МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

АНАЛІЗ ФУНКЦІЙ

методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни
“Вища математика”
для студентів інженерних спеціальностей

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри АТ та ГМ,
протокол № 1 від 30.08. 2019р.

Чернігів ЧНТУ 2019

Аналіз функцій. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей./Укл.: В.П. Мурашковська, С.П. Казнадій– Чернігів: ЧНТУ,2019, - 43с.

Укладачі:

Мурашковська Вірв Петрівна, ст. викл.
Казнадій Світлана Петрівна, ст. викл.

Відповідальний за випуск: Кальченко Віталій Іванович, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, професор, доктор технічних наук

Рецензент: Венжега Володимир Іванович – доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, Чернігівського національного технологічного університету

Зміст

Вступ

Ці методичні вказівки укладені у відповідності до Навчальної програми з вищої математики для технічних, технологічних та природничих спеціальностей вищих навчальних закладів.

Дана робота призначена для студентів, які вивчають вищу математику і містить теоретичні вправи, контрольні питання, розрахункові завдання і приклади виконання завдань до модулю «Аналіз функцій ».

Мета даного видання - допомогти студентам краще оволодіти математичним апаратом, який застосовується до модулю «Аналіз функцій », виробити у студентів уміння, навички розв'язування різних задач з даної теми.

Основне завдання цих методичних вказівок – надати студентам теоретичну та практичну допомогу в самостійній роботі по вивченню розділу " Аналіз функцій " з дисципліни "Вища математика". Методичні вказівки містять теоретичний матеріал, необхідний для самостійного виконання студентами індивідуальних домашніх завдань. Наведені приклади розв'язання основних стандартних задач. Завдання охоплюють в цілому матеріал розділу, який в тому чи іншому обсязі вивчається студентами.

Методичні вказівки можуть бути використані під час аудиторних занять, як довідковий матеріал та в якості задачника при проведенні самостійних та модульно – контрольних робіт.

1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Однією з властивостей функцій, які неперервні на відрізку, є наступне: неперервна на відрізку функція, змінюючи свій знак, проходить через нуль. Це означає, що якщо функція *f(x)* неперервна на відрізку *[a; b]*, а *f(a)* і *f(b)* мають різні знаки, то на цьому відрізку існує точка $\tilde{x}$ *(* $a < \tilde{x} < b$*),* в якій *f(*$\tilde{x}$*)=0;* або геометрично: якщо кінці дуги графіка неперервної функції знаходяться по різні сторони від осі *Ox* , то дуга перетинає вісь *Ox (рисунок 1.1).*

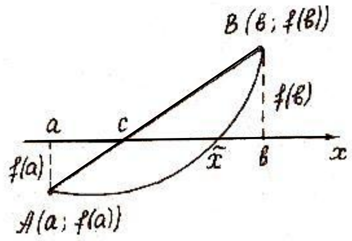


Рисунок 1.1

Ця властивість дозволяє знаходити наближені значення дійсних коренів рівняння *f(x)=0,* якщо функція *y = f(x)* неперервна в деякій області та змінює в цій області знак. Розглянемо один із методів знаходження дійсних коренів рівняння, в основі яких лежить ідея послідовного уточнення початкового наближення до кореня, а саме метод хорд.

Нехай на відрізку *[a; b]* знаходиться єдиний корінь $\tilde{x}$ рівняння *f(x)=0,* ліва частина якого *f(x)* – неперервна функція. Через точки *A(a; f(a)), B(b; f(b))* проведемо пряму, рівняння якої набуває вигляду *(див. рисунок 1.1)*

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}\ ,\ \text{або}\quad x-a=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)\,.$$

Знайдемо абсцису точки перетину цієї прямої з віссю *Ox,* для чого в останньому рівнянні припустімо, що *y=0, x=c* :

$$c=a-\frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}\,.$$

Остання формула визначає наближене значення кореня $\tilde{x}$ рівняння *f(x)=0,* його називають першим наближенням. Щоб отримати друге наближення, необхідно останню формулу застосувати до того з відрізків *[a;c], [a;b]* , на кінцях якого функція має протилежні знаки. З урахуванням цього можемо записати формулу одержання *n*-го наближення, якщо відомо $n-1-c$:

$$x_n=\begin{cases} x_{n-1}-\dfrac{(x_{n-1}-a)\cdot f(x_{n-1})}{f(x_{n-1})-f(a)},\ x_0=b, \qquad \text{якщо}\ \ f(a)f(x_1)<0, \\ \\ x_{n-1}-\dfrac{(\mathrm{b}-x_{n-1})\cdot f(x_{n-1})}{f(\mathrm{b})-f(x_{n-1})},\ \ x_0=a, \qquad \text{якщо}\ \ f(a)f(x_1)\geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Обчислення наближених значень кореня рівняння слід продовжувати до тих пір, поки не перестануть змінюватися ті десяткові знаки, які ми бажаємо зберегти у відповіді.

Примітка 1. При обчисленні першого наближення x_1 можна користуватися будь-якою з формул (1), результат буде той самий.

Примітка 2. Значення функції в послідовних точках наближення x_{i-1}, x_i повинні мати один і той самий знак, тобто $f(x_{i-1}) \cdot f(x_i) > 0$. Якщо це не так, то слід застосувати ту ж процедуру до інтервалу $[x_{i-1};\ x_i]$, який ізолює корінь.

Задача 1. Знайти корінь рівняння $x \cdot arctg\, x = 1$ з точністю до *0,0001*.

Розв'язок. Побудувавши графіки функцій $y = arctg\, x$ та $y = \frac{1}{x}$, з розташування точок перетину робимо висновок, що вказане рівняння має два корні, рівних за абсолютною величиною та різних за знаком (*рисунок 1.2*). Будемо шукати додатній корінь, обравши відрізком ізоляції цього кореня відрізок $[1; \sqrt{3}]$.

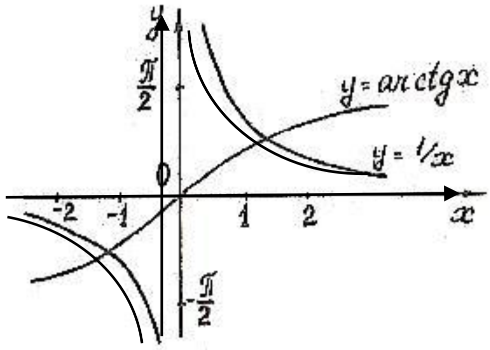


Рисунок 1.2

Для функції $f(x) = x \cdot arctgx - 1$ маємо:

$$f(a) = f(1) = 1 \cdot arctg1 - 1 = \frac{\pi}{4} - 1 \approx -0{,}2146\,,$$

$$f(b) = f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}\, arctg\sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 1 \approx 0{,}8138.$$

Отже, інтервал містить корінь, так як

$$f(a) \cdot f(b) = f(1) \cdot f(\sqrt{3}) = -0{,}2146 \cdot 0{,}8138 < 0.$$

Визначаємо x_1, використовуючи першу з формул (1):

$$x_1 = b - \frac{(b-a) \cdot f(b)}{f(b) - f(a)} = \sqrt{3} - \frac{(\sqrt{3}-1) \cdot f(\sqrt{3})}{f(\sqrt{3}) - f(1)} \approx 1{,}15276.$$

По знайденому значенню x_1 обчислюємо $f(x_1)$:

$$f(x_1) = f(1{,}15276) \cdot arctg(1{,}15276) - 1 \approx -0{,}01296.$$

В силу того, що

$f(a) \cdot f(x_1) = f(1) \cdot f(1{,}15276) = -0{,}2146 \cdot (-0{,}01296) > 0$, слідує для подальших обчислень взяти другу з формул (1), а саме

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(\mathrm{b} - x_{n-1}) \cdot f(x_{n-1})}{f(\mathrm{b}) - f(x_{n-1})}.$$

Всі подальші обчислення заведемо до таблиці.

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$-(x_n - x_{n-1})$	x_n
1	1	-0,2146	-0,15276	1,15276
2	1,15276	-0,01296	-0,00908	1,16184
3	1,16184	-0,000676	-0,00047	1,16231
4	1,16231	-0,0000361	-0,00001	1,16232

Так як x_4 відрізняється від x_3 тільки у п'ятому знакові після коми, отже, корінь $\tilde{x}$ знайдений з заданою точністю $\tilde{x} \approx x_4 = 1{,}1623$.

Теорія границь складає фундамент математичного аналізу. Тому дуже важливо виробити вірне розуміння сенсу визначення "границя функції в точці", а також опанувати техніку обчислення границь. Достатньо повно ці питання викладені в методичних відомостях [9].

Точки, які не є точками неперервності *y=f(x),* будемо називати точками особливості функції. Сюди входять як точки кінцевого і безмежного розриву, так і ті точки, в яких функція приймає «невизначене значення»:

$[\frac{0}{0}],[\frac{\infty}{\infty}],[\infty-\infty],[0\cdot\infty],[1^{\infty}],[0^{0}],[\infty^{0}]$.

Задача 2. Дослідити точки особливості функції $y = \frac{|sinx|}{x}$.

Розв'язок. Дана функція має єдину точку особливості *x=0*. У всіх інших точках вона неперервна як часне від ділення двох неперервних функцій при відмінному від нуля знаменнику. В точці *x=0* дана функція приймає «невизначене» значення $[\frac{0}{0}]$.

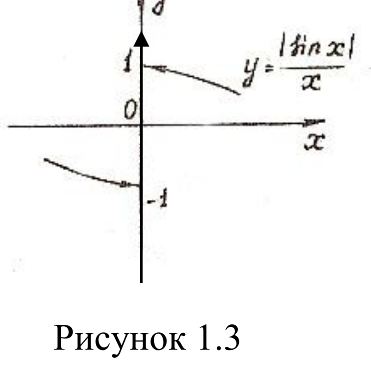


Рисунок 1.3

Досліджуємо поведінку функції в околі точки особливості. С цією метою знайдемо ліву $\lim\limits_{x\to-0} y$ і праву $\lim\limits_{x\to+0} y$ границі:

$$\lim_{x\to-0} y = \lim_{x\to-0}\frac{|\sin x|}{x} = -\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = -1,$$

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0}\frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

В силу того, що функція *y* має кінцеву ліву і праву границю, точка $x=0$ є точка кінцевого розриву функції.

Поведінка функції поблизу точки особливості схематично зображено на рисунку 1.3.

