br>● | $+B$<br>● | ● | $+4D$<br>● | ● | $+16F$<br>● | ● | $=0,$ |
| $x^1$ | ● | ● | $C$<br>● | ● | $+4E$<br>● | ● | $+16H$<br>● | $=-10,$ |
| $x^0$ | $16A$<br>● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | $=16.$ |

Приходимо до системи лінійних рівнянь для $A,B,C,D,E,F,H$ (ця система записана з права від вертикальної лінії).

Відмітимо наступне:

а) перед тим як записувати систему, була зроблена крапками розмітка місць в лівих частинах рівнянь системи для запису букв $A,B,C,D,E,F,H$ в указаному порядку їх слідування;

б) переглядаючи в чисельнику останнього дробу в $(*)$/8/ послідовно всі його члени, акуратно закреслюємо кожен такий член після того як коефіцієнт цього члена (з відповідним знаком) який поставлений у відповідний рядок і на відповідному йому місці в цьому рядку.

З системи рівнянь знаходимо:

$$A=1, B=4, C=-2, D=1, E=2, F=-2, H=-1.$$

Таким чином,

$$\frac{x^5+2x^4-10x+16}{x\left(x^2+4\right)^2(x^2+1)}=\frac{1}{x}+\frac{4x-2}{\left(x^2+4\right)^2}+\frac{x+2}{x^2+4}-\frac{2x+1}{x^2+1}.$$

IX. Раціональна функція $R(x)$ змінної $x$ – це один аналітичний вираз, утворений з $x$ і чисел шляхом застосування до $x$ і чисел кінцевого числа дій додавання, віднімання, множення і ділення.

Відмітимо при цьому, що піднесення $x$ до степеня с цілим додатнім показником розглядається як окремий випадок множення ($x^3=xxx$), а піднесення до степеня з цілим від'ємним показником – як послідовність операцій множення і ділення

($x^4=\frac{1}{xxxx}$).

Раціональна функція $R(\alpha;\beta)$ двох змінних величин $\alpha$ і $\beta$ – це один аналітичний вираз, утворений з $\alpha;\beta$ і чисел шляхом застосування к $\alpha;\beta$ і числам кінцевого числа дій додавання, віднімання, множення і ділення.

Аналітично визначають раціональну функцію

$$R\left(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\ldots;\alpha_n\right)\ \text{змінних}\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n.$$

<u>Нап*риклад*</u> :

$$1)\quad \frac{8x^6-3x^2+2x-8}{10x^7+8x^6-5x^2-3x+12}=R(x);$$

$$2)\quad \frac{4-\dfrac{5}{x^2-x}+3-2x}{1+\dfrac{4}{5+\dfrac{1}{x-6}}}=R(x);$$

$$3)\quad \frac{\alpha^2-\alpha\beta-\dfrac{8}{\alpha4-\beta5+6\alpha}-5\beta}{\alpha-\dfrac{\beta}{\alpha^3-\beta+\dfrac{1}{\alpha^2}-6\alpha+11\beta}}-\alpha^6+5\beta=R(\alpha;\beta).$$

Відмітимо також, що:

1) $R(\sin x;\cos x), \in R(\alpha;\beta)$ при $\alpha=\sin x,\beta=\cos x;$

2) $R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right), \in R(\alpha;\beta)$ при $\alpha=x,\beta=\sqrt{ax^2+bx+c};$

3) $R\left(x;x^{\frac{p_1}{q_1}};x^{\frac{p_2}{q_2}};\ldots;x^{\frac{p_k}{q_k}}\right) \in R\left(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\ldots;\alpha_{k+1}\right)$

при $\alpha_1 = x, \alpha_2 = x^{\frac{p_1}{q_1}}, \alpha_3 = x^{\frac{p_2}{q_1}}, \dots, \alpha_{k+} = x^{\frac{p_k}{q_k}}$;

4) $R\ \ x;\ \ ax+b^{\ \frac{p_1}{q_1}};\ \ ax+b^{\ \frac{p_2}{q_2}}; \dots;\ \ ax+$
$b^{\ \frac{p_k}{q_k}}\ \ \epsilon\, R\ \ \alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_{k+1}$

при $\alpha_1 = x, \alpha_2 = \ \ ax+b^{\ \frac{p_1}{q_1}}, \alpha_3 = \ \ ax+b^{\ \frac{p_2}{q_1}}, \dots, \alpha_{k+} = \ \ ax+b^{\ \frac{p_k}{q_k}}$;

5) $R\ \ x; (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}}; (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_2}}; \dots; (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_k}{q_k}}\ \ \epsilon\, R\ \ \alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_{k+1}$

при $\alpha_1 = x, \alpha_2 = (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}}, \alpha_3 = (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_1}}, \dots, \alpha_{k+} = \ \ \frac{ax+b}{cx+d}^{\ \frac{p_k}{q_k}}$.

X. Всякий раціональний дріб змінної $x$ є також і $R(x)$, но $R(x)$ не обов’язково раціональний дріб. Проте всяку функцію $R(x)$ можливо привести до раціонального дробу.

Нап*риклад* :

$$R\ \ x\ \ = \frac{x^2 - \frac{5}{x} + 8}{x^3 - \frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{x^3 - 5 + 8x}{x}}{\frac{x^4 + x^3 - 1}{x+1}} = \frac{x+1\ \ \ x^3 + 8x - 5}{x\ \ x^4 + x^3 - 1}$$
$$= \frac{x^4 + x^3 + 8x^2 + 3x - 5}{x^5 + x^4 - x}$$

XI. Зниження степені синуса і косинуса виконують за формулами $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$. Нехай при розрахунках невизначеного інтеграла з змінною інтегрування $x$ зроблена заміна змінної $\mathrm{z} = \mathrm{tg}\,\mathrm{x}$.

Якщо $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, то $x = arctg\ z$ і $dx = \frac{dz}{1+z^2}$.

Аналогічно при $z = ctg\ x$ і $0 < x < \pi$, то $x = arcctg\ z,\ dx = -\frac{dx}{1+z^2}$.

## 15. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА $\boldsymbol{R\ \ x\ \ dx}$

І. Інтегрування правильного раціонального дробу змінної $x$ відбувається так:

а) розкладають знаменник правильного раціонального дробу на елементарні множники;

б) розкладають правильний раціональний дріб на суму елементарних дробів ;

в) інтегрують кожен з елементарних дробів;

г) обчислюють інтеграл від правильного раціонального дробу як суму інтегралів від елементарних дробів, на які розкладений цей правильний раціональний дріб.

**<u>Приклад</u>.** Обчислити $\frac{7x^2-x+2}{x^4+x^3+x^2+x}dx.$

*Розв'язок:*

$$\frac{7x^2-x+2}{x^4+x^3+x^2+x}dx = \begin{matrix}\text{Залишаємо порожніми два — три рядка}\\ \text{для відповіді, яку напишемо}\\ \text{після допоміжних розрахунків}\end{matrix} =$$

$$= 2\ln x \; - 5\ln x^2+1 \; + \frac{3}{2}\ln x^2+1 \; + 2arctg\, x + C_1 =$$

$$= \ln\frac{x^2(x^2+1)\;\overline{x^2+1}}{x+1^{\;5}} + 2arctg\, x + C_1.$$

Допоміжні розрахунки:

а) розкладаємо знаменник $x^4+x^3+x^2+x$ на елементарні множники:

$$x^4+x^3+x^2+x = x\;\, x^3+x^2+x+1 \;\, = x \quad x^3+x^2 \;\; + \;\; x+1 \quad =$$

$$= x(x^2\;\, x+1 \;\, + \;\; x+1 \;\, = x\;\, x+1 \;\;\, x^2+1 \;\, ;$$

б) розкладаємо правильний раціональний дріб на суму елементарних дробів:

$$\frac{7x^2-x+2}{x^4+x^3+x^2+x} = \frac{\overset{x^3+x^2+x+1}{A}}{x} + \frac{\overset{x^3+x}{B}}{x+1} + \frac{\overset{x^2+x}{Cx+D}}{x^2+1} =$$

$$= \frac{Ax^3+Ax^2+Ax+A+Bx^3+Bx+Cx^3+Cx^2+Dx^2+Dx}{x(x+1)(x^2+1)},$$

$x^3 \mid A \;\; +B \;\; +C \qquad =0$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
x^2 & A & & +C & +D & =7 \\
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
x^1 & A & +B & & +D & =-1 \\
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
x^0 & A & & & & =2 \\
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet &
\end{array}
$$

Розв'язок системи:

$$A = 2, B = -5, C = 3, D = 2$$

$$\frac{7x^2 - x + 2}{x^4 + x^3 + x^2 + x} = \frac{2}{x} + \frac{-5}{x+1} + \frac{3x+2}{x^2+1};$$

в) інтегруємо кожен з елементарних дробів:

$$\frac{2}{x}dx = 2\ln x \;\; + C_1;$$

$$\frac{-5}{x+1}dx = \; -5 \quad \frac{d\;\, x+1}{x+1} = -5\ln x+1 \;\; + C_1;$$

$$\frac{3x+2}{x^2+1}dx = 3 \quad \frac{xdx}{x^2+1} + 2 \quad \frac{dx}{x^2+1} = \frac{3}{2} \quad \frac{d\;\, x^2+1}{x^2+1} + 2 \quad \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln x^2+1 \;\; + 2arctg\, x + C_1\,;$$

г) напишемо відповідь до вихідного інтеграла, заповнивши рядки які залишені раніше пустими.

<u>*Зауваження.*</u> Всі константи інтегрування мають вид $C_1$, так як буква С використовувалась в чисельнику одного з елементарних дробів.

II. Інтегрування неправильного раціонального дробу відбувається наступним чином:

а) у неправильного раціонального дробу виділяють цілу частину;

б) обчислюють інтеграл від неправильного раціонального дробу як суму інтегралів від його цілої частини і від відповідного правильного раціонального дробу.

III. При розрахунках $R\;\; x\;\; dx$ потрібно попередньо $R(x)$ привести до раціонального дробу, а потім вже інтегрувати цей раціональний дріб.

## 16. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

$$\boldsymbol{R(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}; x^{\frac{p_2}{q_2}}; \dots ; x^{\frac{p_k}{q_k}})dx}, \quad \boldsymbol{R(x,\ \ ax+b\ ^{\frac{p_1}{q_1}};\ \ ax+b\ ^{\frac{p_2}{q_2}}; \dots ;\ \ ax+b\ ^{\frac{p_k}{q_k}})dx},$$

$$\boldsymbol{R(x, (\tfrac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}}; (\tfrac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_2}}; \dots ;\ \ \tfrac{ax+b}{cx+d}\ ^{\frac{p_k}{q_k}})dx}.$$

Згадаємо значення букви $\boldsymbol{R}$ в позначенні підінтегральної функції .

Відмітимо, що кожен попередній інтеграл в заголовку цього розділу є окремий випадок наступного, *наприклад*,

$$x^{\frac{p_2}{q_2}} = \ \ 1x+0\ ^{\frac{p_2}{q_2}} = \ \ \frac{1x+0}{0x+1}\ ^{\frac{p_2}{q_2}}.$$

Методично доцільно ці інтеграли вивчати в вказаній послідовності.

Передбачається додатково, що всі числа
$p_1, p_2, p_3, \dots, p_k;\ q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$ – цілі.

Для першого інтеграла в заголовку цього розділу застосовується заміна змінної $x = t^n$, де $n$ – найменше спільне кратне чисел $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$.

Ця заміна приводить розглянутий інтеграл до $\quad R_1\ \ t\ \ dt$.

**<u>Приклад</u>.** Обчислити $\quad \frac{dx}{x(\ \ \overline{x}+\sqrt[5]{\overline{x^2}}}$.

*Розв'язок:*

$$\frac{dx}{x(\ \ \overline{x}+\ ^5\ \overline{x^2}} =$$

Підінтегральна функція $\dfrac{1}{x\ \ x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{5}}} = R\ \ \ x; x^{\frac{1}{2}}; x^{\frac{2}{5}}\ \ ;$

$$x = t^{10}, dx = 10t^9dt; t = x^{\frac{1}{10}}$$

$$=$$

$$= \quad \frac{10t^9dt}{t^{10}(\ \ \overline{t^{10}} + \ ^5\ \overline{t^{20}}} = \quad \frac{10t^9dt}{t^{10}\ \ t^5+t^4} = 10 \quad \frac{dt}{t(t^5+t^4)} =$$

$$= -\frac{5}{2t^4} + \frac{10}{3t^3} - \frac{5}{t^2} + \frac{10}{t} + 10\ln\ t\ \ - 10\ln\ t+1\ \ + C_1 =$$

$$= -\frac{5}{2x^{\frac{2}{5}}} + \frac{10}{3x^{\frac{3}{10}}} - \frac{5}{x^{\frac{1}{5}}} + \frac{10}{x^{\frac{1}{10}}} + 10\ln\ \ x^{\frac{1}{10}}\ \ - 10\ln\ \ x^{\frac{1}{10}} + 1\ \ + C_{1.}$$

Допоміжні розрахунки

$$t\ \ t^5 + t^4\ \ = t^5\ \ t+1\ \ ;$$

$$\frac{1}{t^5\ \ t+1} = \frac{\overset{t+1}{A}}{t^5} + \frac{\overset{t^2+t}{B}}{t^4} + \frac{\overset{t^3+t^2}{C}}{t^3} + \frac{\overset{t^4+t^3}{D}}{t^2} + \frac{\overset{t^5+t^4}{E}}{t} + \frac{\overset{t^5}{F}}{t+1} =$$

$$= \frac{At + A + Bt^2 + Bt + Ct^3 + Ct^2 + Dt^4 + Dt^3 + Et^5 + Et^4 + Et^3}{t^5(t+1)};$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t^5$ | ● | ● | ● | ● | $E$+$F$ | | =0 |
| $t^4$ | ● | ● | ● | $D$+$E$ | ● | | =0 |
| $t^3$ | ● | ● | $C$+$D$ | ● | ● | | =0 |
| $t^2$ | ● | $B$+$C$ | ● | ● | ● | | =0 |
| $t^1$ | $A$+$B$ | ● | ● | ● | ● | | =0 |
| $t^0$ | $A$ | ● | ● | ● | ● | ● | =1 |

Розв’язок системи:

$A = 1, B = -1, C = 1, D = -1, E = 1, F = -1;$

$$\frac{1}{t^5(t+1)} = \frac{1}{t^5} - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1};$$

$$\frac{dt}{t^5} = -\frac{1}{4t^4} + C_1; \quad \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{3t^3} + C_1; \quad \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} + C_1;$$

$$\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C_1; \quad \frac{dt}{t} = \ln\ t \ + C_1; \quad \frac{dt}{t+1} = \ln\ t+1\ + C_1.$$

2. Для другого інтеграла застосовується замінна змінної на

$ax + b = t^n$ ,

де $n$ – найменше спільне кратне чисел $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$.

Ця заміна приводить розглянутий інтеграл до $R_2\ \ t\ \ dt$.

**Приклад**. Обчислити $\frac{dx}{\overline{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$.

*Розв’язок:*

$$\frac{dx}{\overline{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$$

$$= \text{Підінтегральна функція} \frac{1}{x+1\ ^{\frac{1}{2}} + \ x+1\ ^{\frac{1}{3}}} = R\ \ x; (x+1\ ^{\frac{1}{2}};\ \ x+1\ ^{\frac{1}{3}});$$

$$= x+1 = t^6; x = t^6 - 1, dx = 6t^5 dt; t = \ \ x+1\ ^{\frac{1}{6}}$$

$$= \quad \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6 \quad \frac{t^3dt}{t+1} = \quad \text{Цілу частину в неправильному раціональному дробі виділяємо штучно} \quad =$$

$$= 6 \quad \frac{t^3+1 \quad -1}{t+2}dt = 6 \quad t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \quad dt =$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln \ t+1 \ + C = \ t = \ x+1 \ ^{\frac{1}{6}} \ =$$

$$= 2 \ x+1 \ ^{\frac{1}{2}} - 3 \ x+1 \ ^{\frac{1}{3}} + 6(x+1)^{\frac{1}{6}} - 6\ln \quad x+1 \ ^{\frac{1}{6}} + 1$$

$$+ C.$$

3. Для третього інтеграла застосовується заміна змінної

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

де $n$ – найменше спільне кратне чисел $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$.

Вказана заміна приводить інтеграл до $R_3 \ t \ dt$.

