МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЧЕРНІГІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
ННІ ЕЛЕКТРОННИХ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ТА ПРОГРАМНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

Методичні вказівки
до виконання розрахунково-графічних робіт
з дисципліни
«Теорія ймовірностей та математична статистика»
для здобувачів вищої освіти
спеціальності 121 **– «Інженерія програмного забезпечення»**
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри ІТтаПІ
Протокол №1
від 31.08.21

Чернігів НУ «Чернігівська політехніка» 2021

Теорія ймовірностей та математична статистика. Випадкові процеси. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для здобувачів вищої освіти спеціальності 121 – «Інженерія програмного забезпечення», першого (бакалаврського) рівня вищої освіти / Укл. О.В. Трунова – Чернігів: НУ «Чернігівська політехніка», 2021. – 22 с., укр. мовою.

Укладач: Трунова Олена Василівна, к.пед.н., доцент кафедри інформаційних технологій та програмної інженерії

Відповідальний за випуск: Білоус І.В., завідувач кафедри інформаційних технологій та програмної інженерії, к.т.н., доцент

Рецензент: Ткач Юлія Миколаївна, завідувач кафедри кібербезпеки та математичного моделювання, д.пед.н., професор

Зміст

Вступ

При вивченні явищ навколишнього світу ми часто маємо справу із процесами, розвиток яких заздалегідь передбачити неможливо. Така непередбачуваність пояснюється впливом на хід процесів випадкових факторів. Строго кажучи, у природі немає невипадкових явищ, але є процеси, на які випадковість впливає несуттєво, і при їх вивченні цей вплив можна не брати до уваги, але є і такі, де випадковість відіграє основну роль (наприклад, броунівський рух частинок). Між цими двома полюсами перебуває багато процесів, на перебіг яких випадковість впливає більшою або меншою мірою. На кшталт ЕОМ у процесі роботи може випадковим чином переходити від одного стану до іншого, наприклад:

S_1 – працює справно,

S_2 – є несправність, але вона не виявлена,

S3 – несправність виявлена, ведеться пошук її причини,

S4 – ремонтується.

Ці переходи відбуваються під впливом таких факторів як коливання напруги в електромережі, відмова деяких елементів, момент виявлення несправності, час ремонту.

У курсі теорії ймовірностей та математичної статистики основним об’єктом дослідження є випадкові величини. У результаті випробувань випадкова величина набуває єдиного значення, причому воно заздалегідь невідоме. Застосування такого елементарного підходу до вивчення випадкових явищ не може задовольнити практичні потреби. Зрозуміло, що $T(h)$ і $U(t)$ є випадковими величинами, на які діють випадкові фактори. Однак вони змінюються протягом випробування, зі зміною аргументів h і t (висота й час). Випадкові величини, які змінюються протягом випробування, називаються випадковими функціями.

Вивченням подібних випадкових об’єктів, які є узагальненням поняття випадкових величин, займається новітній розділ теорії ймовірностей – теорія випадкових функцій.

Теорія випадкових (стохастичних) процесів – це математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ у динаміці їх розвитку (розбіжності між поняттями «випадкова функція» і «випадковий процес» будуть пояснені нижче).

Теорія випадкових функцій продовжує активно розвиватися, оскільки в багатьох практичних задачах системного аналізу й теорії керування потрібно враховувати випадкові фактори саме в динаміці, тобто зважати на їхню мінливість у процесі випробування.

Мета модуля «Імовірнісні процеси» ознайомити здобувача вищої освіти з основами теорії випадкових процесів, виробити в нього навички застосування ймовірнісних методів при розв'язуванні практичних задач і моделюванні реальних процесів.

Вивчивши цей модуль, здобувач вищої освіти (ЗВО) повинен

знати:

- поняття випадкова функція та випадкові процеси;
- характеристики випадкових функція та випадкових процесів;
- поняття кореляційна функція випадкової функції (процесу);
- характеристики для суми, похідної та інтегралу випадкового процесу;
- поняття: потоки подій, їхні властивості та класифікація;
- поняття ланцюга Маркова, матриці переходу.