Для дослідження усього подальшого курсу математики і суміжних дисциплін необхідно набути тверді навички в техніці обчислення похідних.

Перш ніж приступити до обчислення похідних по формулам, які складають таблицю похідних від основних елементарних функцій, необхідно навчитися безпосередньо знаходити похідні виходячи з їх загального визначення.

Рішення цих задач допоможе вірно зрозуміти сенс похідної, про який не слід забувати, при обчисленні похідних по формулам центральну роль відіграє правило диференціювання складної функції.

Після того як досягнуто повне розуміння правила диференціювання складної функції, можна обчислювати похідну, не розкладаючи функцію явно на ланцюг простих.

Задача 3. Обчислити похідну функції $y = sin^2(e^{arctg\sqrt{lnx^3}})$.

Розв'язок. Для розкладу функції на ланцюг простих, представимо обчислення функції *y,* на основі заданого значення *x*:

$$x \to (\,)^3 \to \ln(\,) \to \sqrt{(\,)} \to arctg(\,) \to e^{(\,)} \to \sin(\,) \to (\,)^2 = y$$

Тут ( ) всюди позначає результат попередньої операції.

Тоді, вважаючи $y = z^2$; $z = \sin t$; $t = e^u$; $u = arctgv$; $v = \sqrt{f}$; $f = lng$; $g = x^3$ отримуємо представлення заданої у вигляді ланцюга простих функцій.

Обчислюючи потім похідні, знаходимо

$$y'_z = 2z; \quad z'_t = \cos t; \quad t'_u = e^u; \quad u'_v = \frac{1}{1+v^2}; \quad v'_f = \frac{1}{2\sqrt{f}}; \quad f'_g = \frac{1}{g}; \quad g'_x = 3x^2.$$

$$y'_z = 2sin(e^{arctg\sqrt{lnx^3}}); \quad z'_t = \cos(e^{arctg\sqrt{lnx^3}}); \quad t'_u = e^{arctg\sqrt{lnx^3}};$$

$$u'_v = \frac{1}{1+lnx^3}; \quad v'_f = \frac{1}{2\sqrt{lnx^3}}; \quad f'_g = \frac{1}{x^3}; \quad g'_x = 3x^2.$$

Підставляючи знайдені значення в формулу диференціювання складної функції $y' = y'_z \cdot z'_t \cdot t'_u \cdot u'_v \cdot v'_f \cdot f'_g \cdot g'_x$, отримаємо

$$y' = 2sin\left(e^{arctg\sqrt{lnx^3}}\right) \cdot \cos\left(e^{arctg\sqrt{lnx^3}}\right) \cdot e^{arctg\sqrt{lnx^3}} \cdot \frac{1}{1+lnx^3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{lnx^3}} \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2;$$

або після спрощення $y' = \frac{3}{x\sqrt{lnx^3}} \cdot \frac{1}{1+lnx^3} \cdot e^{arctg\sqrt{lnx^3}} \cdot sin\left(2 \cdot e^{arctg\sqrt{lnx^3}}\right)$.

Зауважимо, що часто і даремно не звертають належної уваги на диференційні функції, задані неявно і параметрично. Слід заздалегідь застерегти від такого упущення, так як відповідні правила вельми важливі при практичному знаходженні похідних.

Задача 4. Знайти $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо y є функція змінного x, задана параметричними рівняннями $x = cos^2 t,\ y = \sin t$.

Розв'язок. Так як $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, спочатку знаходимо

$\frac{dx}{dt} = -2\cos t \cdot \sin t$, $\frac{dy}{dt} = \cos t$.

Тоді $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{-2\cos t \cdot \sin t} = -\frac{1}{2\sin t}$.

При обчисленні другої похідної $\frac{d^2y}{dx^2}$ студенти часто роблять помилку, диференціюючи $\frac{dy}{dx}$ не по x, а по параметру t. Слід мати на увазі, що знайдена похідна $\frac{dy}{dx}$ знову є параметрично заданою функцією від x. Для її диференціювання по x треба виходити з рівностей $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sin t}$, $x = cos^2 t$ і знову, як при знаходженні першої похідної, поділити похідну від $\frac{dy}{dx}$ по t на похідну від x по t:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{d}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\cos t}{2sin^2 t}}{-2\cos t \cdot \sin t} = -\frac{1}{4sin^3 t}$$

Аналогічно обчислюються і похідні більш високих порядків.

При використанні правила Лопіталя необхідно ділити похідну від чисельника на похідну від знаменника, взяті порізно, та ні в якому разі не диференціювати функцію як дріб. В деяких випадках правило Лопіталя застосовується для знаходження границі не один раз, а багатократно, і його доводиться комбінувати з іншими методами знаходження границь.

Задача 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos^3 x}{e^x-1-x}$.

Розв'язок. Застосовуємо правило Лопіталя, переконуючись перш, що маємо невизначеність виду $[\frac{0}{0}]$:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos^3 x}{e^x-1-x} = [\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-3cos^2 x(-\sin x)}{e^x-1} = 3\lim\limits_{x\to 0} cos^2 x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1} = 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}$.

Тут ми використали теорему про границю добутку. Однократне застосування правила Лопіталя до рішення задачі не привело /знову маємо невизначеність виду $[\frac{0}{0}]$ /. Застосовуємо його ще раз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^3x}{e^x-1-x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1} = [\,\frac{0}{0}\,] = 3\lim_{x\to 0}\frac{cos\,x}{e^x} = 3\cdot 1 = 3.$$

Дослідження функції *y=f(x)* рекомендується проводити по наступній схемі.

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти точки перетину графіка *y=f(x)* з віссю, а також інтервали знакосталості *y* та визначити знак *y* на цих інтервалах.
3. Знайти точку перетину графіка функції *y=f(x)* з віссю *Ox.*
4. Знайти всі вертикальні асимптоти графіка функції *y=f(x)* і дослідити поведінку *y* при прямуючому *x* до вертикальних асимптот зліва і справа.
5. Знайти всі похилі асимптоти.
6. Знайти точки перетину графіка функції *y=f(x)* з усіма похилими асимптотами.
7. Дослідити зміну функції при *x*, що прямує до кінців області визначення /у випадку кінцевої області визначення або відсутності похилої асимптоти/.
8. Знайти точки екстремуму та проміжки зростання і спадання функції *y=f(x).*
9. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і увігнутості графіка *y=f(x).*
10. Дослідити функцію на парність та непарність.
11. Використовуючи результати пунктів 1-10, побудувати графік функції.

Задача 6. Дослідити функцію $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ і побудувати її графік.

Розв'язок. 1. Функція визначена і неперервна на всій числовій осі *Ox*, за винятком точок *x=-2* та *x=2,* в яких знаменник дробу перетворюється в нуль. Отже, $\mathcal{D}(y) =]-\infty;\ -2[\cup]-2; 2[\cup]2;\ +\infty[$.

2. Для знаходження точок перетину графіка *y* з віссю *Ox* вирішуємо систему рівнянь $\begin{cases} y = 0\,, \\ y = \frac{x^3}{x^2-4} \end{cases}$. Встановлюємо, що точка *O(0;0)* є точка перетину графіка з віссю *Ox.*

Інтервал знакосталості *y* :

$$\begin{aligned} &]-\infty;\ -2[\,, && y<0; \\ &]-2;\ 0[\,, && y<0; \\ &]\ \ 0;\ 2\ \ [\,, && y<0; \\ &]\,2;\ +\infty[\,, && y>0. \end{aligned}$$

3. Для знаходження точки перетину графіка з *Oy* припустимо, що *x=0.* Тоді *y=0* і точка *O(0;0)* є точка перетину графіка *y* з віссю *Oy*.

4. Функція *y* має дві точки розриву *x=-2* і *x=2,* так як

$\lim\limits_{x\to-2} y = \lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{-8}{0} = \infty$ і $\lim\limits_{x\to2} y = \lim\limits_{x\to2} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{8}{0} = \infty$, то прямі *x=-2* і *x=2*– вертикальні асимптоти графіка *y*.

Уточнімо поведінку функції в околах асимптот. Для асимптоти *x=-2* маємо

$$\lim_{x\to-2-0} y = \lim_{x\to-2-0} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{-8}{+0} = -\infty \;,$$

$$\lim_{x\to-2+0} y = \lim_{x\to-2+0} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{-8}{-0} = +\infty.$$

Аналогічно при *x=2*

$$\lim_{x\to2-0} y = \lim_{x\to2-0} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{8}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to2+0} y = \lim_{x\to2+0} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{8}{+0} = +\infty.$$

5. Для того щоб з'ясувати чи має крива похилі асимптоти, згадаємо, що коефіцієнти k і b рівняння *y=kx+b* знаходяться з відношень $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x}$ і $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (y-kx)$. Застосуємо їх до досліджуваної функції:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2-4)} = 1.$$

Отже, $k=1$. Далі $\lim\limits_{x\to\infty} (y-kx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0.$

Отже, $b=0$.

Пряма *y=x* – шукана асимптота.

6. Для знаходження точок перетину графіка *y* з похилою асимптотою вирішуємо систему рівнянь $\begin{cases} y = x\,, \\ y = \frac{x^3}{x^2-4}. \end{cases}$

Маємо: $\frac{x^3}{x^2-4} = x$, або $\frac{x^3}{x^2-4} - x = 0$. Звідси знаходимо *x=0* – єдина точка перетину графіка з похилою асимптотою.

7. Так як функція має похилі асимптоти як в додатному, так і в від'ємному напрямках осі *Ox,* то нема необхідності обчислювати $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ і $\lim\limits_{x\to-\infty} y$.

8. Знайдемо точки екстремуму, проміжки зростання і спадання функції. Для цього обчислимо першу похідну від даної функції:

$$y' = \frac{3x^2(x^2-4) - 2x\cdot x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

Знайдемо стаціонарні точки. Для цього достатньо прирівняти до нуля чисельник виразу для похідної.

Вирішуючи рівняння $x^2(x^2-12)=0$, знаходимо $x_1=-2\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=2\sqrt{3}$.

Похідна може змінювати знак при проходженні аргументу x через ці точки і через точки розриву функції *x=-2* і *x=2,* в яких похідна не існує.