**Приклад.** Обчислити $\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$.

*Розв'язок:*

$$\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$$

$$\text{Підінтегральна функція} \quad \frac{1-x}{1+x}^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x} = R \quad x; \quad \frac{1-x}{1+x}^{\frac{1}{3}} \quad ; \frac{1-x}{1+x} = t^3;$$

$$= \quad 1 - x = t^3 + t^3x, x \ t^3+1 \ = 1 - t^3, x = \frac{1-t^3}{1+t^3}; \quad =$$

$$dx = \frac{-3t^2 \ t^3+1 \ -3t^2 \ 1-t^3}{1+t^3 \ ^2} \ dt = \frac{-6t^2}{t^3+1 \ ^2}dt;$$

$$t = \ \frac{1-x}{1+x}^{\frac{1}{3}}$$

$$= 6 \quad \frac{t^3dt}{t^3+1 \quad t^3-1} = \frac{3}{2}\ln \ t+1 \ - \frac{3}{4}\ln \ t^2 - t + 1 \ +$$

$$+ 3 \ \overline{3}arctg\frac{2t-1}{\overline{3}} + \frac{1}{2}\ln \ t-1 \ - \frac{1}{4}\ln \ t^2+t+1 \ -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C_1;\text{де } t=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Допоміжні обчислення:

$$(t^3+1)(t^3-1)=(t+1)(t^2-t+1)(t-1)(t^2+t+1);$$

$$\frac{t^3}{(t^3+1)(t^3-1)}=\frac{\overset{t^5-t^4+t^3-t^2+t+1}{A}}{t+1}+\frac{\overset{t^4+t^3-t-1}{Bt+C}}{t^2-t+1}+\frac{\overset{t^5+t^4+t^3+t^2+t+1}{D}}{t-1}+\frac{\overset{t^4-t^3+t-1}{Et+F}}{t^2+t+1}=$$

$$=\frac{\begin{gathered}At^5-At^4+At^3-At^2+At+A+Bt^5+Bt^4-Bt^2-Bt+\\+Ct^4+Ct^3-Ct--C+Dt^5+Dt^4+Dt^3+Dt^2+Dt+D+Et^5-\\-Et^4+Et^2-Et+Ft^4-Ft^3+Ft-F\end{gathered}}{(t+1)(t^2-t+1)(t-1)(t^2+t+1)};$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t^5$ | $A$ | $+B$ | ● | $+D$ | $+E$ | ● | =0 |
| $t^4$ | $-A$ | $+B$ | $+C$ | $+D$ | $-E$ | $+F$ | =0 |
| $t^3$ | $A$ | ● | $+C$ | $+D$ | ● | $-F$ | =1 |
| $t^2$ | $-A$ | $-B$ | ● | $+D$ | $+E$ | ● | =0 |
| $t^1$ | $A$ | $-B$ | $-C$ | $+D$ | $-E$ | $+F$ | =0 |
| $t^0$ | $A$ | ● | $-C$ | $+D$ | ● | $-F$ | =0 |

Розв’язок системи:

$$A=\frac{1}{4},B=-\frac{1}{4},C=\frac{1}{2},D=\frac{1}{12},$$

$$E=-\frac{1}{12},F=-\frac{1}{6}$$

$$\frac{t^3}{(t^3+1)(t^3-1)}=\frac{\frac{1}{4}}{t+1}+\frac{-\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}}{t^2-t+1}+\frac{\frac{1}{12}}{t-1}+\frac{-\frac{1}{12}t-\frac{1}{6}}{t^2+t+1};$$

$$\int\frac{\frac{1}{4}dt}{t+1}=\frac{1}{4}\int\frac{d(t+1)}{t+1}=\frac{1}{4}\ln|t+1|+C;$$

$$\int\frac{-\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}}{t^2-t+1}dt=\int\frac{-\frac{1}{8}(2t-1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{t^2-t+1}dt$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{(2t-1)dt}{t^2-t+1}+\frac{3}{8}\int\frac{dt}{t^2-t+1}=$$

$$=\left|\begin{gathered}t^2-t+1=\left(t^2-t+\frac{1}{4}\right)+1-\\-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\end{gathered}\right|$$

$$=-\frac{1}{8}\ln|t^2-t+1|+\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}arctg\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+C=$$

$$= -\frac{1}{8}\ln\ t^2 - t + 1\ + \frac{\overline{3}}{2} arctg \frac{2t-1}{\overline{3}} + C;$$

$$\frac{\frac{1}{12}dt}{t-1} = \frac{1}{12}\quad \frac{d(t-1)}{t-1} = \frac{1}{12}\ln\ t-1\ + C;$$

$$\frac{-\frac{1}{12}t - \frac{1}{6}}{t^2+t+1}dt = \quad \frac{-\frac{1}{24}\ \ 2t+1\ \ -\frac{1}{6}+\frac{1}{24}}{t^2+t+1}dt = -\frac{1}{24}\quad \frac{12\ \ t+1\ \ dt}{t^2+t+1} -$$

$$-\frac{1}{8}\quad \frac{dt}{t^2+t+1} = \begin{matrix} t^2+t+1 = \ \ t^2+t+\frac{1}{4}\ \ + \\ +1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \ \ t+\frac{1}{2}\ ^2 \end{matrix} = -\frac{1}{24}\ln\ t^2+t+1\ -$$

$$-\frac{1}{8}\frac{1}{\frac{\overline{3}}{4}} arctg \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\overline{3}}{4}} + C = -\frac{1}{24}\ln\ t^2+t+1\ - \frac{1}{4\ \ \overline{3}} arctg \frac{2t+1}{\overline{3}} + C.$$

## 17.ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА $\quad \boldsymbol{R(\sin x; \cos x)\ dx}$

І. Перший окремий випадок:

$\sin^m x \cos^n x\, dx$; де m,n – цілі числа і хоча б одне з них непарне.

*<u>Правило обчислення</u>:* зайняти першу степінь у одного з непарного степеня, а отриману після цього парну степінь перетворити за допомогою однієї з формул $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, або $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$.

**<u>Приклади</u>**.

1. $$\sin^6 x \cos^3 x\, dx = \begin{matrix} \text{В} \cos^3 x \text{ займемо} \\ \cos x \end{matrix} = \quad \sin^6 x \cos^2 x \cos x\, dx =$$

$$= \ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x\ \ = \quad \sin^6 x\,(1-\sin^2 x)\cos x\, dx$$

$$= \ \cos x\, dx = d\,(\sin x)\ \ == \quad \sin^6 x - \sin^8 x\ \ d\sin x$$

$$= \ \sin x = z\ \ = \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{9} + C;$$

2. $$\cos^2 x \sin^5 x\, dx = \ \sin^5 x = \sin^4 x \sin x\ \ = \quad \cos^2 x \sin^4 x \sin x\, dx\ =$$

$$= \begin{matrix} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \sin^4 x = \ \ 1-\cos^2 x\ \ ^2; \\ \sin x\, dx = -d\cos x \end{matrix}$$

$$= - \quad \cos^2 x\ \ 1-\cos^2 x\ \ ^2 d\cos x =$$

$$= -\quad \cos^2 x \;\; 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x \;\; d\cos x \;=$$

$$= -\quad \cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x \;\; d\cos x = \;\; \cos x = z \;\; =$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C;$$

3. $$\cos^3 6x\, dx = \quad \cos^2 6x \cos 6x\, dx$$

$$= \frac{1}{6} \quad (1 - \sin^2 6x)\, d\sin 6x = \;\; \sin 6x = z$$

$$= \frac{1}{6}\sin 6x - \frac{1}{18}\sin^3 6x + C.$$

II. Другий окремий випадок:

$\sin^m x \cos^n x\, dx;$ де m,n – невід’ємні парні числа.

*Правило обчислення:* слід понизити обидва степеня за допомогою цих формул

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

**Приклади**.

1. $$\sin^2 x \cos^4 x\, dx = \quad \begin{array}{l} \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}; \\ \cos^4 x = \;\; \cos^2 x \;\; ^2 = \;\; \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \;\; ^2 \end{array} \;=$$

$$= \quad \frac{1 - \cos 2x}{2} \;\; \frac{1 + \cos 2x}{2} \;\; ^2 \; dx = \;\; \begin{array}{c} \text{Розкриваємо} \\ \text{дужки} \end{array} \;\; =$$

$$= \frac{1}{8} \quad (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8} \quad dx + \frac{1}{8} \quad \cos 2x\, dx -$$

$$-\frac{1}{8} \quad \cos^2 2x\, dx - \frac{1}{8} \quad \cos^3 2x\, dx = \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x -$$

$$-\frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Допоміжні обчислення:

$$dx = x + C; \quad \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \quad \cos 2x\, d\;\; 2x \;\; = \frac{1}{2}\sin 2x + C;$$

$$\cos^2 2x\,dx = \quad \frac{1+\cos 4x}{2}dx = \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x \quad dx = \frac{x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}+C;$$

$$\cos^3 2x\,dx = \quad \cos^2 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2} \quad 1-\sin^2 2x \;\; d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{2} \quad d(\sin 2x) - \frac{1}{2} \quad \sin^2 2x\, d(\sin 2x)$$

$$= \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^2 2x}{2} + C.$$

2. $$\sin^2 x\,dx = \quad \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \quad \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x \quad dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

III. Третій окремий випадок:

в $\quad R \;\; \sin x\,; \cos x \;\; dx$ підінтегральна функція $R(\sin x\,; \cos x)$ парна одночасно по $\sin x$ і по $\cos x$, тобто $R \;\; -\sin x\,; -\cos x \;\; = R(\sin x\,; \cos x)$. Іншими словами: $R(\sin x\,; \cos x)$ не зміниться, якщо в ній одночасно $\sin x$ замінити на $-\sin x$, а $\cos x$ на $-\cos x$.

*Правило обчислення:* зробити заміну змінної $z = tg\; x$. При цьому потрібно пам'ятати що:

$$dx = \frac{dz}{1+z^2};\; \sin^2 x = \frac{z^2}{1+z^2};\; \cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}.$$

*Зауваження*. Тут можна зробити і заміну $z = ctg\; x$. Тоді

$$dx = \frac{-dz}{1+z^2};\; \sin^2 x = \frac{1}{1+z^2};\; \cos^2 x = \frac{z^2}{1+z^2}.$$

Обидві заміни приводять до $\quad R_1 \;\; z \;\; dz$.

**Приклади**.

1. $\dfrac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$

$$R\ \ \sin x\,;\cos x\ \ =\frac{1}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x};$$

$$R\ \ -\sin x\,;-\cos x\ \ =\frac{1}{4-3\ \ -\cos x\ \ ^2+5\ \ -\sin x\ \ ^2}=$$

$$=\qquad=\frac{1}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}=R\ \ \sin x\,;\cos x\ \ ;$$

$$\text{тому } z=tg\ x, dx=\frac{1}{1+z^2},$$

$$\sin^2 x=\frac{z^2}{1+z^2}, \cos^2 x=\frac{1}{1+z^2}$$

$$=\quad\frac{\dfrac{dz}{1+z^2}}{4-\dfrac{3}{1+z^2}+\dfrac{5z^2}{1+z^2}}=\quad\frac{dz}{1+9z^2}=\frac{1}{3}\quad\frac{d\ \ 3z}{1+\ \ 3z\ \ ^2}=$$

$$=\frac{1}{3}arctg\ 3z+C=\frac{1}{3}arctg\ 3tg\ x+C;$$

2. $\dfrac{dx}{\cos x\sin^3 x}$

$$R\ \ \sin x\,;\cos x\ \ =\frac{1}{\cos x\sin^3 x};R\ \ -\sin x\,;-\cos x\ \ =$$

$$=\frac{1}{-\cos x\quad -sin\ x\ \ ^3}=\frac{1}{\cos x\sin^3 x}=R\ \ \sin x\,;\cos x\ \ ;$$

$$=\qquad\qquad=$$

$$\text{тому } z=tg\ x, dx=\frac{dz}{1+z^2}, \sin^2 x=\frac{z^2}{1+z^2}, \cos^2 x=\frac{1}{1+z^2}\ ;$$

$$\text{при } 0<x<\frac{\pi}{2}: \sin=\frac{z}{\overline{\overline{1+z^2}}}, \cos=\frac{1}{\overline{\overline{1+z^2}}}$$

$$=\quad\frac{\dfrac{dz}{1+z^2}}{\dfrac{1}{\overline{\overline{1+z^2}}}\quad\dfrac{z}{\overline{\overline{1+z^2}}}\ ^3}=\quad\frac{1+z^2}{z^3}dz=$$

$$=\quad\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}\ \ dz=-\frac{1}{2z^2}+\ln\ z\ \ +C=-\frac{1}{2tg^2x}+\ln\ tg\ x\ \ +C.$$

Загальний випадок обчислення $R(\sin x;\cos x)\,dx$ полягає в застосуванні універсальної підстановки $z=tg\frac{x}{2}$. При цьому потрібно пам’ятати що:

$$dx=\frac{2dz}{1+z^2};\ \sin^2 x=\frac{2z}{1+z^2};\ \cos^2 x=\frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

*<u>Зауваження</u>*.

1.При $z = tg\frac{x}{2}$ завжди $R(\sin x; \cos x)\, dx$ переходить до $R_1\ z\ dz$.

2.Універсальною для $R(\sin x; \cos x)\, dx$ буде і підстановка $z = ctg\frac{x}{2}$. Тоді

$$dx = \frac{-2dz}{1+z^2};\ \sin x \quad = \frac{2z}{1+z^2};\ \cos \quad x = \frac{z^2-1}{1+z^2}.$$

3. При обчисленні $R(\sin x; \cos x)\, dx$ універсальну підстановку потрібно використовувати лише в крайньому випадку (коли нема ні одного із вказаних трьох окремих випадків), так як використовування цієї підстановки приводить звичайно до громіздких обчислень.

**Приклад**. Обчислити $\frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$.

*Розв'язок:*

$$\frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x} =$$

$R\ \sin x\,; \cos x\ = \frac{1}{5-4\sin x+2\cos x}$; для $R\ \sin x\,; \cos x$ немає ні одного з 3 окремих випадків; тому $z = tg\frac{x}{2}, dx = \frac{2dz}{1+z^2}$, $\sin = \frac{2z}{1+z^2} \cos = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

$$== \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{5-4\frac{2z}{1+z^2}+2\frac{1-z^2}{1+z^2}} = 2\quad \frac{dz}{3z^2-8z+7} =$$

$$= \begin{matrix} 3\ \ z^2 - \frac{8}{3}z + \frac{16}{9}\ \ + 7 - \\ -\frac{16}{3} = \frac{5}{3} + 3\ \ z - \frac{4}{3}\ \ ^2 \end{matrix} = 2\frac{1}{\overline{3}}\frac{1}{\frac{\overline{5}}{3}} arctg \frac{\overline{3}(z-\frac{4}{3})}{\frac{\overline{5}}{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\overline{5}} arctg \frac{3tg\frac{x}{2}-1}{\overline{5}} + C.$$

В наступному прикладі показано важливість знання окремих випадків при обчисленні $R\ \sin x\,; \cos x\ dx$.

**Приклад.** Обчислити декількома способами $\cos^2 x\, dx$.

*Перший спосіб:*

$$\cos^2 x\,dx = \begin{matrix}\text{Знижуємо степінь}\\ cos^2 x\end{matrix} = \frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Цим способом приклад можна розв'язати усно.

*Другий спосіб:*

$$\cos^2 x\,dx$$

$$= \begin{matrix}\cos^2 x = 0\cdot\sin^2 x + \cos^2 x = R\ \ \sin x\,;\cos x\ \ ;R\ \ -\sin x\,;-\cos x\ \ =\\ = R\ \ \sin x\,;\cos x\ \ ;\text{тому}\ z = tg\ x;\, dx = \dfrac{dz}{1+z^2},\cos^2 x = \dfrac{1}{1+z^2}\end{matrix}$$

$$= \quad \frac{dz}{z^2+1\ \ ^2} - \text{це}\ I_2 \quad (\text{див. розд. } 12)$$

*Третій спосіб:*

$$\cos^2 x\,dx = \begin{matrix}\cos^2 x = R\ \ \sin x\,;\cos x\ \ ;\text{тому}\\ \text{універсальна підстановка}\ z = tg\dfrac{x}{2};\\ \cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}\end{matrix} =$$

$$= \quad \frac{1-z^2}{1+z^2}\ ^2\ \frac{2dz}{1+z^2} = 2 \quad \frac{1-z^2\ \ ^2}{1+z^2\ \ ^2}dz.$$

$\frac{1-z^2\ \ ^2}{1+z^2\ \ ^2}$ – правильний раціональний дріб відносно $z$. Він розкладується на суму трьох елементарних дробів 2-го типу. Це призводить до необхідності розв'язати систему із шести рівнянь з шістьма невідомими. До того ж при інтегруванні елементарних дробів приходиться обчислювати $I_2$, $I_3$ (див.розд.12).

