МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Чернігівська політехніка»

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Модуль1

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика»
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 071 «Облік і оподаткування», 072 «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок», 051 «Економіка»

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри АТ та ГМ,
протокол № 3 від 16.03. 2023р.

Чернігів 2023

Лінійна алгебра. Модуль1. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 071 «Облік і оподаткування», 072 «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок», 051 «Економіка» / Укл.: Корнієнко С.П., Мурашковська В.П. – Чернігів: НУ «Чернігівська політехніка», 2023. – 56с.

Укладачі: Корнієнко Світлана Петрівна, кандидат технічних наук, доцент
Мурашковська Віра Петрівна, старший викладач

Відповідальний за випуск: Кальченко Віталій Іванович, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, професор, доктор технічних наук

Рецензент: Венжега Володимир Іванович – доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування

Зміст

ВСТУП

Дане видання являє собою методичні вказівки для вивчення загального курсу вищої математики, яка вивчається на першому курсі студентами економічних спеціальностей.

Ці методичні вказівки укладені у відповідності до Навчальної програми з дисципліни «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 071 «Облік і оподаткування», 072 «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок», 051 «Економіка».

В методичних вказівках до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» модуль 1 розглянуто розділи „Системи лінійних рівнянь", "Визначники. Матриці", які відповідають змістовому модулю 1 з дисципліни "Вища математика" для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 071 «Облік і оподаткування», за спеціальністю 072 «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок», за спеціальністю 051 Економіка»
денної та заочної форм навчання.

Наведено теоретичні відомості, приклади розв'язання задач та задачі до аудиторної та самостійної роботи.

Основне завдання цих методичних вказівок – надати студентам теоретичну та практичну допомогу в самостійній роботі по вивченню розділів модуля 1 „Системи лінійних рівнянь", "Визначники. Матриці" з дисципліни «Вища математика».

Методичні вказівки містять систематично підібрані задачі та вправи з розділу «Лінійна алгебра». Після вивчення цього розділу студент повинен вміти:
1) виконувати лінійні операції над матрицями, множення матриць;
2) обчислити обернену матрицю;
3) обчислити визначник та ранг матриці різними методами;
4) розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера, методом Гауса, методом оберненої матриці;
5) дослідити систему за теоремою Кронекера-Капеллі.

Методичні вказівки можуть бути використані під час аудиторних занять, як довідковий матеріал та в якості задачника при проведенні самостійних та модульно-тестових робіт.

I
Системи лінійних рівнянь

1.1. Основні поняття теорії СЛАР

Системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (скорочено СЛАР) називається система вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{1}$$

де a_{ij} – коефіцієнти при невідомих змінних (довільні дійсні числа), індекс i вказує номер рівняння в яке входить коефіцієнт a_{ij}, індекс j – номер змінної, біля якої стоїть цей коефіцієнт;

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ — невідомі змінні;

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ — вільні члени (довільні дійсні числа).

Число рівнянь m може бути більше, менше або дорівнювати числу змінних n.

Приклад:

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 8x_4 = 3 \\ -6x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 7x_4 = -2 \end{cases}.$$

Ця система складається з трьох рівнянь з чотирма невідомими. Тут, наприклад, $a_{32} = -4$ (це число, яке знаходиться в третьому рівнянні біля другої невідомої), $a_{22} = -1$, $a_{31} = -6$, $a_{34} = -7$, $b_2 = 3$. Коефіцієнта a_{42} в цій системі немає, адже в системі немає четвертого рівняння.

Випишемо коефіцієнти системи при невідомих змінних в прямокутну таблицю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Цю таблицю називають *матрицею коефіцієнтів системи*.

Якщо до матриці коефіцієнтів приєднати стовпчик вільних членів, то одержимо *розширену матрицю системи лінійних рівнянь*:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Упорядкований набір n дійсних чисел (k_1; k_2; ...; k_n) називається *розв'язком* системи лінійних рівнянь (1), якщо при заміні x_1 на k_1, x_2 на k_2, ... x_n на k_n в кожному з рівнянь системи, дістанемо n правильних числових рівностей.

Система, яка має хоча б один розв'язок, називається *сумісною*, а яка не має жодного розв'язку — *несумісною.*

Якщо сумісна система має єдиний розв'язок то вона називається *визначеною*.

Якщо сумісна система має більше одного розв'язку (а, як побачимо далі, безліч розв'язків), то система називається *невизначеною*.

Приклади:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$, єдиний розв'язок (1; 2) — система сумісна, визначена;

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases}$, будь-яка пара вигляду (k; 4-k) де $k \in$ R є розв'язком цієї системи, отже це сумісна, невизначена система;

$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases}$, система не має розв'язків — не сумісна система.

СЛАР називається *однорідною*, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю; якщо хоча б один із її вільних членів відмінний від нуля, то система називається *неоднорідною*.

$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$ однорідна система, $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ 5x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ неоднорідна система.

Виявляється, що однорідна система завжди сумісна. Дійсно, за будь-яких умов вона має нульовий розв'язок (0, 0, ...,0). Цей розв'язок називають тривіальним (очевидним).

1.2. Види систем лінійних рівнянь

Прямокутна:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

Трикутна

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

Трапецієподібна

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{23}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases}$$

1.3. Елементарні перетворення СЛАР

Системи лінійних рівнянь називаються *еквівалентними* або *рівносильними*, якщо множини їх розв'язків співпадають.

Приклади:

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ — СЛАР не має розв'язків, $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$ — СЛАР не має розв'язків.

