МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЧЕРНІГІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи

з дисципліни для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр» галузі знань 07 «Управління та адміністрування» спеціальності 071 - Облік і оподаткування, галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки» спеціальності 051 - Економіка

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри
бухгалтерського обліку, оподаткування та аудиту
Протокол №9
від 17 січня 2022 р.

ЧЕРНІГІВ 2022

Теорія ймовірностей і математична статистика. Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи з дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр» галузі знань 07 «Управління та адміністрування» спеціальності 071 - Облік і оподаткування, галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки» спеціальності 051 - Економіка/ Укл.: М.Є. Юрченко – Чернігів: НУЧП, 2022. – 43 с.

Укладач: Юрченко Марина Євгенівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Відповідальний за випуск: Клименко Тетяна Вікторівна, кандидат економічних наук, доцент.

Рецензент: Гоголь Тетяна Анатоліївна, доктор економічних наук, професор кафедри бухгалтерського обліку, оподаткування та аудиту Національного університету «Чернігівська політехніка».

ЗМІСТ

Вступ. Мета навчальної дисципліни полягає у формуванні у здобувачів вищої освіти комплексу фундаментальних знань відповідно до майбутньої професійної діяльності щодо побудови та застосування математичних моделей та явищ, що враховують вплив випадку, аналіз результатів, одержаних за допомогою ймовірнісних моделей.

Предметом вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» є математичні моделі реальних випадкових явищ (подій), які називають ймовірнісними моделями. Такі моделі дозволяють зрозуміти математичну сутність реальних випадкових подій та надають можливість прогнозувати перебіг досліджуваних випадкових подій. Викладання ОК «Теорія ймовірностей і математична статистика» ґрунтується на курсі вищої математики. Передує вивченню наступних навчальних дисциплін, які використовують апарат вищої математики та теорії ймовірностей.

У підсумку здобувач повинен знати : означення ймовірності та її властивості; основні формули комбінаторики; теореми додавання і множення ймовірностей; форми представлення випадкових величин та їх основні характеристики; найбільш вживані закони розподілу випадкових величин; поняття вибірки та методи її формування; методологію отримання точкових та інтервальних оцінок; правила побудови критеріїв для перевірки статистичних гіпотез; системи випадкових величин та вміти їх застосовувати.

Крім того, здобувач буде *вміти*: обчислювати ймовірність випадкових подій з використанням основних означень та теорем; будувати закони розподілу та обчислювати характеристики випадкових величин; здійснювати операції над випадковими подіями та обчислювати ймовірності суми та добутку випадкових подій; формувати повні групи гіпотез та знаходити ймовірності події за формулою повної ймовірності; знаходити ймовірності гіпотез за формулами Байєса; будувати ряди розподілу дискретної випадкової величини; розрізняти закони розподілу ймовірностей дискретних та неперервних випадкових величин та знаходити їх основні числові характеристики; використовувати основні закони розподілу для дослідження та аналізу, використовуючи числові характеристики досліджуваних показників.

Розрахункова робота є однією з форм самостійної роботи і спрямована на поглиблення теоретичних і практичних знань з дисципліни.

Методичні вказівки призначені для надання допомоги здобувачам вищої освіти денної і заочної форм навчання у виконанні розрахункової роботи з дисципліни.

ОРГАНІЗАЦІЯ ПРОВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Виконання розрахункової роботи допоможе закріпити знання та уміння не лише за основними розділами теорії ймовірностей, але й математичного аналізу та лінійної алгебри.

Запропоновані завдання для індивідуальної (розрахункової роботи) включають методичні вказівки до виконання, завдання для розрахунку, критерії оцінювання.

Розрахункова робота виконується здобувачами вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр» галузі знань 07 «Управління та адміністрування» спеціальності 071 – Облік і оподаткування, галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки» спеціальності 051 – Економіка.

Список основної літератури, необхідної для виконання роботи, наведено наприкінці методичних вказівок.

Під час виконання розрахункової роботи здобувачі повинні ознайомитися та вивчити лекційний матеріал, запропонований викладачем. Основою для вивчення є літературні джерела, наведені в даній методичній розробці.

Розрахункова робота повинна бути виконана з дотриманням всіх норм та правил академічної доброчесності. Політика дотримання академічної доброчесності ґрунтується на «Кодексі академічної доброчесності Національного університету «Чернігівська політехніка» (https://stu.cn.ua/wpcontent/uploads/2021/05/p-yakist-kodex-07.07.2021.pdf), погодженого вченою радою зі змінами та доповненнями НУ «Чернігівська політехніка» (протокол № 9 від 30.11.2020 р.) та введеного в дію наказом ректора НУ «Чернігівська політехніка» від 30.11.2020 р. № 100.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ. Завдання розрахункової роботи виконуються за окремим графіком. Обсяг розрахункової роботи визначається навчальним планом з дисципліни. З даного курсу розрахункова робота проводиться у формі виконання індивідуальних завдань.

Оцінка за виконання розрахункової роботи

Вид роботи	Форма контролю	Кількість балів
Правильність виконання роботи	обґрунтованість рішень	**0…8**
Оформлення роботи	- відповідність оформлення вимогам - своєчасність виконання	**0…1** **0…1**
Захист розрахункової роботи	самостійність виконання, відповіді на запитання	**0…5**
Разом		**0…15**

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Робота виконується на листах А4 з однієї сторони, поля: з лівого боку – 20 мм, з правого боку – 10 мм, зверху – 20 мм, знизу – 20 мм.
Завдання повинні бути виконані акуратно, з детальними поясненнями та всіма проміжними розрахунками.
В кінці розрахункового завдання пишеться висновок (відповідь).
Вимоги до комп'ютерного набору розрахункової роботи:
– текстовий редактор – WORD;
– гарнітура шрифту – Times New Roman;
– кегль шрифту (розмір) – 14;
– міжрядковий інтервал – полуторний;
– абзац – 1,25 см;
– розташування тексту роботи – вирівнювання по ширині;
– міжрядковий інтервал між заголовком (назвою розділу чи підрозділу) і текстом повинна дорівнювати 1 інтервалу.
Приклад оформлення титульної сторінки розрахунково-графічної роботи наведено у Додатку А.
Повністю оформлена і виконана розрахункова робота подається на кафедру в термін, що визначений у плані-графіку виконання розрахункової роботи для перевірки її викладачем.
В разі зауважень з боку викладача, робота повинна бути доопрацьована в зазначений термін і подана на перевірку.
До підсумкового контролю допускаються лише здобувачі вищої освіти, що вчасно здали і захистили свою роботу.
Розрахункова робота оцінюється після захисту.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ДЛЯ ВИКОНАННЯ РР

Основні принципи комбінаторики

Означення. Правило додавання. Нехай k взаємно заперечні дії можна виконати відповідно $n_1, n_2, ..., n_k$ способами. Тоді якусь одну з цих дій можна виконати $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ способами.

Означення . Правило множення. Нехай потрібно виконати одна за одною k дії. Нехай першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами,... , k - ту – n_k способами. Тоді усі k дії можуть бути виконані $n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ способами.