## 18. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ $\boldsymbol{R\ \ tg\,x\ \ dx}$, $\boldsymbol{R\ \ ctg\,x\ \ dx}$

Оскільки $tg\ x, ctg\ x$ однією дією ділення виражаються через $\sin x$ і $\cos x$

$tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $ctg\ x = \frac{\cos x}{\sin x}$ , то функції $R\ \ tg\ x\ \ ,R\ \ ctg\ x$ є раціональні функції від $\sin x$ і $\cos x$ , крім того парні одночасно по $\sin x$ і $\cos x$ .Тому кожну із двох підстановок $z = tg\ x;\ z = ctg\ x$ можна застосувати до будь-якого із цих інтегралів.

В цьому випадку потрібно пам'ятати:

$$dx = \frac{dz}{1+z^2} \text{ при } z = tg\ x\ ; \quad dx = \frac{-dz}{1+z^2} \text{ при } z = ctg\ x\ .$$

Вибір заміни $z = tg\ x$ або $z = ctg\ x$ визначається конкретними особливостями підінтегральної функції.

**<u>Приклади</u>.**

1. $$tg^5 x dx = \begin{matrix} tg^5 x = R\ \ tg\ x\ ; \\ z = tg\ x; dx = \dfrac{dz}{1+z^2} \end{matrix} = \frac{z^5 dz}{1+z^2}$$

$$= \frac{z^5 + z^3 - \ \ z^3 + z\ \ + z}{z^2+1} dz == \quad z^5 - z + \frac{z}{z^2+1}\ \ dz$$

$$= \frac{z^4}{4} - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} \ln\ 1 + z^2\ \ + C == \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln\ \cos x\ \ + C.$$

2. $$tg^5 x\, dx = \begin{matrix} tg^5 x = R\ \ tg\ x\ ; \\ z = ctgx; dx = -\dfrac{dz}{1+z^2}; \\ tg\ x = \dfrac{1}{ctg\ x} = \dfrac{1}{z} \end{matrix} = - \quad \frac{dz}{z^5(1+z^2)}.$$

$\frac{1}{z^5(1+z^2)}$ – є правильний раціональний дріб, який розкладується на суму елементарних дробів:

$$\frac{1}{z^5(1+z^2)} = \frac{A}{z^5} + \frac{B}{z^4} + \frac{C}{z^3} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{z} + \frac{Fz+H}{1+z^2}.$$

Звідси слідує, що для знаходження $A, B, C, D, E, F, H$ потрібно проробити дуже громіздкі обчислення. Хоча інтегрування елементарних дробів можна зробити усно.

## 19. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ $\boldsymbol{R\ \ x;\ \ \overline{r^2 - x^2}\ \ dx,\ \ \ R\ \ x;\ \ \overline{r^2 + x^2}\ \ dx\ \ \ \ R\ \ x;\ \ \overline{x^2 - r^2}\ \ dx}$ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПІДСТАНОВКАМИ

Для першого інтеграла заміна змінної

$$x = r \sin t \ \text{ або } x = r \cos t\ \ .$$

Для другого інтеграла заміна змінної

$$x = r\, tg\ t \ \text{ або } x = r\, ctg\ t\ \ .$$

Для третього інтеграла заміна змінної

$$x = \sec t \quad \text{або}\ x = \operatorname{cosec} t \ .$$

Вказані заміни змінних приводять всі ці інтеграли до

$$R_1 \ \sin t ; \cos t \ \ dt.$$

**Приклад.** Обчислити $\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2 \ 3}}$.

*Розв'язок:*

$$\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2 \ \ 3}} = \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2 \ \ 3}} = \frac{0x+1}{\sqrt{r^2-x^2 \ \ 3}} = R \quad x; \ \ \sqrt{r^2-x^2} \ \ ; \quad =$$
$$x = r\sin t ; dx = r\cos t \ \ dt$$

$$= \frac{r\cos t\, dt}{\sqrt{r^2-r^2 sm^2 t \ \ 3}} = \frac{\cos t\, dt}{r^2 \ \cos t \ \ 3} = \begin{matrix}\text{Вважаємо}\\ 0 \le t < \frac{\pi}{2}\end{matrix}$$

$$= \frac{1}{r^2} \quad \frac{dt}{\cos^2 t} == \frac{1}{r^2} tg\ t + C = \begin{matrix} tg\ t = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \\ \text{при} 0 \le t < \frac{\pi}{2}\end{matrix}$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\frac{x}{r}}{\sqrt{1- \ \frac{x}{r} \ \ ^2}} + C == \frac{x}{r^2 \ \ \sqrt{r^2-x^2}} + C \ .$$

## 20. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА $\boldsymbol{R \ \ x; \ \sqrt{ax^2+bx+c} \ \ dx}$ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПІДСТАНОВКАМИ

Правило для обчислення цього інтеграла:

а) у квадратного тричлення $ax^2+bx+c$ виділити повний квадрат, тобто представити цей тричлен у вигляді $a \ \ x+l \ \ ^2+m$;

б) замінити змінну

$$z = \begin{matrix} \overline{x} \ \ a+l \quad \text{при}\ a>0, \\ \overline{x} \ \ a+l \quad \text{при}\ a<0. \end{matrix}$$

Після вказаної заміни змінної розглянутий інтеграл зводиться до одного з інтегралів розд.19.

**Приклад**. Обчислити $\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5 \ \ 3}}$.

*Розв'язок:*

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+5)^3}}=\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+2x+5)^3}}=\int\frac{1+0x}{\sqrt{(x^2+2x+5)^3}}=\left[=\int R\left(x;\sqrt{x^2+2x+5}\right)\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{c}x^2+2x+5=(x+1)^2+4;\\ z=x+1;dx=dz\end{array}\right]=\int\frac{dz}{\sqrt{(z^2+4)^3}}=$$

$$=\left[z=2tg\,t;dz=\frac{2dt}{\cos^2 t}\right]=\int\frac{\frac{2dt}{\cos^2 t}}{\sqrt{(4tg^2t+4)^3}}=\int\frac{\frac{2dt}{\cos^2 t}}{8\,|\sec t|^3}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{|\cos t|^3}{\cos^2 t}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{вважаємо}\\ 0\le t<\frac{\pi}{2}\end{array}\right]=\frac{1}{4}\int\cos t\,dt=\frac{1}{4}\sin t+C=$$

$$=\left[\sin t=\frac{tg\,t}{\sqrt{1+tg^2t}}\ \text{при}\ 0\le t<\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{4}\frac{tg\,t}{\sqrt{1+tg^2t}}+C=\left[tg\,t=\frac{z}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\frac{z}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{2}\right)^2}}+C=\frac{z}{4\sqrt{4+z^2}}+C=[z=x+1]$$

$$=\frac{x+1}{4\sqrt{4+(x+1)^2}}+C=\frac{x+1}{4\sqrt{x^2+2x+5}}+C.$$

## 21. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

## $\int\sin px\cos qx\,dx$; $\int\sin px\sin qx\,dx$; $\int\cos px\cos qx\,dx$

Ці інтеграли обчислюються перетворенням їх підінтегральних функцій за формулам:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right).$$

При цьому вважають, що $\alpha=px$; $\beta=qx$.

**Приклади.**

1. $\sin 3x \cos 12x \, dx = \dfrac{1}{2} \quad \sin \; 3x + 12x \;\; + \sin(3x - 12x) \;\; dx =$

$$= \frac{1}{2} \quad \sin 15x \, dx - \frac{1}{2} \quad \sin 9x \, dx$$

$$= -\frac{1}{30} \cos 15x + \frac{1}{18} \cos 9x + C;$$

2. $\cos x \cos 4x \, dx = \dfrac{1}{2} \quad \cos \; x - 4x \;\; + \cos(x + 4x) \;\; dx =$

$$= \frac{1}{2} \quad \cos 3x \, dx + \frac{1}{2} \quad \cos 5x \, dx = \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{10} \sin 5x + C;$$

3. $\sin 2x \sin 5x \, dx = \dfrac{1}{2} \quad \cos \; 2x - 5x \;\; - \cos(2x + 5x) \;\; dx$

$$= \frac{1}{2} \quad \cos 3x \, dx - \frac{1}{2} \quad \cos 7x \, dx = \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{14} \sin 7x + C.$$

## ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Дайте визначення первісної функції.

2. Що називається невизначеним інтегралом?

3. Дайте визначення операції інтегрування. Як перевірити результат інтегрування?

4. Сформуйте основні властивості невизначеного інтеграла.

5. Запишіть співвідношення, що встановлюють зв'язки між інтегруванням і диференціюванням.

6. Поясніть суть безпосереднього інтегрування.

7. У чому суть способу інтегрування, введенням множника $\varphi'(x)$ під знак диференціала? Запишіть відповідну формулу.

8. Знайдіть інтеграл $\int (5x-1)^2 dx$ двома способами.

9. Напишіть формулу заміни змінної в невизначеному інтегралі.

10. Напишіть формулу інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.

11. Вкажіть типи інтегралів, для яких обчислення доцільно проводити методом інтегрування частинами.

12. Сформулюйте теорему про розкладання многочлена на прості множники.

13. Поясніть правило розкладання правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів (у випадку різних дійсних коренів знаменника).

14. Поясніть правило розкладання правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів (у випадку кратних дійсних коренів знаменника).

15. Поясніть правило розкладання правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів у випадку, коли знаменник має некратну пару комплексно-спряжених коренів.

16. Сформулюйте правило розкладання правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів у випадку, коли знаменник має кратну пару комплексно- спряжених коренів.

17. Пояснити методи знаходження невизначених коефіцієнтів.

18. У чому суть універсальної тригонометричної підстановки?

19. Методи знаходження інтегралів виду $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.

20. Методи знаходження інтегралів виду $\int tg^m x dx, \quad \int ctg^n x dx$.

21. Методи знаходження інтегралів виду

$\int stc^{2m} x dx, \quad \int cosec^{2n} x dx$.

22. За допомогою якої підстановки раціоналізуються інтеграли

$$\int R\left( x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_1}{s_1}}, \ldots, x^{\frac{r_n}{s_n}} \right) dx ?$$

23. За допомогою якої підстановки раціоналізуються інтеграли

$$\int R\left[ x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \ldots, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r_n}{s_n}} \right] dx ?$$

24. За допомогою якої підстановки знаходяться інтеграли

$\int x^m (a + bx^n)^p dx$ ?

25. Які тригонометричні підстановки використовуються для

$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ ?

26. Обчислення інтегралів виду: $\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$.

27. Обчислення інтегралів виду: $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

# ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

## Інтеграли, які зводяться до табличних

Знайти інтеграли:

**1.** $\int (x^7+6x^5-3x^2+4)dx.$ **2.** $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1\right)dx.$ **3.** $\int (tgx\cdot ctgx)dx.$

**4.** $\int \frac{x^2+2}{x}dx.$ **5.** $\int (2x+3\cos x)dx.$ **6.** $\int \frac{dx}{x^2+4}.$ **7.** $\int \frac{dx}{5-x^2}.$

**8.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}.$ **9.** $\int (x+2)(x^2-3)dx.$ **10.** $\int ctg^2 x dx.$ **11.** $\int \frac{x^2-9}{x^2-8}dx.$

**12.** $\int \left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx.$ **13.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}.$ **14.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-\sqrt[7]{x}}{x}dx.$

**15.** $\int (1+tg^2 x)dx.$ **16.** $\int (1+ctg^2 x)dx.$ **17.** $\int 2^x\cdot 3^x dx.$

**18.** $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx.$ **19.** $\int \frac{3+2ctg^2 x}{5\cos^2 x}dx.$ **20.** $\int \frac{x^3-8}{x-2}dx.$

**Відповіді.**

**1.** $x^8+x^6-x^3+4x+C.$ **2.** $2\sqrt{x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+x+C.$

**3.** $x+C.$ **4.** $\frac{x^2}{2}+2\ln|x|+C.$ **5.** $x^2+3\sin x+C.$ **6.** $\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C.$

**7.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x}\right|+C.$ **8.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$ **9.** $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-6x+C.$

**10.** $-ctg-x+C.$ **11.** $x-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right|+C.$ **12.** $x-\cos x+C.$

**13.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-7}\right|+C.$ **14.** $3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-7\sqrt[7]{x}+C.$ **15.** $tgx+C.$

**16.** $-ctgx+C.$ **17.** $\frac{6^x}{\ln 6}+C.$ **18.** $\ln|x|+2arctg\frac{x}{2}+C.$

**19.** $\frac{3}{5}tgx-\frac{2}{5}ctgx+C.$ **20.** $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+C.$

## II. Основні методи інтегрування

Знайти інтеграли:

**1.** $\int cos(3x+5)dx.$ **2.** $\int\sqrt[3]{2-7x}\,dx.$ **3.** $\int(4-9x)^{20}dx.$ **4.** $\int\frac{dx}{\sqrt[11]{3-11x}}.$

**5.** $\int\frac{x^2dx}{5-x^6}.$ **6.** $\int\frac{dx}{x\,ln^2x}.$ **7.** $\int\frac{e^xdx}{3+4e^x}.$ **8.** $\int 7^{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}.$ **9.** $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}.$ **10.** $\int\frac{sin\,2xdx}{\sqrt{2+cos^2x}}.$

**11.** $\int\frac{\sqrt{1+ln\,x}}{x}dx.$ **12.** $\int\frac{1-2\,sin\,x}{cos^2x}dx.$

**13.** $\int\frac{x^4dx}{x^{10}-7}.$ **14.** $\int cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}.$ **15.** $\int\frac{arccos^3x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

**16.** $\int e^{ctgx}\cdot\frac{dx}{sin^2x}.$ **17.** $\int\frac{3-arcctgx}{1+x^2}dx.$ **18.** $\int\frac{cos\,x}{sin^{15}x}dx.$

**19.** $\int\frac{x^6dx}{7+x^{14}}.$ **20.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{ln^2x-3}}.$

**Відповіді.**

**1.** $\frac{1}{3}\sin(3x+5)+C.$ **2.** $-\frac{3}{28}\sqrt[3]{(2-7x)^4}+C.$

**3.** $-\frac{1}{189}(4-9x)^{21}+C.$ **4.** $-\frac{1}{10}\sqrt[11]{(3-11x)^{10}}+C.$ **5.** $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x^3}{\sqrt{5}-x^3}\right|+C.$ **6.** $-\frac{1}{\ln x}+C.$

**7.** $\frac{1}{4}\ln\left|3+4e^x\right|+C.$ **8.** $\frac{2\cdot 7^{\sqrt{x}}}{\ln 7}+C.$ **9.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4+1}\right|+C.$ **10.** $-2\sqrt{2+cos^2x}+C.$

**11.** $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C.$ **12.** $tgx-\frac{2}{\cos x}+C.$ **13.** $\frac{1}{10\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{7}}{x^5+\sqrt{7}}\right|+C.$ **14.** $-\frac{1}{2}sin\frac{1}{x^2}+C.$

**15.** $-\frac{arccos^4x}{4}+arcsin\,x+C.$ **16.** $-e^{ctgx}+C.$

**17.** $3arctgx+\frac{arcctg^2x}{2}+C.$ **18.** $-\frac{1}{14\,sin^{14}x}+C.$ **19.** $\frac{1}{7\sqrt{7}}arctg\frac{x^7}{\sqrt{7}}+C.$

**20.** $\ln\left|\ln x+\sqrt{\ln^2x-3}\right|+C.$

## III. Інтегрування по частинах

Знайти інтеграли:

**1.** $\int x^2\,cos\,xdx.$ **2.** $\int(x-1)sin\,xdx.$ **3.** $\int e^{3x}(x-3)dx.$ **4.** $\int arccosxdx.$

**5.** $\int x\,ln5xdx.$ **6.** $\int xarcctgxdx.$ **7.** $\int arcsin2xdx.$ **8.** $\int arctg3xdx.$

**9.** $\int e^{-2x}\,sin5xdx.$ **10.** $\int e^{4x}\cos\frac{x}{3}dx.$

**Відповіді.**

**1.** $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$. **2.** $(-x)\cos x+\sin x+C$. **3.** $\frac{(x-3)e^{3x}}{3}-\frac{2}{9}e^{3x}+C$.