вміти:

- скласти граф станів для заданої структури розрахунку надійності або структури (системи) масового обслуговування;
- за графом скласти відповідні рівняння і пояснити їх рішення для двох часових варіантів (перехідний і нескінчений).

Робочою програмою дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» передбачено виконання розрахунково-графічної роботи за темами модуля «Випадкові процеси».

Основне призначення РГР полягає в тому, щоб:

– систематизувати і закріпити теоретичний матеріал модуля «Випадкові процеси»;
– набути достатніх практичних навичок розв'язування типових задач, які виникають при побудові моделей систем різного рівня;
– забезпечити індивідуальну роботу кожного здобувача вищої освіти.

РГР пропонуються з метою активізації самостійної роботи ЗВО і кращого засвоєння матеріалу. Теоретичною основою для виконання РГР є навчальна література, курс лекцій та лабораторних занять. Особлива увага питанням роботи над РГР приділяється під час консультацій, у тому числі і дистанційних. На передостанньому тижні семестру ЗВО здає РГР викладачеві на перевірку, а потім захищає її.

Форми контролю виконання РГР

Вид роботи	**Форма контролю**	**Кількість балів**
Структура роботи	1. Відповідність умовам завдання	0…2
	2. Відповідність вимогам стандартів	0…1
Пояснювальна записка	1. Обґрунтованість рішень	0…2
	2. Посилання на першоджерела	0…1
	3. Відповідність оформлення вимогам	0…1
	4. Своєчасність здачі	0...1
Захист РГР	Самостійність виконання (відповіді на запитання або презентація)	0...2
Разом		0...10

1. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ І ОЗНАЧЕННЯ

1.1. Випадкові функції і випадкові процеси

Випадковою функцією називається випадкова величина, що залежить від деякого невипадкового параметра t: $X(t,\omega) = X(t)$, де ω – множина елементарних подій. Наприклад, якщо A – випадкова величина, то $X(t) = At^2$ й $Y(t) = B_o \sin(\alpha t + A)$ – випадкові функції (B_o =*const*, α =*const*).

У більшості випадків *одноаргументну випадкову функцію часу* t називають *випадковим процесом* певного досліджуваного параметра.

Можна дати і інше *означення випадкової функції у широкому розумінні*. За ним *випадковою функцією аргументу* t називається функція $X(t,\omega)$, значення якої при кожному фіксованому значенні аргументу $t = t_j$ є випадковою величиною $X(t_j) = X(\omega)$.

Отже, *випадкова функція (випадковий процес) – це сукупність реалізацій (звичайних функцій, графіків) або сукупність випадкових величин, що знаходяться у перетинах реалізацій при фіксованих значеннях аргументу.*

Обирати будемо той підхід до поняття випадкової функції (випадкового процесу), що у даній ситуації зручніше й вигідніше.

Числові характеристики випадкових функцій

Математичне сподівання випадкової функції $X(t)$ – невипадкова функція $M[X(t)]$, яка при фіксованому $t = t_k$ дорівнює математичному сподіванню випадкової величини $X(t_k)$:

$$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot f(x,t)dt = m_x(t).$$

Дисперсія одновимірної випадкової функції визначається так само, як і для випадкової величини

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X(t)])^2 \cdot f(x,t)dt;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D[X(t)]}.$$

Якщо тепер взяти дві різні випадкові величини $X(t')$ та $X(t'')$, то кореляційний момент випадкових величин є функцією двох аргументів t' та t''

$$K(X(t'),X(t'')) = K_X(t',t'') =$$
$$= M[(X(t') - M[X(t')]) \cdot (X(t'') - M[X(t'')])].$$

Такий момент має назву *кореляційної (автокореляційної) функції*. Автокореляційна функція розкриває зв'язок між різними випадковими величинами $X(t')$ та $X(t'')$ однієї функції $X(t)$.

