МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЧЕРНІГІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
ННІ ЕЛЕКТРОННИХ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ТА ПРОГРАМНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

КОМП'ЮТЕРНІ ЧИСЛЕННЯ
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Методичні вказівки
до самостійної роботи
з дисципліни **«Комп'ютерні числення»**
для здобувачів вищої освіти спеціальностей
121 – «Інженерія програмного забезпечення»
123 – «Комп'ютерна інженерія»
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри ІТтаПІ
Протокол №1
від 31.08.21

Чернігів НУ «Чернігівська політехніка» 2021

Комп'ютерні числення. Лінійна алгебра. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Комп'ютерні числення» для здобувачів вищої освіти спеціальностей 121 – «Інженерія програмного забезпечення», 123 – «Комп'ютерна інженерія», *першого (бакалаврського)* рівня вищої освіти / Укл. О.В. Трунова, С.П. Казнадей – Чернігів: НУ «Чернігівська політехніка», 2021. – 40 с., укр. мовою.

Укладачі: Трунова Олена Василівна, к.пед.н., доцент кафедри інформаційних технологій та програмної інженерії

Казнадей Світлана Петрівна, старший викладач кафедри інформаційних та комп'ютерних систем

Відповідальний за випуск: Білоус І.В., завідувач кафедри інформаційних технологій та програмної інженерії, к.т.н., доцент

Рецензент: Ткач Юлія Миколаївна, завідувач кафедри кібербезпеки та математичного моделювання, д.пед.н., професор

Зміст

Вступ

Сучасна наука та техніка все більше використовує математичні методи дослідження, моделювання та проектування. Це обумовлено передусім швидким розвитком обчислювальної техніки, завдяки чому значно розширюються можливості успішного застосування математики в розв'язанні конкретних задач.

Курс «Комп'ютерні числення» є фундаментом освіти спеціаліста-інженера. Він належить до загальноосвітнього циклу дисциплін і викладається в перших двох семестрах.

Змістовий модуль «Елементи лінійної та векторної алгебри» є одним із розділів курсу і нерозривно пов'язаний з вимогами ОП 121– «Інженерія програмного забезпечення» та ОП 123 – «Комп'ютерна інженерія».

Метою дисципліни «Комп'ютерні числення» є формування систем теоретичних знань і практичних навичок з основ математичного апарату для вирішення завдань у професійній діяльності.

Головним завданням дисципліни є вивчення загальних закономірностей та зв'язку між різними величинами і їх застосування в конкретних дослідженнях в різних сферах практичної діяльності, закріплення та розвиток фахових компетентностей бакалавра в галузі знань *12 – Інформаційні технології* із застосування у повсякденній діяльності та розробки нових методів обробки інформації. Зокрема, це:

- ЗК1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- ЗК2. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.
- ЗК3. Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово.
- ЗК5. Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями.
- ЗК6. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.
- ЗК7. Здатність працювати в команді.
- ЗК8. Здатність діяти на основі етичних міркувань.
- ФК22. Здатність застосовувати фундаментальні і міждисциплінарні знання для успішного розв'язання завдань інженерії програмного забезпечення.
- ФК28. Здатність до алгоритмічного та логічного мислення.

Мета цих методичних рекомендацій – допомогти здобувачу вищої освіти набути навичок розв'язування задач, підготуватися до модульного контролю знань.

Видання включає програму змістовного модуля, перелік основних теоретичних питань, завдання на контрольну роботу і задачі для самостійного розв'язування з основних розділів програми. Описано також методики обчислень і наведено схеми дослідження для типових задач.

Програма змістового модуля «Елементи лінійної та векторної алгебри»

Тема 1. Матриці й дії над ними

Лінійні операції над матрицями: транспонування матриці, додавання двох матриць, множення матриці на число, множення двох матриць. Властивості операцій над матрицями.

Тема 2. Визначники

Визначники квадратних матриць (другого та третього порядків, загальний випадок). Властивості визначників. Мінори та алгебраїчні доповнення. Розклад визначників за елементами рядків та стовпців. Методи обчислення визначників. Зворотна матриця. Ранг матриці. Методи обчислення рангу матриці. Теорема про базисний мінор. Власні числа і власні вектори матриці.

Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система лінійних алгебраїчних рівнянь. Матриця та визначник системи ЛАР. Розв'язування систем лінійних рівнянь з визначником, відмінним від нуля. Формули Крамера. Матричний метод розв'язування. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капеллі (без доведення). Критерії сумісності та визначеності системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Базис і розмірність простору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь. Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь. Однорідні системи. Фундаментальна система розв'язків однорідної системи ЛАР. Задачі, які приводять до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Тема 4. Вектори і координати

Поняття вектора. Лінійні операції над векторами. Розкладання вектора за базисом. Декартова система координат на площині і в просторі. Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів. Розклад вектора за базисом. Скалярний, векторний та змішаний добуток векторів, їх властивості. Умови колінеарності, ортогональності і компланарності векторів. Перетворення декартової прямокутної системи координат на площині. Визначення евклидового простору. Ортонормований базис.