Так як $x^2\geq 0$ і $(x^2-4)^2\geq 0$, то знак похідної визначається знаком різниці x^2-12. Тому маємо при $-\infty<x<-2\sqrt{3}$ $y'>0$ і функція зростає на цьому проміжку. При $-2\sqrt{3}<x<-2$, $-2<x<0$, $0<x<2$ і $2<x<2\sqrt{3}$ $y'<0$ і функція спадає на проміжках. Нарешті, при $-2\sqrt{3}<x<+\infty$ $y'>0$ і функція зростає.

Таким чином, в точці $x=-2\sqrt{3}$ функція має максимум /перехід від зростання до спадання/, а в точці $x=2\sqrt{3}$ – мінімум /перехід від спадання до зростання/. В точці $x=0$ мінімум та максимум відсутні, так як похідна не міняє знак.

Визначимо ординати точок максимуму і мінімуму:

$y_{max}=f\left(-2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}$; $\qquad y_{min}=f\left(2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$;

9. Знайдемо точки перегину графіка функції, інтервали його опуклості і увігнутості. Для цього обчислюємо другу похідну:

$$y''=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

Бачимо, що $y''=0$ тільки при $x=0$. Друга похідна може змінювати знак в цій точці і в точках розриву функції *x=-2* і *x=2.* Інтервали знакосталості y'':

$]-\infty;-2[$, $y''<0$ – функція опукла;

$]-2;\ 0[$, $y''>0$ – функція увігнута;

$]\ 0;\ 2\ [$, $y''<0$ – функція опукла;

$]\,2;\ +\infty[$, $y''>0$ – функція увігнута.

Таким чином, точка $x=0$ є точкою перегину, в силу того, що друга похідна тут змінює знак.

10. Функція y непарна, так як $f(-x)=-f(x)$. Тому графік y володіє симетрією відносно початку координат.

11. Всі результати дослідження використовуємо для побудови графіка. Креслення кривої слід починати з нанесення на площину її асимптот, далі її точок, відповідних точкам екстремуму даної функції, і точок перегину. Знання проміжків зростання та спадання функції, а також інтервалів опуклості та увігнутості її графіка допоможе накреслити криву осмислено і точно (*рисунок 1.4*).

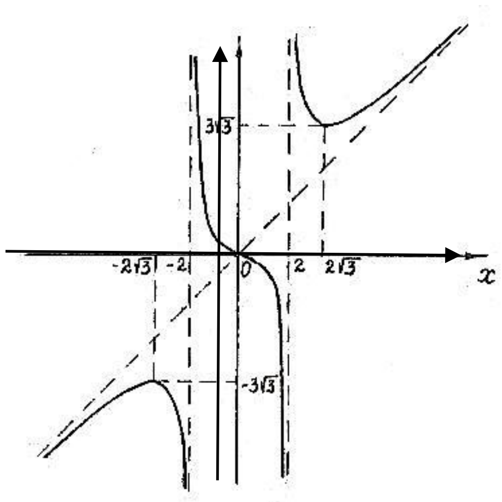


Рисунок 1.4

Необхідно чітко відрізняти поняття максимуму /мінімуму/ функції в точці її найбільшого /найменшого/ значення на даному проміжку.

Максимум /мінімум/ функції, досягається нею в будь-якій точці проміжку, повинен бути більше /менше/ інших її значень лиш в деякому околі цієї точки, тоді як найбільше /найменше/ значення функції на проміжку більше /менше/ всіх інших значень функції на цьому проміжку.

Задача 7. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^4 - 2x^2 + 3$ на проміжку [-3; 2].

Розв'язок. Знаходимо похідну $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ і визначаємо стаціонарні точки $4x(x^2 - 1) = 0$, звідки $x = -1,\ x = 0,\ x = 1$.

Визначаємо значення функції в цих точках:

$$y(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 3 = 2; \qquad y(0) = 3; \qquad y(1) = 2.$$

Обчислюємо значення даної функції на границях проміжку:

$$y(-3) = (-3)^4 - 2(-3)^2 + 3 = 66; \qquad y(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 3 = 11.$$

З отриманих п'яти значень обираємо найбільше і найменше. Отже, найбільше значення функції на даному відрізку дорівнює 66, а найменше – 2.

Якщо функція достатньо складна або містить трансцендентні функції, то дуже важко визначити корені похідної аналітично. В цьому випадку слід знаходити їх наближено, використовуючи метод хорд, описаний раніше.

В деяких випадках, якщо проміжок не дуже великий, можна знаходити наближено найбільше і найменше значення функції шляхом табуляції заданої функції з достатньо малим кроком.

Якщо функція *f(P)* диференційована в обмеженій замкнутій області, то вона досягає свого найбільшого /найменшого/ значення або в стаціонарній точці або в граничній точці області.

2 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Завдання 1

Побудувати графіки заданих функцій додаванням і множенням графіків елементарних функцій.

1. а) $y = x + \sin x$; б) $y = \frac{1}{x} \cdot lnx$;
2. а) $y = e^x - x$; б) $y = \frac{1}{x} \cdot arctgx$;
3. а) $y = \frac{x}{2} + \cos(2x - \pi)$; б) $y = x \cdot 2^x$;
4. а) $y = e^x + e^{-x}$; б) $y = \frac{1}{x} \cdot e^{-x}$;
5. а) $y = arctgx - x$; б) $y = \frac{1}{x} \cdot sinx$;
6. а) $y = \sin x + \cos x$; б) $y = x \cdot e^{-x}$;
7. а) $y = x + \cos x$; б) $y = x^2 \cdot arctgx$;
8. а) $y = x - e^{-x}$; б) $y = \frac{1}{x} \cdot (x^2 + 2)$;
9. а) $y = arctgx + \sin x$; б) $y = xlnx$;
10. а) $y = x + \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{1}{x} \cdot e^x$;
11. а) $y = x - \cos x$; б) $y = x^2(1 - \cos x)$;
12. а) $y = x - \sin(\frac{2}{3}x + 4)$; б) $y = x \cdot e^x$;
13. а) $y = x + \operatorname{arctg} x$; б) $y = x^2 \frac{1}{x-2}$;
14. а) $y = x - \ln x$; б) $y = \frac{1}{x}(sinx - 1)$;
15. а) $y = cosx - \sin x$; б) $y = x \cdot arcctgx$;
16. а) $y = x + \operatorname{arcctg} x$; б) $y = x^2 \cdot arcctgx$;
17. а) $y = e^x - e^{-x}$; б) $y = x^2 \cdot lnx$;
18. а) $y = \cos\frac{x}{3} - x$; б) $y = x \cdot arctgx$;
19. а) $y = x + e^x$; б) $y = x^2(1 - \sin\frac{x}{3})$;
20. а) $y = x - \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{1}{x} \cdot \cos x$;
21. а) $y = \cos 2x + \sin 3x$; б) $y = x \cdot \frac{1}{x+2}$;
22. а) $y = x + \ln x$; б) $y = x^2 \cos x$;
23. а) $y = x - 2^x$; б) $y = x^2 \cdot e^{-x}$;
24. а) $y = arcctgx - cosx$; б) $y = x \cdot \cos x$;
25. а) $y = x + e^{-x}$; б) $y = x^2 \sin x$;
26. а) $y = \sin x - x$; б) $y = \frac{1}{x} arctgx$;
27. а) $y = \sin 2x - cos3x$; б) $y = x \cdot 5^{-x}$;
28. а) $y = x + 2^x$; б) $y = \frac{1}{x}(cos\frac{x}{2} - 1)$;
29. а) $y = x - \operatorname{arctg} x$; б) $y = x^2 \cdot e^x$;
30. а) $y = x + \sin 3x$; б) $y = x \cdot \sin x$;

Завдання 2

Визначити корені рівняння графічно і уточнити один із них методом хорд з точністю $\varepsilon = 0{,}001$ $(|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon)$.

1. $x - \sin x = 0{,}25.$
2. $tg(0{,}58x + 0{,}1) = x^2.$
3. $\sqrt{x} - \cos(0{,}387x) = 0.$
4. $tg(0{,}4x + 0{,}4) = x^2.$
5. $tgx - \frac{7}{2x+6} = 0.$
6. $tg(0{,}5x + 0{,}2) = x^2.$
7. $3x - \cos x - 1 = 0.$
8. $x + lnx = 0{,}5.$
9. $tg(0{,}5x + 0{,}1) = x^2.$
10. $x^2 + 4\sin x = 0.$
11. $ctg(1{,}05x) - x^2 = 0.$
12. $tg(0{,}4x + 0{,}3) = x^2.$
13. $xlgx - 1{,}2 = 0.$
14. $1{,}8x^2 - \sin 10x = 0.$
15. $ctgx - \frac{x}{4} = 0.$
16. $tg(0{,}3x + 0{,}4) = x^2.$
17. $x^2 - 20\sin x = 0.$
18. $ctgx - \frac{x}{3} = 0.$
19. $tg(0{,}47x + 0{,}2) = x^2.$
20. $x^2 + 4\sin x = 0.$
21. $ctgx - \frac{x}{2} = 0.$
22. $2x - lgx - 7 = 0.$
23. $tg(0{,}44x + 0{,}3) = x^2.$
24. $3x - \cos x - 1 = 0.$
25. $ctgx - \frac{x}{10} = 0.$
26. $x^2 + 4\sin x = 0.$
27. $tg(0{,}36x + 0{,}4) = x^2.$
28. $x + lgx = 0{,}5.$
29. $ctgx - \frac{x}{5} = 0.$
30. $2lgx - \frac{x}{2} + 1 = 0.$

Завдання 3

Обчислити вказані границі, не користуючись правилом Лопіталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+4x-7}{4x^2-3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x+3}-3}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{7}}$;

 в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}$;

 д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2+x}{x}}$

2. а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

 в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-cos^2x}{x\cdot\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{8x^3-4x^2+11}{2x^3+2x-5}$;

 д) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2)(\ln(2x+3)-\ln(2x-4))$

3. а) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

 в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x\cdot\operatorname{tg} 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^4-7x^2+4}{3x^4+5x-2}$;

 д) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$

4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

 в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 3x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x-1}$;

 д) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x-2)(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$

5. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$;

 в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\cdot\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^4+4x-5}{6x^2-2x+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{x-1}}$

6. а) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$;

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+3)(\ln(x+2)-\ln x)$

7. а) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 3x}{x\cdot \mathrm{tg} 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5+7x^3-4}{5x^5-3x^2+2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{2x-2}}$

8. а) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x\, sin2x\, ctg^2x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+3x^2-x^5}{2x+3x^3+3x^5}$;