Приклад. Для складання номера підрозділу використовуються цифри 1, 2, 3, 4. Скільки підрозділів можна пронумерувати, якщо один номер повинен складатися не більше, ніж з трьох цифр?

Розв'язання: а) Цифри у номері не повторюються. Для складання тризначного номера потрібно виконати одну за іншою три дії − вибір першої, другої та третьої цифр. Ці вибори можна здійснити відповідно 4, 3 та 2 способами. Отже, на підставі правила множення, тризначних номерів буде $N_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Аналогічним чином знаходимо кількість двозначних номерів $N_2 = 4 \cdot 3 = 12$ та однозначних номерів $N_1 = 4$. Тепер за правилом додавання знаходимо загальну кількість підрозділів, яку можна занумерувати $N = N_1 + N_2 + N_3 = 24 + 12 + 4 = 40$. б) Цифри у номері можуть повторюватися. Вибір будь-якої цифри можна здійснити 4 способами. Тому $N = N_1 + N_2 + N_3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 = 84$.

Основні види комбінаторних з'єднань

Означення. *Перестановками* з n елементів називаються комбінації, які складаються з n *різних* елементів і відрізняються одна від одної лише порядком елементів.

Кількість перестановок з n елементів P_n визначається формулою

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots1 = n!$$

Приклад. *Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр* 1, 2, 3, *якщо кожна цифра входить у зображення числа лише один раз*?

Розв'язання: Кількість чисел $P_3 = 3! = 6$

P_3: 123, 231, 312, 132, 321, 213.

Означення. *Розміщеннями* з n елементів по m $(0 \le m \le n)$ елементів називаються комбінації, які складаються з n *різних* елементів по m елементів і відрізняються одна від одної або складом, або порядком елементів.

Кількість розміщень з n елементів по m елементів A_n^m визначається формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{p_n}{p_{n-m}}.$$

Зазначимо, що $A_n^n = P_n$.

Приклад. *Скільки двозначних чисел можна скласти з цифр* 1,2,3, *якщо кожна цифра входить у зображення числа лише один раз*.

Розв'язання:

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6;\ A_3^2 : \begin{cases} 12, 23, 31 \\ 21, 32, 13 \end{cases}$$

Означення. *Сполученнями* з n елементів по m $(0 \le m \le n)$ елементів називаються комбінації, які складаються з n *різних* елементів по m елементів і відрізняються одна від одної лише складом елементів.

Кількість сполучень з n елементів по m елементів C_n^m визначається формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{P_n}{P_{n-m}\,P_m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}.$$

Приклад. *Скількома способами можна вибрати дві деталі з ящика, в якому три різні деталі* (1, 2, 3)?

Розв'язання:

$$C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = 3;\ C_3^2 : 12,\ 23,\ 31 \text{ або } 21,\ 32,\ 13$$

– тут вважається, що наслідками випробування є множина двозначних чисел.

Властивості чисел C_n^m:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$

– перевіряється безпосередньо.

2. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$

– випливає безпосередньо з формули розкладання бінома Ньютона у такій редакції:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^{n-0} + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^n a^n b^{n-n}$$

при $a = b = 1$.

Таким чином, числа C_n^m $(m = \overline{0,\ n})$ є біноміальними коефіцієнтами.

3. У послідовності $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ сума парних членів дорівнює сумі непарних членів. Тобто

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots$$

– доводиться методом математичної індукції.

4. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ $(1 \le m \le n)$ – правило Паскаля.

Дійсно,

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m} = \frac{(n-1)!}{(n-1-m+1)!(m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-m)!m!} =$$

$$= \frac{(n-1)!m}{(n-m)!(m-1)!m} + \frac{(n-1)!(n-m)}{(n-m-1)!m!(n-m)} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-m)!m!}(m+n-m) = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_n^m .$$

Зауваження. Зазначимо, що правило Паскаля дозволяє відносно просто скласти арифметичний трикутник Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & C_0^0 & & & & \\ & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\ & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\ & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

– числова таблиця справа.

Арифметичний трикутник Паскаля, зокрема, спрощує обчислення біноміальних коефіцієнтів.

Приклад. $(a+b)^4 = 1a^0b^4 + 4a^1b^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b^1 + 1a^4b^0$

Формули комбінаторики для комбінацій з повтореннями

Означення. *Перестановками* з n елементів *з повтореннями* називаються перестановки з n елементів, серед яких є m різних типів елементів, тобто є n_1 елементів типу 1, n_2 елементів типу 2 , ... , n_m елементів типу m; $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$.

Кількість перестановок з n елементів з повтореннями $P_n\ (n_1, n_2, ..., n_m)$ визначається формулою

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_m) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_m!} .$$

Приклад. *Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр* {1, 1, 2, 2}?

Розв'язання:

$$P_4(2,2)=\frac{4!}{2!\,2!}=6;\; P_4(2,2):\quad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 2, \\ 1 & 2 & 1 & 2, \\ 2 & 1 & 1 & 2, \\ 2 & 1 & 2 & 1, \\ 2 & 2 & 1 & 1, \\ 1 & 2 & 2 & 1. \end{array}$$

– відрізняються одна від одної лише порядком елементів.

Зауваження. Зазначимо, що

$$P_n(n_1,\, n_2,\, \dots,\, n_m)=C_n^{n_1}\, C_{n-n_1}^{n_2}\, C_{n-n_1-n_2}^{n_3}\dots 1,$$

зокрема,

$$P_n(m,\, n-m)=C_n^m\, C_{n-m}^{n-m}=C_n^m$$

– перевіряється безпосередньо.

Означення. *Розміщеннями* з n елементів по m елементів з повтореннями називаються розміщення з n різних типів елементів по m елементів. n,m – будь-які, кількість елементів кожного типу однакова і не менша m, зокрема – необмежена.

Кількість розміщень з n елементів по m елементів з повтореннями $\overline{A_n^m}$ обчислюється за формулою

$$\overline{A_n^m}=n\, n \dots n=n^m \left(n \begin{matrix} \le \\ = \\ > \end{matrix} m\right).$$

Приклад. *Скільки двозначних чисел можна скласти з цифр* 1, 2, 3?

Розв’язання: Згідно із умовою задачі двозначні числа складаємо з цифр {1, 1, 2, 2, 3, 3} або з цифр {1, 1, … , 1, 2, 2, … , 2, 3, 3, … , 3}.

$$\overline{A_3^2}=3^2=9;\; \overline{A_3^2}:\begin{cases} 11, & 12, \quad 13, \\ 21, & 22, \quad 23, \\ 31, & 32, \quad 33. \end{cases}$$

– відрізняються одна від одної або складом, або порядком елементів.

Означення. *Сполученнями* з n елементів по m елементів з повтореннями називаються сполучення з n різних типів елементів по m

елементів. n, m – будь-які, кількість елементів кожного типу однакова і не менша m, зокрема – необмежена.

Кількість сполучень з n елементів по m елементів з повтореннями $\overline{C_n^m}$ визначається формулою

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!}\left(n \overset{\le}{\underset{>}{}} m\right).$$

Приклад. *Скількома способами можна вибрати дві деталі з ящика, в якому три типи деталей?*

Розв'язання: Згідно із умови задачі в ящику l деталей типу 1; l деталей типу 2 і l деталей типу 3, $l \ge 2$. Вважаємо, що наслідками випробування є двозначні числа:

$$\overline{C_3^2} = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6;\ \overline{C_3^2}: \begin{cases} 11, & & \\ 21, & 22, & \\ 31, & 32, & 33. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 11, & 12, & 13, \\ & 22, & 23, \\ & & 33. \end{cases}$$

– відрізняються одна від одної лише складом елементів.

