МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Ряди Фур'є

методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни "Вища математика" для студентів інженерних спеціальностей

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри АТ та ГМ,
протокол № 7 від 18.02. 2019р.

Чернігів ЧНТУ 2019

Ряди Фур'є. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей./Укл.: В.П. Мурашковська, Л.А. Руновська, О.С. Слєднікова – Чернігів: ЧНТУ,2019, - 42с.

Укладачі:

Мурашковська Вірв Петрівна, ст. викл.
Руновська Людмила Анатоліївна, ст. викл.
Слєднікова Олена Сергіївна к.тех.н. доцент

Відповідальний за випуск: Кальченко Віталій Іванович, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, професор, доктор технічних наук

Рецензент: Венжега Володимир Іванович – доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, Чернігівського національного технологічного університету

Зміст

Вступ

Ці методичні вказівки укладені у відповідності до Навчальної програми з вищої математики для інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Дана робота призначена для студентів, які вивчають вищу математику і містить теоретичні вправи, контрольні питання, розрахункові завдання і приклади виконання завдань до модулю «Ряди Фур'є».

Ряди Фур'є є зручним апаратом для розв'язання задач в різних галузях науки і техніки, а саме вони широко використовуються при розробці математичних моделей періодичних процесів і застосовується в різних інженерних дисциплінах, електротехніці, радіотехніці.

Мета даного видання - допомогти студентам краще оволодіти математичним апаратом, який застосовується в рядах Фур'є, виробити у студентів уміння, навички розв'язування різних задач з даної теми.

Основне завдання цих методичних вказівок – надати студентам теоретичну та практичну допомогу в самостійній роботі по вивченню розділу "Ряди Фур'є" з дисципліни "Вища математика". Методичні вказівки містять теоретичний матеріал, необхідний для самостійного виконання студентами індивідуальних домашніх завдань. Наведені приклади розв'язання основних стандартних задач. Завдання охоплюють в цілому матеріал розділу, який в тому чи іншому обсязі вивчається студентами.

Методичні вказівки можуть бути використані під час аудиторних занять, як довідковий матеріал та в якості задачника при проведенні самостійних та модульно – контрольних робіт.

1.ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Ряд Фур'є 2π-періодичної функції

В науці і техніці дуже поширені процеси, які через певні проміжки часу повторюються. Такі процеси називаються періодичними. Моделюються періодичні процеси періодичними функціями, складеними із скінченого або нескінченного числа доданків виду $\cos\omega x$ і $\sin\omega x$.

Тригонометричним рядом називається функціональний ряд виду

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx\,, \qquad (1)$$

де числа a_0, a_n, b_n $n=1,\infty$ називаються **коефіцієнтами ряду**.

Тригонометричний ряд (1), коефіцієнти якого визначаються за

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx; \qquad (2)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad n=\overline{1,\infty}; \qquad (3)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\quad n=\overline{1,\infty}, \qquad (4)$$

формулами

називається **рядом Фур'є періодичної функції з періодом** 2π.

Для інтегровної на відрізку $[-\pi,\pi]$ функції $f(x)$ записують

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

Знак ~ означає, що функції $f(x)$ поставлено у відповідність її ряд Фур'є.
Якщо ряд Фур'є збігається, то його суму позначають через $S(x)$.

Сформулюємо одну з теорем, що є достатньою умовою подання функції в ряд Фур'є.

<u>Теорема І</u>. Нехай періодична функція $f(x)$ з періодом 2π на відрізку $[-\pi, \pi]$ задовольняє двом умовам:

1) $f(x)$ кусково-монотонна, тобто є монотонною на всьому відрізку або цей відрізок можна розбити на скінченне число інтервалів так, що на кожному з них функція монотонна;

2) $f(x)$ обмежена.

Тоді ряд Фур'є, побудований для цієї функції, збігається на числовій осі, причому

1) в точках x неперервності функції $f(x)$ сума ряду $S(x)$ співпадає з самою функцією $f(x)$: $S(x) = f(x)$;

2) в точці x_o розриву функції $f(x)$ сума ряду дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь функції $f(x)$, тобто в точці розриву x_0 маємо

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2};$$

3) на кінцях відрізку, а саме в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$, сума ряду набуває значень

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Таким чином, для функції $f(x)$, що задовольняє умовам сформульованої вище теореми, в кожній точці неперервності відрізка $[-\pi, \pi]$ має місце розкладення

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

а в точках x розриву функції

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

при цьому коефіцієнти обчислюються за формулами (2), (3), (4).

В силу періодичності вихідної функції і суми ряду Фур'є вказаний розклад може бути отриманий на всій області визначення функції.

Зауваження. Вище йшлося про функцію *f(x)*, що задана на відрізку $[-\pi, \pi]$, але можна було говорити і про функцію *f(x)*, що задана на інтервалі $(-\pi, \pi)$, оскільки значення функції в точках $-\pi$, π на величину інтервалів, що фігурують в формулах, для коефіцієнтів Фур'є впливу не роблять.

Зауваження. Оскільки $f\ (x)$ – періодична функція з періодом 2π, то відрізок інтегрування в формулах (2), (3) може бути замінений довільним відрізком $[a, a+2\pi]$ довжиною 2π.