Кореляційна функція випадкової функції (процесу) – це така невипадкова (звичайна) функція $K_x(t_1,t_2)$, що для будь-якої пари припустимих значень аргументів, наприклад при, $t_1 = t'$, $t_2 = t''$, дорівнює кореляційному моменту випадкових величин $X(t')$ та $X(t'')$

$$K_x(t',t'') = K_x(X(t'),X(t'')).$$

Математичне сподівання і дисперсія, а також кореляційна функція випадкового процесу мають властивості, аналогічні властивостям числових характеристик випадкових величин.

Зауваження. Якщо маємо дві різні випадкові функції $X(t)$ та $Y(t)$, то кореляційний момент випадкових величин $X(t')$, $Y(t'')$ має назву *взаємно кореляційна функція* і обчислюється за формулою

$$R = \left(X(t'), Y(t'')\right) = R_{XY}(t', t'') =$$
$$M\left[\left(X(t') - M\left[X(t')\right]\right)\cdot\left(Y(t'') - M\left[Y(t'')\right]\right)\right].$$

Дві випадкові величини X і Y називаються *корельованими*, якщо їхній коефіцієнт кореляції є відмінним від нуля, і *некорельованими*, якщо він дорівнює нулю.

Властивості математичного сподівання, дисперсії та кореляційної функції випадкового процесу

Якщо $\varphi(t)$ невипадкова функція, а $X(t')$ та $X(t'')$ – випадкові функції, то маємо формули:

1. $M\left[\varphi(t)\right] = \varphi(t)$; ;
2. $M\left[\varphi(t)\cdot X(t)\right] = \varphi(t)\cdot m_x(t)$;
3. $M\left[X(t) + Y(t)\right] = \cdot m_x(t) + \cdot m_y(t)$;
4. $M\left[X(t) + \varphi(t)\right] = X(t) + \varphi(t)$;
5. $D\left[\varphi(t)\right] = 0$;
6. $D\left[\varphi(t)\cdot X(t)\right] = \left(\varphi(t)\right)^2\cdot D_x(t)$
7. $D\left[X(t) + \varphi(t)\right] = D_x(t)$;
8. $K_{\varphi(t)X(t)}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K(t_1, t_2)$;
9. $K_{\varphi(t)+X(t)}(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)$;
10. $K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2, t_1)$.

Для кореляційної функції вводять поняття унормованої кореляційної функції

$$r_X(t', t'') = \frac{K_X(t', t'')}{\sqrt{D_X(t')\,D_X(t'')}},$$

що має властивості, аналогічні властивостям коефіцієнта кореляції.

Сума випадкових функцій

Якщо $Z(t) = X(t) + Y(t)$, $m_z = m_x + m_y$,

$$K_{X+Y}(t',t'') = K_X(t',t'') + K_Y(t',t'') + R_{XY}(t',t'') + R_{YX}(t',t'')$$

де

$$R(X(t'),Y(t'')) = R_{XY}(t',t'') =$$
$$= M\left[\left(X(t') - M\left[X(t')\right]\right)\left(Y(t'') - M\left[Y(t'')\right]\right)\right]$$

Якщо $X(t)$, $Y(t)$ – *некорельовані*,

$$K_{X+Y}(t',t'') = K_X(t',t'') + K_Y(t',t''),\ D_{X+Y} = D_X + D_Y.$$

Похідна та інтеграл випадкових функцій

Нехай $Z(t) = X'(t)$, $Y(t) = \int_0^t X(t)dt$,

тоді

$$m_z = (m_x)' + m_y,\ \ m_Y = \int_0^t m_x dt,$$

$$K_Z(t',t'') = K_{X'}(t',t'') = \frac{\partial^2 K_X(t',t'')}{\partial t' \partial t''},$$

$$K_Y(t',t'') = \int_0^{t''}\int_0^{t'} K_X(t',t'')dt'dt''.$$

Стаціонарні функції

Стаціонарні випадкові функції у *широкому розумінні* – це функції, що задовольняють такі умови:

$m_x(t) = const$, $K_X(t',t'') = K_X(t'-t'') = K_X(\tau)$, де $\tau = t'-t''$.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. *К*ореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ має вигляд $K_x(t',t'') = 3\cdot(t')^2\cdot(t'')^2$. Знайти дисперсію $D_y(t)$, знайти унормовану кореляційну функцію випадкової функції $Y(t) = tX(t) + 2t$.

Розв'язання. Дисперсія $D_y(t)$:

$$D_X(t) = K_x(t,t) = 3t^2(t)^2 = 3t^4 .$$

$$D_y(t) = D(tX(t) + 2t) = D(tX(t)) + 0 = t^2 D(X(t)) = t^2(3t^4) = 3t^6$$

$$D_y(t') = 3(t')^6,\ D_y(t'') = 3(t'')^6.$$

Кореляційна функція випадкового процесу $Y(t)$:

$$K_Y(t',t'') = K_{tx(t)+2t}(t',t'') = K_{tx(t)}(t',t'') = t't''K_x(t',t'') =$$

$$= t't''(3(t')^2(t'')^2) = 3(t')^3(t'')^3.$$

Унормована кореляційна функція випадкової функції $Y(t)$:

Якщо

$$r_X(t',t'') = \frac{K_Y(t',t'')}{\sqrt{D_x(t')D_x(t'')}},$$

то

$$r_Y(t',t'') = \frac{3(t')^3(t'')^3}{\sqrt{3(t')^6(t'')^6}} = 1.$$

Приклад 2. Спектральна щільність випадкового процесу $S(\omega) = a$, при $-b \le \omega \le b$, при $|\omega| > b$, $S(\omega) = 0$. Знайти кореляційну функцію $K_X(\tau)$.

Розв'язання.

$$K_X(\tau) = 2\int_0^\infty a\cdot\cos\omega\tau d\omega = 2a\lim_{b\to\infty}\frac{\sin\omega\tau}{\tau}\Bigg|_0^b = \frac{2a\sin\omega\tau}{\tau}.$$

Приклад 3. Задана кореляційна функція $K_X(\tau)=\sigma^2(1-|\tau|)$, при $|\tau|\le 1$, $K_X(\tau)=0$, при $|\tau|>1$. Знайти спектральну щільність випадкового процесу $S(\omega)$.

Розв'язання.

$$S(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\sigma^2\cdot(1-\tau)\cos\omega\tau d\tau=\begin{vmatrix} u=1-\tau & du=-d\tau \\ dv=\cos\omega\tau d\tau & v=\dfrac{\sin\omega\tau}{\omega}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\pi}\left(\left.\frac{(1-\tau)\sin\omega\tau}{\omega}\right|_0^1+\int_0^1\frac{\sin\omega\tau}{\omega}d\tau\right)=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\pi}\left(\left(\frac{0\cdot\sin\omega}{\omega}-\frac{(1-\tau)\cdot\sin 0}{\omega}\right)+\left.\frac{\cos\omega\tau}{\omega^2}\right|_0^1\right)=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\pi}\left(-\left(\frac{\cos\omega}{\omega^2}-\frac{\cos 0}{\omega^2}\right)\right)=\frac{\sigma^2(1-\cos\omega)}{\pi\omega^2};$$

$$S(\omega)=\frac{\sigma^2(1-\cos\omega)}{\pi\omega^2}.$$

Приклад 4. Знайти дисперсію стаціонарного випадкового процесу, якщо спектральна щільність $S(\omega)=\dfrac{10}{\pi(4+\omega^2)}$.