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x+2)(\ln(x+3)-\ln(x+4))$

9. а) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\cdot\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-4x^2+2}{6x^4+2x^3-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2x}{x-1}}$

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin2x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5-4x^3+3}{2x^5-3x^2-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to -\infty}(2-3x)(\ln(1-3x)-\ln(2-3x))$

11. а) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cdot \mathrm{tg}\, 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^4-5x+2}{2x^4+3x^2-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$

12.а) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg5x$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{6x-5+3x^5}{x^5+2x^2-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$

13.а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot tg3x\cdot ctg^2 2x$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{6x^3-2x+7}{2+3x^3-5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$

14.а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{arctg3x}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x-x^2+3x^5}{x^5-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2)(\ln(2x-3)-\ln(2x+1))$

15.а) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+5x+2}{3x^2-x-14}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{16-x}-\sqrt{12}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot \sin 3x}{cosx-cos^3x}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x+3x^2+3}{x^2+2x+7}$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x+3}{x+6}\right)^{5x}$

16.а) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+7x+2}{2x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^4-5x^2+4}{x^4+x^2+2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{3+x}{x}}$

17.а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2+5x-24}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos^3 2x}{x\cdot tg3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-x^2}{3x^2+x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{7x}{1+7x})^{3x}$

18.а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-6x+\frac{3}{2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}5x\cdot ctg3x$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{2}{x}}$

19.а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{3x^2+x^4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x\cdot\mathrm{tg}\,2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{3x^3+x-5}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+4})^{3x}$

20.а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{\sqrt{3x+3}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2\frac{x}{2}}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-4x^3+3}{x^2+3x-5}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1+x}{x}}$

21.а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+5x+2}{x^3+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos^2 3x-cos^2 x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^2-4x+4}{4x^2+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x})^{2-5x}$

22.а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,6x}{1-cos\,2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{(2x+3)^5}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{2}{x})^{\frac{8}{x}}$

23.а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+7x+5}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 ctg2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6+3x^5-5x+4}{5x-1-3x^6}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{x+1})^{2x-3}$

24.а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1+3x^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+4x-x^3}{5x^3+7x+2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}+2}$

25.а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-tg^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+5}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+4}{x+8})^{3x}$

26.а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2}-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 x-tg^2\, x}{x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$

27.а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos2x-cosx}{1-cosx}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)(\ln(x+3)-\ln x)$

28.а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos^3x}{4x^2}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x}{2x^3-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x-1}{2x+1})^x$

29.а) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$;   б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[3]{\frac{x}{4}}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+x}-\sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-sinx}{x(1-cos2x)}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)(\ln(x-3)-\ln x)$

30.а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}$;   б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{cosx}}{xsinx}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6-2x^3+1}{(x^2+1)^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x^3+1}{x^3+8})^{\frac{2}{x+1}}$.

Завдання 4

Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа, який задовольняє заданій таблиці значень.

Варіанти																			
1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0	1	3	2	3	-1	2	1	4	3	1	0	1	1	1	-1	2	4	2	0

-1	4	-2	1	-2	1	3	0	-1	2	4	4	3	0	2	-3	1	3	-1	1
3	1	2	1	0	1	1	2	0	-1	-3	1	-2	-1	0	3	0	2	3	2
1	3	0	-2	1	-1	-2	-1	1	2	0	2	2	5	-1	-1	-1	-4	-2	0
11		12		13		14		15		16		17		18		19		20	
x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
-4	1	1	4	2	0	2	1	3	-5	0	-2	1	2	2	0	1	-1	2	2
2	2	2	2	3	-1	1	2	0	-1	2	-3	0	-1	3	1	2	4	1	1
0	3	3	3	4	2	0	3	-1	2	-1	-4	2	3	-1	2	-1	5	-3	-4
-1	4	4	1	-1	1	-1	1	-3	0	1	0	-1	0	1	-3	-2	6	0	6
20		22		23		24		25		26		27		28		29		30	
x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
3	-2	3	5	2	-4	1	0	-1	3	-4	2	-3	4	-1	1	-2	1	-1	3
-1	-1	4	4	-3	-6	0	-1	0	6	-2	1	0	3	0	2	0	0	0	-1
1	0	1	-3	-2	0	2	-1	1	4	1	-2	1	2	1	3	1	-2	2	1
2	1	2	0	1	8	-1	5	3	1	2	6	2	1	2	-1	2	1	3	-2

Завдання 5

Дослідити особливі точки функції $y = f(x)$, а також ліву і праву границі при прагненні аргументу до особливих точок. Зробити схематичне креслення поведінки функції поблизу особливих точок.

1. а) $y = e^{\frac{1}{x}}$; б) $y = \frac{1-cosx}{x^2}$.
2. а) $y = arctg\frac{1}{x}$; б) $y = \frac{1}{1-e^{1-x}}$.
3. а) $y = 2^{\frac{2x}{1-x^2}}$; б) $y = \frac{|sinx|}{x}$.
4. а) $y = arctg(lnx)$; б) $y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, \text{якщо } x \neq -1, \\ 3, \quad \text{якщо } x = -1. \end{cases}$

5. а) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$;   б) $y=\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$.

6. а) $y=\frac{sinx}{|x|}$;   б) $y=\frac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$.

7. а) $y=\frac{1+9^{\frac{1}{x-1}}}{2+5^{\frac{1}{x-1}}}$;   б) $y=\frac{sin|x+2|}{x+2}$.

8. а) $y=\frac{tg(x+3)}{|x+3|}$;   б) $y=\frac{1-4^{\frac{1}{2x+1}}}{5^{\frac{1}{2x+1}}}$.

9. а) $y=\frac{sin5x}{\sqrt{x+9}-3}$;   б) $y=e^{\frac{1}{x^2}}$.

10. а) $y=x\cdot ctg\frac{x}{2}$;   б) $y=\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

11. а) $y=\frac{2x-x^2}{|x|}$;   б) $y=ln\frac{1}{x^2}$.

12. а) $y=arctg\frac{1}{x}$;   б) $y=\frac{1}{x+4}-\frac{8}{16-x^2}$.

13. а) $y=\frac{tg\pi x}{x+2}$;   б) $y=\frac{3}{2-6^{\frac{1}{x-1}}}$.

14. а) $y=arctg(10^{\frac{1}{4+x}})$;   б) $y=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

15. а) $y=(cosx)^{\frac{1}{sin^2x}}$;   б) $y=\frac{1+2^{\frac{1}{x-3}}}{3-2^{\frac{1}{x-3}}}$.

16. а) $y=(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$;   б) $y=\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}$.

17. а) $y=\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$;   б) $y=\frac{8^{\frac{1}{x}}}{1-8^{\frac{1}{x}}}$.

18. а) $y=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, \text{якщо } x\neq 2,\\ 5, \quad \text{якщо } x=2\end{cases}$;   б) $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

19. а) $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$;   б) $y=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x^2-9}$.

20. а) $y=arctg\frac{1}{x^2-1}$;   б) $y=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

21. а) $y=(2-x)tg\frac{\pi}{4}x$;   б) $y=\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

22. а) $y=\frac{3^{\frac{1}{2x+5}}}{1-4\cdot 3^{\frac{1}{2x+5}}}$;   б) $y=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

23. а) $y=x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$;   б) $y=3^{\frac{x}{4-x^2}}$.

24. а) $y = \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$; б) $y = \frac{x^3-x^2}{2|x-1|}$.

25. а) $y = \frac{sinx}{cos^2x} - tg^2x$; б) $y = \frac{5^{\frac{1}{x-2}} - 1}{5^{\frac{1}{x-2}} + 1}$.

26. а) $y = \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}$; б) $y = (x+1)arctg\,\frac{2}{x}$.

27. а) $y = \frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$; б) $y = \frac{4-x^2}{|4x-x^3|}$.

28. а) $y = arctg\,\frac{x}{1-x^2}$; б) $y = \frac{4x^2-31x-8}{\sqrt{9+2x}-5}$.

29. а) $y = (cos\pi x)^{\frac{1}{xsin\pi x}}$; б) $y = \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

30. а) $y = \frac{\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{arctg}\frac{1}{x-3}}{x(x-5)}$; б) $y = \frac{\sqrt{1-x}-3}{8+x}$.

2.2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Завдання 1

Обчислити, виходячи з визначення, похідні вказаних функцій (правило Лопіталя не використовувати!).

1. а) $y = tg3{,}6x$; б) $y = \sqrt{2x+7}$.
2. а) $y = \cos(3x+2)$; б) $y = \frac{1}{e^x+1}$.
3. а) $y = \sin(6x-1)$; б) $y = 2^{x^2}$.
4. а) $y = \text{ctg}(5x+6)$; б) $y = \sqrt[3]{x}$.
5. а) $y = \log_5(12x+1)$; б) $y = \frac{1}{x^3}$.
6. а) $y = 5^{9x-1}$; б) $y = 5sinx + 3cosx$.
7. а) $y = e^{3x+8}$; б) $y = -ctgx - x$.
8. а) $y = \text{tg}(3x-1)$; б) $y = \sqrt[3]{x^2}$.
9. а) $y = 6^{x+4}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$.
10. а) $y = \cos(2x+13)$; б) $y = e^{x^2}$.
11. а) $y = \sin(9x-1)$; б) $y = \ln(3x-2)$.
12. а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = 5(tgx - x)$.
13. а) $y = \frac{1}{x+2}$; б) $y = sin^3x$.
14. а) $y = \text{ctg}(x+2)$; б) $y = (a+1)^3$.
15. а) $y = 10^{3x-5}$; б) $y = 5x^3 - 3x$.
16. а) $y = \log_3(4x+3)$; б) $y = sin^2x$.
17. а) $y = x^2 - x + 1$; б) $y = xlnx - x$.
18. а) $y = a^{6x-1}$; б) $y = x\sin x$.
19. а) $y = sin6x$; б) $y = \frac{3}{\sqrt{3x^2+2}}$.
20. а) $y = \cos(20x+3)$; б) $y = x \cdot e^x$.
21. а) $y = 8{,}2$; б) $y = \frac{1}{x^2}$.
22. а) $y = 6^{3x+5}$; б) $y = 2sinx$.
23. а) $y = 7{,}01$; б) $y = e^{x^2-1}$.
24. а) $y = \text{tg}(3x-4)$; б) $y = \sin(\frac{1}{x})$.
25. а) $y = \cos(8x+11)$; б) $y = x^3 + 2x - 1$.
26. а) $y = sin^3x$; б) $y = \frac{4}{\sqrt{1-3x^2}}$.
27. а) $y = 3^{\frac{x^2}{2}-1}$; б) $y = cos^2x$.
28. а) $y = \ln(2x^2 - 3x + 1)$; б) $y = \sqrt[3]{(x+3)^2}$.