Отже, ці дві системи еквівалентні. Наступні дві системи також еквівалентні (кожна з них має єдиний розв'язок (1; 1)).

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$, $\qquad\qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$.

А системи $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ та $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$ не еквівалентні, хоча у них є спільний розв'язок (1; 1). Чому це так? Тому, що друга система має такі розв'язки, які не є розв'язками першої системи, зокрема (0, -1); (2, 3) тощо.

Елементарними перетвореннями системи лінійних рівнянь називають: 1) переставлення рівнянь; 2) множення обох частин рівняння на одне й те ж саме число, що не дорівнює нулю; 3)додавання до обох частин якого–небудь рівняння відповідних частин якого–небудь іншого рівняння, помноженого на довільне число.

Теорема 1.

Елементарні перетворення СЛАР зводять її до рівносильної СЛАР.

Доведення: Для спрощення записів розглянемо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{2}$$

і доведемо теорему для елементарного перетворення 3). Для перетворень 1) і 2) доведення проводиться аналогічно.

Застосуємо, наприклад, до другого рівняння цієї системи елементарне перетворення 3):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) = b_2 + \lambda b_1 \end{cases} \tag{3}$$

Нам треба довести рівносильність систем (2) і (3), тобто показати що множини їх розв'язків співпадають.

Для цього достатньо довести що, якщо (k_1, k_2) – довільний розв'язок системи (2), то він також буде розв'язком (3), і навпаки, якщо (t_1, t_2) – довільний розв'язок системи (3), то він буде розв'язком системи (2). Доречи, з цих фактів буде випливати, що якщо одна з систем (2) або (3) несумісна, то і друга також несумісна. Продумайте цей момент.

Отже, нехай (k_1, k_2) – розв'язок системи (1), тоді:

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 = b_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 = b_2 \end{cases} \text{— правильні числові рівності.}$$

Помножимо першу числову рівність на число λ і додамо до другої:

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 = b_1, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \lambda\left(a_{11}k_1 + a_{12}k_2\right) = b_2 + \lambda b_1. \end{cases} \tag{4}$$

Одержані правильні числові рівності (4) означають, що пара (k_1, k_2) є розв'язком системи (3).

Навпаки.

Нехай (t_1, t_2) – довільний розв'язок системи (3), тоді:

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 = b_1, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \lambda\underbrace{\left(a_{11}k_1 + a_{12}k_2\right)}_{b_1} = b_2 + \lambda b_1, \end{cases}$$

або,

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 = b_1 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow (t_1, t_2) \text{ – розв'язок системи (2).}$$

Теорема доведена.

1.4. Метод Гауса (або метод послідовного виключення невідомих) розв'язування систем лінійних рівнянь

Метод Гауса виключення змінних полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень дана система перетворюється на рівносильну їй систему, але простішого вигляду (трикутного або трапецієподібного), з якої розв'язки системи видно безпосередньо.

Метод Гауса складається з двох етапів: прямий хід і обернений хід.

Отже, нехай нам дано систему m рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 & (3) \\ ------------------- & (\ldots) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{cases}$$

I. Прямий хід.

Якщо в першому рівнянні відсутня змінна x_1, тобто $a_{11} = 0$, то поміняємо місцями рівняння системи так, щоб $a_{11} \neq 0$.

Якщо в системі є рівняння з $a_{j1} = 1$, краще, для полегшення подальших обчислень, поставити його на перше місце.

Тепер помножимо перше рівняння системи на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ і додамо до другого: (1) $\times\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ + (2). Потім: (1) $\times\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ + (3), (1) $\times\left(-\frac{a_{41}}{a_{11}}\right)$ + (4), ... (1) $\times\left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}\right)$ + (m). Цими діями ми виключимо невідому x_1 з усіх рівнянь крім першого. Система набуде вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 & (2') \\ \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 & (3') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \qquad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m & (m') \end{cases}$$

Розглянемо далі групу рівнянь (2′), (3′), … ,(m'). Виконаємо з ними ті самі дії що і з початковою системою (рівняння (1) залишається без змін!). Тільки тепер роль рівняння (1) буде грати рівняння (2′), а роль змінної x_1 і коефіцієнта при ньому відповідно x_2 і a'_{22}. В результаті ми виключимо невідому x_2 з усіх рівнянь крім першого і другого. Система набуде вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 & (2') \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3 & (3'') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \qquad\qquad a''_{m3}x_3 + \ldots + a''_{mn}x_n = b''_m & (m'') \end{cases}$$

Розглянувши тепер рівняння (3″), … ,(m''), виключимо змінну x_2 з усіх рівнянь крім першого, другого і третього. І так далі, доки виключимо змінну x_{m-1} із останнього рівняння.

II. Обернений хід.

Після виконання прямого ходу можливі три наступні випадки:

1. Одержали трикутну систему (кількість рівнянь системи дорівнює кількості невідомих $m = n$). В цьому випадку система визначена, тобто має єдиний розв'язок.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 & (2') \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3 & (3'') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \qquad\qquad\qquad \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n & (\bar{n}) \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо $x_n = \dfrac{\bar{b}_n}{\bar{a}_{nn}}$. Знайдене x_n підставляємо в передостаннє рівняння і знаходимо x_{n-1} і т. д. З першого рівняння знаходимо x_1.

<u>Приклад:</u>

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -12\,. \end{cases}$$

Оскільки змінні в елементарних перетвореннях не беруть участі, їх на деякий час залишають осторонь і виконують перетворення над коефіцієнтами і вільними членами системи, реалізуючи їх у вигляді таблиці (розширеної матриці системи) точно так, як вони розміщені у системі.