Зокрема, якщо функція $f\,(x)$ з періодом 2π задовольняє умови наведеної вище теореми на відрізку[0; 2π], то для неї має місце розклад (1) з коефіцієнтами, обчисленими за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x, \tag{5}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad n = \overline{1,\infty}, \tag{6}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{7}$$

1.2 Ряди Фур'є для парних та непарних 2π-періодичних функцій

В деяких випадках формули (2)–(4) для обчислення коефіцієнтів Фур'є можуть бути спрощеними. Це має місце для парних і непарних функцій. Відомо, що якщо функція $f(x)$ інтегровна на симетричному відносно нуля відрізку [$-a$; a], то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{якщо} \quad f(x) - \text{парна функція;} \\ 0, & \text{якщо} \quad f(x) - \text{непарна функція.} \end{cases} \tag{8}$$

Нехай необхідно розкласти в ряд Фур'є парну функцію $f(x)$. Тоді $f(x)\cos nx$ – парна функція, а $f(x)\sin nx$ – непарна функція, і на основі властивості (8) формули (2), (3), (4) будуть виглядати таким чином

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad b_n = 0, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{9}$$

Таким чином, ряд Фур'є для парної функції, що задовольняє умови теореми I на відрізку $[-\pi, \pi]$, в точках її неперервності буде мати вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \qquad (10)$$

Отже, парна 2π-періодична функція розкладається в ряд Фур'є тільки за косинусами.

Якщо в ряд Фур'є розкладається непарна функція, то добуток $f(x)\cos nx$ – непарна функція, а $f(x)\sin nx$ – парна.
Таким чином,

$$a_n = 0, \quad n = \overline{0,\infty}, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = \overline{1,\infty}. \qquad (11)$$

і ряд Фур'є для 2π-періодичної непарної функції, що задовольняє умови теореми I на відрізку $[-\pi, \pi]$, має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \ \text{(в точках неперервності)}. \qquad (12)$$

Значить, непарна 2π-періодична функція розкладається в ряд Фур'є тільки за синусами.

Ряди (10) і (12) називаються ще неповними рядами Фур'є.

1.3 Розклад в ряд Фур'є функцій, заданих на відрізку [0, π]

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[0,\pi]$. Щоб розкласти її на цьому відрізку в ряд Фур'є, необхідно довизначити її на відрізку $[-\pi,0]$. В результаті отримаємо функцію, яку можна вже розкласти в ряд Фур'є, і отриманий ряд буде залежати від характеру продовження первісної функції на відрізок $[-\pi,0]$.

Якщо продовжити на відрізку $[-\pi,0]$ функцію $f(x)$ парним чином, тобто врахувати $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in [-\pi,0]$, то отримаємо розклад в ряд Фур'є за косинусами (10) з коефіцієнтами, що визначаються за формулами (9). В разі непарного продовження, тобто $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in [-\pi,0]$, отримуємо непарну функцію, що розкладається в ряд Фур'є за синусами (12) з коефіцієнтами (11).

Ряд косинусів і ряд синусів для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[0,\pi]$, мають однакову суму. В точці x_0 розриву функції сума як першого, так і другого ряду рівна однаковому числу

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$$

1.4 Ряд Фур'є для функцій з довільним періодом 2l

Часто доводиться розкладати в тригонометричний ряд функції, період яких відрізняється від 2π.

Нехай функція $f(x)$, визначена на відрізку $[-l, l]$, має період $2l$, тобто $f(x\pm 2l) = f(x)$, $l \neq \pi$, і задовольняє на цьому відрізку умови теореми I. Можна показати, що ряд Фур'є для такої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad (13)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,\mathrm{d}x, \qquad (14)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Зазначимо, що формули (14) співпадають з формулами (2)–(4) при $l = \pi$. Це означає, що всі вищенаведені роздуми можна повторити і для $2l$-періодичних функцій з заміною π на l.

Зокрема, для функції $f(x)$ з періодом $2l$ має місце теорема I, зауваження про можливість обчислювати коефіцієнти ряду, інтегруючи її по довільному відрізку, довжина якого дорівнює періоду $2l$, а також твердження про можливість спрощення обчислення коефіцієнтів ряду, якщо функція є парною або непарною. Для парної $2l$-періодичної функції ряд Фур'є має вигляд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

де

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n=\overline{1,\infty},$$

а для непарної

$$\sum_{n=1} b_n \sin\frac{\pi n x}{},$$

де

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n=\overline{1,\infty}.$$

Останній факт дає можливість розкласти в ряд Фур’є за косинусами або синусами функцію, задану на відрізку $[0,l]$.

Зауваження. Неперіодична функція, задана на всій осі, не може бути розкладена у ряд Фур’є, оскільки його сума, будучи періодичною функцією, не може бути рівна $f(x)$ для всіх x. Однак неперіодична функція $f(x)$ може бути представлена у вигляді ряду Фур’є на будь-якому кінцевому проміжку $[a,b]$, на якому вона задовольняє умови теореми I.

2. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Дайте означення ряду Фур'є.
2. Дайте означення кусково неперервної на даному проміжку функції та проілюструйте це означення схематичним малюнком.
3. Сформулюйте теорему Фур'є.
4. Напишіть ряд Фур'є та формули для обчислення коефіцієнтів ряду для 2π-періодичної функції.
5. Напишіть ряд Фур'є та формули для обчислення коефіцієнтів ряду для функції з довільним періодом.
6. Напишіть ряд Фур'є та формули для обчислення коефіцієнтів цього ряду для 2π-періодичної непарної функції.
7. Напишіть ряд Фур'є та формули для обчислення коефіцієнтів цього ряду для 2π-періодичної парної функції.
8. Напишіть ряд Фур'є та формули для обчислення коефіцієнтів цього ряду для непарної функції з довільним періодом.
9. Напишіть ряд Фур'є та формули для обчислення коефіцієнтів

цього ряду для непарної функції з 2π.
10. Чому дорівнює сума ряду Фур'є, побудованого для даної функції в точці неперервності цієї функції?
11. Чому дорівнює сума ряду Фур'є, побудованого для даної функції в точці розриву цієї функції?
12. Поясніть - що необхідно зробити, щоб дану функцію, задану на проміжку $[0,b]$ розвинути в ряд Фур'є по косинусах, напишіть цей ряд і формули для обчислення його коефіцієнтів.
13. Поясніть - що необхідно зробити, щоб дану функцію, задану на проміжку $[0,b]$ розвинути в ряд Фур'є по синусах, напишіть цей ряд і формули для обчислення його коефіцієнтів.