29. а) $y = \text{ctg}(2x+1)$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

30. а) $y = \frac{1}{2^x-1}$; б) $y = xcosx$.

Завдання 2

Знайти похідні наступних функцій:

1. а) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+2\sqrt[4]{1+x^3}}$; б) $y = 3tg^4(x^2+1)$;

в) $y = 2^{arctgx^2}$; г) $y = \ln(\sqrt{1+e^{3x}}+e^{2x})$;

д) $y = (arcctgx)^x$; е) $x^2y = e^{\frac{y}{x}}$.

2. а) $y = \frac{2-6x}{\sqrt{1+5x-3x^2}}$; б) $y = sin^2x - xcos2x$;

в) $y = x^3\ln(3x-1)$; г) $y = \text{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{x-3}}$;

д) $y = x^{\ln(x+1)}$; е) $ycosx = \sin(x-y)$.

3. а) $y = x^3 \cdot \sqrt{2-x^2}$; б) $y = \frac{2cosx}{sin^3x}$;

в) $y = arcctg\, e^{3x}$; г) $y = \sqrt[3]{2+ln^2x}$;

д) $y = (x+1)^{\frac{1}{x}}$; е) $y - x - arctg \cdot y = 0$.

4. а) $y = \sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$; б) $y = 2^{arcsin\,3x}$;

в) $y = cos2x \cdot lnx$; г) $y = ln^4sinx$;

д) $y = (x+x^2)^x$; е) $tg\left(\frac{y}{x}\right) = 3x+1$.

5. а) $y = 5\sqrt{x^2+\sqrt{x}+\frac{1}{x}}$; б) $y = ln\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}$;

в) $y = \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $y = e^{tgx} \cdot cosx$;

д) $y = (sin3x)^x$; е) $ln\frac{x}{y} - x + 2y = 0$.

6. а) $y = \sqrt{\frac{1+3x^2}{1+3x^2}}$; б) $y = e^{-x^2} \cdot cos^3(2x+3)$;

в) $y = xarctg^3 5x + lntgx$; г) $y = \ln(x^2 + \sqrt{1 + x^2})$;

д) $y = (sin3x)^{\sqrt{x}}$; е) $ylnx - xlny = x + y$.

7. а) $y = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$; б) $y = (arcsin\frac{2x+1}{3}) \cdot x$;

в) $y = e^{-cos^4 5x}$; г) $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$;

д) $y = (arctg2x)^{sin3x}$; е) $(x + y)^2 = (x - 2y)^3$.

8. а) $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x + 3}}$; б) $y = \sqrt{1 + ln^2 x}$;

в) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$; г) $y = arcsin(tgx)$;

д) $y = (sinx)^{cosx}$; е) $e^{x+y} = \sin(\frac{y}{x})$.

9. а) $y = x\sqrt[3]{\frac{2}{1+x}}$; б) $y = \frac{1+sin3x}{1-sin3x}$;

в) $y = 2^{\frac{1-x}{1+x}}$; г) $y = e^{tgx} \cdot sinx$;

д) $y = (lnx)^x$; е) $xy + lny - 2lnx = 0$.

10. а) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{5}{\sqrt[4]{(x^3+2)^5}}$; б) $y = cos\, ln^2 x$;

в) $y = (e^{sinx} - 1)^{\,2}$; г) $y = ln\, arcsinx$;

д) $y = 2x^{\sqrt{x}}$; е) $\cos(xy) = \frac{y}{x}$.

11. а) $y = x + \frac{1}{x+\sqrt{x^4+1}}$; б) $y = sin\sqrt{1 + x^2}$;

в) $y = \ln ctg\, \sqrt[3]{x}$; г) $y = e^{cos^2 3x}$;

д) $y = x^{\frac{1}{x^2}}$; е) $xe^y + ye^x = xy$.

12. а) $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$; б) $y = e^{1+ln^2 x}$;

в) $y = arctg(\frac{1}{x})$; г) $y = sin^3 5x \cdot cos^5 3x$;

д) $y = x^{arcsinx}$; е) $\cos(x-y) - 2x + 4y = 0$.

13. а) $y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$; б) $y = tgln\sqrt{x}$;

в) $y = 3^{cos^2 x}$; г) $y = cos2x \cdot sin^2 x$;

д) $y = x^{\frac{2}{ln^2 x}}$; е) $ysinx + \cos(x-y) = cosy$.

14. а) $y = \frac{2x}{\sqrt{2+x}} - 6\sqrt[3]{2+x}$; б) $y = sin^3 2x$;

в) $y = xarcsinx + \sqrt{1-x^2}$; г) $y = ln\ \ arctgx$;

д) $y = x^{e^x}$; е) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$.

15. а) $y = \sqrt[3]{x^4 + 5x} - \sqrt[4]{(5x-1)^3}$; б) $y = \frac{1+tgx}{1-tgx}$;

в) $y = arctg\sqrt{x} + \sqrt{x}$; г) $y = 5^{arctg^2 x}$;

д) $y = x^{\frac{2}{x}}$; е) $xsiny - ycosx = 0$.

16. а) $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}$; б) $y = \frac{1}{3}tg^3 x - tgx + x$;

в) $y = arctg\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$; г) $y = x^2 e^{cosx}$;

д) $y = (cosx)^{x^2}$; е) $x - y + e^y arctgx = 0$.

17. а) $y = (1-x^2)\sqrt[5]{x^3 + \frac{1}{x}}$; б) $y = 2^x \cdot e^{-x}$;

в) $y = arcsin\, e^x - \sqrt{1-e^{2x}}$; г) $y = \frac{lnx}{\sqrt{x^2-1}}$;

д) $y = (cosx)^{lnx}$; е) $lny = arctg\frac{x}{y}$.

18. а) $y = 3\sqrt[3]{x^5 + 5x^4 - \frac{5}{x}}$; б) $y = ln\sqrt{\frac{1-sinx}{1+sinx}}$;

в) $y = arctg(tg^2 x)$; г) $y = tg^2(x^3+1)$;

д) $y = (sinx)^{lnx^2}$;

е) $x - y + asiny = 0.$

19. а) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$;

б) $y = \frac{1}{2}tg^2x + lncosx$;

в) $y = arctg\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

г) $y = arccos\, e^x$;

д) $y = (sin\sqrt{x})^{lnsin\sqrt{x}}$;

е) $x^3 + y^3 - 3axy = 0.$

20. а) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+5\sqrt[5]{x^3+1}}$;

б) $y = \frac{2}{cosx}tg^3(x^2 - 2x + 1)$;

в) $y = 3^{arcsin\sqrt{x}}$;

г) $y = xln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$;

д) $y = (xsinx)^{sin(xsinx)}$;

е) $y^2x = e^{\frac{y}{x}}.$

21. а) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

б) $y = \frac{sin^2x}{2+3cos^2x}$;

в) $y = \frac{xlnx}{x-1}$;

г) $y = arccos^2(tg3x)$;

д) $y = (arctgx)^{lnx}$;

е) $(e^x - 1)(e^y - 1) = 1.$

22. а) $y = \frac{3+5x}{\sqrt{3-4x+5x^2}}$;

б) $y = sinx - xcosx$;

в) $y = x^m lnx$;

г) $y = ln\sqrt{\frac{1+tgx}{1-tgx}} - x$;

д) $y = x^{-tgx}$;

е) $\frac{y}{x} = arctg\frac{x}{y}.$

23. а) $y = x\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$;

б) $y = \frac{1}{tg^2 2x}$;

в) $y = arcsin\sqrt{1 - 3x}$;

г) $y = arcctg\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$;

д) $y = x^{arctgx}$;

е) $ysinx = \cos(x - y).$

24. а) $y = x^2\sqrt{1 - x^2}$;

б) $y = \frac{4sinx}{cos^2x}$;

в) $y = arctge^{2x}$;

г) $y = lnx\sqrt{1 + ln^2x}$;

д) $y = x^{\frac{1}{x}}$; е) $x - y + arctg\, y = 0$.

25. а) $y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$; б) $y = (e^{cosx} + 3)^3$;

в) $y = ln\, sin(2x+5)$; г) $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$;

д) $y = x^{x^x}$; е) $tg(\frac{y}{x}) = 5x$.

26. а) $y = \frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$; б) $y = \frac{1}{ln4} ln\frac{1+2^x}{1-2^x}$;

в) $y = x(cos\, lnx + sin\, lnx)$; г) $y = \sqrt{\frac{2}{3}} arctg\frac{3x-1}{\sqrt{6x}}$;

д) $y = (x^2-1)^{e^x}$; е) $cos(x-y) = \ln(x+y)$.

27. а) $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$; б) $y = \frac{2}{3}\sqrt{(arctg\, e^x)^3}$;

в) $y = lg\, ln\, ctg\, x$; г) $y = arcsin\frac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$;

д) $y = (x^2+1)^{cosx}$; е) $arctg\frac{y}{x} = 2x - y$.

28. а) $y = 3\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$; б) $y = e^{sinx}(x - \frac{1}{cosx})$;

в) $y = ln\, cos\, \frac{2x+9}{2x+1}$; г) $y = arctg\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$;

д) $y = x^{e^{sinx}}$; е) $e^{x-y} = cosx - siny$.

29. а) $y = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$; б) $y = e^{2x}(2 - sin2x - cos2x)$;

в) $y = ln^2\,(x + cosx)$; г) $y = arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + arctg\sqrt{x}$;

д) $y = x^{sin\, x^3}$; е) $arcsin\frac{x}{y} = ln\frac{x}{y}$.

Завдання 3

Знайти похідні першого y'_x і другого порядку y''_{xx} від функції, заданої параметрично.