Після вивчення змістового модуля «Елементи лінійної та векторної алгебри» здобувачі вищої освіти повинні **знати:**

– визначення матриці, оберненої матриці, операцій над матрицями, рангу матриці;

– формули визначників матриці другого, третього і n-го порядків, властивості визначників матриці;

– загальні методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (матричний метод, метод Крамера, метод Гаусса, метод Жордана-Гаусса);

– умови сумісності та визначеності системи лінійних алгебраїчних рівнянь;

– визначення вектора та лінійних операцій над векторами;

– визначення колінеарних і компланарних векторів, умови колінеарності і компланарності векторів;

– визначення скалярного, векторного і мішаного добутків векторів; – визначення лінійно залежної і лінійно незалежної системи векторів;

– визначення декартової системи координат на площині і у просторі.

Здобувач вищої освіти повинні **вміти:**

– виконувати операції над матрицями (транспонувати, додавати і віднімати, множити матриці);

– знаходити ранг матриці, обернену матрицю;

– обчислювати визначники другого, третього і вищих порядків;

– розв’язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь різними методами (матричним методом, методом Крамера, методом Гаусса);

– застосовувати елементи теорії матриць до розв’язування прикладних задач;

– виконувати дії над векторами, застосовувати вектори до розв’язування геометричних і прикладних задач;

– визначати лінійну залежність та лінійну незалежність векторів; розкладати вектор за будь-яким базисом;

– досліджувати вектори на колінеарність і компланарність;

– визначати кут між векторами;

– знаходити скалярний, векторний і мішаний добутки векторів.

Структура навчального модуля «Елементи лінійної і векторної алгебри»

Найменування тем	Розподіл навчального часу				
	Всього	**Лекції**	**Практ.**	**ЛР**	**СРС**
I семестр					
Модуль 1. ***Елементи лінійної та векторної алгебри***					
Елементи лінійної алгебри	16	4		2	10
Елементи векторної алгебри	24	2		2	20
Усього за Модулем 1	**40**	**6**		**4**	**30**

Перелік теоретичних питань змістового модуля «Елементи лінійної та векторної алгебри»

1. Матриці. Види матриць.
2. Операції над матрицями, їх властивості. Транспонування матриць.
3. Елементарні перетворення матриць. Еквівалентні матриці.
4. Визначники квадратних матриць. Властивості визначників і методи їх обчислення.
5. Ранг матриці. Теорема про базисний мінор. Методи визначення ранга матриці.
6. Зворотна матриця, її властивості.
7. Знаходження зворотної матриці.
8. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь (ЛАУ). Теорема Кронекера − Капеллі.
9. Системи ЛАУ з невиродженою квадратною матрицею і методи їх розв’язування (метод зворотної матриці).
10. Системи ЛАУ з невиродженою квадратною матрицею і методи їх розв’язування (метод Крамера).
11. Метод Гаусса розв’язування систем ЛАУ (прямий і зворотний хід).
12. Розв’язування матричних рівнянь за допомогою елементарних перетворень.
13. Однорідна система ЛАУ. Теорема про необхідні і достатні умови існування ненульового розв’язку однорідної системи ЛАУ. Наслідки.
14. Властивості розв’язків однорідної системи ЛАУ.

15. Фундаментальна система розв'язків однорідної системи і її знаходження

16. Вектори. Основні визначення.

17. Лінійні операції над векторами. Доведення необхідної і достатньої умови колінеарності двох ненульових векторів.

18. Алгебраїчний запис вектора. Напрямні косинуси.

19. Проекція вектора на вісь. Властивості проекцій.

20. Скалярний добуток векторів. Властивості скалярного добутку. Необхідна і достатня умова ортогональності двох ненульових векторів.

21. Векторний добуток векторів, його властивості і застосування для розв'язування прикладних задач.

22. Змішаний добуток векторів, його властивості і застосування для розв'язування прикладних задач.

23. Лінійний (векторний простір). Визначення і приклади лінійних просторів.

24. Лінійна залежність і незалежність системи векторів. Теорема про лінійну незалежність.

25. Базис векторного простору. Доведення теореми про розкладання вектора за базисом.

26. Евклідів простір. Визначення, приклади евклідових просторів.

27. Норма та її властивості. Доведення нерівності Коші − Буняковського.

28. Ортогональні системи векторів в евклідовому просторі. Теорема про базис евклідового простору.

29. Ортогональний і ортонормований базис. Координати вектора в ортонормованому базисі.

30. Власні вектори і власні значення матриць, їх властивості.

31. Характеристичний многочлен матриці.

Завдання:

– вміти здійснювати операції з матрицями (сума, добуток на число, добуток матриць);

– обчислювати визначник матриці методом розкладання по рядку або по стовпцю;

– визначати ранг матриці методом обвідних мінорів або використовуючи еквівалентні перетворення;

– визначати лінійну залежність (незалежність) системи векторів;

– досліджувати СЛАР на можливість розв'язання, використовуючи теорему Кронекера-Капеллі;

– розв’язувати системи ЛАУ методом Крамера, оберненої матриці, Гаусса.

– розв’язувати системи однорідних ЛАУ, знаходити загальний розв’язок і фундаментальну систему розв’язків системи.