3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

Завдання 1.

Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію $f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi,\pi]$.

1)
$$f(x)=\begin{cases}2x, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

2)
$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ 4x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

3)
$$f(x)=\begin{cases}-3x, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

4)
$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ -5x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

5)
$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x+\pi}{2}, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

6)
$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ \frac{\pi-x}{2}, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

7)
$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x\le 0\\ 2x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

8)
$$f(x)=\begin{cases}2x, & -\pi\le x\le 0\\ -x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

9)
$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x\le 0\\ 3x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

10)
$$f(x)=\begin{cases}-3x, & -\pi\le x\le 0\\ -x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

Відповіді:

1) $-\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$

$S(\pm\pi)=-\pi$

2) $\pi-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$

$S(\pm\pi)=2\pi$

3) $\frac{3}{4}\pi-\frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$

$S(\pm\pi)=\frac{3}{2}\pi$

4) $\frac{5}{4}\pi+\frac{10}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+5\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$

$S(\pm\pi)=-\frac{5}{2}\pi$

5) $\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}$

$S(0)=S(\pm\pi)=\frac{\pi}{4}$

6) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}$

$S(0)=S(\pm\pi)=\frac{\pi}{4}$

7) $\frac{3}{4}\pi-\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$

$S(\pm\pi)=\frac{3}{2}\pi$

8) $-\frac{3}{4}\pi-\frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$

$S(\pm\pi)=-\frac{3}{2}\pi$

9) $\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$

$S(\pm\pi)=\pi$

10) $-\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$

$S(\pm\pi)=-\pi$

<u>Завдання 2</u>.

Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію $f(x)$ (парну або непарну), що задана на $[-\pi,\pi]$.

1) $f(x) = |\sin x|$

2) $f(x) = e^{-|x|}$

3) $f(x) = 2^{|x|}$

4) $f(x) = x^2$

5) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0;\pi) \\ -1, & x \in (-\pi;0) \end{cases}$

6) $f(x) = e^{|x|}$

7) $f(x) = x$

8) $f(x) = \sin ax$, *де a – неціле число*

9) $f(x) = x^3$

10) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, x \in (0;2\pi)$

Відповіді:

1) $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{1-4k^2}$

2) $\frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx$

3) $\frac{2^{\pi}-1}{\pi ln2} + \frac{2ln2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\pi}(-1)^n-1}{n^2+ln^2 2}\cos nx$

4) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos x}{n^2}$

5) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$

6) $\frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^n e^{-\pi}-1)}{1+n^2}\cos nx$

7) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$

8) $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{a^2-n^2}\sin nx$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)\sin x$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

<u>Завдання 3</u>.

Розкласти в ряд Фур'є на зазначеному інтервалі періодичну функцію $f(x)$ з періодом $T = 2l$.

1) $f(x) = x - 2, \ -1 < x < 1;$

2) $f(x) = 4x + 2, \ -1 < x < 1;$

3) $f(x) = -7x+3, \ -2 < x < 2;$

4) $f(x) = -x-5, \ -2 < x < 2;$

5) $f(x) = 2x+1, \ -3 < x < 3;$

6) $f(x) = -2x+7, \ -3 < x < 3;$

7) $f(x) = 3x-1, \ -4 < x < 4;$

8) $f(x) = -5x+4, \ -4 < x < 4;$

9) $f(x) = -4x+3, \ -5 < x < 5;$

10) $f(x) = 2x-3, \ -5 < x < 5.$

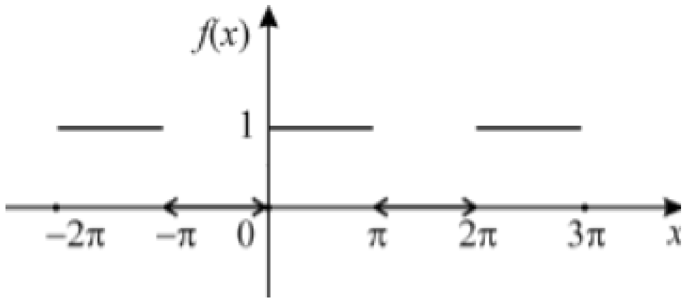
4. ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

<u>Приклад 1</u>.

Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ періодом 2π, що задана формулою:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Зобразимо графік функції $f(x)$



Ця функція задовольняє умови теореми, тому може бути розкладеною в ряд Фур'є.

Застосовуючи формули (2), (3), (4), знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{\pi} 1 \cdot dx\right) = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big(\int 0\cdot dx + \int 1\cdot \cos nx\,dx\Big) =$$

$$= \frac{1}{n\pi} sin\, nx\,|_0^{\pi} = 0, n = 1,2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx\Big) =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} cos\, nx\,|_0^{\pi} = -\frac{1}{n\pi}(cos\, n\pi - 1) = -\frac{1}{n\pi}(\,(-1)^n - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{2}{n\pi}, & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Тут ми врахували, що $\sin 0 = \sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$.