Розв'язання.

$$D_X=K_x(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{10}{\pi(4+\omega^2)}d\omega=\frac{10}{\pi}arctg\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=$$

$$\frac{10}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=10.$$

Приклад 5. Маємо випадкову функцію $X(t)$ з математичним сподіванням $m_x(t)=4t+5$. Знайти математичне сподівання випадкових функцій

$$Z(t) = X'(t),\ Y(t) = \int_0^t X(t)dt .$$

Розв'язання.

$$m_z = (m_x)' = (4t+5)' = 4,\ \ m_Y = \int_0^t m_x dt = \int_0^t (4x+5)dt = 2t^2 + 5t .$$

Варіанти індивідуальних завдань

Завдання 1.1. Користуючись убудованими статистичними функціями (наприклад, ***mean(V)*** та ***Var(V)*** пакета MathCAD), знайти кореляційну функцію випадкового процесу $u = X(t)$, що має вигляд $K_x(t', t'') = 3 \cdot (t')^2 \cdot (t'')^2$. Знайти дисперсію $D_y(t)$, знайти унормовану кореляційну функцію випадкової функції $Y(t)$.

	$Y(t)$		$Y(t)$
1	$Y(t) = u^2 + \cos 5t - t^2$	**16**	$Y(t) = u \sin 2t - \cos t$
2	$Y(t) = u \quad + \cos t - \sin^2 t$	**17**	$Y(t) = u(t + \cos 2t - 2)$
3	$Y(t) = u \quad + \cos 3t - t$	**18**	$Y(t) = 10u + t + \sin 5t - \cos t$
4	$Y(t) = u + t - \cos^2 t$	**19**	$Y(t) = u(t + \sin 3t)$
5	$Y(t) = u^2 + \sin 5t + t$	**20**	$Y(t) = u(3 + t + \sin t - \cos t)$
6	$Y(t) = u \quad + \frac{t}{4} - \cos \frac{t^2}{3}$	**21**	$Y(t) = u(3t + t^2 + \cos 10t)$
7	$Y(t) = 2u \quad + \cos 2t - t$	**22**	$Y(t) = u(t + \cos 2t)^2$
8	$Y(t) = 2u \quad + \sin 3t - 4$	**23**	$Y(t) = ut^2 + \sin 3t$
9	$Y(t) = u + \sin^2 3t$	**24**	$Y(t) = t - \sin 3t - u \cos t$
10	$Y(t) = u \cos t - \sin t$	**25**	$Y(t) = t - \sin 3t - u \cos t$
11	$Y(t) = u \quad t + \cos t(t)$	**26**	$Y(t) = u(\cos \frac{2}{3} t + \sin \frac{3}{5} t)$

12	$Y(t)=u\sin t-\sin t^2$	**27**	$Y(t)=ut^2+\cos 4t-3$
13	$Y(t)=u\sin\frac{t}{2}$	**28**	$Y(t)=u(t+\cos t)$
14	$Y(t)=u(t+\cos 2t)^2$	**29**	$Y(t)=u(4t-t^2+\cos 4t)$
15	$Y(t)=u(7t+\sin 5t)$	**30**	$Y(t)=u(t-\sin 3t)$

1.2. ПОТОКИ ПОДІЙ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ МАРКОВА (ЛАНЦЮГИ МАРКОВА)

Потоки подій, їх властивості та класифікація

Послідовність подій, що відбуваються одна за одною, називається *потоком подій*. Наприклад, на телефонній станції це може бути: вхідний потік викликів; черга; апарати, що забезпечують зв'язок з абонентами; вихідний потік абонентів, які вже були обслужені та ін. Таку саму картину можна спостерігати в магазині – вхідний потік, черга, вихідний потік.

Будь-який потік можна розглядати як випадковий процес. Тому дуже часто замість слова «потоки» користуються словами «випадкові процеси». Математичною моделлю вхідного потоку є випадкова цілочислова функція $X(t)$, що дорівнює числу умов (вимог, людей), які надійшли до потоку за час $(0,t)$.