Розширена матриця даної системи має вигляд:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & -12 \end{array}\right),$$

де вертикальною рискою відокремлені вільні члени системи. Тепер задача зводиться до того, щоб за допомогою елементарних перетворень матрицю системи, розміщену ліворуч від вертикальної риски, привести до трикутного вигляду. При цьому доцільно зауважити, що над вільними членами виконують такі самі операції.

Над матрицею B виконуємо послідовно такі перетворення (прямий хід):

1) додаємо до елементів другого, третього, четвертого рядків відповідні елементи першого рядка, помножені послідовно на –2, –3, і 5;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 16 & -10 & 11 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 & 3 \end{array}\right)$$

2) скорочуємо елементи другого рядка на 5 і, помноживши їх послідовно на –8 і 12, додаємо до відповідних елементів третього та четвертого рядків;

3) елементи третього рядка, помножені на 3, додамо до елементів

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & -9 \end{array}\right)$$

четвертого рядка.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

У результаті дістали систему лінійних рівнянь, рівносильну вихідній системі:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3, \\ \quad\; 2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ \quad\quad - 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ \quad\quad\quad 2x_4 = 6. \end{cases}$$

З добутої системи послідовно знаходимо (обернений хід): x_4=3, x_3=2, x_2=–1, x_1=1.

2. Одержали трапецієподібну систему (кількість рівнянь менше кількості невідомих $m<n$). В цьому випадку система невизначена, тобто має безліч розв'язків. Змінні x_1, x_2, ..., x_m (називаються *головними змінними*) виражаються через змінні x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n (*вільні змінні*). Надаючи вільним змінним довільних числових значень одержимо всі розв'язки системи.

Приклад:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 0. \end{cases}$$

Як і в попередньому прикладі, виконуючи над розширеною матрицею системи елементарні перетворення, дістанемо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 4 & 14 & 38 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Останній матриці відповідає система:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ \quad 2x_2 + 7x_3 + 19x_4 = -7. \end{cases}$$

Змінні x_1 та x_2 тут є головними, а x_3 та x_4 - вільними. Як бачимо, система має трапецієподібну форму. Для знаходження її розв'язків виразимо x_1 та x_2 через x_3 та x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 + 3x_4 + 2, \\ \quad 2x_2 = -7x_3 - 19x_4 - 7. \end{cases}$$

Остаточно, множина розв'язків досліджуваної системи визначається рівностями

$$x_1 = -\frac{5x_3 + 13x_4 + 3}{2}, \qquad x_2 = -\frac{7x_3 + 19x_4 + 7}{2}.$$

Надаючи вільним змінним довільних значень отримаємо відповідні значення головних змінних. Наприклад, якщо $x_3 = x_4 = 0$, то $x_1 = -1{,}5$;

$x_2 = -3{,}5$; $x_3 = x_4 = 0$ – один з розв'язків досліджуваної системи.

3. У результаті елементарних перетворень в розширеній матриці дістали рядок в якому всі елементи зліва від вертикальної риски дорівнюють нулю, а елемент, що стоїть справа, відмінний від нуля. Цей рядок буде відповідати такому рівнянню:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_k \neq 0 \quad \text{або} \quad 0 = b_k \neq 0.$$

Зрозуміло, що це рівняння не має розв'язків. Отже, в цьому випадку система буде несумісною (не має жодного розв'язку).

II
Елементи теорії матриць. Визначники квадратних матриць

2.1. Поняття матриці, види матриць

Як вже зазначалось при вивченні систем лінійних рівнянь, *матрицею* ми називаємо прямокутну таблицю чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – матриця розмірності } m \times n.$$

<u>Приклад:</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ – матриця розмірності 4×5.

Матриці *A* і *B* мають однакові розміри, якщо у них однакова кількість рядків і однакова кількість стовпців.

Матриці *A* і *B* називаються *рівними*, якщо вони мають однакові розміри і їхні елементи, які стоять на однакових місцях рівні. При цьому пишуть $A = B$.

<u>Приклад:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. $A = B$.

Матриця *A* називається *квадратною*, якщо кількість рядків в ній дорівнює кількості її стовпців ($m = n$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Елементи a_{ij}, для яких $i=j$ $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$, утворюють *головну діагональ* матриці.

Елементи a_{ij}, для яких $i+j=n+1$ $(a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \ldots, a_{n1})$, утворюють *другорядну діагональ*.

Квадратна матриця *А* називається *симетричною*, якщо $a_{ij}=a_{ji}$.

<u>Приклад:</u>
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 9 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю називається *діагональною*:
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі є одиниці називається *одиничною*:
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}=E$$

Матриця, що складається з одного рядка $(m=1)$ називається *вектор-рядком.*
$$A=(a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n})=(a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n)$$

Матриця, що складається з одного стовпця $(n=1)$ називається *вектор-стовпцем.*
$$B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матриця, всі елементи якої – нулі, називається *нульовою матрицею*:
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}=O.$$

2.2. Дії над матрицями

Сумою матриць A і *B* однакової розмірності $m\times n$ називається така матриця C розмірності $m\times n$, елементи якої є сумами відповідних елементів матриць *A* і *B*:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\quad (i=1,\dots,m;\quad j=1,\dots,n).$$

Приклад: $\begin{pmatrix}2&3&4\\1&0&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&5\\7&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5&9\\8&3&7\end{pmatrix}.$

Добутком матриці A на дійсне число λ називається така матриця *B*, кожний елемент якої утворюється множенням відповідного елемента матриці *A* на число λ:

$$b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}\quad (i=1,\dots,m;\quad j=1,\dots,n).$$

Приклад: $3\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3\\0&12\end{pmatrix}$

Добутком рядка $\bar{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ *на стовпець* $\bar{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\...\\b_n\end{pmatrix}$ називається число $c=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$.