1. $\begin{cases} x = cost + sint, \\ y = sin2t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \frac{1}{t^2}, \\ y = \frac{1}{t^2+1}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = sint - cost, \\ y = cost + tsint. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 2(t - sint), \\ y = 4(2 + cost). \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = arctgt, \\ y = \frac{t^2}{2}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = cht, \\ y = \sqrt[3]{sh^2 t}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = cost, \\ y = sin^4(\frac{t}{2}). \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = arcsint. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = cost + tsint, \\ y = sint - tcost. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = cost, \\ y = ln\, sint. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = t - sint, \\ y = 2 - cost. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = t + sint, \\ y = 2 + cost. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = sint, \\ y = ln\, cost. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = ln(t-2). \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = cos^2 t, \\ y = tg^2 t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = sh\, t, \\ y = th^2 t. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}, \\ y = ln\, t. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \frac{cost}{1+2cost}, \\ y = \frac{sint}{1+2cost}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = tg\, t, \\ y = \frac{1}{sin2t}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = sin\, t, \\ y = sec\, t. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{(1+t^2)}. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = t + sin\, t, \\ y = 2 - cos\, t. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = sh^2\, t, \\ y = \frac{1}{ch^2\, t}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = e^t cos\, t, \\ y = e^t sin\, t. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = cos2t, \\ y = 2sec^2 t. \end{cases}$

Завдання 4

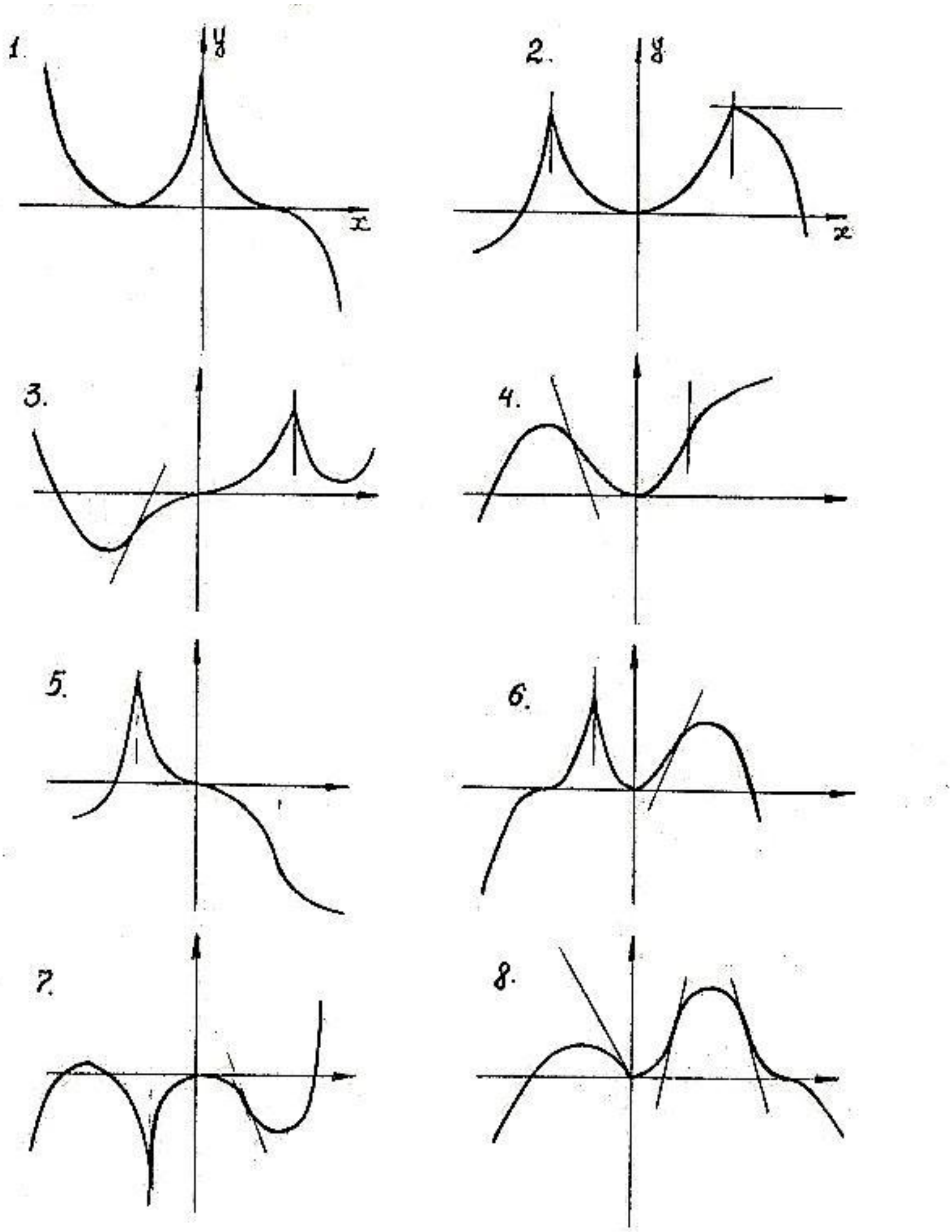
Знайти похідну *n-го* порядку.

1. $y = sin2x + \cos(x+1)$
2. $y = xe^{2x}$
3. $y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}$
4. $y = \frac{4x+7}{2x+3}$
5. $y = a^{3x}$
6. $y = lg(5x+2)$
7. $y = \frac{x}{(2(3x+2))}$
8. $y = lg(x+4)$
9. $y = \frac{2x+5}{13(3x+1)}$
10. $y = \sqrt{x}$
11. $y = 2^{3x+5}$
12. $y = sin(x+1) + \cos 2x$
13. $y = \frac{4+15x}{5x+1}$
14. $y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$
15. $y = lg(3x+1)$
16. $y = 7^{5x}$
17. $y = lg(1+x)$
18. $y = \frac{x}{9(4x+9)}$
19. $y = \frac{4}{x}$
20. $y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}$
21. $y = sin(3x+1) + \cos 5x$
22. $y = a^{2x+3}$
23. $y = \sqrt{e^{3x+1}}$
24. $y = \frac{11+12x}{6x+5}$
25. $y = 2^{kx}$
26. $y = lg(2x+7)$
27. $y = \frac{x}{x+1}$
28. $y = log_3(x+5)$
29. $y = \frac{7x+1}{17(4x+3)}$
30. $y = \frac{1+x}{1-x}$

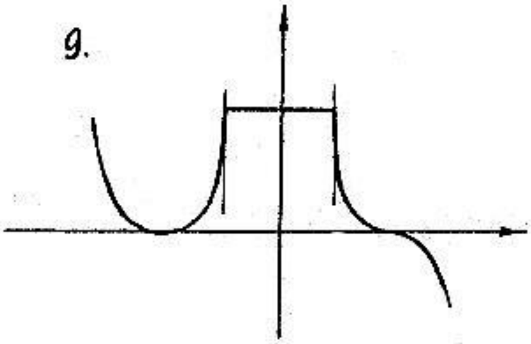
2.3 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ

Завдання 1

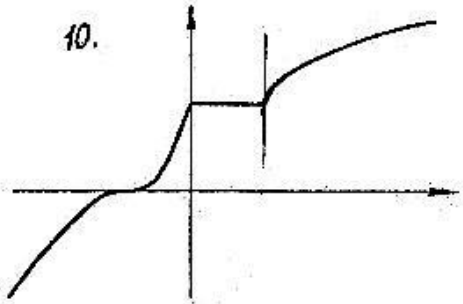
Функція задана графічно. Схематично зобразити графіки її першої і другої похідної.



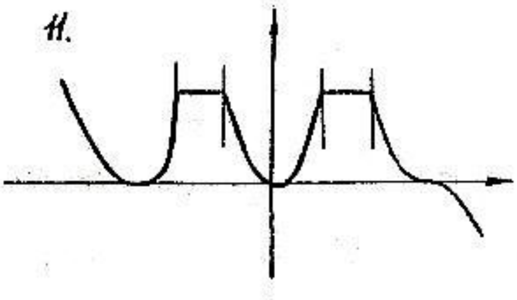
9.



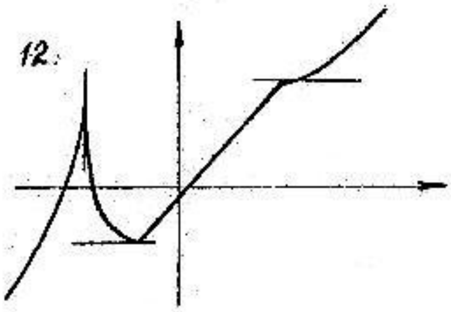
10.



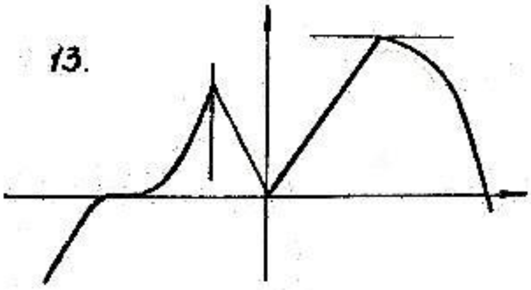
11.



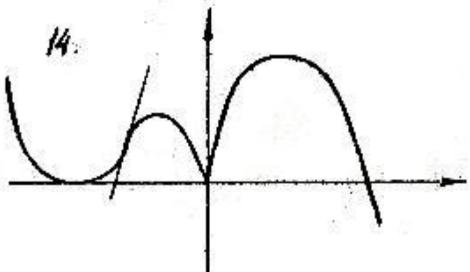
12.



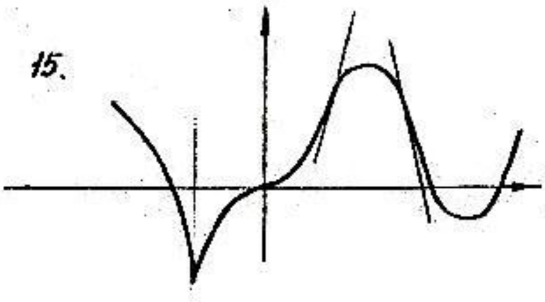
13.



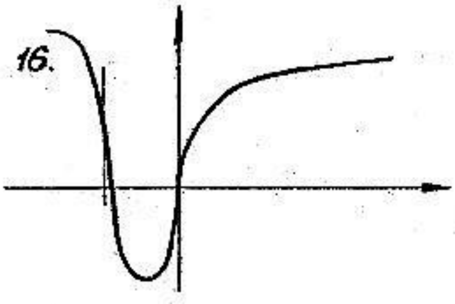
14.