Застосування формул комбінаторики до обчислення ймовірностей

Приклад.

На підприємстві працюють 10 інженерів і 5 офіцерів пожежно-рятувальної служби. Керівник підприємства вирішив сформувати робочу групу з 5 осіб для виконання спеціального завдання. Яка ймовірність події А – вибрана навмання група з 5 осіб налічує 3 інженери і 2 офіцери пожежно-рятувальної служби?

Ймовірність події А визначається формулою:

$$P\left(A\right) = \frac{m}{n},$$

де n – число усіх елементарних подій даного випробування, а m – число сприятливих елементарних подій цього випробування.

Числа n та m визначаються наступними формулами:

$$n = C_{15}^5 = \frac{15!}{5! \cdot \left(15-5\right)!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{5! \cdot 10!} = 3003,$$

$$m = C_{10}^3 \cdot C_5^2 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 5!}{3! \cdot 7! \cdot 2! \cdot 5! \cdot 6 \cdot 7} = 1200,$$

Отже,

$$P\ A\ = \frac{1200}{3003} \approx 0{,}3996,$$

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теореми додавання

Теорема 1 (основна). Ймовірність суми двох подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку:

$$P(A) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Зауваження. Якщо події А і В несумісні, то в результаті досліду вони не можуть з’явитись разом, тобто ймовірність їх добутку дорівнює нулю. Тому для несумісних подій можна сформулювати таку теорему-наслідок.

Теорема 2. Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Наслідок 1. Ймовірність суми скінченної кількості попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

Наслідок 2. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють повну групу подій, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці. Тобто:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$$

Наслідок 3. Ймовірність протилежної події *A* знаходять за формулою:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Приклад. Знайти ймовірність того, що при підкиданні 2 гральних кубиків хоча б один раз випаде 6 очок.

Розв’язання:

A – поява 6 очок при підкиданні першого грального кубика, B – поява 6 очок при підкиданні другого грального кубика. Оскільки події A і B сумісні,

то

$$P(A) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Умовна ймовірність

Означення . Події A і B називаються ***залежними***, якщо ймовірність однієї з них змінюється залежно від того, відбулась друга подія або ні. У протилежному випадку події називаються ***незалежними***. Імовірність події A, визначена за умови, що подія B відбулася, називається умовною і позначається $P(A/B) = P_A(B)$

Означення . Умовною ймовірністю події B за умови, що відбулася подія A, називається величина $P_A(B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B)>0$ Умовна ймовірність має всі властивості безумовної ймовірності.

Приклад. У кошику 5 червоних і 7 зелених м’ячів. З нього послідовно беруть два м’ячі. Знайти ймовірність того, що другий м’яч буде зеленим за умови, що перший м’яч був зеленим.

Розв’язання:

Позначимо: A – перший м’яч зелений; B – другий м’яч зелений. Якщо відбулась подія A, то в кошику залишилось 11 м’ячів, серед яких 6 зелених. Тому шукана ймовірність $P_A(B) = \dfrac{6}{11}$.

Ознака незалежності подій. Випадкові події A і B незалежні, якщо $P(AB) = P(A)P(B)$. Для незалежних подій $P_B(A) = P(A)$, тобто настання однієї з двох незалежних подій не впливає на ймовірність іншої.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються незалежними в сукупності, якщо для будьяких k із них ($k < n$) виконується співвідношення $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$.

Теореми множення

Теорема 3. Ймовірність сумісної появи двох подій дорівнює ймовірності однієї з них, помноженій на умовну ймовірність іншої, за умови, що перша подія відбулась:

$$P(AB) = P(A)P_A(B)$$

Приклад. Студент прийшов на екзамен, підготувавши лише 40 із 75 питань. Екзаменатор задав йому три питання по черзі. Яка ймовірність того, що студент знатиме відповіді на всі ці запитання?

Розв’язання:

Подія A – студент знає відповіді на всі три запитання; подія A_1, A_2, A_3 студент знає відповідь на кожне запитання. Тоді $A = A_1A_2A_3$, події $A_1A_2A_3$ – залежні, тому, $P(A) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3) = \frac{40}{75}\frac{39}{74}\frac{38}{73} = 0{,}146$.

Зауваження. Якщо події A і B незалежні (тобто поява однієї з них не змінює ймовірність появи іншої і $P_A(B) = P(B)$, то можна сформулювати таку теоремунаслідок.

Теорема 4. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Приклад. Прилад складається із трьох вузлів, які працюють незалежно один від одного. Імовірності виходу з ладу вузлів на заданому часовому проміжку становлять відповідно 0,2; 0,3 і 0,4. Знайти ймовірність того, що протягом заданого часу усі вузли приладу працюватимуть.

Розв’язання:

Розглянемо події: A — «усі вузли приладу працюють»; B_1 — «перший вузол працює»; B_2 — «другий вузол працює»; B_3 — «третій вузол працює». Тоді подія A є добутком подій $B_i, i = 1,2,3$. тобто $P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}336$.

Теорема 5. Нехай $H_i\ (i = \overline{1, n})$ – повна група подій і $P(H_i) > 0\ \ \forall i$, тоді для будь-якої випадкової події A, $A \in \mathcal{U}$, і настає лише після настання однієї з подій (гіпотез) $H_i\ (i = \overline{1, n})$, має місце рівність

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$

Формула називається формулою повної ймовірності. Її можна узагальнити і на злічення число подій (гіпотез), якщо останні утворюють повну групу.

Теорема 6. Нехай $H_i \ (i=\overline{1,n})$ – повна група подій і $P(H_i)>0 \ \ \forall i$. Тоді для будь-якої випадкової події A, $A \in \mathscr{U}$ і вже настала після настання однієї з гіпотез $H_i \ (i=\overline{1,n})$, мають місце рівності

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

$(i=\overline{1,n})$

Приклад. В крамниці реалізується продукція трьох фірм в такому співвідношенні: частка 1-ої фірми становить 50%, 2-ої – 30%, 3-ої – 20%. Брак продукції кожної з фірм становить відповідно: для продукції 1-ої фірми – 2%, для 2-ої – 3%, для 3-ої – 5%. Знайти:

а) ймовірність того, що навмання придбана в крамниці одиниця продукції є якісна;

б) ймовірність того, що придбана в крамниці якісна продукція виготовлена на 2-ій фірмі

Розв'язання:

Опишемо гіпотези даної задачі.