**4.** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$. **5.** $\frac{x^2}{2}\ln 5x-\frac{x^2}{4}+C$. **6.** $\frac{x^2}{2}arcctgx+\frac{x+1}{2}arcctgx+C$.

**7.** $x\arcsin 2x+\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C$. **8.** $x\,arctg3x-\frac{1}{6}\ln\left|1+9x^2\right|+C$.

**9.** $-\frac{5}{29}\left(e^{-2x}\cos 5x+\frac{2}{5}e^{-2x}\sin 5x\right)+C$. **10.** $\frac{3}{145}e^{4x}\left(\sin\frac{x}{3}+12\cos\frac{x}{3}\right)+C$.

## IV. Інтегрування раціональних функцій

Знайти інтеграли:

**1.** $\int\frac{dx}{x-7}$. **2.** $\int\frac{4dx}{3-x}$. **3.** $\int\frac{dx}{(x+5)^7}$. **4.** $\int\frac{5dx}{(2x+1)^6}$. **5.** $\int\frac{3x+1}{x+2}dx$.

**6.** $\int\frac{x^3}{x+1}dx$. **7.** $\int\frac{x^2-1}{x+2}dx$. **8.** $\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$. **9.** $\int\frac{x-5}{x^2+4x-5}dx$.

**10.** $\int\frac{dx}{4x-1-4x^2}$. **11.** $\int\frac{18x^2+13x}{1+6x+9x^2}dx$. **12.** $\int\frac{(x-2)dx}{x(x-1)(x+2)}$.

**13.** $\int\frac{(x+5)dx}{x^2(x+1)(x-2)}$. **14.** $\int\frac{x^2+3x+2}{x(x-1)^2(x-3)}dx$. **15.** $\int\frac{(2x+3)dx}{x^2+4x+5}$.

**16.** $\int\frac{x^3+3x-1}{2x^2-4x+7}dx$. **17.** $\int\frac{dx}{x^3+27}$. **18.** $\int\frac{(x-6)dx}{(x+1)(x^2-x+2)}$

**Відповіді.**

**1.** $\ln|x-7|+C$. **2.** $-4\ln|3-x|+C$. **3.** $-\frac{1}{6(x+5)^6}+C$.

**4.** $-\frac{1}{2(2x+1)^5}+C$. **5.** $3x-5\ln|x+2|+C$. **6.** $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C$.

**7.** $\frac{x^2}{2}-2x+3\ln|x+2|+C$. **8.** $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$. **9.** $\frac{5}{3}\ln|x+5|-\frac{2}{3}\ln|x-1|+C$.

**10.** $\frac{1}{4x-2}+C$. **11.** $2x+\frac{1}{9}\ln\left|x+\frac{1}{3}\right|+\frac{7}{27x+9}+C$.

**12.** $\ln\left|\frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}\right|+C$. **13.** $\frac{3}{4}\ln|x|-\frac{4}{3}\ln|x+1|+\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{5}{2x}+C$.

**14.** $2\ln|x|-\frac{19}{3}\ln|x-1|+\frac{3}{x-1}+\frac{5}{3}\ln|x-3|+C$.

**15.** $\ln\left|x^2+4x+5\right|-arctg(x+2)+C$.

**16.** $\frac{x^2}{4}+x+\frac{7}{4}ln\left|x^2-2x+\frac{7}{2}\right|-\frac{9}{\sqrt{10}}arctg\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{5}}+C.$

**17.** $\frac{1}{27}\ln|x+3|-\frac{1}{54}\ln\left|x^2-3x+9\right|-\frac{11}{81\sqrt{3}}arctg\frac{2x-3}{3\sqrt{3}}+C.$

**18.** $\frac{7}{4}ln\left|x^2+4x+5\right|-\frac{7}{2}ln|x+1|+\frac{9}{2}arctg(x+2)+C.$

## V. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Знайти інтеграли:

**1.** $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx.$ **2.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}.$ **3.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$ **4.** $\int\frac{\sqrt{x}}{x+2}dx.$

**5.** $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$ **6.** $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}.$ **7.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$

**8.** $\int\frac{dx}{\sqrt{12x-2-9x^2}}.$ **9.** $\int\frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}.$ **10.** $\int\frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}.$

**11.** $\int\frac{(x+4)dx}{\sqrt{2-x-x^2}}.$ **12.** $\int\frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2-6x+1}}.$ **13.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}.$

**14.** $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}.$

### Відповіді.

**1.** $2\sqrt{x-1}\left(\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right)+C.$

**2.** $2arctg\sqrt{x+1}+C.$ **3.** $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C.$

**4.** $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}arctg\sqrt{\frac{x}{2}}+C.$ **5.** $-2arctg\sqrt{1-x}+C.$

**6.** $\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right)+C.$ **7.** $C-\ln\left|1-x+\sqrt{5-2x+x^2}\right|.$

**8.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C.$ **9.** $C-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}.$

**10.** $\frac{61}{16}\ln\left|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}\right|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C.$

**11.** $-\sqrt{2-x-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C.$ **12.** $\sqrt{x^2-6x+1}+C.$

**13.** $\ln|x|-\ln\left|1+4x+\sqrt{x^2+8x+1}\right|+C.$

**14.** $\ln\left|x+\sqrt{1+x+x^2}\right|-\ln\left|2+x+\sqrt{1+x+x^2}\right|+C.$

## VI. Інтегрування тригонометричних функцій

Знайти інтеграли:

**1.** $\int\sin^2 3x dx.$ **2.** $\int cos^4 x dx.$ **3.** $\int\sin^3 x dx.$ **4.** $\int\sin^3 x\cos^5 x dx.$

**5.** $\int\sin^2 x\cdot\cos^2 x dx.$ **6.** $\int\sin^3 x\cdot\cos^2 x dx.$ **7.** $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx.$

**8.** $\int tg^3 x dx.$ **9.** $\int\frac{1}{\cos^8 x}dx.$ **10.** $\int\sin x\cdot\sin 3x dx.$

**11.** $\int\cos 4x\cdot\cos 7x dx.$ **12.** $\int\sin\frac{x}{4}\cos\frac{3x}{4}dx.$ **13.** $\int\frac{dx}{4-5\sin x}.$

**14.** $\int\frac{dx}{5-3\cos x}.$ **15.** $\int\frac{dx}{(1+\cos x)^2}.$

### Відповіді.

**1.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{12}\sin 6x+C.$ **2.** $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

**3.** $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$ **4.** $\frac{1}{3}tg^3 x-tgx+x+C.$ **5.** $\frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

**6.** $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$ **7.** $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3}\frac{1}{\sin^3 x}+C.$ **8.** $\frac{tg^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C.$

**9.** $\frac{tg^7 x}{7}+\frac{3tg^5 x}{5}+tg^3 x+tgx+C.$ **10.** $-\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$

**11.** $\frac{\sin 11x}{22}+\frac{\sin 3x}{6}+C.$ **12.** $-\frac{\cos x}{2}+\cos\frac{x}{2}+C.$ **13.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{2tg\frac{x}{2}-1}\right|+C.$

**14.** $\frac{1}{2}arctg\left(2tg\frac{x}{2}\right)+C.$ **15.** $\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\frac{1}{6}tg^3\frac{x}{2}+C.$

# ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

## Варіант 1

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int (4+3x^2)^6 x\ dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$;

в) $\int 2^x \sin 2^x dx$;

г) $\int \frac{x^3}{9+x^8} dx$;

д) $\int \cos(5-2x)dx$;

е) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$;

ж) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} dx$;

з) $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}} dx$;

и) $\int e^{tg\, 2x} \frac{dx}{\cos^2 2x}$;

к) $\int \frac{x}{5-x^4} dx$;

л) $\int (1-2x) ctg(x-x^2)dx$;

м) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{arctg^2 x+4}}$;

н) $\int 5^{\sin x} \cos x dx$;

о) $\int \sin 2x \cdot tg(\cos 2x)dx$;

п) $\int \frac{x-1}{\sin^2(5-2x+x^2)} dx$;

р) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$;

с) $\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2} dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$;

у) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+6x+7}} dx$

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x \sin 7x dx$;

б) $\int \arccos 2x dx$;

в) $\int e^x \cos 2x dx$;

г) $\int \sqrt{e^x+1} dx$;

д) $\int \sqrt{100-x^2} dx$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.

*Завдання 3*. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{2x^2-10x+10}{x^3-6x^2+11x-6} dx$;

б) $\int \frac{x^3+x-1}{x^4-x^3} dx$;

в) $\int \frac{x^6+3x^4+2x^2+x}{x^4+3x^2+2} dx$

.

*Завдання 4*. Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{1-2\cos x}$;

б) $\int \frac{\cos^5 x}{3-\sin x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{2+6\sin^2 x}$;

г) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^9 x} dx$;

д) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$;

е) $\int \sin^4 x \cos^4 x\ dx$

ж) $\int \cos 4x \cos 5x\ dx$

## Варіант 2

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int 3^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

б) $\int \frac{1}{x} tg(\ln x) dx$;

в) $\int \frac{2^x}{\sin^2 2^x} dx$;

г) $\int \frac{x^2}{\sin(1+x^3)} dx$;

д) $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x} \cos 2x dx$;

е) $\int x \sin(5-2x^2) dx$;

ж) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$;

з) $\int \cos(7+5x) dx$;

и) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+4} dx$;

к) $\int \frac{dx}{\cos^2(4-3x)}$;

л) $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^4}} dx$;

м) $\int e^{tg 3x} \frac{dx}{\cos^2 3x}$;

н) $\int \frac{\sin 2x}{4-\cos^2 2x} dx$;

о) $\int x^2 ctg x^3 dx$;

п) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{ctg^2 x - 25}}$;

р) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$;

с) $\int \frac{x+7}{x^2+5x+7} dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x+x^2}}$;

у) $\int \frac{5x-2}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x \cos 7x dx$;

б) $\int \ln(x^2+2) dx$;

в) $\int e^x \sin 2x dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{(100+x^2)^3}}$;

е) $\int \frac{\sqrt{x}-9}{3\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}} dx$.

*Завдання 3*. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x} dx$;

б) $\int \frac{2x^4-4x^3+3x^2-3x+1}{x^4-2x^3+x^2} dx$

в) $\int \frac{-3x}{x^4+5x^2+4} dx$.

*Завдання 4*. Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{1+2\sin x}$;

б) $\int \frac{\sin^5 x}{3-\cos x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 9\cos^2 x}$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$;

д) $\int \frac{\sin^8 x}{\cos^{14} x} dx$;

е) $\int \sin^2 2x \cos^2 2x \, dx$

ж) $\int \sin 5x \sin 6x \ dx$

## Варіант 3

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;

б) $\int \frac{x^2 dx}{\sin x^3}$;

в) $\int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$;

г) $\int e^{ctgx} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

д) $\int \frac{x}{\sqrt{9+x^4}} dx$;

е) $\int 5^{\sin 2x} \cos 2x dx$;

ж) $\int \frac{\sin x}{4-\cos^2 x} dx$;

з) $\int e^x \sin e^x dx$;

и) $\int ctg\sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

к) $\int \frac{\cos 2x}{25+\sin^2 2x} dx$;

л) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1-3^{2x}}}$;

м) $\int (x^2-5x)\cos\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2\right)dx$

н) $\int \frac{1}{x^2} tg\frac{1}{x} dx$;

о) $\int \frac{x^3}{\cos^2(x^4-1)} dx$;

п) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2(tgx)}$;

р) $\int \frac{dx}{\sqrt{7+2x-x^2}}$;

с) $\int \frac{7x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx$;

т) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

у) $\int \frac{3x+1}{2x^2+5x-3} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int xe^{7x} dx$;

б) $\int x \cdot arctg 2x dx$;

в) $\int e^{2x} \cos x dx$;

г) $\int \sqrt{e^{2x}+9} dx$;

д) $\int \frac{x^2}{\sqrt{256-x^2}} dx$;

е) $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} dx$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{x^4-3x^3+4x^2-3x+2}{x^3-3x^2+2x} dx$

б) $\int \frac{x^3-2x^2+4x-1}{x^4-2x^3+2x-1} dx$;

в) $\int \frac{-2x}{x^4+4x^2+3} dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$;

б) $\int \frac{\cos^5 x}{2+\sin x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{1+8\cos^2 x}$;

г) $\int \sin^2 x \cos^3 x \ dx$;

д) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^{10} x} dx$;

е) $\int \sin^4 3x \; dx$ ж) $\int \sin 4x \cos 2x \; dx$

## Варіант 4

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \sin(\sqrt{x}+2)\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(\arcsin x+5)}$;

в) $\int (x-2)\cdot ctg(x^2-4x+2)\ dx$

г) $\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

д) $\int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}+5\right)}{x^2}dx$;

е) $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x}\sin 2x dx$;

ж) $\int \frac{5^x}{\cos^2 5^x}dx$;

з) $\int \frac{x}{9-x^4}dx$;

и) $\int 2^{x^3}x^2 dx$;

к) $\int \frac{dx}{\sin^2(2x+5)}$;

л) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}tg(\sqrt[3]{x}-5)dx$;

м) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+25}dx$;

н) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{4-tg^2 x}}$;

о) $\int \frac{x^2dx}{\sin x^3}$;

п) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{9+\cos^2 3x}}dx$;

р) $\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$;

с) $\int \frac{x}{x^2+3x+3}dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-4x-x^2}}$;

у) $\int \frac{5x+7}{\sqrt{x^2+13x+43}}dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x^2\sin 7x dx$;

б) $\int x^2\ln x dx$;

в) $\int e^{2x}\sin x dx$;

г) $\int \sqrt{e^x-9}dx$;

д) $\int \sqrt{64-x^2}dx$;

е) $\int \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}dx$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3+x^2-2x}dx$;

б) $\int \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{x^4+x^3}dx$;

в) $\int \frac{x^5+x^4+5x^3+5x^2+7x\cdot}{x^4+5x^2+6}$

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{3-\cos x}$;

б) $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{2-\cos^2 x}$;

г) $\int \sin^3 x\cos^7 x\ dx$;

д) $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^{12} x}dx$;

е) $\int \cos^6 x\ dx$

ж) $\int \cos 3x\cos 6x\ dx$

## Варіант 5

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{e^x\sqrt{arctg(e^x)}}{1+e^{2x}}dx$;

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$;

в) $\int (4x-5)\sin(2x^2-5x+7)dx$;

г) $\int 2^{x^4}x^3dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sin^2(\sqrt{x}+4)}$;

е) $\int e^{\sin 3x}\cos 3x dx$;

ж) $\int \frac{1}{x}\cos(\ln x-1)dx$;

з) $\int \frac{x}{\cos^2(5x^2+1)}dx$;

и) $\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x-9)}dx$;

к) $\int x\cdot 2^{x^2}\cdot tg 2^{x^2}dx$;

л) $\int \frac{\sin 2x}{4-\cos^2 2x}dx$;

м) $\int \frac{7^x dx}{3+7^{2x}}$;

н) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^8+25}}dx$;

о) $\int ctg(2x-3)dx$;

п) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$;

р) $\int \frac{dx}{\sqrt{-2+4x+4x^2}}$;

с) $\int \frac{x+5}{\sqrt{4-4x^2-4x}}dx$;

т) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

у) $\int \frac{4x-1}{x^2-5x+6}dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x^2\cos 7x dx$;

б) $\int arctg 2x dx$;

в) $\int e^{3x}\cos x dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-4}}$;

д) $\int \frac{x^2}{\sqrt{81-x^2}}dx$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{4x^2-x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

б) $\int \frac{3x^4-4x^3-x^2-x-2}{x^4-2x^3}dx$;

г)

в) $\int \frac{8x}{x^4+10x^2+9}dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{2-2\sin x}$;

б) $\int \frac{\sin^5 x}{2+3\cos x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$;

г) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^8 x}dx$;

д) $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^{10} x}dx$;

е) $\int \sin^2 x\cos^2 x\, dx$

ж) $\int \sin 4x \sin 5x \; dx$

## Варіант 6

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{x^3 dx}{\sin^2(x^4-5)}$;

б) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+5}}$;

в) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} ctg\left(\sqrt{x}-3\right)dx$;

г) $\int \frac{2\cos^2 x \sin x}{\cos^3 x+2}dx$;

д) $\int 7^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}dx$;

е) $\int \frac{x}{25-x^4}dx$;

ж) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx$;

з) $\int (2x-3)\sin(x^2-3x+4)dx$;

и) $\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)}$;

к) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{4-\sin^2 2x}}dx$;

л) $\int 2^x \cos 2^x dx$;