– обчислювати довжину вектора і кут між векторами.

– обчислювати скалярний, векторний і змішаний добуток векторів, використовувати їх в прикладних задачах.

1. Матриці і операції над ними. Визначники матриць. Властивості визначників. Обернена матриця.

Матрицею розміру $m \times n$ називається сукупність елементів a_{ij}, розміщених у вигляді прямокутної таблиці, що має m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Перший індекс кожного елемента вказує на номер рядка, в якому цей елемент розміщений, другий – на номер стовпця. Матриці позначають прописними буквами латинського алфавіту: *A, B, C*,…. Уживають також більш компактний запис $A=(a_{ij})_{mn}$.

Матриця називається:

– числовою, якщо її елементи a_{ij} – числа;

– функціональною, якщо $\boldsymbol{a_{ij}}$ – функції.

Ми будемо розглядати, в основному, числові матриці.

Кажуть, що матриці *A* і *B* мають однакові розміри, якщо у них однакова кількість рядків і однакова кількість стовпців. Матриці *A* і *B* вважаються рівними між собою, якщо вони мають однакові розміри, а їхні елементи, що знаходяться на однакових місцях, рівні між собою.

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців (тобто $m=n$), називається ***квадратною*** матрицею порядку $\boldsymbol{n}$. Квадратна матриця порядку $\boldsymbol{n}$ має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи $\boldsymbol{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}}$ утворюють головну діагональ матриці, а елементи $\boldsymbol{a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}}$ – побічну.

Деякі квадратні матриці мають власні назви. Зокрема, до них відносяться нульова, діагональна та одинична матриці.

Нульовою називається матриця, всі елементи якої - нулі.

Якщо всі елементи матриці, окрім розташованих на головній діагоналі, дорівнюють нулю, то в цьому випадку матриця називається ***діагональною***.

Якщо всі елементи діагональної матриці дорівнюють одиниці, то вона називається ***одиничною*** матрицею. Одинична матриця має вигляд:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю, яку одержують із матриці $\boldsymbol{A}$ заміною її рядків відповідними стовпцями, називають ***транспонованою*** і позначають $\boldsymbol{A^T}$**.** Транспонована матриця має вигляд:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Сумою (різницею) матриць A і B називається матриця C, елементи якої $\boldsymbol{c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}}$ $(\boldsymbol{c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}})$, де $\boldsymbol{a_{ij}}$ *і* $\boldsymbol{b_{ij}}$ – відповідно елементи матриць A і B. При цьому пишуть $\boldsymbol{C = A + B}$**.** Додавати або віднімати можна тільки матриці однакових розмірів.

Добутком матриці A на число $\boldsymbol{\alpha}$ називається матриця C такого ж розміру, елементи якої $\boldsymbol{c_{ij}= \alpha\, a_{ij}}$**,** де $\boldsymbol{a_{ij}}$ – елементи матриці $\boldsymbol{A}$**,** тобто при множенні матриці на число (числа на матрицю) треба всі елементи матриці помножити на це число. При цьому пишуть $\boldsymbol{C = \alpha A}$.

Для довільних матриць A, B, C однакових розмірів і довільних чисел $\boldsymbol{\alpha}$ та $\boldsymbol{\beta}$ справджуються рівності:

$A + B = B + A;$

$(A + B) +C = A + (B + C);$

$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$

$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;$

$(\alpha \beta)A = \alpha (\beta A).$

Добутком матриці $A_{m\times n}$ на матрицю $B_{n\times p}$ називається матриця $C_{m\times p} = AB$, елементи якої $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, де a_{ik}, b_{kj} – елементи матриць A і B. Зауважимо, що перемножувати можна тільки ті матриці, в яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. З існування добутку AB не випливає, що існує добуток BA.

Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються ***комутативними.***

Визначником другого порядку квадратної матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Визначником третього порядку квадратної матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для обчислення визначників третього порядку існує правило трикутника, якщо елементи матриці третього порядку позначити точками, то схематично це можна зобразити так (рис. 1.1):

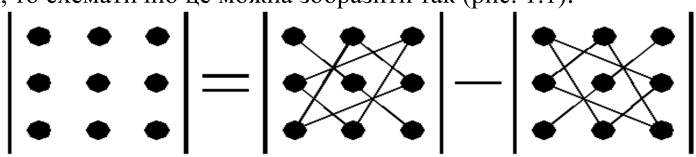

Рис. 1.1

Три доданки, що беруться зі знаком «+», лежать на головній діагоналі й у вершинах трикутників, одна із сторін яких паралельна головній діагоналі (рис. 1.2).

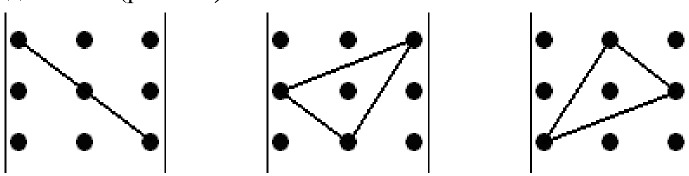

Рис. 1.2

Аналогічні співмножники від’ємних доданків лежать на побічній діагоналі й у вершинах трикутників, одна із сторін яких паралельна їй (рис. 1.3).