H_1– придбана в крамниці продукція виготовлена на 1-ій фірмі;
H_2– придбана в крамниці продукція виготовлена на 2-ій фірмі;
H_3– придбана в крамниці продукція виготовлена на 3-ій фірмі;
Знайдемо ймовірності гіпотез:

$$P(H_1) = 0{,}5, \qquad P(H_2) = 0{,}3, \qquad P(H_3) = 0{,}2,$$

Та умовні ймовірності

$$P(A/H_1) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98, \qquad P(A/H_2) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97,$$

$$P(A/H_3) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$$

За формулою повної ймовірності

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}98 + 0{,}3 \cdot 0{,}97 + 0{,}2 \cdot 0{,}95 = 0{,}971$$

За формулою Байєса

$$P(H_2/A) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}97}{0{,}5 \cdot 0{,}98 + 0{,}3 \cdot 0{,}97 + 0{,}2 \cdot 0{,}95} = 0{,}2997$$

Формула Бернуллі

Нехай проводиться n послідовних випробувань, ймовірність події A в кожному випробуванні одна й та сама, а випробування незалежні, тобто поява події A в і-му випробуванні не залежить від її появи в інших випробуваннях. Таку серію випробувань називають схемою Бернуллі. Схема Бернуллі може бути пов'язаною з будь-яким експериментом: з підкиданням монети, зі стрільбою по мішені тощо. Якщо випадкова подія A відбувається в кожному випробуванні з ймовірністю $P(A) = p$, тоді вона не відбувається з ймовірністю $q = 1 - p$. Ймовірність того, що при n випробуваннях за схемою Бернуллі подія A відбудеться k разів визначається за формулою Бернуллі:

$$P\ k\ = C_n^k p^k q^{n-k}$$

з якої випливають наступны наслідки:

- Ймовірність появи події A в n випробуваннях k разів, де число k перебуває між числами k_1 та k_2, $0 \le k_1 \le k_2 \le n$, знаходиться за формулою:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + ... + P_n(k_2)$$

Ймовірність появи події A в n випробуваннях хоча б один раз

$$P_n(1 \le k \le n) = 1 - qn$$

- Найімовірніша кількість m_0 появи події A в n випробуваннях визначається з нерівностей: $np - q \le m_0 \le np + p$
- Якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює p, то кількість n випробувань, які необхідно здійснити, щоб з ймовірністю P можна було стверджувати, що подія A відбудеться хоча б один раз, знаходиться за формулою

$$n > \frac{\ln(1 - P)}{\ln(1 - p)}$$

Приклад. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі 0,6. Знайти ймовірність трьох влучень при п'яти пострілах.

Розв'язання:

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{2!\,3!} 0{,}6^3 (1-0{,}6)^2 = 0{,}3456 \approx 0{,}35\,.$$

Зауваження. При великих n і значній різниці між n і m обчислення $P_n(m)$ за формулою Бернуллі стають надто складними. Тому знайдемо кілька наближених формул.

Граничні теореми у схемі Бернуллі

Нехай виконуються умови схеми Бернуллі і проводиться n послідовних випробувань. Для наближеного обчислення ймовірності появи події A у цих n випробуваннях k разів при великих n і малих p таких, що $np < 10$, доцільно використовувати формулу Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np$$

Локальною функцією Лапласа називають функцію

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Інтегральною функцією Лапласа називають функцію

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Значення функцій φ(x) та Φ(x) наведено відповідно у таблицях.

Локальна теорема Муавра—Лапласа. Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n достатньо велика, а ймовірність p появи події A в усіх випробуваннях відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність появи події A k разів може бути наближено знайдена за формулою

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

φ(x)– локальна функція Лапласа.

Інтегральна теорема Муавра—Лапласа. Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n достатньо велика, а ймовірність p появи події A в усіх випробуваннях відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність появи події A не менше k_1 і не більше k_2 разів можна наближено знайти за формулою

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

де $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Приклад. Ймовірність виготовлення деталі першого сорту на даному верстаті дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих 100 деталей буде 55 деталей першого сорту.

Розв'язання:

$p = 0,6 > 0,5$; $npq = 100 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 24 > 10$.

Отже, формулу Муавра-Лапласа у цьому випадку використовувати можна.

$$P_{100}(55) = \frac{1}{\sqrt{24}}\varphi(x) = \left\{ x = \frac{k - np}{\sqrt{24}} = \frac{55 - 100 \cdot 0,6}{\sqrt{24}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{24}}\varphi\left(\frac{55 - 100 \cdot 0,6}{\sqrt{24}}\right) = \frac{0,2371}{\sqrt{24}} \approx 0,04835$$

Приклад. Ймовірність випуску бракованого виробу дорівнює 0,02. Чому дорівнює ймовірність того, що у партії зі 100 виробів бракованих буде не більше 3?

Розв'язання:

Скористаємось теоремою Пуассона. У даному випадку n=100, p=0,02, λ=np=100·0,02=2. Тоді:

$$P\{k \le 3\} = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + P_n(3) \approx e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{4e^{-2}}{2!} + \frac{8e^{-2}}{3!} = 0,8571.$$

Означення. Випадковою називається величина, яка в результаті випробування може набувати того чи іншого, але лише одного числового значення з деякою ймовірністю. Означення випадкової величини пов'язане з поняттям простору елементарних подій. Нехай задано простір елементарних подій Ω. Однозначна числова функція $X = f(\Omega)$ яку задано на просторі елементарних подій, називається **випадковою величиною**. Якщо простір Ω дискретний, то випадкова величина **дискретна.** Тобто можливі значення дискретної випадкової величини можна пронумерувати або перелічити. Неперервному простору елементарних подій відповідає **неперервна**

випадкова величина. Тобто неперервна випадкова величина може набувати всіх значень з деякого скінченного або нескінченного інтервалу. Випадкові величини позначаються великими літерами латинського алфавіту X, Y, Z,…, а їх можливі значення малими літерами.

Універсальним способом задання закону розподілу ймовірностей є функція розподілу. Функцією розподілу ймовірностей (функцією розподілу) називається функція $F(x)$, яка визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде значення, меншого за аргумент x, тобто $F(x) = P(X < x)$. Якщо x – фіксована точка, а X – випадкова величина, то $F(x)$ характеризує ймовірність потрапляння випадкової точки у проміжок лівіше за точку x.

Властивості функції розподілу:

1. $0 \le F(x) \le 1$

2. Функція неспадна, тобто $F(x_1) \le F(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$

3. $P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$

4. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

5. $P(X \ge 1) = 1 - F(x)$

Означення. Щільністю розподілу (густиною розподілу) ймовірностей випадкової величини X називається функція $f(x)$ така, що

$$\forall [a,\, b) \subset R \quad P\left(X \in [a,\, b)\right) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Щільність розподілу називають іноді **диференціальною функцією** розподілу, а її графік називають **кривою розподілу**. Випадкова величина, яка задається щільністю розподілу, називається неперервною випадковою величиною. Множина її можливих значень – проміжок.

Безпосередньо з означення випливає, що

$$\forall x \in R \quad P(X < x) = P\left(X \in (-\infty,\, x)\right) = F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(u)\,dx$$

Зокрема, якщо всі значення неперервної випадкової величини X належать півінтервалу $[a,\, b)$, то

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \int_a^x f(u)\,du, & a<x\le b;\\ 1, & x>b,\end{cases}$$

Приклад. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le \frac{3\pi}{2},\\ 2C(1+sinx), & \frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi,\\ 1, & x>2\pi\end{cases}$$

Потрібно:

а) визначити параметр C та знайти функцію густини (щільності розподілу);

б) знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X;

в) побудувати графіки функцій розподілу та густини.