м) $\int e^{arctg\, 2x} \frac{dx}{1+4x^2}$

н) $\int \frac{dx}{\sin^2(2x+7)}$;

о) $\int 5^x \frac{dx}{3+5^{2x}}$;

п) $\int \sin x \cdot tg(\cos x)dx$;

р) $\int \frac{dx}{x^2-5x-6}$;

с) $\int \frac{2x+3}{x^2+6x+12}dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-9x^2}}$;

у) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+12x+9}}dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x^2 e^{7x} dx$;

б) $\int \arcsin 2x dx$;

в) $\int e^{3x} \sin x dx$;

г) $\int \sqrt{e^{2x}-3} dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

е) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{x^4-6x^3+13x^2-15x+11}{x^3-6x^2+11x-6}dx$

б) $\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^3}dx$;

в) $\int \frac{2x}{x^4+6x^2+8}dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$;

б) $\int \frac{\cos^3 x}{1+2\sin x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$;

г) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$;

д) $\int \frac{\cos^8 x}{\sin^{14} x}dx$;

е) $\int \cos^6 3x \; dx$

ж) $\int \sin 3x \cos 2x \; dx$

## Варіант 7

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x^{3/2}}$;

б) $\int \frac{(2x-5)}{\sin^2(x^2-5x+4)}dx$;

в) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} tg(\sqrt{x}+2)dx$;

г) $\int \frac{x^3}{25-x^8}dx$;

д) $\int \frac{3^x dx}{\cos^2(3^x)}$;

е) $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}+4\right)}{x^2}dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sin(2x+4)}$;

з) $\int \frac{\sqrt{(1+arctg3x)^5}}{1+9x^2}dx$;

и) $\int 7^{tgx}\frac{dx}{\cos^2 x}$;

к) $\int \frac{1}{x}\cos(\ln x+5)dx$;

л) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{3-x}}$;

м) $\int e^{2x}ctg(e^{2x}+1)dx$

н) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+9}}$;

о) $\int e^{x^8}x^7dx$;

п) $\int \frac{10^x dx}{9+10^{2x}}$;

р) $\int \frac{dx}{x^2+3x+4}$;

с) $\int \frac{3x+3}{x^2+5x+6}dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-1}}$;

у) $\int \frac{x-7}{\sqrt{-x^2+10x-21}}dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x\sin 5xdx$;

б) $\int \arccos 3xdx$;

в) $\int e^x\cos 3xdx$;

г) $\int \sqrt{e^x-1}dx$;

д) $\int \sqrt{256-x^2}dx$;

е) $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{4x^2-2}{x^3-x}dx$

б) $\int \frac{x^6-2x^5+x^4+2x^2-2x+1}{x^4-2x^3+x^2}dx$;

в) $\int \frac{-4}{x^4+6x^2+5}dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$;

б) $\int \frac{\cos^5 x}{2-\sin x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+\cos^2 x}$;

г) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}dx$;

д) $\int \sin^5 x\cos^3 x\, dx$;

е) $\int \sin^2 3x\cos^6 3x\, dx$

ж) $\int \cos 3x \cos 4x \ dx$

## Варіант 8

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$;

б) $\int \frac{x}{\sin(5x^2+7)}dx$;

в) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$;

г) $\int e^{2x}\cos(e^{2x}-1)dx$;

д) $\int e^{ctg 3x}\frac{dx}{\sin^2 3x}$;

е) $\int tg(7-2x)dx$;

ж) $\int \frac{x^4}{16-x^{10}}dx$;

з) $\int \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$;

и) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x-5}}$;

к) $\int \frac{5^x dx}{\sin^2 5^x}$;

л) $\int \cos x \cdot ctg(1+\sin x)dx$;

м) $\int 7^{x^3}x^2 dx$;

н) $\int \frac{\arcsin^5 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

о) $\int \frac{(2x+5)}{\cos^2(x^2+5x+4)}dx$;

п) $\int \frac{\cos 3x \sin 3x}{\cos^2 3x+5}dx$;

р) $\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+6x+2}}$;

с) $\int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2+16x+22}}dx$;

т) $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$;

у) $\int \frac{3x-4}{4x^2+4x+10}dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x\cos 5x dx$;

б) $\int \ln(x^2+3)dx$;

в) $\int e^x \sin 3x dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-3}}$;

д) $\int \frac{x^2}{\sqrt{64-x^2}}dx$;

е) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}dx$.

*Завдання 3*. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{4x^2-9x+4}{x^3-3x^2+2x}dx$

б) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^4-2x^3+2x-1}dx$;

в) $\int \frac{3x^4+24x^2-6x+21}{x^4+8x^2+7}dx$.

*Завдання 4*. Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{1-2\sin x}$;

б) $\int \frac{\sin^5 x}{2+\cos x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$;

д) $\int \frac{\cos^8 x}{\sin^8 x} dx$;

е) $\int \sin^2 x \cos^4 x \; dx$

ж) $\int \sin 4x \sin 6x \; dx$

## Варіант 9

*Завдання 1*. Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int 5^x \cos(5^x + 10) dx$;

б) $\int 7^{\cos 3x} \sin 3x dx$;

в) $\int \frac{x^3}{9 - x^8} dx$;

г) $\int (x-2) tg(x^2 - 4x + 10) dx$;

д) $\int \frac{\sin(7 - \sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$;

е) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{\sin^2 2x - 4}}$;

ж) $\int \frac{e^{\arccos x} dx}{\sqrt{1 - x^2}}$;

з) $\int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)}$;

и) $\int ctg(7x + 2) dx$;

к) $\int \frac{2^x dx}{\cos^2 2^x}$;

л) $\int \sqrt[3]{7x - \sqrt{x}} \cdot \left(7 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$;

м) $\int \frac{x}{\sqrt{5 - x^4}} dx$;

н) $\int \frac{4 - \sin 2x}{8x + \cos 2x} dx$;

о) $\int \frac{dx}{\cos^2 x (9 + tg^2 x)}$;

п) $\int \frac{dx}{\sin(2x + 1)}$;

р) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$;

с) $\int \frac{x + 4}{x^2 + 3x + 2} dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 6}}$;

у) $\int \frac{3x - 5}{\sqrt{12x - 4x^2 - 5}} dx$.

*Завдання 2*. Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x e^{5x} dx$;

б) $\int x \cdot arctg 3x dx$;

в) $\int e^{2x} \sin 2x dx$;

г) $\int \sqrt{e^{2x} + 1} dx$;

д) $\int \sqrt{16 - x^2} dx$;

е) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$.

*Завдання 3*. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$

б) $\int \frac{1 - x^2 - x}{x^4 - x^3} dx$;

в) $\int \frac{3x^2 - 2x^3 - 4x + 15}{x^4 + 7x^2 + 10} dx$.

г)

*Завдання 4*. Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x}$;

б) $\int \frac{\cos^3 x}{2 + \sin x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{3+\cos^2 x}$;

г) $\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx$;

д) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$;

е) $\int \sin^6 3x \cos^2 3x \, dx$

ж) $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$

**Варіант 10**

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{x^3 dx}{\sin^2 x^4}$;

б) $\int \frac{5^{ctg 3x} dx}{\sin^2 3x}$;

в) $\int \cos 5x \cdot \sqrt[5]{\sin^7 5x} dx$;

г) $\int x \sin(x^2+7) dx$;

д) $\int \frac{x^2}{4-x^6} dx$;

е) $\int e^{2x} ctg(e^{2x}) \, dx$;

ж) $\int e^{\cos 5x} \sin 5x dx$;

з) $\int \frac{\cos(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}} dx$;

и) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1-tg^2 x}}$;

к) $\int tg(3^x) \cdot 3^x dx$;

л) $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+16)}$;

м) $\int \frac{14}{\cos^2(7x-2)} dx$;

н) $\int \frac{dx}{\sin^2 x(ctgx+7)}$;

о) $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^{10}-5}} dx$;

п) $\int \frac{\sin 2x}{\sin(\cos 2x)} dx$;

р) $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$;

с) $\int \frac{2x+7}{x^2+10x+29} dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x+5}}$;

у) $\int \frac{x-3}{\sqrt{9x^2+6x-1}} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x^2 \sin 5x dx$;

б) $\int x^3 \ln x dx$;

в) $\int e^{2x} \cos 2x dx$;

г) $\int \sqrt{e^x - 4} dx$;

д) $\int \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} dx$;

е) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{3x^2-2x-2}{x^3-x^2-2x} dx$

б) $\int \frac{x^5+x^4-x^2+x+1}{x^4+x^3} dx$;

в) $\int \frac{14}{x^4+11x^2+18} dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$;

б) $\int \frac{\cos^5 x}{1+2\sin x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$;

г) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} dx$;

д) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx$;

е) $\int \sin^4 2x \cos^2 2x \ dx$

ж) $\int \cos 5x \cos 3x \ dx$

## Варіант 11

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int (4 + 3x^2)^{15} x dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} \sin \sqrt[3]{x}}$;

в) $\int 3^{2x} \sin 3^{2x} dx$;

г) $\int \frac{x^3}{4 + x^8} dx$;

д) $\int \cos(3 + 2x) dx$;

е) $\int \frac{\sin 6x}{1 + \cos^2 3x} dx$;

ж) $\int \frac{x^3}{\cos^2 x^4} dx$;

з) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{4 - e^{4x}}} dx$;

и) $\int \frac{e^{tgx} dx}{\cos^2 x}$;

к) $\int \frac{x}{9 - x^4} dx$;

л) $\int (1 + 2x) \cdot ctg(x + x^2) dx$;

м) $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{5 + arctg^2 x}}$;

н) $\int 3^{\sin 2x} \cos 2x dx$;

о) $\int \sin 2x \cdot tg(\cos 2x) dx$;

п) $\int \frac{(x + 1)}{\sin^2(5 + 2x + x^2)} dx$;

р) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 17}}$;

с) $\int \frac{2x + 3}{\sqrt{6x - x^2}} dx$;

т) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}$;

у) $\int \frac{5x + 4}{x^2 + 5x - 6} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x^2 \cos 5x dx$;

б) $\int arctg 3x dx$;

в) $\int e^{5x} \cos 3x dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 2}}$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$;

е) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx$

б) $\int \frac{x^3 + x - 2}{x^4 - 2x^3} dx$;

в) $\int \frac{x^5 + 3x^3 + 2x + 1}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{1+3\sin x}$;

б) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2}$;

г) $\int \sin^3 x\cos^3 x\ dx$;

д) $\int \frac{\cos^8 x}{\sin^{12} x}dx$;

е) $\int \cos^4 x\ dx$

ж) $\int \sin 3x \sin 6x\ dx$

**Варіант 12**

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

б) $\int \frac{1}{x}tg(\ln 2x)\ dx$;

в) $\int \frac{7^x dx}{\sin^2 7^x}$;

г) $\int \sqrt[5]{\sin^3 x}\cdot \cos x dx$;

д) $\int \frac{x^2}{\sin(x^3+5)}dx$;

е) $\int x\cos(3-4x^2)dx$;

ж) $\int \frac{\sin 3x}{1+\cos^2 3x}dx$;

з) $\int \cos(1+3x)dx$;

и) $\int \frac{e^{4x}}{4+e^{4x}}dx$;

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2(4+\sqrt{x})}$;

л) $\int \frac{x}{\sqrt{16-x^4}}dx$;

м) $\int \frac{e^{tg\,2x}dx}{\cos^2 2x}$;

н) $\int \frac{\sin 2x}{9-\cos^2 2x}dx$;

о) $\int x^3\cdot ctg(x^4)dx$;

п) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x\sqrt{ctg^2 3x-9}}$;

р) $\int \frac{dx}{x^2-x-6}$;

с) $\int \frac{4x-5}{4x^2+4x+10}dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$;

у) $\int \frac{7x-1}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x^2 e^{5x}dx$;

б) $\int \arcsin 3x dx$;

в) $\int e^{2x}\sin 3x dx$;

г) $\int \sqrt{e^{3x}+1}\ dx$;

д) $\int \sqrt{81-x^2}\ dx$;

е) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}dx$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{x^5-x^2+x-1}{x^3-x}dx$

б) $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{x^4+2x^3}dx$;

в) $\int \frac{-3}{x^4+5x^2+4}dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$;

б) $\int \frac{\cos^3 x}{3+\sin x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$;

г) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^9 x} dx$;

д) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^{14} x} dx$;

е) $\int \sin^2 3x \cos^2 3x \ dx$

ж) $\int \sin 3x \cos 5x \ dx$

**Варіант 13**

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{dx}{\arcsin^3 x \cdot \sqrt{1-x^2}}$;

б) $\int \frac{x}{\sin x^2} dx$;

в) $\int \frac{x}{(x^2+4)\ln(x^2+4)} \ dx$;

г) $\int \frac{e^{ctg 2x} dx}{\sin^2 2x}$;

д) $\int \frac{x}{\sqrt{16+x^4}} dx$;

е) $\int 7^{\sin 2x} \cos 2x \ dx$;

ж) $\int \frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x} dx$;

з) $\int \cos(1+3x) dx$;

и) $\int \frac{ctg \sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^2}} dx$;

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2(4+\sqrt{x})}$;

л) $\int \frac{\cos 3x}{25+\sin^2 3x} dx$;

м) $\int (x^2-2)\cos(x^3-6x+1) dx$;

н) $\int \frac{2}{x^3} tg \frac{1}{x^2} dx$;

о) $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+1)} dx$;

п) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sin^2(ctgx)}$;

р) $\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$;

с) $\int \frac{x+6}{x^2-4x+3} dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{15+8x+x^2}}$;

у) $\int \frac{3x+7}{\sqrt{6x-x^2-5}} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x \sin 3x dx$;

б) $\int \arccos 4x dx$;

в) $\int e^{3x} \cos 2x dx$;

г) $\int \sqrt{e^{3x}-2} \ dx$;

д) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{5x^2-10x+4}{x^3-3x^2+2x} dx$;

б) $\int \frac{x^5-x^4-x^2-x+1}{x^4-2x^3+x^2} dx$;

в) $\int \frac{3x^2+7}{x^4+4x^2+3} dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{2-\cos x}$;

б) $\int \frac{\cos^5 x}{1+\sin x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 7\cos^2 x}$;

г) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^{10} x}dx$;

д) $\int \sin^4 x \cos^3 x \ dx$;

е) $\int \sin^6 2x \ dx$

ж) $\int \cos 3x \cos 2x \ dx$

**Варіант 14**

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{\sin(\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}}dx$;

б) $\int \frac{dx}{(\arcsin 2x + 3)\cdot\sqrt{1-4x^2}}$;

в) $\int \frac{e^{\arccos 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}dx$;

г) $\int (x+2)\cdot ctg(x^2+4x-1)dx$;

д) $\int \frac{5}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}+7\right)dx$;

е) $\int \sqrt[7]{\cos^5 2x}\cdot\sin 2x dx$;

ж) $\int \frac{3^x dx}{\cos^2 3^x}$;

з) $\int \frac{x}{25-x^4}dx$;

и) $\int x^2\cdot 5^{x^3}dx$;

к) $\int \frac{dx}{\sin^2(3-2x)}$;

л) $\int \frac{tg(\sqrt[3]{x}+3)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

м) $\int \frac{\cos 5x}{25+\sin^2 5x}dx$;

н) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\cdot\sqrt{9-tg^2 x}}$;

о) $\int \frac{x^3}{\sin x^4}dx$;

п) $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt{4+\cos^2 4x}}dx$;

р) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$;

с) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{4x^2-4x+6}}dx$;

т) $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$;

у) $\int \frac{7x+1}{x^2+8x+20}dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x\cos 3x dx$;

б) $\int \ln(x^2+4)dx$;

в) $\int e^{3x}\sin 2x dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}+3}}$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$;

е) $\int \frac{2dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{4x^2+x-2}{x^3+x^2-2x}dx$;

б) $\int \frac{-x^3+4x^2-x+2}{x^4-2x^3+2x-1}dx$;

в) $\int \frac{-x^5+x^4-5x^3+5x^2-6x+6}{x^4+4x^2+3}dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$;

б) $\int \frac{\sin^5 x}{1-2\cos x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$;

г) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx$;

д) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^{12} x} dx$;

е) $\int \sin^2 2x \cos^6 2x\ dx$

ж) $\int \sin 3x \sin 5x\ dx$

**Варіант 15**

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{x \cdot \sqrt{arctgx^2}}{x^4+1}\ dx$;

б) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{3-\ln^2 x}}$;

в) $\int (1-2x)\sin(x-x^2)dx$;