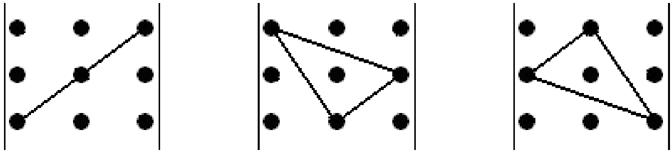

Рис. 1.3

За іншою схемою дописують два перші стовпці до матриці, внаслідок чого одержують прямокутну матрицю розміром 3×5. Тоді визначник обчислюється за схемою правила Саррюса (рис. 1.4).

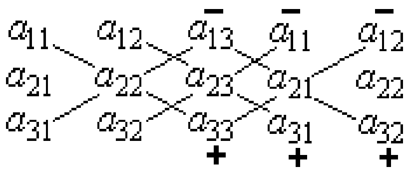

Рис. 1.4

Аналогічно для квадратної матриці A n-го порядку можна розглянути її визначник n-го порядку. Визначник матриці A часто позначають ***det A***.

Мінором $\boldsymbol{M_{ij}}$ елемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ називається визначник, який дістають з визначника матриці $\boldsymbol{A}$ викреслюванням $\boldsymbol{i}$-го рядка та $\boldsymbol{j}$-го стовпця.

Алгебричним доповненням $\boldsymbol{A_{ij}}$ елемента a_{ij} називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів непарна $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Визначник вищого порядку можна обчислити за допомогою визначників нижчого порядку *розкладом за елементами якогось рядка або стовпця.* Зокрема, для визначників третього порядку маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебричні доповнення.

Основні властивості визначників.

1. Значення визначника не змінюється, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями, а стовпці – рядками.
2. Перестановка двох рядків (стовпців) визначника рівносильна множенню його на –1.

3. Якщо визначник має два однакових рядка (стовпця), то він дорівнює нулю.

4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.

6. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7. Якщо кожний елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких один у згаданому рядку (стовпці) має перші з заданих доданків, а інший – другі; елементи, що знаходяться на решті місць, у всіх трьох визначниках одні й ті самі. Записується ця властивість таким чином:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. Якщо до елементів деякого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться.

Матриця $\boldsymbol{A}^{-1}$ називається ***оберненою*** до квадратної матриці $\boldsymbol{A}$, якщо добуток цих матриць дорівнює одиничній матриці, тобто $\boldsymbol{AA^{-1}=A^{-1}A=E}$.

Обернена матриця існує для будь-якої квадратної матриці $\boldsymbol{A}$, яка є ***невиродженою***, тобто коли визначник матриці $\boldsymbol{\det A \neq 0}$.

Алгоритм знаходження оберненої матриці:

1. Обчислити визначник матриці A. Якщо визначник матриці $\boldsymbol{\det A \neq 0}$, то матриця $\boldsymbol{A}$ має обернену, в іншому випадку оберненої матриці не існує.

2. Обчислити алгебричні доповнення A_{ij} елементів матриці A.

3. Визначити обернену матрицю за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Зразки розв'язування задач.

1. Знайти матрицю *C=2A-3B*, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Користуючись означеннями операцій множення матриці на число та додавання матриць, послідовно знаходимо:

$$2A=\begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 3\cdot 2 & 4\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 0\cdot 2 & -1\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$3B=\begin{pmatrix} 0\cdot 3 & 2\cdot 3 & 5\cdot 3 \\ 3\cdot 3 & -7\cdot 3 & 4\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 9 & -21 & 12 \end{pmatrix},$$

$$C=2A-3B=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 9 & -21 & 12 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2-0 & 6-6 & 8-15 \\ 4-9 & 0-(-21) & -2-12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ -5 & 21 & -14 \end{pmatrix}.$$

2. Для матриць $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ обчислити A^T+B^T.

Розв'язання:

$$A^T=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Для заданих матриць обчислити AB і BA, якщо це можливо:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

а) Оскільки задано матриці $A_{2\times 2}$ і $B_{2\times 2}$, то можна визначити добутки AB та BA. Отже,

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 5\cdot(-1) & 3\cdot(-5) + 5\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 1\cdot(-5) + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + (-5)\cdot 1 & 1\cdot 5 + (-5)\cdot 2 \\ -1\cdot 3 + 2\cdot 1 & -1\cdot 5 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

AB=BA.