Розв'язання.

а) використовуючи означення, знайдемо спочатку функцію густини:

$$f(x)=F^{/}(x)=\begin{cases}0, & x\le \frac{3\pi}{2},\\ 2Ccosx, & \frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi,\\ 1, & x>2\pi\end{cases}$$

Використовуючи властивість функції густини

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$$

Знаходимо параметр C:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=2\mathrm{C}\int_{3\pi/2}^{2\pi} cosxdx=2Csinx\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}=2C\left(sin2\pi-\frac{sin3\pi}{2}\right)=2C=1$$

Отже, C=1/2

б) математичне сподівання випадкової величини X знайдемо за формулою:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$$

$$M\ \ x\ \ =\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} x\cdot\cos x\,dx=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx, \\ dv=\cos xdx, & v=\sin x \end{vmatrix}=x\cdot\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-$$

$$-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin xdx=\frac{3\pi}{2}+\cos x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=\frac{3\pi}{2}+1\approx 5{,}712.$$

Дисперсію випадкової величини X знайдемо за формулою:

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\ f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2\ \ f(x)\,dx-\ (M(X))^2$$

$$-2\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)^2=\frac{9\pi^2}{4}+4\pi-2-\frac{9\pi^2}{4}-3\pi-1=\pi-3\approx 0{,}142.$$

$$D\ \ X\ \ =\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}x^2\cos xdx-\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)^2=\begin{vmatrix} u=x^2, & du=2xdx, \\ dv=\cos xdx, & v=\sin x \end{vmatrix}=$$

$$=x^2\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-2\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}x\sin xdx-\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)^2=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx, \\ dv=\sin xdx, & v=-\cos x \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{9\pi^2}{4}-2\left(-x\cos x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}+\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos xdx\right)-\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)^2=\frac{9\pi^2}{4}+4\pi-$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює:

$$\sigma(X)=\sqrt{DX}\ .$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx\sqrt{0{,}142}\approx 0{,}377.$$

в) графіки функцій $F\ \ x$ та $f\ \ x$ зображені на рисунках 1, 2.

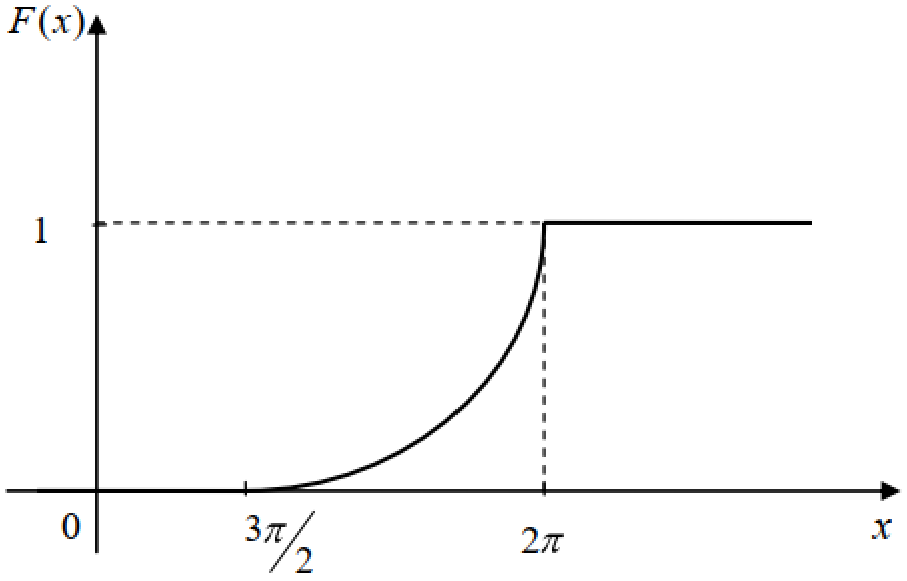

Рис.1. Графік функції $F\ x$

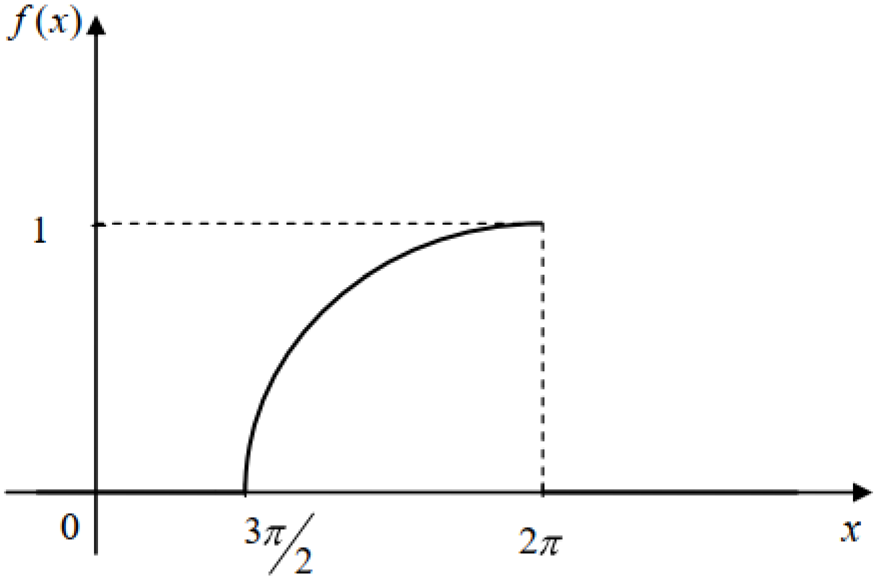

Рис.2. Графік функції $f\ x$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. *Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К.* Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Київ: ЦУЛ, 2019. 448 с.
2. *Бобик О. І., Берегова Г. І., Копитко Б І.* Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Київ: Професіонал, 2017. 560 с.
3. *Васильків І. М.* Теорія ймовірностей і математична статистика. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2020.
4. *Кармелюк Г. І.* Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібник з розв'язування задач . Київ: Центр учбової літератури, 2019. 575 с.
5. *Тріщ Б.М.* Методичні рекомендації до вивчення курсу "Теорія ймовірностей і математична статистика. Випадкові події" для студентів економічного факультету. Львів, ЛНУ імені Івана Франка. 2017.
6. *Тріщ Б.М.* Методичні рекомендації до вивчення курсу "Теорія ймовірностей і математична статистика. Перевірка статистичних гіпотез" для студентів економічного факультету. Львів, ЛНУ імені Івана Франка. 2020.
7. *Юрченко М.Є.* Теорія ймовірностей. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи студентів спеціальності 051 «Економіка» освітня програма «Економічна кібернетика», «Економічна аналітика», «Економіка підприємства», 071 «Облік і оподаткування» освітня програма «Облік і оподаткування». Чернігів: ЧНТУ, 2018. 139 с.
8. *Юрченко М.Є.* Знаходження ймовірності банкрутства страхової компанії за стохастичних страхових виплат. *Економічний вісник Запорізької державної інженерної академії*. Запоріжжя, 2018. №3. С. 157-160.
9. *W. Feller*. An Introduction to probability. London: Willey Media, 2018. 276 p.
10. *Brigo, D., Mercurio, F*. Interest rate models – Theory and Practice. Springer. 2015. 507 p.