г) $\int x^3 \cdot 3^{x^4} dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sin^2(\sqrt{x}+2)}$;

е) $\int e^{\sin 3x} \cdot \cos 3x dx$;

ж) $\int \frac{\cos(\ln x+5)}{x} dx$;

з) $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+3)} dx$;

и) $\int \frac{\ln x}{x \cdot (\ln^2 x+5)} dx$;

к) $\int x \cdot 5^{x^2} \cdot tg(5^{x^2})dx$;

л) $\int \frac{\sin 3x}{4-\cos^2 3x} dx$;

м) $\int \frac{2^x}{3+2^{2x}} dx$;

н) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^8}} dx$;

о) $\int ctg(1+3x)dx$;

п) $\int \frac{x}{\sin 2x^2} dx$;

р) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+4}$;

с) $\int \frac{x+6}{x^2+2x-3} dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x+10}}$;

у) $\int \frac{4x+3}{\sqrt{1+4x-x^2}} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x \cdot e^{3x} dx$;

б) $\int x \cdot arctg 4x dx$;

в) $\int e^x \cos 4x dx$;

г) $\int \sqrt{e^{2x}-1}\ dx$;

д) $\int \sqrt{9-x^2}\ dx$;

е) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} dx$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{x^4-x^3+3x-2}{x^3-x^2-2x} dx$;

б) $\int \frac{2x-1}{x^4-x^3} dx$;

в) $\int \frac{x^3+x^2+x+9}{x^4+10x^2+9} dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x}$;

б) $\int \frac{\cos^3 x}{1+3\sin x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{2+4\cos^2 x}$;

г) $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$;

д) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx$;

е) $\int \cos^4 3x \, dx$

ж) $\int \sin 3x \cos 4x \, dx$

## Варіант 16

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{x^2}{\sin^2(x^3+1)} dx$;

б) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{e^{2x}+3}} dx$;

в) $\int \frac{ctg(\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}} dx$;

г) $\int \frac{5x^4+8x}{x^5+8x^2+1} dx$;

д) $\int 5^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{dx}{x^2}$;

е) $\int \frac{x}{16-x^4} dx$;

ж) $\int \sin 3x \cdot tg(\cos 3x) dx$;

з) $\int (5x-x^2)\sin\left(4+\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right) dx$;

и) $\int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} dx$;

к) $\int \frac{3dx}{x \cdot \cos^2(\ln 2x)}$;

л) $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{4-\sin^2 3x}} dx$;

м) $\int 3^x \cdot \cos(3^x) \, dx$;

н) $\int e^{arctg\, 2x} \frac{dx}{1+4x^2}$;

о) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-1)}$;

п) $\int \frac{7^x}{7+7^{2x}} dx$;

р) $\int \frac{2dx}{x^2+2x+3}$;

с) $\int \frac{3x+1}{x^2-3x+2} dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$;

у) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{7+6x+x^2}} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x^2 \sin 3x \, dx$;

б) $\int x^4 \cdot \ln x \, dx$;

в) $\int e^x \sin 4x \, dx$;

г) $\int \sqrt{e^x - 3} \, dx$;

д) $\int \frac{x^2}{\sqrt{49-x^2}} dx$;

е) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-6x^2+11x-6} dx$;

б) $\int \frac{x^5+3x^4+x^3+x+1}{x^4+x^3} dx$;

в) $\int \frac{2}{x^4+6x^2+8} dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$;

б) $\int \frac{\cos^5 x}{1-2\sin x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$;

г) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}dx$;

д) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^6 x}dx$;

е) $\int \sin^2 3x\cos^4 3x\ dx$

ж) $\int \cos 2x\cos 7x\ dx$

**Варіант 17**

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{4+\sqrt{x^3}}dx$;

б) $\int \frac{x^2}{\sin^2(1-2x^3)}dx$;

в) $\int \frac{tg(\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

г) $\int \frac{x^3}{16-x^8}dx$;

д) $\int 4^x \cdot \frac{dx}{\cos^2 4^x}$;

е) $\int \frac{1}{x^2}\sin\left(1+\frac{1}{x}\right)\ dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sin(4x-1)}$;

з) $\int \frac{\sqrt{(1+arctg 2x)^3}}{4x^2+1}\ dx$;

и) $\int 5^{tgx}\frac{dx}{\cos^2 x}$;

к) $\int \frac{\cos(\ln 3x)}{x}\ dx$;

л) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{5-x}}$;

м) $\int ctg(e^{2x}+5)\cdot e^{2x}dx$;

н) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^6}}dx$;

о) $\int x^4\cdot e^{x^5}dx$;

п) $\int \frac{5^x}{9+5^{2x}}dx$;

р) $\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$;

с) $\int \frac{4}{x^2-5x+6}dx$;

т) $\int \frac{x-5}{x^2+5x+7}\ dx$;

у) $\int \frac{4x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x^2\cos 3x\ dx$;

б) $\int arctg 4x\ dx$;

в) $\int e^{3x}\sin 3x\ dx$;

г) $\int \sqrt{e^{3x}+4}\ dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$;

е) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

*Завдання 3*. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{x^2-4x+1}{x^3-x}dx$;

б) $\int \frac{2x^2-x+2}{x^4-2x^3}dx$;

в) $\int \frac{x^5+x^4+7x^3+5x^2+10x+4}{x^4+6x^2+5}dx$.

г)

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int\frac{dx}{2+\sin x}$;

б) $\int\frac{\sin^5 x}{1+2\cos x}dx$;

в) $\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}$;

г) $\int\sin^6 x\cos^3 x\ dx$;

д) $\int\frac{\sin^4 x}{\cos^{10} x}dx$;

е) $\int\sin^4 2x\ dx$

ж) $\int\sin 3x\sin 4x\ dx$

**Варіант 18**

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{5-\ln^2 x}}$;

б) $\int\frac{9x^2}{\sin(6x^3+3)}dx$;

в) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$;

г) $\int\cos(e^{3x}-5)\cdot e^{3x}dx$;

д) $\int 5^{ctg 2x}\frac{dx}{\sin^2 2x}$;

е) $\int tg(3-x)\ dx$;

ж) $\int\frac{x^4}{9-x^{10}}dx$;

з) $\int\frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$;

и) $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 2x-5}}dx$;

к) $\int\frac{3^{2x}dx}{\sin^2 3^{2x}}$;

л) $\int\sin x\cdot ctg(1+\cos x)dx$;

м) $\int x^2\cdot 4^{x^3}dx$;

н) $\int\frac{\arcsin^3 4x}{\sqrt{1-16x^2}}\ dx$;

о) $\int\frac{x}{\cos^2(x^2+5)}dx$;

п) $\int\frac{\sin 4x\cos 4x}{9+\sin^2 4x}dx$;

р) $\int\frac{dx}{x^2+2x+3}$;

с) $\int\frac{3x+5}{2x^2+5x-3}\ dx$;

т) $\int\frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$;

у) $\int\frac{5x-1}{\sqrt{9+4x+x^2}}dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x^2 e^{3x}\ dx$;

б) $\int\arcsin 4x\ dx$;

в) $\int e^{3x}\cos 3x\ dx$;

г) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-2}}$;

д) $\int\sqrt{25-x^2}\ dx$;

е) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int\frac{-2x^3+5x^2-2}{x^3-3x^2+2x}dx$;

б) $\int\frac{-2x^2+x+2}{x^4+2x^3}dx$;

в) $\int\frac{dx}{x^4+8x^2+7}$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x}$;

б) $\int \frac{\sin^3 x}{1+4\cos x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{1-3\cos^2 x}$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x} dx$;

д) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^8 x} dx$;

е) $\int \sin^4 x \cos^6 x \; dx$

ж) $\int \sin 3x \cos 7x \; dx$

**Варіант 19**

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int 3^x \cdot \cos(3^x + 2) \; dx$;

б) $\int 5^{\cos 2x} \cdot \sin 2x dx$;

в) $\int (x-3) \cdot tg(1-6x+x^2) dx$;

г) $\int \frac{x^2}{4-x^6} \; dx$;

д) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(5-\sqrt{x}) \; dx$;

е) $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{\sin^2 3x - 16}} dx$;

ж) $\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

з) $\int \frac{dx}{x \cdot \sin^2(\ln 2x)}$;

и) $\int ctg(3x+4) \; dx$;

к) $\int \frac{4^x dx}{\cos^2 4^x}$;

л) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}} dx$;

м) $\int \sqrt[5]{5x-\sqrt{x}} \cdot \left(5 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$;

н) $\int \frac{16x + 3\cos 3x}{8x^2 + \sin 3x} dx$;

о) $\int \frac{\sec^2 x}{4 + tg^2 x} dx$;

п) $\int \frac{x}{\sin(x^2+5)} dx$;

р) $\int \frac{5dx}{2x^2+2x-1}$;

с) $\int \frac{2x-3}{x^2+3x+3} \; dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-4x-x^2}}$;

у) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{43+13x+x^2}} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x \sin 4x \; dx$;

б) $\int \arccos 5x \; dx$;

в) $\int e^x \cos 5x \; dx$;

г) $\int \sqrt{e^x - 4} \; dx$;

д) $\int \frac{x^2}{\sqrt{36-x^2}} dx$;

е) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{x^2+4x-2}{x^3+x^2-2x} dx$;

б) $\int \frac{x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} dx$;

в) $\int \frac{3x}{x^4+7x^2+10} dx$.

*Завдання 4*. Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{1-3\cos x}$;

б) $\int \frac{\cos^5 x}{2+3\sin x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$;

г) $\int \frac{\sin^8 x}{\cos^8 x}dx$;

д) $\int \sin^3 x\cos^2 x\ dx$;

е) $\int \sin^4 3x\cos^2 3x\ dx$;

ж) $\int \cos 2x\cos 5x\ dx$.

## Варіант 20

*Завдання 1*. Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx$;

б) $\int 7^{ctg 2x}\frac{dx}{\sin^2 2x}$;

в) $\int \sqrt[3]{\sin^4 2x}\cdot\cos 2x\ dx$;

г) $\int (x+1)\cdot\sin(x^2+2x)dx$;

д) $\int \frac{x^3}{9-x^8}dx$;

е) $\int e^{3x}ctg(e^{3x})\ dx$;

ж) $\int e^{\sin 2x}\cdot\cos 2x dx$;

з) $\int \frac{\cos(\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}}dx$;

и) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x\cdot\sqrt{1-tg^2 3x}}$;

к) $\int 7^x\cdot tg(7^x)\ dx$;

л) $\int \frac{dx}{x\cdot(\ln^2 x+4)}$;

м) $\int \frac{x}{\cos^2(x^2+2)}dx$;

н) $\int \frac{\cos ec^2 3x}{3+ctg 3x}dx$;

о) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-3}}dx$;

п) $\int \frac{\sin 3x}{\sin(\cos 3x)}dx$;

р) $\int \frac{3dx}{x^2+4x+8}$;

с) $\int \frac{6x+3}{x^2-5x+6}\ dx$;

т) $\int \frac{4dx}{\sqrt{4x^2+4x-2}}$;

у) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4-4x-4x^2}}dx$.

*Завдання 2*. Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x\cos 4x\ dx$;

б) $\int \ln(5+x^2)\ dx$;

в) $\int e^x\sin 5x\ dx$;

г) $\int \sqrt{e^x+2}\ dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$;

е) $\int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$.

*Завдання 3*. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{x^2+2}{x^3-x^2-2x}dx$;

б) $\int \frac{2x^3-6x^2+7x-1}{x^4-2x^3+2x-1}dx$;

в) $\int \frac{-x^5+x^4-11x^3+11x^2}{x^4+11x^2+18}$

.

*Завдання 4*. Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{2+2\sin x}$;

б) $\int \frac{\sin^3 x}{2-\cos x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+1}$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}dx$;

д) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^{10} x}dx$;

е) $\int \cos^4 2x\ dx$;

ж) $\int \sin 2x \sin 4x\ dx$.

## Варіант 21

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int (1+x^3)^5 x^2 dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cdot \sin^2 \sqrt[3]{x}}$;

в) $\int 3^x \sin(3^x)\ dx$;

г) $\int \frac{x^4}{4+x^{10}}\ dx$;

д) $\int \cos(3+2x)\ dx$;

е) $\int \frac{\sin 2x \cos 2x}{1+\cos^2 2x}dx$;

ж) $\int \frac{x}{\cos^2 x^2}dx$;

з) $\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{9-e^{6x}}}$;

и) $\int e^{tg 4x}\cdot \sec^2 4x\ dx$;

к) $\int \frac{x^3}{16-x^8}dx$;

л) $\int (2x-3)\cdot ctg(x^2-3x+1)dx$;

м) $\int \frac{dx}{(9x^2+1)\cdot \sqrt{1+arctg 3x}}$;

н) $\int \sin x \cdot tg(\cos x) dx$;

о) $\int \frac{x}{\sin^2(3-x^2)}dx$;

п) $\int 3^{\sin 2x}\cdot \cos 2x dx$;

р) $\int \frac{4dx}{x^2+5x-6}$;

с) $\int \frac{3x-1}{x^2+6x+10}\ dx$;

т) $\int \frac{9dx}{\sqrt{6x-9x^2}}$;

у) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9+12x+4x^2}}dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int xe^{4x}\ dx$;

б) $\int x\cdot arctg 5x\ dx$;

в) $\int e^{2x}\cos 4x\ dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-5}}$;

д) $\int \sqrt{49-x^2}\ dx$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{-x^4+6x^3-11x^2+3x+7}{x^3-6x^2+11x-6}dx$;

б) $\int \frac{-x^3+x-1}{x^4-x^3}dx$;

в) $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^4+3x^2+2}dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x}$;

б) $\int \frac{\sin^5 x}{1+\cos x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 2}$;

г) $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x} dx$;

д) $\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx$;

е) $\int \sin^6 3x \, dx$;

ж) $\int \sin 2x \cos 5x \, dx$.

**Варіант 22**

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int 4^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

б) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x \cdot \sqrt{ctg^2 3x - 4}}$;

в) $\int \frac{tg(\ln 2x)}{x} dx$;

г) $\int \sqrt[7]{\sin^8 3x} \cdot \cos 3x \, dx$;

д) $\int \frac{3^x}{\sin^2(3^x)} dx$;

е) $\int \frac{x^2+1}{\sin(3x+x^3)} dx$;

ж) $\int \frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$;

з) $\int \frac{\sin 4x}{4+\cos^2 4x} dx$;

и) $\int \cos(2+3x) \, dx$;

к) $\int \frac{e^{5x}}{7+e^{5x}} \, dx$;

л) $\int \frac{x}{\cos^2(1-x^2)} dx$;

м) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}} dx$;

н) $\int e^{tg\, 2x} \frac{dx}{\cos^2 2x}$;

о) $\int \frac{\sin 2x}{9 - \cos^2 2x} dx$;

п) $\int (3x^2+1) \cdot ctg(x^3+x) dx$;

р) $\int \frac{3dx}{x^2+3x+4}$;

с) $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2+6x-1}}$;

т) $\int \frac{2x+15}{x^2+5x+6} \, dx$;

у) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{10x - x^2 - 21}} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x^2 \sin 4x \, dx$;

б) $\int x^5 \cdot \ln x \, dx$;

в) $\int e^{2x} \sin 4x \, dx$;

г) $\int \sqrt{e^{3x} - 1} \, dx$;

д) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$;

е) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}} \, dx$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{3x-1}{x^3-x} dx$;

б) $\int \frac{x^6+x^5+x^3-x-1}{x^4+x^3} dx$;

в) $\int \frac{2x^3-x^2+2x-1}{x^4+5x^2+4} dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{3\cos x + 2}$;

б) $\int \frac{\cos^3 x}{2 - \sin x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{9\cos^2 x + \sin^2 x}$;

г) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} dx$;

д) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^{12} x} dx$;

е) $\int \sin^2 2x \cos^4 2x \, dx$;

ж) $\int \cos 2x \cos 5x \, dx$.