б) Оскільки кількість стовпців матриці A не дорівнює кількості рядків матриці B то добутку AB не існує. Проте можна обчислити добуток BA.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-2) & -3+4 \\ 3+(-4) & -9+8 \\ 5+(-6) & -15+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

а) Використовуючи формулу для обчислення визначника другого порядку, маємо:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\sin^2\alpha .$$

б) Користуючись правилом трикутника, знаходимо

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 5 + (-1)\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot(-2)\cdot 2 -$$

$$-3\cdot 3\cdot 1 - (-2)\cdot(-1)\cdot 5 - 2\cdot 2\cdot 2 =$$

$$30 - 2 - 12 - 9 - 10 - 8 = -11.$$

5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами першого рядка.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3\cdot 2\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + = (-1)^4\cdot 5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 - 24 - 2(-6-18) + 5(-8-3) = -21 + 48 - 55 = -28.$$

6. Обчислити визначник, спочатку спростивши його: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

Додамо перший рядок до третього рядка, потім помножимо перший рядок на (–2) і додамо його до другого рядка, отримаємо визначник, в якому елементи $a_{21} = a_{31} = 0$. Отриманий визначник розкладаємо за елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2+(-2)\cdot 1 & 8+(-2)\cdot 3 & 1+(-2)\cdot 2 \\ -1+1 & 1+3 & 2+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8-(-12) = 20.$$

7. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ і перевірити, чи справджуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Розв'язання:

Знайдемо визначник матриці: $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3-2 = -5$.

Оскільки, $\Delta = -5 \neq 0$, обернена матриця A^{-1} існує.

Знаходимо алгебричні доповнення:

$A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$**.**

Тоді обернена матриця буде мати вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи виконуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{2}{5}+\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5}+\frac{3}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{6}{5}+\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5}+\frac{1}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

2. Системи лінійних рівнянь. Формули Крамера. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом

Системою m лінійних рівнянь з n змінними x_1, x_2, ..., x_n називається система, яка має наступний вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де a_{ij} – коефіцієнти при змінних;
b_i – вільні члени, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Упорядкована сукупність чисел $(a_1, \; a_2, \; \cdots, \; a_n)$, називається ***розв'язком*** системи, якщо при заміні x_1 на a_1, x_2 на a_2, ..., x_n на a_n у кожному рівнянні системи дістанемо n правильних числових рівностей.

Система, що має розв'язок, називається ***сумісною.*** Система, яка не має жодного розв'язку, називається ***несумісною.*** Система з єдиним розв'язком називається ***визначеною,*** а з більшим числом розв'язків – ***невизначаною.***

Система двох лінійних рівнянь з двома змінними має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \qquad (2.1)$$

а систему трьох лінійних рівнянь з трьома змінними записують у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Метод Крамера. Цей метод розв'язування систем лінійних рівнянь зводиться до обчислення визначників. Так, розв'язок системи (2.1) можна знайти за ***формулами Крамера***:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$, за умови, що $\Delta \ne 0.$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - називається визначником системи (2.1), а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ - визначники, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Формули Крамера для системи (2.2) мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ - визначник системи (2.2**)**, а

$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$, **в**изначники, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого і третього стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Системи (2.1) і (2.2) мають:

а) єдиний розв'язок, коли $\Delta \neq 0$;

б) нескінченна множина розв'язків, коли $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0 \quad (\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0)$;

в) не мати жодного розв'язку, коли $\Delta = 0$ і хоча б один із визначників $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2} \quad (\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3})$ відмінний від нуля.

Матричний метод роз'язання лінійних систем.

Нехай дано систему: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$

Розглянемо три матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Перша матриця називається матрицею системи, друга матрицею-стовпцем змінних, третя – матрицею-стовпцем вільних членів. Тоді систему можна записати у матричному вигляді: $A \cdot X = B$.

Якщо матриця системи рівнянь невироджена $(\Delta \neq 0)$, то розв'язок системи знаходимо у вигляді $X = A^{-1}B$, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Зразки розв'язування задач.

1. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

$$a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$$

$$б)\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язання:

а) Заходимо визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0$, тому система має єдиний розв'язок. Знаходимо $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 - 6 = -14;$

$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21$.

За формулами Крамера, маємо:

$$x_1 = \frac{-14}{-7} = 2; \quad x_2 = \frac{-21}{-7} = 3.$$

б) Знаходимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-5-1) - (25+1) - 5 + 1 = -18 - 26 - 4 = -48 \neq 0.$$

Система має єдиний розв'язок. Знаходимо Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} :

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 10 & -1 & -1\\ -12 & -1 & 5\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}10 & -1\\ -12 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}10 & -1\\ -12 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=-2(-5-1)-(50-12)-10-12=12-38-22=-48;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 5 & 10 & -1\\ 1 & -12 & 5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}10 & -1\\ -12 & 5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & 10\\ 1 & -12\end{vmatrix}=$$

$$=3(50-12)+2(25+1)-60-10=114+52-70=96;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & -1 & 10\\ 1 & -1 & -12\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-1 & 10\\ -1 & -12\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5 & 10\\ 1 & -12\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=$$

$$3(12+10)-(-60-10)-2(-5+1)=66+70+8=144.$$

За формулами Крамера, маємо:

$$x_1=\frac{-48}{-48}=1;\quad x_2=\frac{96}{-48}=-2;\quad x_3=\frac{144}{-48}=-3.$$

2. Дослідити на сумісність системи лінійних рівнянь та знайти їх розв’язок у випадку сумісності:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1,\\ 2x_1+x_2-5x_3=-1,\\ x_1-x_2-x_3=-2;\end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=5,\\ 2x_1-x_2-x_3=2,\\ 4x_1-2x_2-2x_3=-3.\end{cases}$

Розв’язання:

а) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -5\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -5\\ -1 & -1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & -4\\ -1 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -5\end{vmatrix}=$$

$$=-1-5-2(-2-4)-10+4=-6+12-6=0$$

Визначник системи дорівнює нулю. Система або має нескінченну множину розв'язків, або не має жодного розв'язку. Знаходимо Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} :

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 - 6 + 12 = 0,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -9 + 18 - 9 = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 + 6 - 3 = 0.$$

Оскільки, $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$, то система сумісна і невизначена. Для знаходження всіх розв'язків, відкидаємо третє рівняння, а рівняння, що залишилися, записуємо у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + 4x_3, \\ 2x_1 + x_2 = -1 + 5x_3. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 4x_3 & 2 \\ -1 + 5x_3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4x_3 - 2(-1 + 5x_3) = 3 - 6x_3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 4x_3 \\ 2 & -1 + 5x_3 \end{vmatrix} = -1 + 5x_3 - 2(1 + 4x_3) = -3 - 3x_3 ;$$

$$x_1 = \frac{3 - 6x_3}{-3} = -1 + 2x_3, \quad x_2 = \frac{-3 - 3x_3}{-3} = 1 + x_3.$$

б) $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -1\\ 4 & -2 & -2\end{vmatrix}=0$, тому що другий і третій рядки пропорційні.

Система або має нескінченну множину розв'язків, або не має жодного розв'язку.

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}5 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -1\\ -3 & -2 & -2\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & -2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & -2\end{vmatrix}=-7-14=-21\neq 0.$$

Отже, задана система не має жодного розв'язку, тобто вона є несумісною.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+6x_3=17,\\ 3x_1+4x_2-x_3=-3,\\ x_1-5x_2+2x_3=10.\end{cases}$$

Розв'язання:

Запишем дану систему рівнянь у матричній формі: $A\cdot X=B$, де

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 6\\ 3 & 4 & -1\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}17\\ -3\\ 10\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 6\\ 3 & 4 & -1\\ 1 & -5 & 2\end{vmatrix}=16+3-90-24+18-10=-87\neq 0,$ отже, матриця A має обернену матрицю.

Знайдемо алгебричні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4 & -1\\ -5 & 2\end{vmatrix}=3,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 6\\ -5 & 2\end{vmatrix}=-24,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 6\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-21,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 6\\ 3 & -1\end{vmatrix}=20,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-19,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -5\end{vmatrix}=7,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=17.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} 3 & -24 & -21 \\ -7 & -2 & 20 \\ -19 & 7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись рівністю $X = A^{-1} \cdot B$, знаходимо розв'язок системи:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} 3 & -24 & -21 \\ -7 & -2 & 20 \\ -19 & 7 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} 3\cdot 17 - 24\cdot(-3) - 21\cdot 10 \\ -7\cdot 17 - 2\cdot(-3) + 20\cdot 10 \\ -19\cdot 17 + 7\cdot(-3) + 17\cdot 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} -87 \\ 87 \\ -174 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2$ - шуканий розв'язок.

3. Варіанти індивідуальних завдань

Завдання І. Задані матриці A, B, C. Необхідно:

1. Знайти величину визначника матриці A ($\det A$) трьома способами:

а) використавши правило трикутника (правило Саррюса);

б) розклавши визначник за елементами того рядка, який містить нуль;

в) одержавши два нулі в будь-якому рядку і розклавши визначник по елементах цього рядка.

2. Знайти матрицю X, якщо $X + A^2 = E$, де E – одинична матриця третього порядку.

3. Знайти два можливі добутки, утворені з матриць A, B, C.

4. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці A.

Варіант	Матриці		
	A	B	C
1	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

9	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

17	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

25	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Завдання ІІ. Знайти величину визначника четвертого порядку, скориставшись його властивостями та одержавши три нулі в довільному рядку.

Варіант 1 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & -3 & 0 \end{vmatrix}$	**Варіант 2** $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 15 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & -2 \\ -1 & -8 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 6 & 0 \end{vmatrix}$
Варіант 3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & -6 & 6 \\ 10 & 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}$	**Варіант 4** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & -8 & -2 \\ 3 & -15 & 9 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
Варіант 5 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & -6 \\ -3 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 11 & -4 \end{vmatrix}$	**Варіант 6** $\begin{vmatrix} 7 & -4 & 6 & 13 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & -3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$
Варіант 7 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ -3 & 12 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$	**Варіант 8** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 7 \\ -6 & 0 & 2 & -4 \\ 12 & -2 & -6 & 6 \\ 18 & 3 & 8 & 26 \end{vmatrix}$
Варіант 9 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & -3 & -2 \\ -3 & -9 & 5 & 2 \end{vmatrix}$	**Варіант 10** $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 8 & -6 \\ -3 & 0 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 18 & 12 \end{vmatrix}$