Допоміжна

11. *Голомозий В.В.* Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч.посіб. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2015. 366 с.
12. *Юрченко М.Є., Акименко А.М.* Оптимізація моменту поставок з урахуванням ймовірнісних факторів. *Науковий вісник Ужгородського національного університету.* Ужгород, 2017. №13. С. 5-7.
13. *Ross L.* First Course in Probability. London press, 2016. 385 p.
14. *Kai Lai Chung*. A course in Probability Theory. London, 2021. 298 p.

Інформаційні ресурси

1. Теорія імовірностей і математична статистика: *система дистанційного навчання НУ «Чернігівська політехніка».* URL: https://eln.stu.cn.ua/course/view.php?id=4206
2. Офіційний сайт бібліотеки ім. В. Вернадського. URL: http://nbuv.gov.ua/
3. Офіційний сайт Наукової бібліотеки НУ «Чернігівська політехніка». URL: http://library2.stu.cn.ua/

ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. У філії банку працюють п`ятнадцять співробітників, три з яких не мають потрібної кваліфікації. Скільки можна скласти списків по восьми співробітниках.

2. Яка ймовірність того, що при випадковому розміщенні кубиків у ряд, на гранях яких написано по одній із букв а,г,и,л,м,о,р,т, вийде слово "алгоритм"

3. Два стрільці роблять по одному пострілу у ціль. Імовірність влучення у ціль першим стрільцем дорівнює 0,6, а ймовірність влучення у ціль другим стрільцем дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що у ціль буде влучено

- першим стрільцем.
- жоден не влучів

4. Імовірність випуску ламп із дефектом дорівнює 0,08. Знайти ймовірність того, що серед 1000 ламп відхилення від зазначеного відсотка браку не перевищить 0,01.

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ 1 + C\sin x, \ -\dfrac{\pi}{2} < x \le 0 \\ 1, \ \ x > 0 \end{cases}$$

$a = -\pi/4, b = 0$

Варіант 2

1. Скількома способами 7 осіб можуть стати в чергу до каси?

2. У колекції нумізмата 200 монет, серед яких 25 монет XIX ст. Яка ймовірність того, що навмання вибрана монета датована не XIX ст.?

3. Два стрільці роблять по одному пострілу у ціль. Імовірність влучення у ціль першим стрільцем дорівнює 0,5, а ймовірність влучення у ціль другим стрільцем дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що у ціль буде влучено

- другим стрільцем.

- оба влучили

4. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Імовірність розриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини нитка обірветься на п'ятьох веретенах.

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$;

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; x \le 1 \\ C\ln x, \; 1 < x \le 2 \\ 1, \; x > 2 \end{cases}$$

$a = 1{,}2, \; b = 1{,}4$

$P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

Варіант 3

1. Студенту необхідно протягом 8 днів скласти 4 екзамени. Скількома способами це можна зробити?

2. У коробці 4 червоних і 6 зелених олівців. Із коробки випало 3 олівці. Знайти ймовірність того, що 2 із них червоні.

3. Екзаменаційний білет містить три питання. Імовірності того, що студент дасть відповідь на перше і друге питання, однакові і дорівнюють 0,5, на третє – 0,4. Знайти ймовірність того, що студент здав екзамен, якщо для цього необхідно відповісти:

- на всі три питання;

- на 2 питання;

4. Схожість насіння пшениці дорівнює 95%. Знайти ймовірність того, що з 2000 посіяних зерен пшениці не проростуть від 80 до 120 зерен.

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; x \le 1 \\ Cx^2 - \dfrac{1}{3}, \; 1 < x \le 2 \\ 1, \; x > 2 \end{cases}$$

$a = 1{,}3, \; b = 1{,}4$

Варіант 4

1. Чотири учні одержують оцінки 2, 3, 4, 5. Скількома способами можна поставити оцінки так, щоб усі одержали 4 або 5?

2. Із 10 лотерейних білетів є 2 виграшних. Знайти ймовірність того, що серед взятих наугад 5 білетів буде: а) один виграшний; б) обидва виграшні;

3. Із урни, в якої 10 білих і 5 чорних куль 6 раз навмання виймають по одній кулі, не повертаючи їх назад. Яка ймовірність того, що серед них буде 4 білих і 2 чорних ?

4. Імовірність виявлення нестандартного виробу дорівнює 0,005. Чому дорівнює ймовірність того, що з 10000 навмання відібраних виробів нестандартних виявиться 40?

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; x \le 2 \\ C(x-2,)^{3/2}, \;\; 2 < x \le 4 \\ 1, \;\; x > 4 \end{cases}$$

$a = 3, b = 3{,}5$

Варіант 5

1. У класі 40 учнів. Скількома способами можна в ньому вибрати старосту і його заступника?

2 Підкидають 4 гральних кубика. Знайти ймовірність того, що на всіх кубиках випаде однакове число очок.

3. Екзаменаційний білет містить три питання. Імовірності того, що студент дасть відповідь на перше і друге питання, однакові і дорівнюють 0,6, на третє – 0,9. Знайти ймовірність того, що студент здав екзамен, якщо для цього необхідно відповісти:

- на всі три питання;
- в крайньому разі і на два питання білета.

4. Стрілок зробив 4 постріли по мішені. Імовірність влучення при кожному пострілі постійна і дорівнює $p = 0{,}6$. Знайти ймовірність того, що буде хоча б одне влучення у мішень.

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ Cx^3, \ \ 0 < x \le 1 \\ 1, \ \ x > 1 \end{cases}$$

$a = 0{,}5, \ b = 0{,}7$

Варіант 6

1. Скількома способами можна розмістити 6 ліхтарів у новорічній гірлянді?

2. Кожна з букв А, У, К, С, З записані на одній із 5-ти карток. Картки розкладаються в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що при цьому утворюється слово КАЗУС

3. Екзаменаційний білет містить три питання. Імовірності того, що студент дасть відповідь на перше і друге питання, однакові і дорівнюють 0,9, на третє – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент здав екзамен, якщо для цього необхідно відповісти:

- на всі три питання;

- в крайньому разі і на два питання білета.

4. Автопарк нараховує 12 автомашин. Імовірність виходу на маршрут кожної з них дорівнює $p = 0{,}8$. Знайти ймовірність нормальної роботи автопарку, якщо для цього на маршруті необхідно мати не менш 8 автомашин.

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 1 \\ Cx - 1, \ \ 1 < x < 2 \\ 1, \ \ x > 2 \end{cases}$$

$a = 1{,}1, \ b = 1{,}2$

Варіант 7

1. Скількома способами можуть розподілитися місця між десятьма футбольними командами, якщо «Динамо» і «Шахтар» зайняли перші два місця?

2. Яка ймовірність виграшу у лотерею «СПОРТЛОТО» 5 з 36?

3. Механік обслуговує три сівалки. Відомо, що ймовірність безперебійної роботи впродовж однієї доби після налагодження дорівнює для першої сівалки 0,7, для другої – 0,8 і для третьої – 0,9. Знайти ймовірність того, що

- за цей час лише одна сівалка зіпсується і потребуватиме втручання механіка.