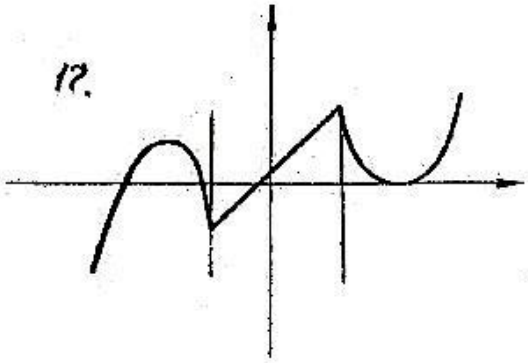
15.



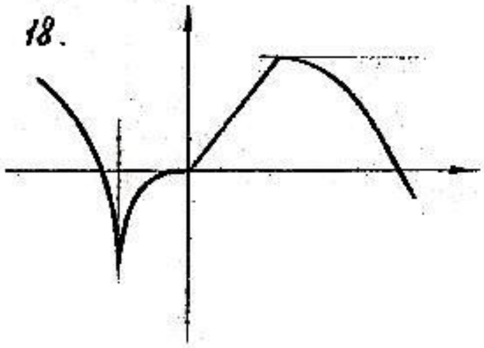
16.



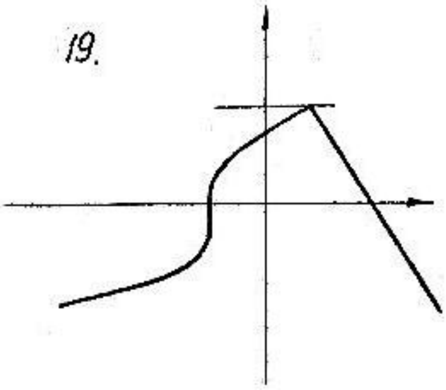
17.



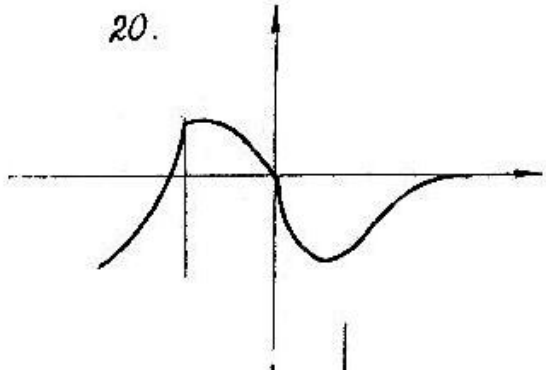
18.



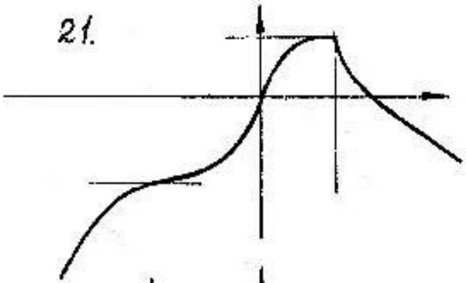
19.



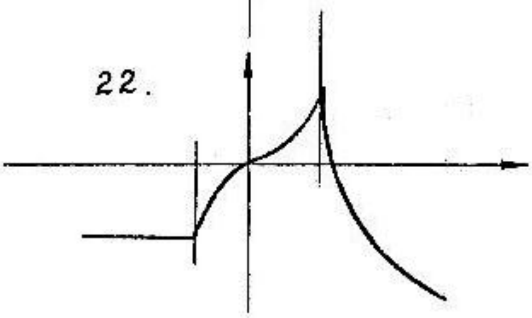
20.



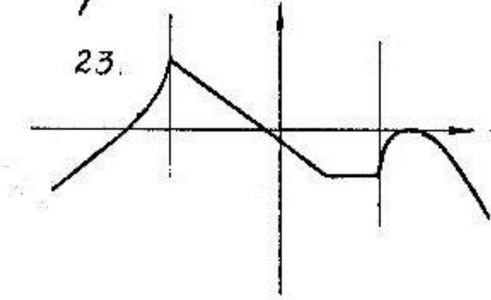
21.



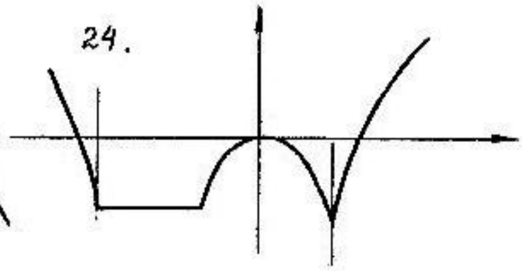
22.



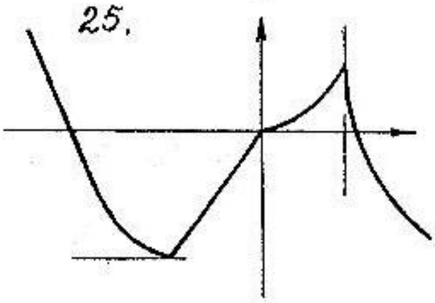
23.



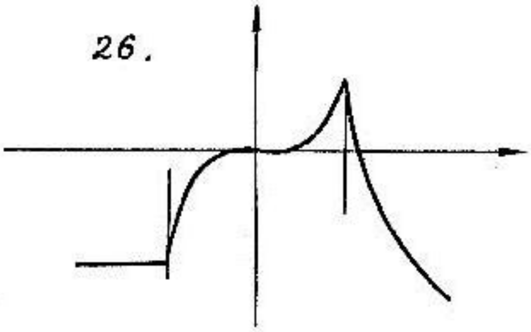
24.



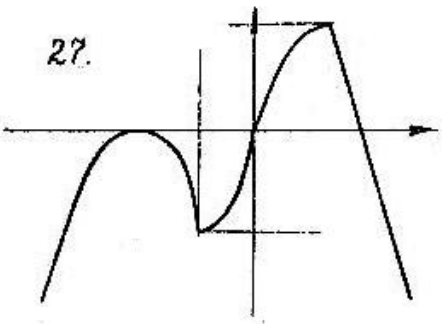
25.



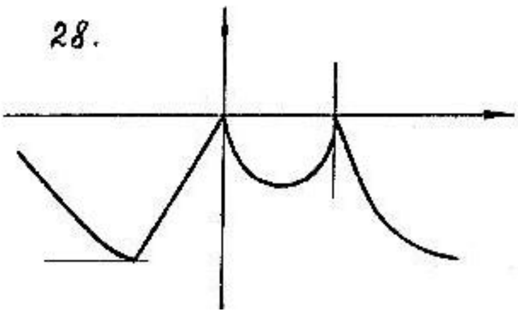
26.



27.



28.



Завдання 2

1. Потрібно зробити ящик місткістю V=27 $м^3$ з квадратним дном та кришкою. Які повинні бути лінійні розміри ящика, щоб на його виготовлення пішла мінімальна кількість матеріалу?
2. Потрібно вирити круглу яму заданого обсягу V=8 $м^3$.
   Які повинні бути лінійні розміри ями (радіус R і висота H), щоб на облицювання її дна і бічній поверхні пішла мінімальна кількість матеріалу?
3. З прямокутного листа жерсті розміром 80 х 50 $см^2$ потрібно виготовити відкриту зверху коробку, вирізаючи по кутах листа рівні квадрати і загинаючи бічні смуги які залишилися під прямим кутом. Які повинні бути сторони вирізаних квадратів, щоб місткість коробки була максимальною?
4. Вікно має форму прямокутника, завершеного півколом.
   Периметр вікна рівний a. При яких розмірах сторін прямокутника вікно буде пропускати найбільшу кількість світла?
5. Електрична лампа на блоці висить прямо над центром круглого столу, радіус якого дорівнює R . На якій висоті над столом повинна знаходитися лампа, для того щоб книга, що лежить біля краю столу, була найкраще висвітлена?
   (Величина освітленості прямо пропорційна косинусу кута падіння променів і обернено пропорційна квадрату відстані від джерела світла). Прийняти R =1.5 м.
6. Який сектор слід відрізати з круга радіуса R, щоб з решти частини можна було згорнути воронку найбільшої місткості?
7. Полотняний намет об'ємом V має форму прямого кругового конуса. Яке має бути відношення висоти конуса до радіусу основи, щоб на намет пішла найменша кількість полотна?
8. Знайти сторони прямокутника найбільшої площі, який можна вписати в еліпс:
   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1.$$
9. Через точку М (1; 4) провести пряму, що не проходить через початок координат, так, щоб сума довжин відрізків, що відсікаються нею на позитивних півосях координат, була найменшою.

10. Потрібно зробити відкритий зверху ящик з квадратним дном і максимальною місткістю. Які повинні бути розміри ящика, якщо на його виготовлення є тільки 3 $м^2$ матеріалу?
11. Потрібно виготовити закритий циліндричний бак максимальної місткості. Які повинні бути розміри бака (діаметр $\mathcal{D}$ і висота Н), якщо на його виготовлення є тільки 4,5 $м^2$ матеріалу?
12. Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного в півколо радіуса R.
13. Потрібно зробити ящик з квадратним дном і кришкою максимальної місткості. Які повинні бути розміри ящика, якщо на його виготовлення є тільки 6 $м^2$ матеріалу?
14. Потрібно виготовити відкрите зверху циліндричне відро максимальної місткості. Які повинні бути розміри відра (радіус R і висота Н), якщо на його виготовлення є тільки 1.05 ($\approx \pi : 3$) $м^2$ матеріалу?
15. Знайти висоту прямого кругового конуса найменшого обсягу, описаного близько кулі радіуса R.
16. Яка повинна бути висота конуса, вписаного в кулю радіуса R, для того щоб його бічна поверхня була найбільшою?
17. Опір балки на вигин пропорційний добутку ширини її поперечного перерізу на квадрат його висоти. З круглої колоди, діаметр якої дорівнює α , потрібно вирізати балку прямокутного поперечного перерізу. Які повинні бути ширина і висота цього перетину, щоб балка, чинила найбільший опір на вигин?
18. Поділити число І0 на такі дві частини, щоб сума квадратів цих частин була найменшою?
19. Покрівельник бажає зробити відкритий жолоб найбільшої місткості, у якого дно і боки були б шириною 10 см та боки були б однаково нахилені до дну. Яка повинна бути ширина жолоба зверху?
20. Число 8 розбити на два таких доданків, щоб сума їх кубів була найменша.
21. Потрібно виготовити коричневу воронку з твірною, яка дорівнює 20см. Яка повинна бути висота воронки, щоб її об’єм був найбільшим?
22. Смуга заліза шириною α повинна бути зігнута у вигляді відкритого циліндричного жолоба (перетин жолоба має форму дуги кругового сегменту). Знайти значення центрального кута, що спирається на цю дугу, при котрому місткість жолоба буде найменша.