Варіант 11 $\begin{vmatrix} 6 & 16 & 9 & 1 \\ 0 & 6 & -15 & -2 \\ -1 & -8 & 9 & 3 \\ -1 & -2 & -6 & 1 \end{vmatrix}$	**Варіант 12** $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 14 & -15 \\ -3 & 12 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 8 & -6 \end{vmatrix}$
Варіант 13 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ -4 & 14 & -8 & 12 \\ 12 & 24 & 9 & 6 \\ 4 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	**Варіант 14** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 12 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & -3 & 8 \\ 2 & -9 & 5 & -6 \end{vmatrix}$
Варіант 15 $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 12 & 18 \\ 6 & 2 & -10 & 14 \\ 5 & 2 & -8 & 11 \\ 0 & -3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$	**Варіант 16** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 18 & -9 & -2 \\ -1 & -8 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 6 & 0 \end{vmatrix}$
Варіант 17 $\begin{vmatrix} 15 & -1 & -2 & 6 \\ -6 & 0 & 2 & -3 \\ 12 & -2 & -6 & 6 \\ 12 & 3 & 10 & 4 \end{vmatrix}$	**Варіант 26** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & -9 & 17 \\ 4 & 6 & -8 & 12 \\ 3 & -15 & 9 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$
Варіант 28 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & -6 \\ 3 & -3 & -11 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -6 & 3 & 18 & 12 \end{vmatrix}$	**Варіант 18** $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 12 & 18 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -6 & 8 \\ 0 & -3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$
Варіант 19	**Варіант 20**

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -15 & -2 \\ -1 & -8 & 9 & 3 \\ 4 & 4 & 15 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 1 & 10 \\ 1 & 6 & -3 & 14 \\ -3 & -9 & 5 & -14 \end{vmatrix}$
Варіант 21 $\begin{vmatrix} -4 & 4 & 8 & -6 \\ 3 & 0 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 18 & 12 \end{vmatrix}$	**Варіант 22** $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 12 & 6 & -9 \\ -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 8 & -6 \end{vmatrix}$
Варіант 23 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & 0 \\ -6 & 2 & 2 & -3 \\ 12 & -8 & -6 & 6 \\ 18 & 11 & 8 & 7 \end{vmatrix}$	**Варіант 24** $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 & 1 \\ -3 & 12 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 8 & -6 \end{vmatrix}$
Варіант 25 $\begin{vmatrix} 1 & 18 & -2 & 6 \\ 0 & 12 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -3 & 8 \\ -3 & -9 & 5 & -6 \end{vmatrix}$	**Варіант 26** $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -15 & -2 \\ -5 & -8 & 9 & 3 \\ 12 & 12 & 6 & 0 \end{vmatrix}$
Варіант 27 $\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 & 5 \\ 4 & 16 & -8 & 12 \\ 3 & 9 & 9 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	**Варіант 28** $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -6 & 8 \\ 5 & 2 & -8 & 11 \end{vmatrix}$
Варіант 29	**Варіант 30**

$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & 0 \\ -6 & 2 & 2 & -3 \\ 12 & -8 & -6 & 6 \\ 18 & 11 & 8 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -4 & 4 & 8 & -6 \\ 3 & 0 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 18 & 12 \end{vmatrix}$

Завдання III. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса;

в) методом оберненої матриці.

Варіант 1 $\begin{cases} 3x+4y+2z=4 \\ 2x-4y-3z=-17 \\ x+5y+z=6 \end{cases}$	**Варіант 2** $\begin{cases} 5x+8y-z=-5 \\ 2x-3y=2z=-1 \\ x+2y+3z=9 \end{cases}$
Варіант 3 $\begin{cases} 2x-y+5z=10 \\ 5x+2y+13z=31 \\ 3x-y+5z=8 \end{cases}$	**Варіант 4** $\begin{cases} x+y-z=-4 \\ 4x-3y+z=-8 \\ 2x+y-z=-6 \end{cases}$
Варіант 5 $\begin{cases} x+2y+z=-2 \\ 3x-5y+3z=-17 \\ 2x+7y-z=2 \end{cases}$	**Варіант 6** $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 8x+3y-6z=-15 \\ -4x-y+3z=8 \end{cases}$
Варіант 7 $\begin{cases} 4x-3y+2z=-17 \\ 2x+5y-3z=2 \\ 5x+6y-2z=-7 \end{cases}$	**Варіант 8** $\begin{cases} 3x+3y+z=3 \\ 2x+3y+z=6 \\ 2x+y+3z=6 \end{cases}$
Варіант 9	**Варіант 10**