Отже, вихідній функції $f(x)$ відповідає ряд Фур’є

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Функція $f(x)$ неперервна у всіх внутрішніх точках відрізку $[-\pi, \pi]$, крім $x = 0$. Тому для всіх точок $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ має місце рівність

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + \ldots\right).$$

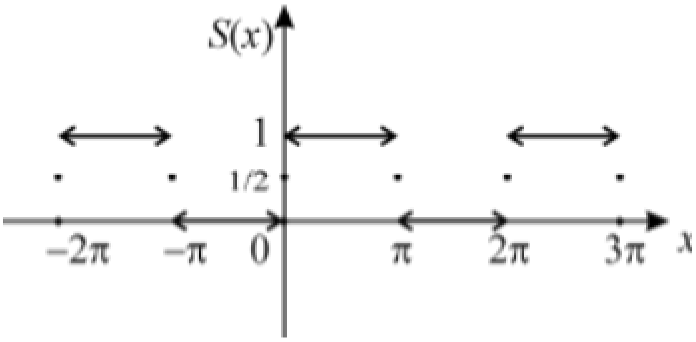
У точці розриву $x = 0$

$$S(0) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

На кінцях відрізку

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}.$$

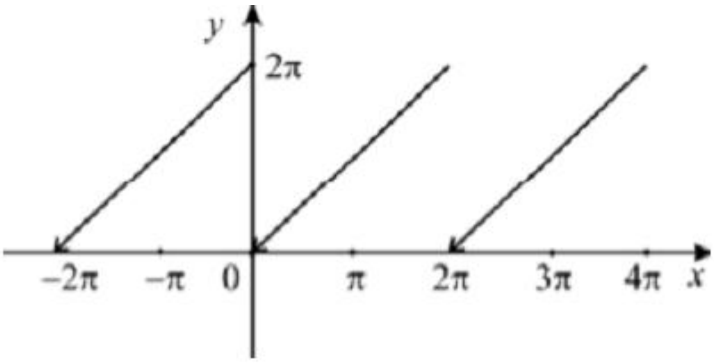
Графік суми $S(x)$ ряду має вигляд



<u>Приклад 2</u>.

Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом 2π, задану на відрізку $0 < x \le 2\pi$ рівністю $f(x) = x$.

Розв'язання. Графік функції $f(x) = x$



Функція $f(x) = x$ задовольняє умови теореми на відрізку $[0; 2\pi]$. В силу зауваження коефіцієнти цього розкладу знаходимо за формулами (5), (6), (7):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad n = \left|\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ \cos nx dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \left|\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ \sin nx dx = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{2\pi}\right) = -\frac{2}{n}.$$

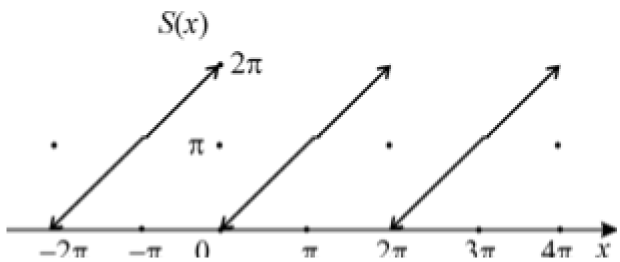
Отже, у всіх точках неперервності

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},$$

а в точках розриву $(0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots)$

$$S(2n\pi) = \pi, \quad n = 0, \pm 1, 2, \ldots$$

Графік суми $S(x)$ ряду

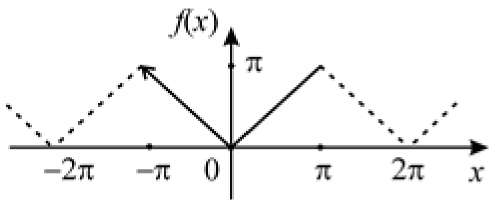


Приклад 3.

Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду 2π, що задана в інтервалі $-\pi < x \le \pi$ формулою $f(x) = |x|$. Знайти за допомогою отриманого розкладу суму ряду

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots$$

Розв'язання.



Функція $f(x) = |x|$ парна, вона задовольняє умови теореми I. Тому вона розкладається в ряд за косинусами, коефіцієнти Фур'є якого визначаються за формулами (9):

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x=\pi;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x=\begin{vmatrix} x=u & dx=du \\ \cos nx=\mathrm{d}v & v=\frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right]=\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0 & \text{при} \quad n=2k; \\ -\frac{4}{nk^2} & \text{при} \quad n=2k+1,\ k=\overline{0,\infty},\end{cases}$$

$$b_n=0, \quad n=\overline{1,\infty}.$$

Її ряд Фур'є

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Функція $f(x) = |x|$ після 2π-періодичного продовження неперервна на всій осі. Тому для $\forall x \in R$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

При $x = 0$ отримуємо

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

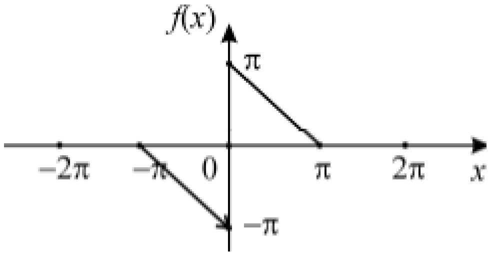
Звідки

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Приклад 4.

Розкласти на відрізку $[0,\pi]$ функцію $f(x) = \pi - x$ в ряд Фур'є за синусами.

Розв'язання. Продовжимо функцію $f(x) = \pi - x$ на відрізок $[-\pi,0]$ непарним чином:



Тоді для будь-якого $x \in (0,\pi)$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

$$\text{де } b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}\pi-x=u & -dx=du \\ \sin nx\,dx=dv & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=-\frac{2(\pi-x)}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}-$$

$$-\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)(-dx)=\frac{2\pi}{n\pi}-\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n}.$$

Отже,

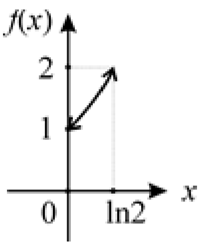
$$\pi-x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \quad \forall x\in(0,\pi).$$

$$S(0)=S(\pi)=0.$$

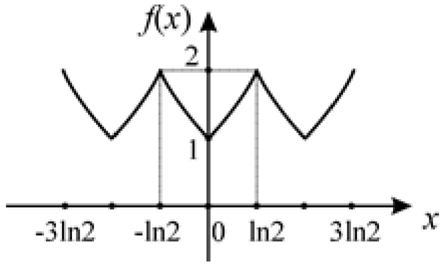
<u>Приклад 5</u>.