Добутком матриці A розмірності $m\times n$ *на матрицю B розмірності* $n\times k$ (тут число стовпців матриці *A* дорівнює числу рядків матриці *B*) називається така матриця *C* розмірності $m\times k$, кожен елемент якої c_{ij} дорівнює добутку *i*-го рядка матриці А на *j*-й стовпець матриці *B*:

$$c_{ij}=\bar{a}_i\cdot\bar{b}_j=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\dots+a_{in}\cdot b_{nj}\quad (i=1,\dots,m;\quad j=1,\dots,k).$$

Приклад:

$$\underset{(2\times 3)}{\begin{pmatrix}2&1&4\\3&5&6\end{pmatrix}}\cdot\underset{(3\times 1)}{\begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix}}=\underset{(2\times 1)}{\begin{pmatrix}C_{11}\\C_{21}\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2\cdot 6+1\cdot 1+4\cdot 3\\3\cdot 6+5\cdot 1+6\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\41\end{pmatrix}.$$

Ще раз звертаємо увагу на те, що операція множення матриць визначена лише для тих матриць, у яких число стовпців першого множника дорівнює числу рядків другого множника: $\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B}=\underset{m\times k}{C}$.

Матрицю, яку отримують з даної матриці A заміною її рядків стовпцями з тими ж самими номерами називають *транспонованою*, її позначають символом A^T.

Приклад: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 4 & -3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & -3 \\ 3 & 9 & 8 \\ 0 & 11 & 6 \end{pmatrix}$.

2.3. Властивості операцій над матрицями

Властивості операцій над матрицями випливають з означень цих операцій та властивостей додавання і множення дійсних чисел.

Для довільних матриць A, B, C однакових розмірів і довільних чисел α і β правильні наступні рівності:

1. $A + B = B + A$,
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$,
3. $A + (-A) = \mathrm{O}$,
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
5. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
6. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,
7. $(A^T)^T = A$,
8. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Для довільних матриць A, B, C , розміри яких узгоджені так (див. означення операції добутку матриць), що існують відповідні добутки, і довільного числа α правильні наступні рівності:

9. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$,
10. $(A + B)C = AC + BC$,
11. $C(A + B) = CA + CB$,
12. $A(BC) = (AB)C$,

13. $(AB)^T = B^T A^T$.

Відмітимо одну важливу особливість множення матриць: на відміну від множення дійсних чисел, операція множення матриць не має властивості комутативності, тобто, в загальному випадку

$$AB \neq BA.$$

Проте, для деяких матриць виконується комутативність: $AB=BA$. В цьому випадку матриці A і B називаються *комутативними* (переставними) або кажуть, що одна з них комутативна (переставна) з другою.

Наприклад, довільна квадратна матриця A комутативна з одиничною матрицею того самого порядку.

14. $AE=EA=A$.

2.4. Поняття визначника

Зразу звертаємо увагу на те, що поняття визначника вводиться тільки для квадратних матриць.

Нехай задана квадратна матриця A n-го порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Визначником квадратної матриці n-го *порядку називається число* $\Delta(A)$, яке визначається наступним чином:

2. якщо $n=1$ (матриця складається з одного елемента $A=(a_{11})$), то

$$\Delta(A) = a_{11},$$

3. якщо $n>1$, то

$$\Delta(A) = a_{11}\cdot\Delta_1 - a_{12}\cdot\Delta_2 + a_{13}\cdot\Delta_3 - a_{14}\cdot\Delta_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_{1n}\cdot\Delta_n, \qquad (5)$$

де Δ_k $(k=1,\ldots,n)$ визначник квадратної матриці $n-1$-го – порядку, утвореної з матриці A шляхом викреслення першого рядка і k-го стовпчика:

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3k-1} & a_{3k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Позначають визначник квадратної матриці A одним з наступних смволів:

$$\Delta(A),\quad \Delta,\quad |A|,\quad \det A \text{ або } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Дане означення визначника матриці називається індуктивним тому, що для $n=1$ означення дається безпосередньо, а при $n>1$ визначник n-го порядку визначається через визначник нижчого ($n-1$-го) порядку.

Випишемо явно формули для обчислення визначників матриць 1-го, 2-го та 3-го порядків.

1) $A=(a_{11})$: $\quad |A|=a_{11}$,

2) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$: $\quad |A|=a_{11}\cdot\Delta_1-a_{12}\cdot\Delta_2=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$,

Отже, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$

3) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$|A|=a_{11}\cdot\Delta_1-a_{11}\cdot\Delta_2+a_{13}\cdot\Delta_3=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$
$$a_{11}(a_{22}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{32})-a_{12}(a_{21}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{31})+a_{13}(a_{21}\cdot a_{32}-a_{22}\cdot a_{31}).$$

Отже,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \tag{6}$$

Як бачимо, формули для обчислення визначників 1-го і 2-го порядків запам'ятати досить легко. А формула для обчислення визначника 3-го порядку виявилась досить складною. Для полегшення її запам'ятання виведене спеціальне правило, яке називають правилом трикутників або правилом Саррюса.