- дві сівалки зіпсуються

4. Завод відправив на базу 500 якісних виробів. Ймовірність пошкодження при транспортуванні кожного виробу дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що буде пошкоджено: 1) 3 вироби; 2) менше трьох виробів;

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; x \le 1 \\ Cx^2 - \frac{1}{3}, \; 1 < x \le 2 \\ 1, \; x > 2 \end{cases}$$

$a = 1{,}3,\; b = 1{,}4$

Варіант 8

1. Скількома способами 12 осіб можуть стати в чергу до каси?
2. У групі 15 студентів, серед яких 8 відмінників. Навмання вибрано 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед вибраних студентів буде 6 відмінників.

3. Господарством послано автомашину за різними запчастинами до тракторів на чотири бази. Імовірність наявності потрібної запчастини на першій базі дорівнює 0,9, на другій – 0,95,на третій – 0,8, на четвертій – 0,6. Знайти ймовірність того, що

- лише на одній базі не виявиться потрібної запчастини.

- на всіх базах не виявиться потрібної

4. В зону аеродрому входять 6 літаків. Ймовірність правильного (такого, що не потребує втручання диспетчера) заходу на посадку кожного літака дорівнює 0,85. Знайти найбільш ймовірне число літаків, для яких буде необхідна допомога диспетчера, та обчислити цю найбільшу ймовірність.

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; x \le 0 \\ Cx^3, \; 0 < x \le 1 \\ 1, \; x > 1 \end{cases}$$

$a = 0{,}5,\; b = 0{,}7$

Варіант 9

1. Людина має 10 друзів і протягом декількох днів запрошує двох із них у гості так, що кожен побував у неї в гостях тільки один раз. Скільки різних варіантів зустрічей вона може скласти?

2. Маємо тринадцять однакових карток: Е Е А А Е І П Л Л Д Р П П , які навмання розкладають у рядок. Яка ймовірність того, що при цьому дістанемо слово «паралелепіпед».

3. Два стрільці роблять по одному пострілу у ціль. Імовірність влучення у ціль першим стрільцем дорівнює 0,8, а ймовірність влучення у ціль другим стрільцем дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що у ціль буде влучено

- або першим або другим стрільцем.
- жоден не влучів

4. Ймовірність того, що студент запізниться на пару, дорівнює 0,04. Знайти ймовірність того, що з 50 студентів запізниться: 1) четверо; 2) не більше 4;

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; x \le 1 \\ Cx - 1, \; 1 < x < 2 \\ 1, \; x > 2 \end{cases}$$

$a = 1{,}5,\ b = 1{,}8$

Варіант 10

1. На зборах мають виступати 5 чоловік — А, Б, В, Г і Д. Скількома способами їх можна розподілити, якщо: А повинен виступати перед Б;

2. З 10 книг, що стоять на книжковій полиці, – 3 книги із статистики. Знайти ймовірність того, що вони стоять поруч.

3. Імовірність встановлення у даній місцевості тривалого снігового покриття з листопада дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що в найближчі два роки в цій місцевості тривале снігове покриття з листопада

- не встановиться жодного разу

- буде тільки 1 рік

4. Радіостанція передає 6 повідомлень для екіпажу пароплава. Ймовірність прийому кожного повідомлення 0,6. 1) Знайти найбільш ймовірну кількість прийнятих повідомлень. 2) Знайти ймовірність того, що буде прийнято не менше 4 повідомлень.

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 1 \\ C(x^2 - x), \ 1 < x \le 2 \\ 1, \ \ x > 2 \end{cases}$$

$a = 1{,}3,\ b = 1{,}6$

Варіант 11

1. У кондитерському магазині є тістечка чотирьох видів: заварні, пісочні, «наполеон» і «корзинка». Скількома способами можна купити в ньому 10 тістечок?

2. У класі 25 учнів, з яких 7 цікавляться математикою, 10 — економічними дисциплінами, 8 — літературою. Знайти ймовірність того, що 2 навмання вибраних учня цікавитимуться однією дисципліною.

3. Із урни, в якої 10 білих і 5 чорних куль 6 раз навмання виймають по одній кулі, не повертаючи їх назад. Яка ймовірність того, що серед них буде 4 білих і 2 чорних ?

4. За даними аеропорту в листопаді в зв'язку з метеоумовами відкладається 10% рейсів. Знайти ймовірність того, що з 400 рейсів, запланованих на цей місяць, буде відкладено: а) 50 рейсів; б) від 30 до 50 рейсів;

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le -1 \\ C(x+1)^3, \ \ -1 < x \le 3 \\ 1, \ \ x > 3 \end{cases}$$

$a = 0, b = 2$

Варіант 12

1. Скількома способами можна розбити 15 осіб на три команди по 5 осіб у кожній?

2. Знайти ймовірність того, що вибране випадковим чином двозначне число ділиться на:а) 3; б) 5.

3. У механізм входять три однакові деталі. Робота механізму порушується, якщо при його складанні будуть встановлені всі деталі, більші або менші позначеного на кресленні розміру. У складальника залишилось 15 деталей, 4 з яких за розміром більші, решта – менші за потрібні. Знайти ймовірність ненормальної роботи першого зібраного з цих деталей механізму, якщо складальник бере деталі навмання.

4. При транспортування пошкоджується в середньому 0,03% скляних виробів. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні 1000 виробів буде пошкоджено: а) рівно 4 вироби; б) хоча б один виріб;

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le -4 \\ C(x+4), \ \ -4 < x \le 0 \\ 1, \ \ x > 0 \end{cases}$$

$a = -1, b = -0{,}5$

Варіант 13

1. В одного учня є 7 книг з історії культури, а в іншого — 5 книг з філософії. Скількома способами вони можуть обміняти дві книги одного на дві книги іншого?

2. З 10 книг, що стоять на книжковій полиці, – 2 книги із статистики. Знайти ймовірність того, що вони стоять поруч.

3. Екзаменаційний білет містить три питання. Імовірності того, що студент дасть відповідь на перше і друге питання, однакові і дорівнюють 0,9, на третє – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент здав екзамен, якщо для цього необхідно відповісти:

- на всі три питання;

- в крайньому разі і на два питання білета.

4. При транспортування пошкоджується в середньому 0,05% скляних виробів. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні 1000 виробів буде пошкоджено: а) рівно 3 вироби; б) не більше трьох виробів;

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ C\sqrt{2x}, \ \ 0 < x \le 8 \\ 1, \ \ x > 8 \end{cases}$$

$a = 1, b = 2$

Варіант 14

1. Скількома способами можна розставити в шеренгу 5 дівчат і 7 юнаків, щоб усі дівчата стояли скраю?

2. Є колода із 36 карт. Скількома способами можна витягнути 8 карт так, щоб було рівно два тузи;

3. Токар обслуговує 3 верстати. Імовірність того, що впродовж години потребує налагодження перший верстат дорівнює 0,6; імовірність того, що потребує налагодження другий верстат – 0,8 і для третього – 0.7. Знайти ймовірність того, що впродовж години принаймні

- один верстат потребуватиме налагодження
- біль, ніж один

4. Прилад складається з 4 незалежно працюючих елементів. Ймовірність безвідмовної роботи кожного елемента на протязі часу t дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що за час t будуть безвідмовно працювати: а) всі елементи; б) хоча б один елемент;

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 1 \\ Cx^2 - \frac{1}{3}, \ 1 < x \le 2 \\ 1, \ \ x > 2 \end{cases}$$

$a = 1{,}3, \ b = 1{,}4$

Варіант 15

1. На фермі є 20 овець і 24 свині. Скількома способами можна вибрати одну вівцю й одну свиню? Якщо такий вибір уже зроблено, скількома способами його можна зробити ще раз?