Функція $f(x)=e^x$ задана на проміжку $(0;\ln 2)$. Отримати розклад цієї функції в ряд Фур'є за косинусами і за синусами.

Розв'язання. Функція $f(x)=e^x$ неперервна на проміжку $(0;\ln 2)$.



Для того щоб написати розклад цієї функції в ряд за косинусами, необхідно довизначити функцію $f(x)$ на проміжку $(-\ln 2;0]$ парним чином, а потім продовжити на всю вісь ($e=\ln 2$).



Ряд Фур'є в цьому випадку буде мати вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{\ln 2}x,$$

де $a_0 = \frac{2}{\ln 2}\int_0^{\ln 2} e^x dx = \frac{2}{\ln 2}e^x\Big|_0^{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}\left(e^{\ln 2} - e^0\right) = \frac{2}{\ln 2}(2-1) = \frac{2}{\ln 2};$

$$a_n = \frac{2}{\ln 2}\int_0^{\ln 2} e^x \cos\frac{\pi n}{\ln 2}x dx.$$

Використовуючи формулу

$$\int_0^{\ln 2} e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\cdot e^{\alpha x}\Big|_0^{\ln 2},$$

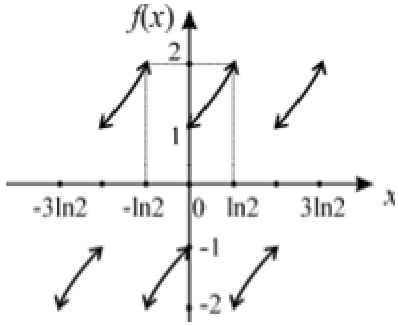
де $\alpha = 1, \quad \beta = \frac{\pi n}{\ln 2}$, отримуємо

$$a_n = \frac{2}{\ln 2}\left[\frac{\cos\pi n + \frac{\pi n}{\ln 2}\sin\pi n}{1+\frac{\pi^2 n^2}{\ln^2 2}}.2 - \frac{\cos 0 + \frac{\pi n}{\ln 2}\sin 0}{1+\frac{\pi^2 n^2}{\ln^2 2}}.1\right] =$$

$$= \frac{2}{\ln 2}\left[\frac{(-1)^n 2\cdot\ln^2 2}{\pi^2 n^2 + \ln^2 2} - \frac{1\cdot\ln^2 2}{\pi^2 n^2 + \ln^2 2}\right] = \frac{2\ln 2}{\pi^2 n^2 + \ln^2 2}(2\cdot(-1)^n - 1) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2\ln 2}{\pi^2 n^2 + \ln^2 2}; & n = 2k, \\ \frac{6\ln 2}{\pi^2 n^2 + \ln^2 2}; & n = 2k+1, \end{cases}$$

Довизначаючи тепер функцію $f(x) = e^x$ на проміжку $(-\ln 2; 0]$ непарним чином, ми можемо написати розклад цієї функції в ряд за синусами:



$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ln 2} x,$$

де $$b_n = \frac{2}{\ln 2} \int_0^{\ln 2} e^x \sin \frac{\pi n}{\ln 2} x dx =$$

$$\frac{2}{\ln 2} \left[\frac{\sin \pi n + \frac{\pi n}{\ln 2} \cos \pi n}{1 + \frac{\pi^2 n^2}{ln^2 2}} . 2 - \frac{\sin 0 + \frac{\pi n}{ln} \cos 0}{1 + \frac{\pi^2 n^2}{ln^2 2}} \right] =$$

$$= \frac{2}{\ln 2} \left(\frac{2(-1^{n-1}) n\pi \ln 2 + n\pi \ln 2}{\pi^2 n^2 + ln^2 2} \right) =$$

$$= \begin{matrix} \frac{-2n\pi}{\pi^2 n^2 + ln^2 2} ;\ n = 2k, \\ \frac{-2n\pi}{\pi^2 n^2 + ln^2 2} ;\ n = 2k, \end{matrix}$$

Тут ми скористалися формулою

$$\int_0^{\ln 2} e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot e^{\alpha x} \Big|_0^{\ln 2}.$$

В точках неперервності

$$e^x = -4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot \sin \frac{2k\pi}{\ln 2} x}{\pi^2 (2k)^2 + \ln^2 2} + 6\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{\ln 2} x}{\pi^2 (2k+1)^2 + \ln^2 2}.$$

В точках розриву $x = n \ln 2,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ сума ряду Фур'є рівна нулю: $S(n \ln 2) = 0,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

<u>Приклад 6</u>.

Розкласти функцію $f(x)=|x-2|$ в ряд Фур'є в інтервалі (-3; 3).