2.5. Правило трикутників (правило Саррюса)

Розкривши дужки в правій частині формули (6), перепишемо її так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\,. \qquad (7)$$

А тепер помітимо, що перші три доданки в правій частині рівності (7) становлять добуток елементів визначника, які взяті по три так, як показано різними пунктирами на приведеній нижче схемі зліва.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(+) (—)

Щоб отримати наступні три доданки правої частини рівності (7), потрібно перемножити елементи визначника по три так, як показано різними пунктирами на тій же схемі справа, після цього в кожного із знайдених добутків замінити знак на протилежний.

Це правило утворення доданків, які входять до виразу правої частини рівності (7), називається *правилом трикутників або правилом Саррюса*.

Приклади:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 4\cdot(-3) = 2 + 12 = 14,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 3 + 2\cdot 6\cdot 4 + (-3)\cdot 0\cdot(-5) - 4\cdot(-1)\cdot(-5) -$$

$$-6\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot(-3)\cdot 3 = -3 + 48 + 0 - 20 - 0 + 18 = 43\,.$$

2.6. Мінор. Алгебраїчне доповнення

Нехай у нас задана квадратна матриця A n-го порядку.

Мінором елемента a_{ij} називається визначник $n-1$-го порядку матриці, утвореної з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпчика. Позначають мінор M_{ij}.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається мінор цього елемента M_{ij} помножений на $(-1)^{i+j}$. Позначають алгебраїчне доповнення

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

<u>Приклад.</u> Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{21}. Маємо, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, тоді

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 3 \cdot 7 = 3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -3$$

Використовуючи поняття алгебраїчного доповнення формулу (5), яка визначає визначник при $n > 1$ можна записати так:

$$\Delta(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14} + \ldots + a_{1n} \cdot A_{1n} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot A_{1i}$$

2.7. Розклад визначника за рядком або стовпчиком

Наступна теорема дає можливість звести обчислення визначника n–го порядку ($n \geq 2$) до визначника (n–1)–го порядку. Формули (8), (9) називають *формулами розкладання визначника за елементами i–го рядка* (*k–го стовпця*).

<u>Теорема 2.</u> *Значення* Δ(*A*) *визначника квадратної матриці A дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка або довільного стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення*:

$$\Delta(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

$$\Delta(A) = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk} \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Як правило, теорему 2 застосовують при обчисленні визначників четвертого і вищих порядків. Якщо у деякому рядку чи стовпчику визначника є нулі, то, для полегшення обчислень, саме за цим рядком або стовпчиком слід розкладати визначник.

<u>Приклади.</u> Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$.

а) розкладемо визначник за елементами другого рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5\cdot(2\cdot 4 - 3\cdot 1) - 2\cdot(1\cdot 1 - 2\cdot 7) = -25 + 26 = 1.$$

б) розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 296.$$

Теорема 3. *Сума добутків елементів довільного рядка* (*стовпця*) *квадратної матриці A на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого її рядка* (*стовпця*) *дорівнює нулю*:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + ... + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, ..., n),$$

$$a_{1k}A_{1s} + a_{2k}A_{2s} + ... + a_{nk}A_{ns} = 0 \quad (k \neq s;\ k, s = 1, 2, ..., n).$$

2.8. Властивості визначників

1. Значення визначника не змінюється при транспонуванні матриці:

$$\Delta(A) = \Delta(A^T).$$

Для доведення цієї властивості достатньо розкласти визначник $\Delta(A)$ за елементами першого рядка, а визначник $\Delta(A^T)$ - за елементами першого стовпчика і порівняти одержані результати.

Властивість **1.** означає рівноправність рядків і стовпців визначника, тому всі наступні властивості визначника, властиві його рядкам і стовпцям, достатньо сформулювати і довести або тільки для рядків, або тільки для стовпців.

2. Якщо деякий рядок визначника складається з тільки з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

Для доведення цієї властивості достатньо розкласти визначник за цим нульовим рядком: $\Delta(A) = 0\cdot A_{i1} + 0\cdot A_{i2} + \ldots + 0\cdot A_{in} = 0$.

3. Якщо у визначника поміняти місцями будь-які два рядки, то визначник змінить знак на протилежний.

Доведення. Припустимо спочатку, що переставили два сусідніх рядка: i та $i+1$. Розкладемо визначник $\Delta(A)$ початкової матриці A за елементами i-го рядка, а визначник $\Delta(A')$ нової матриці A' (з переставленими рядками) за елементами $i+1$-го рядка. Ці розклади будуть відрізнятися тільки знаком, оскільки в формулі (8) для $\Delta(A')$ кожне алгебраїчне доповнення буде мати протилежний знак (замість множників $(-1)^{i+j}$ будть множники $(-1)^{i+1+j}$), тому $\Delta(A') = -\Delta(A)$.

Якщо переставляти не сусідні рядки, а, наприклад, i-й та $(i+k)$-й, то таку перестановку можна подати як послідовний перестановку i-го рядка на k рядків вниз (при цьому кожен раз знак визначника змінюється), а $(i+k)$-го рядка на $(k-1)$ вгору, що також змінить знак визначника $(k-1)$ раз. Таким чином, загалом знак визначника зміниться непарну кількість разів: $k+(k-1)=2k-1$. Отже, $\Delta(A') = (-1)^{2k-1} \cdot \Delta(A) = -\Delta(A)$.

4. Визначник, у якого є два однакові рядки дорівнює нулю.