## Варіант 23

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{\sec^2 x}{\sin^2(tgx)} dx$;

б) $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3 + 2)} dx$;

в) $\int tg\sqrt{x} \, \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

г) $\int \frac{5^x dx}{\sqrt{4 - 5^{2x}}}$;

д) $\int x^3 \cos(x^4 - 4) \, dx$;

е) $\int \frac{\cos 3x}{4 + \sin^2 3x} dx$;

ж) $\int \frac{1}{x^2} \cdot ctg\left(\frac{1}{x}\right) dx$;

з) $\int e^{2x} \cdot \sin e^{2x} \, dx$;

и) $\int \frac{\sin 2x}{9 - \cos^2 2x} dx$;

к) $\int 7^{\cos x} \sin x \, dx$;

л) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^6}} dx$;

м) $\int \frac{x^3}{\sin(1 + x^4)} dx$;

н) $\int e^{ctg 2x} \frac{dx}{\sin^2 2x}$;

о) $\int \frac{dx}{(2x + 3) \cdot \ln(x^2 + 3x - 1)}$;

п) $\int \frac{dx}{(\arccos x)^3 \cdot \sqrt{1 - x^2}}$;

р) $\int \frac{3dx}{\sqrt{-9x^2 + 6x + 2}}$;

с) $\int \frac{4dx}{x^2 + x - 2}$;

т) $\int \frac{5x + 2}{4x^2 + 4x + 10} \, dx$;

у) $\int \frac{3x - 1}{\sqrt{10x + x^2 + 22}} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x^2 \cos 4x \, dx$;

б) $\int arctg 5x \, dx$;

в) $\int e^{3x} \sin 4x \, dx$;

г) $\int \sqrt{e^x + 9} \, dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{(6 + x^2)^3}}$;

е) $\int \frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}} \, dx$.

*Завдання 3*. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{-x^2 + 2x - 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$;

б) $\int \frac{x^3 - x - 2}{x^4 - 2x^3} dx$;

в) $\int \frac{x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 6}{x^4 + 4x^2 + 3} dx$.

*Завдання 4*. Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{2-\sin x}$;

б) $\int \frac{\sin^3 x}{1+3\cos x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{2+2\sin^2 x}$;

г) $\int \sin^6 x \cos^5 x\ dx$;

д) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^{12} x}dx$;

е) $\int \cos^6 2x\ dx$;

ж) $\int \sin 2x \sin 6x\ dx$.

## Варіант 24

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{1}{x^2}\cdot \sin\left(3+\frac{1}{x}\right)dx$;

б) $\int \frac{dx}{(\arccos x+3)\cdot\sqrt{1-x^2}}$;

в) $\int e^{\arcsin x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

г) $\int x^2\cdot ctg(x^3+4)\ dx$;

д) $\int \cos\left(\sqrt{x}+1\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

е) $\int \sqrt[3]{\cos^5 3x}\cdot \sin 3x\ dx$;

ж) $\int \frac{7^x}{\cos^2(7^x)}dx$;

з) $\int \frac{x^2}{4-x^6}dx$;

и) $\int x^3\cdot 8^{x^4}\ dx$;

к) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+7)}$;

л) $\int \frac{tg(\sqrt[5]{x^3}+3)}{\sqrt[5]{x^2}}dx$;

м) $\int \frac{\cos 4x}{4+\sin^2 4x}dx$;

н) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\sqrt{9-ctg^2 x}}$;

о) $\int \frac{x}{\sin(4+x^2)}dx$;

п) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{25+\sin^2 2x}}dx$;

р) $\int \frac{dx}{x^2+4x+7}$;

с) $\int \frac{3x-2}{x^2+3x+2}\ dx$;

т) $\int \frac{5dx}{\sqrt{4x^2-4x+6}}$;

у) $\int \frac{4x-1}{\sqrt{12x-4x^2-5}}dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x^2 e^{4x}\ dx$;

б) $\int \arcsin 5x\ dx$;

в) $\int e^{3x}\cos 4x\ dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-9}}$;

д) $\int \sqrt{36-x^2}\ dx$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}}$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{x^4-x^2-x-2}{x^3+x^2-2x}dx$;

б) $\int \frac{-x^2+4x+4}{x^4+2x^3}dx$;

в) $\int \frac{x^3+x^2+3x+3}{x^4+5x^2+6}dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$;

б) $\int \frac{\sin^3 x}{3+\cos x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}$;

г) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$;

д) $\int \sin^3 x \cos^5 x \, dx$;

е) $\int \sin^4 3x \cos^4 3x \, dx$;

ж) $\int \sin 2x \sin 3x \, dx$.

## Варіант 25

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{x}{\sin(2+x^2)}dx$;

б) $\int ctg(3x+1)\,dx$;

в) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^6}}\,dx$;

г) $\int \frac{5^x\,dx}{4+5^{2x}}$;

д) $\int \frac{\cos 2x}{9-\sin^2 2x}dx$;

е) $\int x\cdot 3^{x^2}\cdot tg(3^{x^2})\,dx$;

ж) $\int \frac{\cos 2x + 1}{\sin 2x + 2x + 3}dx$;

з) $\int \frac{dx}{x\cdot\cos^2(\ln x)}$;

и) $\int x\cdot\cos(x^2+4)\,dx$;

к) $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

л) $\int \frac{x^2}{\sin^2(x^3-1)}dx$;

м) $\int 5^{\sin 3x}\cdot\cos 3x dx$;

н) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{5-\ln^2 x}}$;

о) $\int (3x^2-2)\cdot\sin(x^3-2x)\,dx$;

п) $\int \frac{e^x\cdot\sqrt{arctg^3 e^x}}{e^{2x}+1}\,dx$;

р) $\int \frac{7dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$;

с) $\int \frac{3x-2}{x^2+10x+29}\,dx$;

т) $\int \frac{3dx}{x^2-x+2}$;

у) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{9x^2+6x-1}}dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x\sin 2x\,dx$;

б) $\int \arccos 7x\,dx$;

в) $\int e^x\cos 7x\,dx$;

г) $\int \sqrt{e^{2x}+4}\,dx$;

д) $\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx$;

е) $\int \frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}\,dx$.

*Завдання 3*. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{-x-4}{x^3-x^2-2x}dx$;

б) $\int \frac{x^5-2x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4-2x^3+x^2}dx$;

в) $\int \frac{8}{x^4+10x^2+9}dx$.

*Завдання 4*. Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{3-2\cos x}$;

б) $\int \frac{\cos^3 x}{1+4\sin x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 5\cos^2 x}$;

г) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx$;

д) $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^{12} x} dx$;

е) $\int \sin^4 x \; dx$;

ж) $\int \cos 2x \cos 4x \; dx$.

**Варіант 26**

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{3^x dx}{5+3^{2x}}$;

б) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-1)}$;

в) $\int e^{arctg 3x} \frac{dx}{1+9x^2}$;

г) $\int 5^x \cdot \cos(5^x) \; dx$;

д) $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{9-\cos^2 5x}} dx$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}}$;

ж) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}} dx$;

з) $\int \frac{tg(\ln x)}{x} dx$;

и) $\int (2x^3+1) \cdot \sin(x^4+2x) \; dx$;

к) $\int \frac{x}{16-x^4} dx$;

л) $\int 4^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{dx}{x^2}$;

м) $\int \frac{ctg(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} dx$;

н) $\int \frac{8\cos^3 x \sin x}{\cos^4 x + 4} dx$;

о) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{(e^{2x}+3)^2}} \; dx$;

п) $\int \frac{x^2}{\sin^2(5+x^3)} dx$;

р) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+20}}$;

с) $\int \frac{3}{x^2+6x+18} \; dx$;

т) $\int \frac{3x+1}{x^2+5x-6} \; dx$;

у) $\int \frac{x+4}{\sqrt{6x-x^2}} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x \cos 2x \; dx$;

б) $\int \ln(x^2+7) \; dx$;

в) $\int e^x \sin 7x \; dx$;

г) $\int \sqrt{e^x+3} \; dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{dx}{x^3-6x^2+11x-6}$;

б) $\int \frac{x^3-2x^2+2x-3}{x^4-2x^3+2x-1} dx$;

в) $\int \frac{x^6+6x^4+x^3+6x^2+2x-8}{x^4+6x^2+8} dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{2+3\sin x}$;

б) $\int \frac{\sin^5 x}{2-\cos x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{1-3\sin^2 x}$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} dx$;

д) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x} dx$;

е) $\int \sin^4 2x \cos^4 2x \; dx$;

ж) $\int \sin 2x \sin 3x \; dx$.

**Варіант 27**

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{2^x dx}{9+2^{2x}}$;

б) $\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$;

в) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^6}} dx$;

г) $\int \frac{ctg(\ln x+1)}{x} \; dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{9-x}}$;

е) $\int e^x \cdot \cos(e^x) \; dx$;

ж) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}} dx$;

з) $\int \frac{dx}{\sin(6+2x)}$;

и) $\int \frac{\sqrt{(3+arctg 2x)^3}}{4x^2+1} \; dx$;

к) $\int 4^x \cdot \cos(4^x) \; dx$;

л) $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \cos^2 \frac{1}{x}}$;

м) $\int \frac{x^4}{16-x^{10}} dx$;

н) $\int \frac{tg(\sqrt[5]{x^3}+4)}{\sqrt[5]{x^2}} dx$;

о) $\int \frac{x^2-1}{\sin^2(x^3-3x)} \; dx$;

п) $\int \frac{2x+2\cos 2x+1{,}5\sqrt{x}}{x^2+\sin 2x+\sqrt{x^3}} dx$;

р) $\int \frac{10}{x^2-x-6} \; dx$;

с) $\int \frac{3x+1}{4x^2+4x+10} \; dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$;

у) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x \cdot e^{2x} \; dx$;

б) $\int x \cdot arctg 7x \; dx$;

в) $\int e^{2x} \cos 5x \; dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+9}}$;

д) $\int \sqrt{4-x^2} \; dx$;

е) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}} \; dx$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{-x^4+2x^3+3x^2-x+1}{x^3-x} \; dx$;

б) $\int \frac{2x^3-1}{x^4-x^3} dx$;

в) $\int \frac{-4x}{x^4+6x^2+5} dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x}$;

б) $\int \frac{\sin^3 x}{1 + 2\cos x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{2 + \cos^2 x}$;

г) $\int \sin^3 x \cos^6 x \, dx$;

д) $\int \frac{\sin^8 x}{\cos^{12} x} dx$;

е) $\int \sin^6 x \, dx$;

ж) $\int \sin 2x \cos 6x \, dx$.

**Варіант 28**

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{\cos 4x \sin 4x}{\cos^2 4x + 3} dx$;

б) $\int \frac{x^3}{\cos^2(x^4 + 1)} dx$;

в) $\int \frac{(\arccos x)^7}{\sqrt{1 - x^2}} dx$;

г) $\int x \cdot 6^{x^2} dx$;

д) $\int \sin x \cdot ctg(3 - \sin x) \, dx$;

е) $\int \frac{7^x}{\sin^2(7^x)} dx$;

ж) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{3 + \sin^2 x}} dx$;

з) $\int \sin(3x - 3) dx$;

и) $\int \frac{x^3}{9 - x^8} dx$;

к) $\int tg\left(\frac{1}{x} + 2\right) \frac{dx}{x^2}$;

л) $\int e^{ctg 2x} \frac{dx}{\sin^2 2x}$;

м) $\int \frac{\cos(e^{-x})}{e^x} dx$;

н) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (4 + x)}$;

о) $\int \frac{dx}{\sin(4 + 3x)}$;

п) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{5 - \ln^2 3x}}$;

р) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$;

с) $\int \frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 3} dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{17 + 8x + x^2}}$;

у) $\int \frac{2x + 3}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x \cdot \sin 2x \, dx$;

б) $\int x^7 \cdot \ln x \, dx$;

в) $\int e^{2x} \sin 5x \, dx$;

г) $\int \sqrt{e^{3x} - 4} \, dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{(9 + x^2)^3}}$;

е) $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$.

*Завдання 3.* Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{-3x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$;

б) $\int \frac{x^6 + 2x^5 + 2x^4 + x^3 + 1}{x^4 + x^3} dx$;

в) $\int \frac{2x^3 - x^2 + 14x - 1}{x^4 + 8x^2 + 7} dx$.

*Завдання 4.* Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{3+\cos x}$;

б) $\int \frac{\cos^3 x}{2+3\sin x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$;

г) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx$;

д) $\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$;

е) $\int \sin^6 2x \cos^2 2x \, dx$;

ж) $\int \cos 2x \cos 6x \, dx$.

**Варіант 29**

*Завдання 1.* Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{dx}{\sin(4+2x)}$;

б) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x \cdot (4+tg^2 3x)}$;

в) $\int \frac{x+e^{2x}}{x^2+e^{2x}+4} \, dx$;

г) $\int \frac{x^2}{\sqrt{7-x^6}} dx$;

д) $\int \sqrt[5]{3+x-\sqrt{x}} \cdot \left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$;

е) $\int \frac{3^x}{\cos^2(3^x)} \, dx$;

ж) $\int ctg(7x+5) dx$;

з) $\int \frac{dx}{x \cdot \sin^2(\ln 5x)}$;

и) $\int e^{\arccos 2x} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

к) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 2x - 25}} dx$;

л) $\int x^2 \cdot \sin(x^3+1) \, dx$;

м) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (4-x)}$;

н) $\int tg\left(\frac{1}{x}+2\right)\frac{dx}{x^2}$;

о) $\int 5^{\sin 2x} \cdot \cos 2x dx$;

п) $\int 7^{2x} \cdot \cos(7^{2x}-1) \, dx$;

р) $\int \frac{2dx}{\sqrt{6x-8-x^2}}$;

с) $\int \frac{7dx}{x^2+4x+3}$;

т) $\int \frac{3x-1}{x^2+8x+20} \, dx$;

у) $\int \frac{2x+8}{\sqrt{4x^2-4x+6}} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x^2 \cdot \cos 2x \, dx$;

б) $\int arctg 6x \, dx$;

в) $\int e^{3x} \sin 5x \, dx$;

г) $\int \sqrt{e^x + 4} \, dx$;

д) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$;

е) $\int \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}} \, dx$.

*Завдання 3*. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{-x^2-4x+2}{x^3+x^2-2x} \, dx$;

б) $\int \frac{-2x^2+x-2}{x^4-2x^3} dx$;

в) $\int \frac{x^5+7x^3+10x+3}{x^4+7x^2+10} dx$.

*Завдання 4*. Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{3+\sin x}$;

б) $\int \frac{\sin^3 x}{2+3\cos x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{8\sin^2 x+1}$;

г) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x} dx$;

д) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx$;

е) $\int \sin^6 x \cos^2 x\ dx$;

ж) $\int \sin 4x \cos 3x\ dx$.

**Варіант 30**

*Завдання 1*. Інтеграли, що зводяться до табличних:

а) $\int \frac{\sin 3x}{\sin(\cos 3x)}\ dx$;

б) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^8}} dx$;

в) $\int \frac{dx}{\cos^2 2x \cdot (3+tg\, 2x)}$;

г) $\int \frac{x+1}{\cos^2(x^2+2x)}\ dx$;

д) $\int \frac{dx}{x\cdot(\ln^2 5x+10)}$;

е) $\int x\cdot 3^{x^2} \cdot tg\, 3^{x^2}\ dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt{4-ctg^2 x}}$;

з) $\int \cos\left(\sqrt{x}+5\right)\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

и) $\int e^{\ln x}\cdot \frac{dx}{x}$;

к) $\int \frac{ctg(e^{-x})}{e^x}\ dx$;

л) $\int \frac{\cos x}{9-\sin^2 x} dx$;

м) $\int x^3 \cdot \sin(x^4+2)\ dx$;

н) $\int \sqrt[3]{\cos^2 3x}\cdot \sin 3x\ dx$;

о) $\int 3^{tg\, 4x}\cdot \frac{dx}{\cos^2 4x}$;

п) $\int 7^{2x}\cdot \cos(7^{2x}-1)\ dx$;

р) $\int \frac{7dx}{x^2+x+2}$;

с) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x-3}\ dx$;

т) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x+13}}$;

у) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{-x^2+4x+1}} dx$.

*Завдання 2.* Методи інтегрування в невизначеному інтегралі:

а) $\int x^2 \cdot e^{2x}\ dx$;

б) $\int \arcsin 6x\ dx$;

в) $\int e^{3x}\cos 8x\ dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+5}}$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(5+x^2\right)^3}}$;

е) $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}\ dx$.

*Завдання 3*. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{x^4-3x^2+2x-2}{x^3-x^2-2x}\ dx$;

б) $\int \frac{2x^2-x-2}{x^4+2x^3} dx$;

в) $\int \frac{-x^3+x^2-4x+9}{x^4+11x^2+18} dx$.

*Завдання 4*. Інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних:

а) $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x}$;

б) $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\cos^2 x}$;

г) $\int \sin^5 x \cos^2 x \; dx$;

д) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^{10} x}dx$;

е) $\int \sin^4 x \cos^2 x \; dx$;

ж) $\int \sin 2x \sin 5x \; dx$.