Розв'язання. Ряд Фур'є для функції, яка задана в інтервалі (-3; 3), збігається з рядом Фур'є для періодичної функції з періодом $T = 2l = 6$, яка в інтервалі (-3; 3) збігається із заданою функцією. Зробимо рисунок періодичної функції. Зауважимо, що $f(x)=\begin{cases} 2-x, если\ -3<x<2 \\ x-2, если\ 2\le x<3 \end{cases}$

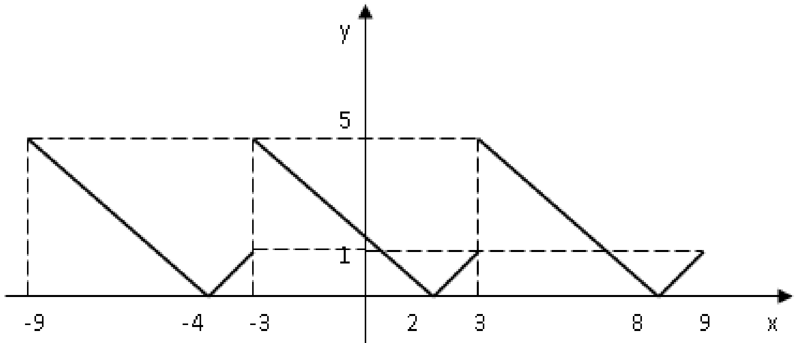


Рис. 1

$f(x)$ не є ні парною, ні непарною, тому ряд Фур'є для неї виглядає так: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$,

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx; \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Так як в нашій задачі $(-l, l) = (-3, 3)$, то

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{3} + b_n \sin\frac{n\pi x}{3})$$

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{2}(2-x)dx + \int_{2}^{3}(x-2)dx\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{(2-x)^2}{2}\Bigg|_{-3}^{2} + \frac{(x-2)^2}{2}\Bigg|_{2}^{3}\right) =$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{(2+3)^2}{2}+\frac{(3-2)^2}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{25}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{3};$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{2}(2-x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{2}^{3}(x-2)\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(2\int_{-3}^{2}\cos\frac{n\pi x}{3}dx-\int_{-3}^{2}x\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{2}^{3}x\cos\frac{n\pi x}{3}dx-2\int_{2}^{3}\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}(2\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{2}-\left(\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{3x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{2}+$$

$$+\left(\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{3x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)\Bigg|_{2}^{3}-2\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{2}^{3})=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{2n\pi}{3}-\sin\frac{-3n\pi}{3}\right)-\frac{3}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{n^2\pi^2}\cos\frac{-3n\pi}{3}-$$

$$-\frac{3}{n\pi}\sin\frac{-3n\pi}{3}+\frac{3}{n^2\pi^2}\cos\frac{3n\pi}{3}+\frac{3}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{3}-\frac{3}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3}-$$

$$-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{3}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}-\frac{3}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{n^2\pi^2}(-1)^n+\frac{3}{n^2\pi^2}(-1)^n-$$

$$-\frac{3}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}=\frac{6}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-\cos\frac{2n\pi}{3}\right);$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{2}(2-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{2}^{3}(x-2)\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(2\int_{-3}^{2}\sin\frac{n\pi x}{3}dx-\int_{-3}^{2}x\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{2}^{3}x\sin\frac{n\pi x}{3}dx-2\int_{2}^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$\frac{1}{3}\left(-\frac{2\cdot 3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{2}-\left(\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}-\frac{3x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{2}+\left(\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{3x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\right)\Bigg|_{2}^{3}+\frac{2\cdot 3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{2}^{3}\right)=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{-3n\pi}{3}-$$

$$-\frac{3}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{n^2\pi^2}\sin\frac{-3n\pi}{3}+\frac{3}{n\pi}\cos\frac{-3n\pi}{3}+$$

$$+\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{3}-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{3}-\frac{3}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{3}-$$

$$-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{2}{n\pi}(-1)^n-\frac{3}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+$$

$$+\frac{3}{n\pi}(-1)^n-\frac{3}{n\pi}(-1)^n-\frac{3}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{2}{n\pi}(-1)^n-$$

$$-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}=\frac{4}{n\pi}(-1)^n-\frac{6}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}=\frac{2}{n^2\pi^2}\left(2\cdot(-1)^n n\pi-3\sin\frac{2n\pi}{3}\right).$$

$$f(x)\sim\frac{13}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-\cos\frac{2n\pi}{3}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}+$$

$$+\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n 2n\pi-3\sin\frac{2n\pi}{3}\right)\sin\frac{n\pi x}{3}=$$

$$=\frac{13}{6}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}\left((-1)^n-\cos\frac{2n\pi}{3}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{1}{n^2}\left((-1)^n 2n\pi-3\sin\frac{2n\pi}{3}\right)\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Отриманий ряд Фур'є буде збігатися в точках неперервності $f(x)$ до самої функції, а в точках розриву $f(x)$ - до середнього арифметичного односторонніх границь $f(x)$ в цій точці. Таким чином, сума ряду Фур'є дорівнює 2 - x, якщо $x\in(-3{,}2)$, $x-2$, якщо $x\in(2{,}3)$ і $\frac{5+1}{2}=3$, якщо x = 2.

Зауваження: при обчисленні a_n і b_n враховували, що $\sin n\pi=0$, $\cos n\pi=(-1)^n$.

Приклад 7.

Розкласти функцію $f(x)=2-x^2$ в ряд Фур'є в інтервалі (-π; π).

Розв'язання. Ряд Фур'є для функції, заданої в інтервалі (-π; π), збігається з рядом Фур'є для періодичної функції з періодом T = 2π, яка в інтервалі (-π; π) збігається із заданою функцією. Зробимо рисунок цієї періодичної функції.