Справді, поміняємо місцями два однакові рядки. Тоді, з одного боку визначник не зміниться, а з іншого, за попередньою властивістю, він змінить знак на протилежний, тобто буде правильною рівність: Δ=–Δ, або 2Δ=0, звідки Δ=0.

5. Якщо всі елементи якого–небудь рядка визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i1} & \dots & \dots & \lambda a_{i1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i1} & \dots & \dots & a_{i1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \Delta(B)$$

Для доведення цієї властивості достатньо розкласти визначник за цим рядком:

$$\Delta(A) = \lambda a_{i1} \cdot A_{i1} + \ldots + \lambda a_{in} A_{in} = \lambda\left(a_{i1} \cdot A_{i1} + \ldots + a_{in} A_{in}\right) = \lambda \cdot \Delta(B).$$

Зауважимо, що властивість **2.** є наслідком даної властивості.

Два рядки матриці (визначника) *називаються лінійно залежними або пропорційними*, якщо один з них утворюється з іншого множенням на деяке число (коефіцієнт пропорційності).

<u>Приклад.</u> $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 6 & 21 & 3 \end{pmatrix}$. Перший і третій рядки лінійно залежні (пропорційні). Дійсно, $\begin{pmatrix} 6 & 21 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Якщо визначник має два пропорційні рядки, то він дорівнює нулю.

Дійсно, виносячи спільний множник пропорційності за знак визначника (властивість **5.**), дістанемо визначник з двома однаковими рядками, який за властивістю **4.** дорівнює нулю.

7. Якщо кожний елемент деякого рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник може бути зображений у вигляді суми двох визначників, у яких один у згаданому рядку має перші зі заданих доданків, а інший – другі; елементи, що стоять на решті місць, у всіх трьох визначниках одні й ті ж самі. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a'_{22}+a''_{22} & a'_{23}+a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a''_{22} & a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для доведення цієї властивості достатньо розкласти визначник за тим рядком, елементи якого є сумою двох доданків.

8. Якщо до елементів деякого рядка визначника додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне і те саме довільне число, то значення визначника при цьому не зміниться.

Ця властивість безпосередньо випливає з двох попередніх.

9. Визначник добутку квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць: $\Delta(AB) = \Delta(A) \cdot \Delta(B)$.

З цієї властивості випливає цікавий факт: навіть якщо $AB \neq BA$, все рівно $\Delta(AB) = \Delta(BA)$.

2.9. Застосування визначників. Формули Крамера

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$ і розв’яжемо цю систему методом підстановки. З першого рівняння одержимо: $x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}$. Підставивши x_1 в друге рівняння, матимемо:

$$a_{21} \cdot \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} + a_{22}x_2 = b_2, \quad a_{21}b_1 - a_{21}a_{12}x_2 + a_{22}a_{11}x_2 = b_2a_{11},$$ звідки:

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \tag{10}$$

тобто значення змінної x_2 можна виразити через визначники, аналогічно,

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \qquad (11)$$

Введемо позначення: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$. Тоді формули (10), (11) набудуть вигляду:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad (12)$$

Формули (12) − це *формули Крамера* для системи другого порядку. Виявляється, що формули такого типу мають місце для будь-якої квадратної ($n \times n$) системи лінійних рівнянь.

Наведемо зараз відповідні формули та зробимо деякі уточнення, щодо можливості їх використання (як видно з формул (12), для їх існування необхідно $\Delta \neq 0$).

Нехай нам дано систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ ... & & ... & & ... & & ... & & ... \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & ... & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{cases} \qquad (13)$$

Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (14)$$

називається *визначником системи* (13).

Введемо в розгляд визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, ..., \; \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n \end{vmatrix} \qquad (15)$$

які утворені з визначника (14) шляхом заміни відповідних стовпців стовпцем вільних членів системи (13).

<u>Теорема 4.</u> (*т е о р е м а   К р а м е р а*). *Якщо визначник системи* (13) *відмінний від нуля* $(\Delta \neq 0)$, *то система має єдиний розв'язок, який визначається за формулами*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{16}$$

в яких числа Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n *є визначниками* (15).

Якщо всі визначники (14), (15) *дорівнюють нулю* ($\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$), *то в цьому випадку система сумісна і невизначена (має безліч розв'язків)*.

Якщо ж $\Delta = 0$, *а хоча б один з визначників* (15) *відмінний від нуля, то система несумісна (не має розв'язків)*.

Формули (16) називають *формулами Крамера*.

На відміну від методу Гауса, формули Крамера застосовуються тільки для квадратних систем, що мають єдиний розв'язок.

<u>Приклад.</u> Розв'язати СЛАР: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$

Визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \quad \text{(відмінний від нуля)},$$

тому, за теоремою Крамера, система має єдиний розв'язок. Знаходимо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -14, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 14, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

За формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-14}{14} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1 \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{14} = 0.$$

Відповідь: $(-1,\ 1,\ 0)$.

2.10. Обернена матриця. Умови її існування

Для кожного дійсного числа $a \neq 0$ існує обернене до нього число a^{-1} таке, що $a \cdot a^{-1} = 1$. Аналогічне поняття вводиться і для квадратних матриць.

Матриця A^{-1} називається оберненою до квадратної матриці A, якщо при множенні цієї матриці на дану як справа, так і зліва одержуємо одиничну матрицю:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \tag{17}$$

Не всяка квадратна матриця має обернену до себе.