Для потоків вводиться поняття щільності або інтенсивності потоку, яке аналогічне поняттю щільності розподілу випадкової величини.

Інтенсивністю потоку називається границя відношення середнього числа умов, що надійшли за час τ, до всього проміжку τ, коли $\tau\to 0$

$$I(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{m(t,t+\tau)}{\tau}.$$

Найпростіший або пуассонівський потік – це потік, що задовольняє умови стаціонарності, ординарності і відсутності наслідків. Це один з найпростіших випадкових процесів з неперервним часом. Цей процес особливо часто зустрічається в різноманітних практичних застосуваннях.

Наведемо без доведення дві теореми. Вони встановлюють закон розподілу випадкової величини $X(\tau)$, яка дорівнює числу умов, що надійшли до потоку за час τ, і випадкової величини T, що дорівнює тривалості проміжку часу між двома умовами, які послідовно надійшли до потоку.

Теорема 1. Якщо потік є найпростішим, то ймовірність надходження k умов до потоку за час τ обчислюється за формулою

$$P_k(\tau)=\frac{(\lambda\cdot\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau},$$

тобто випадкова величина $X(\tau)$ розподілена за законом Пуассона.

Теорема 2. У найпростішому потоці випадкова величина T розподілена за показниковим законом

$$F(t)=P(T<t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda\tau}, & t\geq 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Наслідок. Середня довжина проміжку часу між моментами надходження двох послідовних вимог до пуассонівського потоку дорівнює оберненій величині його ймовірності

$$M[T]=\frac{1}{I}=\frac{1}{\lambda}.$$

Характерна особливість пуассонівського потоку полягає в тому, що зміна умов відбувається стрибками.

Пуассонівський випадковий процес з великою точністю виконується в багатьох природних явищах і технічних процесах.

Випадкові процеси Маркова (ланцюги Маркова)

Розглянемо найпростіші з випадкових процесів – так звані ланцюги Маркова, які були запроваджені й систематично вивчені видатним російським математиком А.А. Марковим.

Поняття ланцюга Маркова. Матриця переходу. Нехай здійснюється послідовність випробувань, в кожному з яких може настати одна і тільки одна з k попарно несумісних подій $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Позначимо через ξ_n номер події, яка настала при n-му випробуванні (наприклад, запис $\xi_n = i$ означає, що при n-му випробуванні настала подія A_i). Кажуть, що ця послідовність випробувань або послідовність випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ утворює *ланцюг Маркова*, якщо ймовірність того, що при $(n+1)$-му випробуванні $(n = 1, 2, \ldots)$ настане певна подія A_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$, залежить лише від того, яка подія настала при n-му випробуванні, і не залежить від результатів попередніх випробувань.

Умовну ймовірність p_{ij} називають *ймовірністю переходу* системи (за один крок) із стану A_i до стану A_j. Це є умовна ймовірність настання події A_j при деякому випробуванні за умови, що при попередньому випробуванні настала подія A_i. Ймовірності p_{ij} утворюють квадратну матрицю

$$\pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix},$$

яку називають матрицею переходу. Ця матриця має такі властивості:

$$0 \le p_{ij} \le 1, \quad \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, \quad (i = 1,2,\ldots,k).$$

Перша властивість є очевидною, оскільки p_{ij} – ймовірності; друга випливає з того, що система зі стану A_i обов’язково переходить до одного зі станів $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Ймовірності переходу за *n* кроків

Позначимо через $p_{ij}(n)$ ймовірність переходу системи зі стану A_i до стану A_j через n кроків, тобто ймовірність того, що при $(s+n)$-му випробуванні настане подія A_j, якщо при s-му випробуванні настала подія A_i. Якщо $n>1$, $m<n$, то за формулою повної ймовірності

$$p_{ij}(n) = P(\xi_{s+n} = j / \xi_s = i) = \sum_{r=1}^{k} P(\xi_{s+m} = r / \xi_s = i)\, P(\xi_{s+n} = j / \xi_{s+m} = r)$$