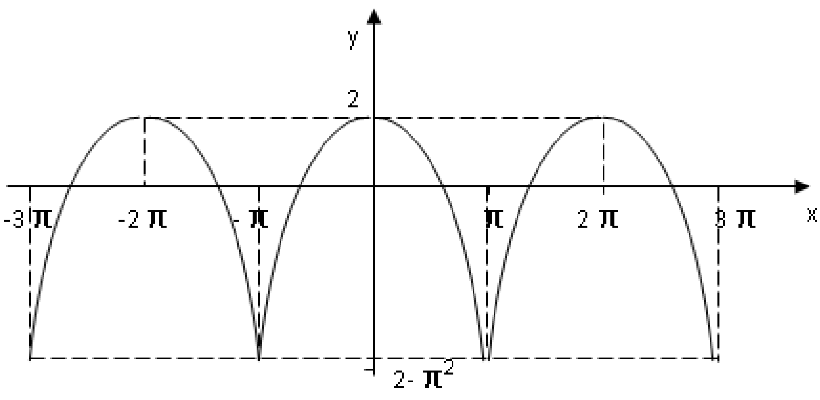


Рис. 2

За рисунком видно, що функція, яку ми збираємося розкладати в ряд Фур'є, парна, отже, ряд Фур'є має вигляд: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, де

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx; \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2-x^2)dx = \frac{2}{\pi}\left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 2\left(2 - \frac{\pi^2}{3}\right);$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2-x^2)\cos nx dx = \frac{2\cdot 2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx =$$

$$= \frac{4}{n\pi}\sin nx\Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{2x}{n^2}\cos nx + \frac{x^2}{n}\sin nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{n\pi}(\sin n\pi - \sin 0) - \frac{4\pi}{\pi n^2}\cos n\pi - \frac{2\pi^2}{n\pi}\sin n\pi + \frac{4}{\pi n^3}\sin n\pi =$$

$$= -\frac{4}{n^2}(-1)^n = \frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}.$$

Ряд Фур'є виглядає так:

$$f(x) \sim 2 - \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$$

Так як $f(x)$ - функція неперервна (див. рис.2), то сума отриманого ряду при $x \in (-\pi, \pi)$ дорівнює 2 - x^2.

5. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Варіант 1

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = |x - \pi|$ задану в інтервалі $(-\pi; \pi)$;

б) $y = \begin{cases} x + 1, \text{якщо} -1 \le x \le 0 \\ 1, \text{якщо } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Варіант 2

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = 4 - 2x$ при $0 \le x \le 2$, $y(-x) = y(x)$;

б) $y = \begin{cases} 1, \text{якщо } 0 < x \le 1 \\ 0, \text{якщо } 1 < x < 2 \end{cases}$.

Варіант 3

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = 2 - x$ при $0 \le x \le 2$, $y(-x) = y(x)$;

б) $y = \begin{cases} 1, \text{якщо} -1 \le x \le 0 \\ x, \text{якщо } 0 < x \le 1 \end{cases}$.

Варіант 4

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = x^2$ в інтервалі $(0; \pi)$;

б) $y = 3x$ в інтервалі (-2;2).

Варіант 5

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = \begin{cases} 2, \text{якщо} -\pi < x < 0, \\ 3, \text{якщо } 0 \le x < \pi; \end{cases}$

б) $y = 5 - |x|$ у інтервалі $(-5; 5)$.

Варіант 6

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = x + 1$ в інтервалі $(0;\pi)$ за косинусами ;

б) $y = x^2$ в інтервалі (0; 1).

Варіант 7

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = |x + \pi|$ в інтервалі $(-\pi;\pi)$;

б) $y = 3 - 2x$ при $0 \le x \le \frac{3}{2}$, $y(-x) = y(x)$.

Варіант 8

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = 4 - |x|$, яка задана в інтервалі $(-4;4)$;

б) $y = x$, яка задана в інтервалі ($-\pi$; π).

Варіант 9

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = \begin{cases} -2 \text{ ,якщо } 0 < x < \pi, \\ -3 \text{ ,якщо } \pi \le x < 2\pi; \end{cases}$

б) $y = x^2$ при $-1 < x < 1$.

Варіант 10

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = \begin{cases} -\frac{3}{2} \text{ ,якщо } -1 < x < 0 \\ 1 \text{ ,якщо } 0 \le x < 1; \end{cases}$

б) $y = 2 + |x|$ задану в інтервалі $(-\pi;\pi)$.

Варіант 11

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = \begin{cases} -1 \text{ ,якщо } -2 \le x < 0, \\ x \text{ ,якщо } 0 \le x < 2; \end{cases}$

б) $y = 2x$ при $0 < x < 1$ за синусами.

Варіант 12

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = |x| - 1$ при $- 2 \leq x \leq 2$;

б) $y = \begin{cases} x \text{ ,якщо } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x \text{ ,якщо } 1 < x < 2 \end{cases}$.

Варіант 13

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = \begin{cases} 1 \text{ ,якщо } -3 \leq x < 0 \\ -2 \text{ ,якщо } 0 \leq x < 3; \end{cases}$

б) $y = |x|$ задану в інтервалі $(-2; 2)$

Варіант 14

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = x - 1$ при $0 \leq x \leq 2$, $y(-x) = -y(x)$;

б) $y = \begin{cases} x \text{ ,якщо } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x \text{ ,якщо } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

Варіант 15

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = |x|$, яка задана в інтервалі $(-1; 1)$;

б) $y = x^2 + 1$, яка задана в інтервалі ($-\pi$; π).

Варіант 16

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = 1 - |x|$, яка задана в інтервалі $(-1; 1)$;

б) $y = \frac{\pi - x}{2}$, яка задана в інтервалі ($-\pi$; π).

Варіант 17

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = x^2 + x$, яка задана в інтервалі $(-1; 1)$;

б) $y = x + 1$, яка задана в інтервалі $(-\pi; \pi)$.

Варіант 18

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = 2 - |x|$, яка задана в інтервалі $(-2; 2)$;

б) $y = \begin{cases} 1 \text{ при } -\pi < x < 0 \\ 2 \text{ при } 0 \le x < \pi \end{cases}$.

Варіант 19

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $2y = \frac{3}{2}|x| - 1$, яка задана в інтервалі $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$;

б) $y = x^2$ задану в інтервалі $(0; 2\pi)$.