<u>Теорема 5.</u> (необхідна і достатня умова існування оберненої матриці)

Для того щоб до квадратної матриці A існувала обернена матриця A^{-1} необхідно і достатньо щоб визначник матриці A був відмінний від нуля:

$$\Delta(A) \neq 0.$$

Квадратна матриця, визначник якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*). Якщо $\Delta(A) \neq 0$, то матриця називається *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, згідно теоремі 5, тільки не вироджена матриця має обернену. Причому, якщо до матриці A існує обернена матриця A^{-1}, то вона *єдина*.

Дійсно, якщо припустити, що до матриці A існує крім A^{-1} ще деяка обернена матриця A_1^{-1}, то, з урахуванням (17), матимемо:

$$A_1^{-1} = A_1^{-1} \cdot E = A_1^{-1} \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right) = \left(A_1^{-1} \cdot A\right) \cdot A^{-1} = E \cdot A^{-1} = A^{-1}.$$

З означення оберненої матриці випливають наступні властивості:

1. $\Delta(A^{-1}) = \dfrac{1}{\Delta(A)}$.
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2.11. Обчислення оберненої матриці

Нехай дано невироджену квадратну матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо транспоновану до матриці A матрицю A^T і замінимо в ній кожний елемент його алгебраїчним доповненням:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Одержана матриця $\tilde{A}$ називається *взаємною* (*приєднаною*) до матриці A.

Виявляється, що матриця $\frac{1}{\Delta(A)} \cdot \tilde{A}$ буде оберненою до матриці A. Переконатися в цьому можна безпосереднім обчисленням (перевірити виконання рівностей $\left(\frac{1}{\Delta(A)} \cdot \tilde{A}\right) \cdot A = A \cdot \left(\frac{1}{\Delta(A)} \cdot \tilde{A}\right) = E$).

Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Формула (18) застосовується для обчислення оберненої матриці.

<u>Приклад.</u> З'ясувати чи має матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ обернену, якщо так, то знайти її.

$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, отже, A^{-1} існує. Знаходимо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A і розміщуємо їх у тому самому порядку, що й у взаємній матриці $\tilde{A}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

Таким чином, (див. (18)):

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\widetilde{A}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

2.12. Матричні рівняння

Нехай нам задано матрицю *A* розмірності $m\times n$ та матрицю *B* розмірності $m\times k$. і матриця *X*:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk}\end{pmatrix}.$$

Розглянемо невідому матрицю *X* розмірності $n\times k$:

$$X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k}\\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk}\end{pmatrix}.$$

Розміри матриць *A* та *X* підібрані так, що існує добуток цих матриць AX. Причому матриця AX буде мати ті самі розміри що і матриця *B*. Тому можна розглянути рівняння:

$$AX=B \tag{19}$$

і поставити питання про знаходження такої матриці *X*, яка рівняння (19) перетворює в правильну матричну рівність.

Рівняння (19) називається *матричним рівнянням першого типу*.

Матриця *X*, яка перетворює рівняння (19) в правильну матричну рівність називається *розв'язком рівняння* (19).

Фактично, в загальному випадку, розв'язування рівняння (19) зводиться до розв'язування СЛАР mk рівнянь з nk невідомими.

В деяких випадках розв'язки рівняння (19) можна одержати використовуючи поняття оберненої матриці. Розглянемо це питання детальніше.

Припустимо що наша матриця *A* квадратна ($m=n$) і невироджена ($\Delta(A)\neq 0$). Тоді існує A^{-1}. Помножимо обидві частини рівняння (19) зліва на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B. \tag{20}$$

Оскільки $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, то з (20) отримаємо:

$$X = A^{-1}B. \tag{21}$$

Формула (21) дає нам розв'язок рівняння (19) у випадку квадратної невиродженої матриці *A*.

<u>Приклад.</u> Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{31} \\ x_{21} & x_{22} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 10 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тут $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{31} \\ x_{21} & x_{22} & x_{32} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 10 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Для застосування формули (21), перевіримо, що матриця *A* невироджена:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0.$$

Отже, матриця *A* невироджена. Тепер обчислюємо A^{-1}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1,$$

згідно формули (18),

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, розв'язком рівняння буде (див. формулу (21)):

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 10 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 30 \\ 0 & -13 & -21 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 30 \\ 0 & -13 & -21 \end{pmatrix}$.

Разом з рівнянням *AX*=*B*, , розглянемо рівняння:

$$YA = B. \tag{22}$$

Це рівняння називають *матричним рівнянням другого типу*. В ньому *Y* – матриця невідомих.

Якщо матриця *A* квадратна і невироджена, то розв'язок рівняння (22) має вигляд:

$$Y = BA^{-1}. \tag{23}$$

Формула (23) виводиться аналогічно формулі (21).

2.13. Матрична форма запису СЛАР

Нехай дано систему *n* лінійних рівнянь з *n* змінними:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{24}$$

Розглянемо матрицю системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

та матриці–стовпці змінних $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ і вільних членів $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Тоді:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Користуючись означенням рівності матриць систему (24) можна записати у вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

а тому, врахувавши (25), маємо такий запис системи (24):

$$AX = B. \tag{26}$$

Останню рівність називають *матричною формою запису СЛАР*.

З іншого боку, рівність (26) є не що інше, як матричне рівняння (19). Тому, якщо $\Delta(A) \neq 0$, то формула (21) $X = A^{-1}B$ дає нам розв’язок системи (24).

Приклад. Розв’язати матричним методом систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Матриця цієї системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

має обернену

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Скориставшись рівністю (21), отримуємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тобто $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ – шуканий розв’язок.