$\begin{cases} 4x-3y+2z=-6 \\ 2x+5y-3z=2 \\ 5x+6y-2z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 2x-y+2z=0 \\ 4x+y+4z=6 \end{cases}$
Варіант 11 $\begin{cases} 3x+4y+2z=-12 \\ 2x-4y-3z=10 \\ x+5y+z=-18 \end{cases}$	**Варіант 12** $\begin{cases} 5x+8y-z=-34 \\ 2x-3y+2z=16 \\ x+2y+3z=-2 \end{cases}$
Варіант 13 $\begin{cases} 2x-y+5z=14 \\ 5x+2y+13z=18 \\ 3x-y+5z=14 \end{cases}$	**Варіант 14** $\begin{cases} x+y-z=-6 \\ 4x-3y+z=14 \\ 2x+y-z=-6 \end{cases}$
Варіант 15 $\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ 3x-5y+3z=-3 \\ 2x+7y-z=-5 \end{cases}$	**Варіант 16** $\begin{cases} x+y-z=-3 \\ 8x+3y-6z=-24 \\ -4x-y+3z=11 \end{cases}$
Варіант 17 $\begin{cases} 4x-3y+2z=-6 \\ 2x+5y-3z=-7 \\ 5x+6y-2z=-12 \end{cases}$	**Варіант 18** $\begin{cases} 3x+2y+z=11 \\ 2x+3y+z=9 \\ 2x+y+3z=7 \end{cases}$
Варіант 19 $\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=11 \\ 5x+6y-2z=21 \end{cases}$	**Варіант 20** $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x-y+2z=5 \\ 4x+y+4z=13 \end{cases}$
Варіант 21 $\begin{cases} 2x-y-z=5 \\ 3x+4y-2z=13 \\ 3x-2y+4z=7 \end{cases}$	**Варіант 22** $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ 3x-2y-5z=7 \end{cases}$
Варіант 23	**Варіант 24**

$\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 2x+3y-4z=-8 \\ 3x-2y-5z=-11 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y-z=-6 \\ 3x+4y-2z=1 \\ 3x-2y+4z=1 \end{cases}$
Варіант 25 $\begin{cases} 3x+y+z=-2 \\ x-4y-2z=12 \\ -3x+5y+6z=-8 \end{cases}$	**Варіант 26** $\begin{cases} 7x-5y=-14 \\ 4x+11y=-8 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases}$
Варіант 27 $\begin{cases} 3x+y+z=-2 \\ x-4y-2z=-12 \\ -3x+5y+6z=29 \end{cases}$	**Варіант 28** $\begin{cases} 7x-5y=-26 \\ 4x+11y=-1 \\ 2x+3y+4z=-7 \end{cases}$
Варіант 29 $\begin{cases} x-2y+3z=-8 \\ 2x+3y-4z=1 \\ 3x-2y-5z=-6 \end{cases}$	**Варіант 30** $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 2x+3y-4z=-4 \\ 3x-2y-5z=-17 \end{cases}$

4. Тестові завдання

№	**Завдання**
1	Знайти суму елементів 3-го стовпчика матриці В. $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$
2	Задані дві матриці А і В. Знайти елемент c_{31} матриці $C=AB$: $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

3	Задані матриці A і B. Чи існує добуток AB^T. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$
4	Задана матриця $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -5 & 0\end{pmatrix}$. Знайти A^{-1}.
5	Записати мінор елемента a_{23} визначника $\begin{vmatrix}2 & 6 & 2\\ 4 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 6\end{vmatrix}$,
6	Знайти суму елементів 3-го рядка матриці A^{-1}, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 4 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$
7	Знайти ранг матриці A. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$
8	Задана система рівнянь. $\begin{cases}x+y-z=-2\\ 2x+3z=8\\ 3x-2y=5\end{cases}$ Знайти Δ, Δ_z, z.

9	Обчислить A^3, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
10	Знайти елемент a_{21}^{-1} матриці, оберненої до даної. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
11	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x - 2y + z = 4 \\ 2x + 9y - 5z = 2 \end{cases}$, за базисні змінні взяти y i z.
12	Якщо *x*, *y*, *z* розв'язки системи, то *x*+ *y*+ *z* дорівнює $\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ -x + y - z = -2 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$
13	Якщо *x*, *y*, *z* розв'язки системи, то *x*+ *y*+ *z* дорівнює $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = -3 \end{cases}$

Список використаних джерел

1. Андрійчук В.І., Забавський, Б.В. (2008 р.). Лінійна алгебра. Львів: Міністерство освіти і науки України, Львівський національний університет імені Івана Франка. ISBN 9789666136230. (укр.)
2. Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В. (2010 р.). Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Київ: Києво-Могилянська академія. С. 176. ISBN 978-966-518-539-0. (укр.)
3. В.В. Булдигін, І.В. Алєксєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний; Н.Р. Коновалова; Л.Б. Федорова (2011 р.). Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Навч. посібник. Київ: ТВіМС. ISBN 966–8725–05–0. (укр.)
4. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення /П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П. Овчинникова; Пер. з рос. П.М. Юрченка. – 3-те вид., випр. – К.: Техніка, 2007. – 600с.
5. Математика в технічному університеті: Підручник / І.В. Алєксєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний, Л.Б. Федорова; за ред. О.І. Клесова; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ: Видавничий дім «Кондор», 2018. – Т. 1. — 496 с.
6. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики: у 2 ч. Ч.1 / Н.О. Чікіна [та ін.]; ред. Н.О. Чікіна; Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». – Харків: Підручник НТУ «ХПІ», 2012. – 224 с. – Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/17443/1/Chikina_Zbirnyk_rozrakhunkovo_Ch_1_2012.pdf
7. Kreyszig, E. Kreyszig, H. and Norminton, E. J. (2011) Advanced Engineering Mathematics. 10th edition, Wiley, NY. – 1152 p. – Режим доступу: https://soaneemrana.org/onewebmedia/ADVANCED%20ENGINEERING%20MATHEMATICS%20BY%20ERWIN%20ERESZIG1.pdf