Варіант 20

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = 1 - \frac{x}{2}$, яка задана в інтервалі $(-2; 2)$;

б) $y = \begin{cases} 0 & \text{, якщо } -\pi < x < 0 \\ x & \text{, якщо } 0 \le x < \pi \end{cases}$.

Варіант 21

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = 3 - |x|$, яка задана в інтервалі $(-3; 3)$;

б) $y = |x|$, яка задана в інтервалі $(-\pi; \pi)$.

Варіант 22

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = 2x$, яка задана в інтервалі $(-1; 1)$;

б) $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, яка задана в інтервалі $(0; \pi)$ за косинусами.

Варіант 23

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = 2x - 1$ якщо $0 \le x \le \pi$, за косинусами;

б) $y = \begin{cases} -3 & \text{, якщо } -2 \le x < 0 \text{ ,} \\ 1 & \text{, якщо } 0 \le x \le 2 \text{ .} \end{cases}$

Варіант 24

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = \begin{cases} x & \text{, якщо } 0 \le x < \pi \text{ ,} \\ 1 & \text{, якщо } \pi < x < 2\pi \text{ .} \end{cases}$

б) $y = x^2$, яка задана в інтервалі (-1;1).

Варіант 25

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = |x|$ - 2 , яка задана в інтервалі $(-\pi; \pi)$;

б) $y = \begin{cases} 0 & \text{, якщо } -3 \le x < 0 \text{ ,} \\ x & \text{, якщо } 0 \le x < 3 \text{ .} \end{cases}$

Варіант 26

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = \begin{cases} 0 & \text{, якщо } -\pi \le x < 0 \text{ ,} \\ 1 & \text{, якщо } 0 \le x < \pi \text{ .} \end{cases}$

б) $y = 2 + |x|$, яка задана в інтервалі (-1;1).

Варіант 27

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = \begin{cases} x^2 & \text{, якщо } 0 \le x < \pi \text{ ,} \\ x & \text{, якщо } \pi \le x < 2\pi \text{ .} \end{cases}$

б) $y = x^2 + 1$, яка задана в інтервалі (-2;2).

Варіант 28

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = |\sin x|$ задану в інтервалі $(-\pi; \pi)$;

б) $y = \frac{\pi - x}{2}$, яка задана в інтервалі (-2;2).

Варіант 29

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = x^2$ при $0 \leq x < \pi$ за синусами ;

б) $y = x + 1$, яка задана в інтервалі (-2;2).

Варіант 30

Розвиньте у ряд Фур'є функцію :

а) $y = \begin{cases} -1 \text{ ,якщо } 0 < x < \pi, \\ -2 \text{ ,якщо } \pi \leq x < 2\pi; \end{cases}$

б) $y = 1 - x$ при $0 \leq x \leq 2$, $y(-x) = y(x)$.

6. КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Варіант 1

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x - 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 2x - 1$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 2

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=3x+2$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 3

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x+2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=2x-1$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 4

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}-x+1/2, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=x-1$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 5

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x/2+1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=1-2x$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 6

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = -3x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 7

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 3 - x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 2 - x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 8

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = 3 - 5x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 9

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 4x - 3, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 5x + 1$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 10

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=7-3x$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 11

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 3x-1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=-2x-1$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 12

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}3-2x, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=x+3$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 13

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ (\pi-x)/2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=2-7x$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 14

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 1-4x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=8x-3$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 15

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 1-4x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=-x-2$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 16

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}3x+2, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=2+x$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 17

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 4-2x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=2x+5$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 18

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}x+\pi/2, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур’є за синусами функцію $f(x)=5-x$, задану на відрізку $[0,\pi]$

Варіант 19

1. Розвиньте у ряд Фур’є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 6x-5, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур’є за косинусами функцію $f(x)=2(x-1)$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 20

1. Розвиньте у ряд Фур’є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}7-3x, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур’є за синусами функцію $f(x)=8x+3$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 21

1. Розвиньте у ряд Фур’є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \pi/4-x/2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур’є за косинусами функцію $f(x)=7+3x$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 22

1. Розвиньте у ряд Фур’є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}6x-2, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = -7x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 23

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 4 - 9x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 1 - 3x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 24

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} x/3 - 3, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = -1 - 4x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 25

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 10x - 3, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 3(1 - x)$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 26

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x/4, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=0,5x+2$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 27

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x/5-2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=2+3x$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 28

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}2x-11, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=4-3x$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 29

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x < 0,\\ 3x-8, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=5-2x$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Варіант 30

1. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

$$f(x)=\begin{cases}7x-1, & -\pi \le x < 0,\\ 0, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$$

2. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=2-3x$, задану на відрізку $[0,\pi]$.

Список рекомендованої літератури

1. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн. 2 / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003. — 368 с. — ISBN 966-06-0230-8.

2. Вся высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 3. — М.: Эдиториал УРСС, 2010. — 240 с. — ISBN 978-5-354-01329-6.

3. Вся высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 4. — М.: Эдиториал УРСС, 2005. — 352 с. — ISBN 978-5-354-01051-9.

4. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. . Юрик. — К: А. С. К., 2006. — 647 с. — ISBN 966-539-320-0.

5. Жевняк Р. М. Высшая математика: учеб. пособие Ч. 3. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1985. — 208 с.

6. Жевняк Р. М. Высшая математика: учеб. пособие Ч. 4. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1987. — 240 с.

7. Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. — К.: Техніка, 2000. — 792 с. — ISBN 966-575-153-0.

8. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Письменный. — М.: Айрис-Пресс, 2008. — 608 с. ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.

9. Шипачев В. С. Курс высшей математики / В. С. Шипачев. — М. Оникс, 2009. — 608 с. — ISBN 978-5-488-02067-2.