тобто

$$p_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}(m)\, p_{rj}(n-m).$$

Якщо матрицю $(p_{ij}(n))_{i,j=1}^{k}$ позначити через $\pi(n)$ (при цьому $\pi(1) = \pi$), то остання рівність, згідно з відомим з алгебри правилом множення матриць, означає, що коли $0 < m < n$, то

$$\pi(n) = \pi(m) \cdot \pi(n-m).$$

Зокрема, при $m=1$ ця рівність дає

$$\pi(n) = \pi \cdot \pi(n-1),$$

звідки випливає, що

$$\pi(n) = \pi^n.$$

Приклад 1. Задано матрицю переходу $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю переходу $P_3 = P_1^3$.

Розв'язання.

$$P_3 = P_1^3 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 & 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 & 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}58 & 0{,}42 \\ 0{,}49 & 0{,}51 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}58 \cdot 0{,}4 + 0{,}42 \cdot 0{,}7 & 0{,}58 \cdot 0{,}6 + 0{,}42 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}49 \cdot 0{,}4 + 0{,}51 \cdot 0{,}7 & 0{,}49 \cdot 0{,}6 + 0{,}51 \cdot 0{,}3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}526 & 0{,}474 \\ 0{,}553 & 0{,}447 \end{pmatrix}.$$

Варіанти індивідуальних завдань

Завдання 2.1. Задано матрицю переходу P_1. Знайти матрицю переходу $P_3 = P_1^3$.

	P_1		P_1		P_1
1	$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$	**11**	$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$	**21**	$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$	**22**	$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$	**13**	$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$	**23**	$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

4	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$	**24**	$\begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,62 & 0,38 \end{pmatrix}$	**15**	$\begin{pmatrix} 0,05 & 0,95 \\ 0,72 & 0,28 \end{pmatrix}$	**25**	$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,67 & 0,33 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 0,12 & 0,88 \\ 0,08 & 0,92 \end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$	**26**	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$	**17**	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$	**27**	$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$	**28**	$\begin{pmatrix} 0,18 & 0,82 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,47 & 0,53 \end{pmatrix}$	**19**	$\begin{pmatrix} 0,23 & 0,77 \\ 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$	**29**	$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,44 & 0,56 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 0,74 & 0,26 \\ 0,88 & 0,12 \end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$	**30**	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

Список використаних джерел

1. Brownian Motion: An Introduction to Stochastic Processes René L.Schilling, Lothar Partzsch, 2nd Edition, 2014.
2. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей [Текст]: учеб. пособие / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 5-е изд., испр. − М.: Академия, 2003. – 488 с. – ISBN 5-7695-1054-4.
3. Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст]: учеб. пособие / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 4-е изд., стер. − М.: Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5-06-005820-8.
4. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – 4-е изд., стер. − М.: Высш. шк., 1998. – 400 с. – ISBN 5-06-003465-8.
5. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – 6-е изд., стер. − М.: Высш. шк., 1998. – 479 с. – ISBN 5-06-003464-X.
6. Жлуктенко, В.І. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології [Текст]: навч. посіб. / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний, С.С. Савіна. – К.: КНЕУ, 2002. – 226 с. – ISBN 966-574-346-5.
7. Сеньо, П. С. Випадкові процеси [Текст]: підручник / С.П. Сеньо; Мін-во освіти і науки України, ЛНУ. – Львів: Компакт-ЛВ, 2006. – 288 с. – ISBN 966-96414-7-0.

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Чернігівська політехніка»
Кафедра інформаційних технологій та програмної інженерії

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА
ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ
розрахунково-графічна робота
Варіант №

Виконав:
здобувач вищої освіти групи ПІ-__
П.І.П.
Перевірив:
____
(підпис)
«___» ________202_р.

Чернігів, 202_рік