2. У коробці 4 червоних і 6 зелених олівців. Із коробки випало 3 олівці. Знайти ймовірність того, що 2 із них червоні.

3. У ящику 50 електричних ламп, з яких 2 нестандартні. Беремо навмання 3 лампи одночасно або послідовно без повернення. Яка ймовірність того, що

- всі три лампи нестандартні?
- дві лампи нестандартні

4. Ймовірність закриття аеропорту на добу у зв’язку з метеоумовами в осінньозимовий період дорівнює 0,15. Знайти ймовірність того, що в цей період аеропорт буде закрито: а) на 30 діб; б) не більше ніж на 20 діб;

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0\\ Ce^{x} \ 0<x<2\\ 1, \ \ x>2\end{cases}$$

$a=1, b=2$

Варіант 16

1. У букеті 10 троянд і 12 хризантем. Скількома способами можна вибрати із букета: а) або одну троянду, або одну хризантему; б) одну троянду або одну хризантему; в) одну троянду й одну хризантему?

2. У коробці 13 червоних і 6 зелених олівців. Із коробки випало 4 олівці. Знайти ймовірність того, що 2 із них червоні.

3. Контролер перевіряє зерно на вологість. Імовірність того, що зерно вологе, дорівнює 0,2 .Знайти ймовірність того, що

- з двох перевірених вантажних машин лише одна з вологим зерном.
- жодне не з вологим

4. Автопарк маршрутних таксі має 12 автомобілів одного типу. Ймовірність готовності кожного автомобіля до рейса дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопарку на найближчий день, якщо для цього необхідно мати готовими до рейсу: а) 8 автомобілів; б) не менше 8 автомобілів.

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C=const$; $P(a<x<b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

14. $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0\\ C\sqrt{2x}, \ \ 0<x\le 8\\ 1, \ \ x>8\end{cases}$

$a=1, b=2$

Варіант 17

1. У магазині посуду є 5 видів чашок і 7 видів блюдець. Скількома способами можна вибрати пару блюдець і чашку?

2. У коробці 15 червоних і 9 зелених олівців. Із коробки випало 2 олівці. Знайти ймовірність того, що 1 із них червоні.

3. На складі зберігається продукція з трьох партій, відомо, що з I партії 90% продукції відповідає стандарту, з II партії – 80%, з III партії – 85%. З кожної партії обрано по одиниці продукції. Знайти ймовірність того, що всі три одиниці стандартні.

4. Фабрика виготовляє 75% продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що з 300 виробів, виготовлених на фабриці, кількість першосортних буде: а) не менше 250; б) від 220 до 235;

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le -2 \\ Cx + 2, \ -2 < x < 5 \\ 1, \ x > 5 \end{cases}$$

$a = 1{,}1,\ b = 2$

Варіант 18

1. Скількома способами з десяти осіб можна вибрати комісію з чотирьох осіб.

2. Серед 100 електроламп 5 зіпсованих. Яка ймовірність того, що взяті навмання 3 лампи будуть справними?

3. Два орендарі підготували свої ділянки до сівби. Імовірність того, що перший засіє свою ділянку гречкою дорівнює 0,8, для другого орендаря ця ймовірність дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що

- один орендар засіє свою ділянку гречкою.
- не більш, ніж один

4. В осіннє-зимовий період регулярність авіарейсів становить 90%. Яку кількість рейсівпотрібнозаплануватинацейперіод,щобзймовірністю0,96виконатинеменше 1500 рейсів?

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x\le -4\\ C(x+4), \ \ -4<x\le 0\\ 1, \ \ x>0\end{cases}$$

$a=-1, b=-0{,}5$

Варіант 19

1. Скільки парних чотиризначних чисел, що складаються з цифр 2,3,5,7 можна одержати, якщо повторення цифр у числах заборонені.

2. Із 60 екзаменаційних питань студент підготовив 50. Яка ймовірність того, що із 3-х питань він знає 2 ?

3. Два мисливці стріляли у вовка. Імовірність влучення при одному пострілі для першого мисливця дорівнює 0,8, а для другого – 0,85. Знайти ймовірність того, що в одному залпі у вовка влучить

- лише один із стрільців;
- більш, ніж один

4. Телефонна станція обслуговує 2000 абонентів. Ймовірність того, що деякий абонент зателефонує на станцію на протязі години, дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що на протязі години на телефонну станцію зателефонує: а) 5 абонентів; б) не більше трьох абонентів.

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C=const$; $P(a<x<b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x\le -1\\ C(x+1)^3, \ \ -1<x\le 3\\ 1, \ \ x>3\end{cases}$$

$a=0, b=2$

Варіант 20

1. Скількома способами можна розмістити дванадцять гостей за столом, біля якого стоять дванадцять стільців.

2 . Із 70 екзаменаційних питань студент підготовив 60. Яка ймовірність того, що із 4-х питань він знає 3 ?

3. Для сигналізації про аварію встановлено два сигналізатори, що працюють незалежно. Імовірність того, що при аварії спрацює перший сигналізатор, дорівнює 0,8, другий – 0,95. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює

- лише один сигналізатор;
- більш, ніж один,

4. Ймовірність того, що пасажир, що звернувся в авіакасу, замовить білет в пункт N, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що з 100 пасажирів, що звернулись в касу, білет до пункту N замовлять: а) менше 15 чоловік; б) від 5 до 12 чоловік;

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти $C = const$; $P(a < x < b)$; $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; x \le 1 \\ \frac{1}{\pi}(x - C\sin 2x), \; 1 < x < \pi \\ 1, \; x > \pi \end{cases}$$

$a = 1, b = \pi/2$

ДОДАТОК А

Приклад титульної сторінки

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЧЕРНІГІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
ННІ ЕКОНОМІКИ

Кафедра бухгалтерського обліку, оподаткування та аудиту

Розрахунково робота

з дисципліни
«**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА**»

Варіант ____

Виконав(ла):
ЗВО групи __-___

____
(прізвище та ініціали)

____
(дата виконання)

Перевірив(ла):
к.ф.-м..н., доц. Юрченко М.Є.

Чернігів, 20___

Я, ______________________________________, підтверджую, що дана робота є моєю власною письмовою роботою, оформленою з дотриманням цінностей та принципів етики і академічної доброчесності відповідно до Кодексу академічної доброчесності Національного університету «Чернігівська політехніка». Я не використовував/ла жодних джерел, крім процитованих, на які надано посилання в роботі.

ДОДАТОК В

Значення локальної функції Лапласа

x	Соті частини									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061

x	Соті частини									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

ДОДАТОК С

Значення інтегральної функції Лапласа

x	Соті частини									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

x	Соті частини									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,5	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
5,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000