# КОНТРОЛЬНА РОБОТА

## Варіант 1.

**1.** $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt[4]{x}}dx.$ **2.** $\int \frac{3x+1}{3x-2}dx.$ **3.** $\int (4-3x)e^{-3x}dx.$

**4.** $\int (x^2+5x+6)\cos 2x dx.$ **5.** $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$ **6.** $\int \frac{x^3+1}{x^2+x}dx.$

**7.** $\int \frac{6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{4x^2+4x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx.$

## Варіант 2.

**1.** $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+7)dx.$ **2.** $\int 4^{2x-1}dx.$ **3.** $\int (3x+4)e^{3x}dx.$

**4.** $\int (x^2-4)\cos 5x dx.$ **5.** $\int \frac{xdx}{x^2-7x+13}.$ **6.** $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx.$

**7.** $\int \frac{6x^2+13x+8}{x(x+2)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{4x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx.$

## Варіант 3.

**1.** $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx.$ **2.** $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}.$ **3.** $\int (4-16x)\sin 4x dx.$

**4.** $\int (x^2+4x+3)\cos x dx.$ **5.** $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}.$ **6.** $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx.$

**7.** $\int \frac{-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{7x^2+7x-1}{(x+2)(x^2+x+1)}dx.$

## Варіант 4.

**1.** $\int \frac{\left(\frac{1}{x}-5\right)^2}{\sqrt{x}}dx.$ **2.** $\int \frac{\ln x}{x}dx.$ **3.** $\int (1-6x)e^{2x}dx.$

**4.** $\int (x+2)^2\cos 7x dx.$ **5.** $\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx.$ **6.** $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx.$

**7.** $\int \frac{6x^2+14x+10}{(x-1)(x+2)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{4x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx.$

## Варіант 5.

**1.** $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx.$ **2.** $\int x\cdot 7^{x^2}dx.$ **3.** $\int \ln(x^2+1)dx.$

**4.** $\int (x^2+7x+12)\cos 6x dx.$ **5.** $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}.$ **6.** $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}dx.$

**7.** $\int \frac{-6x^2+11x-10}{(x-2)(x+2)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{6x^2+9x+6}{(x+1)(x^2+2x+3)}dx.$

## Варіант 6.

**1.** $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx.$ **2.** $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{7}}.$ **3.** $\int arctg\sqrt{6x-1}dx.$

**4.** $\int(2x^2+4x-7)\cos 2xdx.$ **5.** $\int\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx.$ **6.** $\int\frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx.$

**7.** $\int\frac{6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^2}dx.$ **8.** $\int\frac{11x^2+16x+10}{(x+2)(x^2+2x+3)}dx.$

## Варіант 7.

**1.** $\int\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{3x}}dx.$ **2.** $\int\cos\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}.$ **3.** $\int e^{-3x}(2-9x)dx.$

**4.** $\int(9x^2+9x+11)\cos 8xdx.$ **5.** $\int\frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}.$

**6.** $\int\frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx.$ **7.** $\int\frac{6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^2}dx.$ **8.** $\int\frac{6x^2+5x-1}{(x+1)(x^2+2)}dx.$

## Варіант 8.

**1.** $\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx.$ **2.** $\int x\cdot\sin(1-x^2)dx.$ **3.** $\int(6x+6)\cos 2xdx.$

**4.** $\int(3x^2+16x+17)\cos 4xdx.$ **5.** $\int\frac{dx}{x^2+4x+9}.$

**6.** $\int\frac{3x^3+2x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx.$ **7.** $\int\frac{6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^2}dx.$

**8.** $\int\frac{2x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx.$

## Варіант 9.

**1.** $\int\left(\frac{1}{x}-2\sqrt{x}\right)^2dx.$ **2.** $\int 2^{\sin x}\cdot\cos xdx.$ **3.** $\int(\sqrt{2}\cdot x-3)\cos 2xdx.$

**4.** $\int(3-7x^2)\cos 9xdx.$ **5.** $\int\frac{3x-2}{x^2+6x+9}dx.$ **6.** $\int\frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx.$

**7.** $\int\frac{6x^2+7x+2}{x(x+1)^2}dx.$ **8.** $\int\frac{9x^2+21x+21}{(x+3)(x^2+3)}dx.$

## Варіант 10.

**1.** $\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt[3]{x}}dx.$ **2.** $\int\frac{x^3dx}{\cos^2x^4}.$ **3.** $\int(2x-5)\cos 4xdx.$ **4.** $\int(3x+5)^2\sin xdx.$

**5.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}.$ **6.** $\int\frac{x^3-3x^2-12}{(x-1)(x-3)(x-2)}dx.$ **7.** $\int\frac{-6x^2+13x+8}{x(x-2)^2}dx.$

**8.** $\int\frac{x^2+8x+8}{(x+2)(x^2+4)}dx.$

## Варіант 11.

**1.** $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 dx.$ **2.** $\int e^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x dx.$ **3.** $\int (x+5)\sin 3x dx.$

**4.** $\int (3-7x^2)\cos 2x dx.$ **5.** $\int\frac{x+1}{x^2-4x+3}dx.$ **6.** $\int\frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x}dx.$

**7.** $\int\frac{-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^2}dx.$ **8.** $\int\frac{5x^2+12x+4}{(x+2)(x^2+1)}dx.$

## Варіант 12.

**1.** $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx.$ **2.** $\int\frac{dx}{x\ln^3 x}.$ **3.** $\int arctg\sqrt{4x-1}dx.$

**4.** $\int (1-8x^2)\cos 7x dx.$ **5.** $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$ **6.** $\int\frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x+2)}dx.$

**7.** $\int\frac{-6x^2+14x-6}{(x+1)(x-2)^2}dx.$ **8.** $\int\frac{-4x^2-16x-12}{(x-1)(x^2+4x+5)}dx.$

## Варіант 13.

**1.** $\int\frac{2x^2+x-1}{x^3}dx.$ **2.** $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ **3.** $\int (4x-2)\cos 2x dx.$

**4.** $\int (x^2-3x)\sin 5x dx.$ **5.** $\int\frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx.$ **6.** $\int\frac{3x^3-2}{x^3-x}dx.$

**7.** $\int\frac{-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-2)^2}dx.$ **8.** $\int\frac{13x^2-13x+1}{(x-2)(x^2-x+1)}dx.$

## Варіант 14.

**1.** $\int (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})dx.$ **2.** $\int e^{-(x^2+1)}\cdot x dx.$ **3.** $\int (x-2)e^{3x}dx.$

**4.** $\int (x^2+2x+1)\sin 4x dx.$ **5.** $\int\frac{x dx}{x^2-4x+7}.$ **6.** $\int\frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)x}dx.$

**7.** $\int\frac{6x^2+2x+3}{(x+2)x^2}dx.$ **8.** $\int\frac{7x^2+x-46}{(x-1)(x^2+9)}dx.$

## Варіант 15.

**1.** $\int\frac{x^2+5x-1}{\sqrt[3]{x}}dx.$ **2.** $\int 5^{3x+2}\cdot dx.$ **3.** $\int\ln(x^2-3)dx.$

**4.** $\int (x^2-3x+2)\sin x dx.$ **5.** $\int\frac{2x-1}{x^2+2x+3}dx.$ **6.** $\int\frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx.$

**7.** $\int\frac{9x^2+10x+2}{(x-1)(x+2)^2}dx.$ **8.** $\int\frac{24x^2+20x-28}{(x+3)(x^2+2x+2)}dx.$

## Варіант 16.

**1.** $\int\frac{5x^8+1}{x^4}dx.$ **2.** $\int\frac{dx}{3x^2+5}.$ **3.** $\int (2-x)\sin 2x dx.$

**4.** $\int (x^2-5x+6)\cos x dx.$ **5.** $\int\frac{x-1}{x^2+4x+7}dx.$ **6.** $\int\frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx.$

**7.** $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)x^2}dx.$ **8.** $\int \frac{3x^2+3x+2}{(x+5)(x^2+1)}dx.$

## Варіант 17.

**1.** $\int \frac{x-1}{\sqrt[5]{x^4}}dx.$ **2.** $\int \left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)dx.$ **3.** $\int e^{-2x}(4x-3)dx.$

**4.** $\int (x^2+6x+9)\sin 5x dx.$ **5.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$ **6.** $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx.$

**7.** $\int \frac{6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{11x^2+21x+21}{(x-4)(x^2+9)}dx.$

## Варіант 18.

**1.** $\int \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^3}{\sqrt{2x}}dx.$ **2.** $\int \frac{arctg\frac{x}{2}}{4+x^2}dx.$ **3.** $\int arcctg\sqrt{2x-1}dx.$

**4.** $\int (1-5x^2)\sin 3x dx.$ **5.** $\int \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx.$ **6.** $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}dx.$

**7.** $\int \frac{6x^2+5x}{(x+2)(x-3)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{x^2+x+3}{(x-6)(x^2+x+1)}dx.$

## Варіант 19.

**1.** $\int \frac{(x^2+2)(x^2-1)}{\sqrt[4]{x^3}}dx.$ **2.** $\int \frac{xdx}{x^2-4}.$ **3.** $\int arctg\sqrt{5x-1}dx.$

**4.** $\int (x^2+35)\sin 8x dx.$ **5.** $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+2x+6}}dx.$ **6.** $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x}dx.$

**7.** $\int \frac{6x^2+7x}{(x-2)(x+1)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{4x^2+2x+2}{(x-1)(x^2+2)}dx.$

## Варіант 20.

**1.** $\int \left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx.$ **2.** $\int \frac{2x+5}{2x-1}dx.$ **3.** $\int (3x-2)\cos 5x dx.$

**4.** $\int (3x-x^2)\sin 4x dx.$ **5.** $\int \frac{3x+2}{2x^2+x+5}dx.$ **6.** $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{x^2+5x}dx.$

**7.** $\int \frac{6x^2+5x+4}{(x-2)(x-3)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{7x^2+7x+9}{(x+1)(x^2+x+2)}dx.$

## Варіант 21.

**1.** $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$ **2.** $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx.$ **3.** $\int (4x+7)\cos 3x dx.$

**4.** $\int (x+1)\ln^2(x+1)dx.$ **5.** $\int \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2+3x-1}}dx.$

**6.** $\int \frac{-2x^3+5x^2-7x+9}{(x+3)(x-1)x}dx.$ **7.** $\int \frac{6x^2+4x+24}{(x-1)(x+2)^2}dx.$

**8.** $\int \frac{4x^2+4x+3}{(x-1)(x^2+1)}dx.$

## Варіант 22.

**1.** $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx.$ **2.** $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx.$ **3.** $\int (3-3x)\cos 5x dx.$

**4.** $\int x\ln^2 x dx.$ **5.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x-x^2}}.$ **6.** $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}dx.$

**7.** $\int \frac{6x^2+14x+4}{(x+1)(x-1)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{3x^2+2x+6}{(x+2)(x^2+3)}dx.$

## Варіант 23.

**1.** $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)xdx.$ **2.** $\int (2-9x)^9 dx.$ **3.** $\int (2-3x)\sin 2x dx.$

**4.** $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx.$ **5.** $\int \frac{xdx}{3x^2+2x+8}.$ **6.** $\int \frac{2x^3-8}{x(x-2)(x+2)}dx.$

**7.** $\int \frac{6x^2+18x-4}{(x-3)(x+1)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{2x^2-x+1}{(x-3)(x^2+1)}dx.$

## Варіант 24.

**1.** $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^3 dx.$ **2.** $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx.$ **3.** $\int (3x+4)\sin 5x dx.$ **4.** $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

**5.** $\int \frac{5x+2}{x^2+4x+6}dx.$ **6.** $\int \frac{4x^3+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}dx.$ **7.** $\int \frac{-6x^2+14x-4}{(x+5)x^2}dx.$

**8.** $\int \frac{x^2+2x-2}{(x+6)(x^2-x+1)}dx.$

## Варіант 25.

**1.** $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)^2 x^2 dx.$ **2.** $\int \frac{5}{tg\frac{x}{5}}dx.$ **3.** $\int (2-8x)\sin 3x dx.$

**4.** $\int e^{2x}\cdot \sin x dx.$ **5.** $\int \frac{dx}{x^2+6x+11}.$ **6.** $\int \frac{3x^3-5x^2+2}{x(x-1)(x+2)}dx.$

**7.** $\int \frac{6x^2+10x+12}{(x+3)x^2}dx.$ **8.** $\int \frac{5x^2+5x-7}{(x-6)(x^2+4)}dx.$

## Варіант 26.

**1.** $\int \frac{(1-\sqrt{x})(x+1)}{\sqrt{x}}dx.$ **2.** $\int \sin^2 x dx.$ **3.** $\int (2x-3)2^{1-2x} dx.$

**4.** $\int e^{-3x}\cdot \cos x dx.$ **5.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x-5}}.$ **6.** $\int \frac{2x^3+20}{x(x-4)(x+5)}dx.$

**7.** $\int \frac{6x^2+15x+2}{(x-4)(x-1)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{3x^2+x-4}{(x+1)(x^2+3x+4)}dx.$

## Варіант 27.

**1.** $\int \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}{2\sqrt[3]{x}}dx.$ **2.** $\int \cos^2\frac{x}{2}dx.$ **3.** $\int (2-x)5^{6x}dx.$

**4.** $\int e^x\cdot\cos 2x dx.$ **5.** $\int \frac{1-2x}{5x^2+5x+4}dx.$ **6.** $\int \frac{-6x^3+13x+6}{x(x-3)(x+2)}dx.$ **7.** $\int \frac{-6x^2+7x-4}{(x-1)^2\cdot(x+4)}dx.$

**8.** $\int \frac{2x^2+x+1}{x(x^2+2x+2)}dx.$

## Варіант 28.

**1.** $\int \frac{(x^3+3x)^2}{\sqrt{x}}dx.$ **2.** $\int \frac{3dx}{\sqrt{5x^2-7}}.$ **3.** $\int \left(1-\frac{x}{3}\right)3^{x+2}dx.$

**4.** $\int e^{5x}\cdot\sin x dx.$ **5.** $\int \frac{x+3}{1-x-3x^2}dx.$ **6.** $\int \frac{3x^3-x^2-12x-2}{x(x+1)(x+2)}dx.$

**7.** $\int \frac{-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{x+4}{(x+2)(x^2+2)}dx.$

## Варіант 29.

**1.** $\int \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)^3}{x}dx.$ **2.** $\int \frac{4x^3}{x^8+5}dx.$ **3.** $\int (x+1)\sin(x+1)dx.$

**4.** $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx.$ **5.** $\int \frac{4x-8}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx.$ **6.** $\int \frac{2x^3-9}{x(x-1)(x+3)}dx.$

**7.** $\int \frac{6x^2-10x+52}{(x-2)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{7x^2+12x+6}{x(x^2+1)}dx.$

## Варіант 30.

**1.** $\int \frac{(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})(\sqrt{x}+1)}{x}dx.$ **2.** $\int tg\sqrt[3]{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$ **3.** $\int \frac{x}{2}\cdot 9^{2-x}dx.$

**4.** $\int x^2e^{5x}dx.$ **5.** $\int \frac{5x-10}{x^2-7x+13}dx.$ **6.** $\int \frac{2x^3-7x}{x(x-3)(x+1)}dx.$

**7.** $\int \frac{-6x^2+13x-6}{(x-5)^2}dx.$ **8.** $\int \frac{3x^2+3x+2}{(x+3)(x^2+2x+3)}dx.$

## Список рекомендованої літератури

1. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн. 2 / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003. — 368 с. — ISBN 966-06-0230-8.

2. Вся высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 3. — М.: Эдиториал УРСС, 2010. — 240 с. — ISBN 978-5-354-01329-6.

3. Вся высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 4. — М.: Эдиториал УРСС, 2005. — 352 с. — ISBN 978-5-354-01051-9.

4. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. . Юрик. — К: А. С. К., 2006. — 647 с. — ISBN 966-539-320-0.

5. Жевняк Р. М. Высшая математика: учеб. пособие Ч. 3. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1985. — 208 с.

6. Жевняк Р. М. Высшая математика: учеб. пособие Ч. 4. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1987. — 240 с.

7. Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. — К.: Техніка, 2000. — 792 с. — ISBN 966-575-153-0.

8. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Письменный. — М.: Айрис-Пресс, 2008. — 608 с. ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.

9. Шипачев В. С. Курс высшей математики / В. С. Шипачев. — М. Оникс, 2009. — 608 с. — ISBN 978-5-488-02067-2.