23. Місто B стоїть на залізній дорозі, яка йде з півдня на північ. Завод A знаходиться південніше міста B на $в$ км і віддалений від залізної дороги на a км. Під яким кутом до залізної дороги потрібно провести шосе з заводу A, щоб доставка вантажу з заводу до міста була найбільш дешевою, якщо вартість перевезення 1 т/км по шосе в m раз дорожче, ніж по залізній дорозі?
24. Поділити число 10 на такі дві частини, щоб сума подвоєної першої та квадрат другої була найменшою.
25. Показати, що серед всіх прямокутників, які мають даний периметр, найбільшу площу має квадрат.
26. Резервуар, який повинен мати квадратне дно і бути відкритим зверху, потрібно викласти всередині свинцем. Які повинні бути розміри резервуару, щоб викладка потребувала найменшої кількості свинцю, якщо він повинен вміщувати 32 л води?
27. Число 36 розкласти на два таких множника, щоб сума їх квадратів була найменшою.
28. Рівнобедрений трикутник, вписаний в окружність радіуса R, обертається навколо прямої, що проходить через його вершину паралельно основі. Яка повинна бути висота цього трикутника, щоб тіло, отримане в результаті його обертання, мало найбільший об’єм?
29. Знайти радіус основи і висоту циліндра найбільшого об’єму V. Вартість квадратного метра матеріалу, що йде на виготовлення дна баку, рівна P_1 грн., а стінок - P_2 грн. Якими повинні бути радіус дна і висота баку, щоб витрати на матеріал для його виготовлення були найменшими?

Завдання 3

Провести повне дослідження функцій і побудувати їх графіки.

1. а) $y=\frac{1}{x}+4x^2$; б) $y=x^2e^{-x^2}$.
2. а) $y=\frac{x}{x^2-1}$; б) $y=x-\ln(x+1)$.
3. а) $y=(x-1)^2(x+2)$; б) $y=\frac{e^x}{x}$.
4. а) $y=\frac{4x}{4+x^2}$; б) $y=\ln(x^2+1)$.
5. а) $y=\mathrm{x}^2+\frac{2}{x}$; б) $y=x^3e^{-x}$.
6. а) $y=\frac{x}{x^2-4}$; б) $y=ln(x^2-4)+x$.

7. а) $y = \frac{x^4+3}{x}$; б) $y = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$.

8. а) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$; б) $y = ln(1 + e^{-x})$.

9. а) $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$; б) $y = xe^{-x}$.

10. а) $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$; б) $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

11. а) $y = \frac{8}{x^2-4}$; б) $y = \frac{x}{2} + arctgx$.

12. а) $y = \frac{x^4}{x^3-1}$; б) $y = \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$.

13. а) $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$; б) $y = \sqrt[3]{1-x^2}$.

14. а) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$; б) $y = \frac{1}{e^x-1}$.

15. а) $y = x^3 - 3x^2$; б) $y = \frac{lnx}{x}$.

16. а) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$.

17. а) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$; б) $y = xe^{\frac{-x^2}{2}}$.

18. а) $y = \frac{x}{1+x^2}$; б) $y = ln(\frac{x+2}{x+3})$.

19. а) $y = \frac{x^3}{x-1}$; б) $y = x + \frac{lnx}{x}$.

20. а) $y = -\frac{x^3}{x^2-1}$; б) $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.

21. а) $y = \frac{1}{x^2+3}$; б) $y = ln\,(x^2 + 2x + 2)$.

22. а) $y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$; б) $y = e^{\frac{1}{x+2}}$.

23. а) $y = \frac{x^3+16}{x}$; б) $y = ln\frac{x+1}{x-2}$.

24. а) $y = \frac{x^2}{x^2+4}$; б) $y = x^2 lnx$.

25. а) $y = (\frac{x+2}{x-1})^2$; б) $y = e^{\frac{1}{x}} - x$.

26. а) $y = \frac{x^3-1}{4x^2}$; б) $y = xe^{2x-1}$.

27. а) $y = \frac{x-2}{x^2-4x+5}$; б) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$.

28. а) $y = \frac{x^2-5}{x-3}$; б) $y = ln\frac{x-1}{x-4}$.

29. а) $y = \frac{2-x^3}{2x}$; б) $y = ln(x^2 + 4) - x$.

30. а) $y = \frac{2}{x^2+x+1}$; б) $y = e^{\frac{1}{2x-1}}$.

Завдання 4

Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку $[a; b]$.

Зауваження: пункт б) – любим способом.

1. а) $y = \frac{x}{x^2+1}$, $[-3;\ 3]$;
   б) $y = e^x + x^2 - x^3$, $[0;\ 2]$.
2. а) $y = x^3 + \frac{x^4}{4}$, $[0;\ 4]$;
   б) $y = sinx - x^2 + x$, $[-3;\ 1]$.
3. а) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $[-1;\ 2]$;
   б) $y = e^{-x} - x^2 + x^3$, $[0;\ 2]$.
4. а) $y = arctg\frac{1-x}{1+x}$, $[0;\ 1]$;
   б) $y = x(lnx - 1) + x^2 - 5x$, $[0{,}5;\ 3]$.
5. а) $y = \sqrt{100 - x^2}$, $[-6;\ 8]$;
   б) $y = x^4 + x^2 - sinx$, $[0;\ 1]$.
6. а) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$, $[0;\ 3]$;
   б) $y = cos3x - x^2 + e^x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$.
7. а) $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, $[-2;\ 2]$;
   б) $y = sin3x - x^3 + 2^x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$.
8. а) $y = 2tgx - tg^2x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$;
   б) $y = xlgx - cosx + \sqrt{x^3}$, $[1;\ 2]$.
9. а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3}$, $[0;\ 5]$;
   б) $y = ln|cosx| + x^2 - 2x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$.
10. а) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $[0;\ 1]$;
    б) $y = sin2x - x^3 + x^2$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
11. а) $y = x + 2\sqrt{x}$, $[0;\ 4]$;
    б) $y = 3^x - sin^2x + x$, $[0;\ 2]$.

12.а) $y = \frac{x-1}{x+1}$, $[0;\ 4]$;

б) $y = -cosx - x^4 + 4$, $[0;\ 1{,}5]$.

13.а) $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$, $[0;\ 2]$;

б) $y = x^5 + x^2 - 2^x$, $[-3;\ -1]$.

14.а) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, $[-1;\ 1]$;

б) $y = ln|sinx| - x^2 + 3x$, $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

15.а) $y = x + cos2x$, $[0;\ \pi]$;

б) $y = x^2 - sin5x + 1$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

16.а) $y = \frac{1}{2}ln(1 + x^2)$, $[0;\ 1]$;

б) $y = -cos2x + x^3 - \sqrt{x}$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

17.а) $y = sin2x - x$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $y = x\ axtgx - 0{,}5\,ln(1 + x^2)$, $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

18.а) $y = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, $[-1;\ 1]$;

б) $y = x\ axtgx + 0{,}5\,ln(1 + x^3)$, $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

19.а) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$, $[0;\ 3]$;

б) $y = e^x sin2x + lnx + 1$, $[1;\ 2]$.

20.а) $y = x - 2lnx$, $[1;\ e]$;

б) $y = 2\sqrt{x} - axcos\ x + \sqrt{1 - x^2}$, $\left[0{,}1;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

21.а) $y = 2sinx + cos2x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $y = ch\ x - x^3 + x$, $[-1;\ 1]$.

22.а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$, $[-4;\ 4]$;

б) $y = sh\ x - x^2 + x^4$, $[-4;\ -2]$.

23.а) $y = x^2 lnx$, $[1;\ e]$;

б) $y = ch\ 2x - ln|x| + x$, $[1;\ 2]$.

24.а) $y = 2sinx + sin2x$, $\left[0;\ \frac{3}{2}\pi\right]$;

б) $y = x\ axsinx + \sqrt{1 - x^2}$, $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$.

25.а) $y = x + \sqrt{3 - x}$, $[-1;\ 3]$;

б) $y = \sqrt[3]{x^4} + x^3 - cos(1 - x)$, $[-1;\ 0]$.

26.а) $y = \frac{x}{lnx}$, $[0{,}5;\ 3]$;

б) $y = ln|3x| - x + x^4$, $[-2;\ -1]$.

27.а) $y = (2x - 1)\sqrt[3]{(x - 3)^2}$, $[-1;\ 2]$;

б) $y = xe^{-x^2} + lgx$, $[1;\ 2]$.

28.а) $y = x - 2sin^2x, \qquad \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right];$

б) $y = cos^2x - x + 2^{-x}$, $[-1;\ 0]$.

29.а) $y = x^4 - 2x^2 + 3$, $\qquad [-3;\ 2];$

б) $y = (x-1)lnx - sin\frac{1}{x}$, $[3;\ 4]$.

30.а) $y = x\sqrt{(x^2-1)^3}, \qquad [1;\ 3];$

б) $y = x^2tgx + ln|1-x|$, $\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Вища математика – Мінськ: Вишейш.шк., 1984,1985, ч.1, ч.2.
2. Пискунов Н.С. Диференційне і інтегральне обчислення для вузів – М.: Наука, 1970-1985, т.1.
3. Бугров Я.С., Нікольський С.М. Вища математика. Диференційне і інтегральне обчислення – М.: Наука, 1980, 1984.
4. Берман Г.Н. Збірник задач з курсу математичного аналізу. – М.: Наука, 1972.
5. Збірник задач з математики для вузів /Під ред. А.В.Ефремова і Б.П.Демидовича – М.: Наука, 1981, ч.1.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Вища математика у вправах і задачах. – М.: Вища шк., 1980,1986, ч.1.
7. Кузнєцов Л.А. Зб. Завдань з вищої математики /типові розрахунки/. – М.: Вища шк., 1983.
8. Гусак А.А. Зб. Задач та вправ з вищої математики. – Мінськ: Вишейш.шк., 1980.
9. Методичні вказівки з курсу «Вища математика» / границя і неперервність // Склали Е.І.Юрченко, Е.Г.Калита – К.: КПІ, 1982.