2.14. Лінійна залежність. Ранг матриці

Розглядатимемо матриці, які складаються тільки з одного рядка, або тільки з одного стовпця. Такі матриці, як зазначалось вище називають відповідно *вектор-рядками* та *вектор-стовпцями*, або просто *рядками* та *стовпцями.* Позначатимемо їх $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{x}$, $\overline{y}$ тощо.

Усі наступні означення й теореми цього пункту формулюватимемо і доводитимемо тільки для рядків. Аналогічні означення та теореми мають місце і для стовпців.

Рядок $\overline{a}$ називається *лінійною комбінацією* рядків $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$, якщо існують числа α_1, α_2, ..., α_k такі, що $\overline{a} = (\alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + \ldots + \alpha_k \overline{a}_k)$.

Лінійну комбінацію, всі коефіцієнти якої α_1, α_2, ..., α_k дорівнюють нулю, прийнято називати *тривіальною*. У противному разі лінійна комбінація називається *нетривіальною*.

Систему з $k\geq 2$ рядків називають *лінійно залежною*, якщо існує нетривіальна комбінація цих рядків, яка дорівнює нуль–рядку. Інакше, в рівності:

$$\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+...+\alpha_k\bar{a}_k=\bar{0},$$

де $\bar{0}=(0,0,\ldots,0)$ нуль–рядок, хоча б одне з чисел $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_k$ відмінне від нуля.

У противному разі система рядків називається *лінійно незалежною*. Інакше, рівність:

$$\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+...+\alpha_k\bar{a}_k=\bar{0}$$

можлива лише у випадку, коли $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=0$.

<u>Теорема 6.</u> *Система з $k\geq 2$ рядків лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли хоча б один з рядків є лінійною комбінацією решти.*

Доведення.

Необхідність. Якщо система рядків $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_k$ лінійно залежна, то хоча б один з коефіцієнтів у рівності

$$\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+...+\alpha_k\bar{a}_k=\bar{0}$$

не дорівнює нулю. Нехай, наприклад, $\alpha_1\neq 0$. Тоді

$$\bar{a}_1=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\bar{a}_2-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\bar{a}_3-...-\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\bar{a}_k,$$

тобто рядок $\bar{a}_1$ є лінійною комбінацією інших.

Достатність. Якщо який–небудь рядок, наприклад $\bar{a}_1$, є лінійною комбінацією решти рядків, то виконується рівність

$$\bar{a}_1=\alpha_2\bar{a}_2+\alpha_3\bar{a}_3+...+\alpha_k\bar{a}_k.$$

Записавши цю рівність у вигляді

$$\bar{a}_1-\alpha_2\bar{a}_2-...-\alpha_k\bar{a}_k=\bar{0},$$

бачимо, що нетривіальна лінійна комбінація рядків дорівнює нуль–рядку, тобто система рядків $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_k$ лінійно залежна.

Теорема доведена.

<u>Теорема 7.</u> *Система рядків, яка містить нуль–рядок, лінійно залежна.*

Доведення.

Справді, якщо серед рядків $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_k$ один, наприклад $\bar{a}_1$, нуль–рядок, то взявши $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\alpha_3=...=\alpha_k=0$, отримаємо

$$1\cdot\bar{a}_1+0\cdot\bar{a}_2+...+0\cdot\bar{a}_k=\bar{0},$$

тобто нетривіальна лінійна комбінація рядків $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_k$ дорівнює нуль–рядку.

Теорема доведена.

Рангом системи рядків називається число, яке дорівнює максимальній кількості цих рядків, що утворюють лінійно незалежну систему.

Система рядків рангу k, яка містить більше, ніж k рядків, лінійно залежна. Дійсно, якщо допустити супротивне, то дійдемо до висновку, що ранг системи рядків більший за *k*.

Теорема 8. *Приєднання до системи рядків нових рядків не зменшує її рангу.*

Доведення.

Нехай деяка система рядків має ранг r. Це означає, що в системі є r рядків, що утворюють лінійно незалежну систему. Але ж якщо до системи рядків приєднати нові рядки, то ці r лінійно незалежних рядків залишаться, значить ранг системи не може зменшитись.

Теорема доведена.

Розглянемо матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рядковим рангом матриці A називають ранг системи рядків матриці.

Стовпцевим рангом матриці A називають ранг системи стовпців матриці.

Виявляється що рядковий і стовпцевий ранги матриці рівні. Тому їх не розрізняють, а значення цих рангів називають рангом матриці і позначають *rangA*.

Вірне наступне твердження: *ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях*.

Це твердження дає простий і зручний спосіб обчислення рангу матриці: елементарними перетвореннями (як в методі Гауса) зводимо матрицю до східчастого вигляду і рахуємо кількість ненульових рядків. Це і буде *rangA*.

Приклад:

Обчислити ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 7 & -5 & -9 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 7 & -5 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & 26 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad rangA=2.$$

Розглянемо квадратну матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

З введенням поняття лінійної залежності системи рядків ми можемо сформулювати ще одну властивість визначників: *якщо система рядків матриці A лінійно залежна то визначник такої матриці дорівнює нулю.*

Вірно і навпаки: *якщо* $\Delta(A) = 0$*, то система рядків матриці A лінійно залежна.*

2.15. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Нехай нам дано СЛАР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{27}$$

Розглянемо матрицю коефіцієнтів СЛАР:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

та розширену матрицю СЛАР:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Зрозуміло, (див. теорему 8) завжди $rangA \le rangB$.

<u>Теорема 8.</u> (критерій Кронекера-Капеллі)

Для того щоб СЛАР (27) *була сумісною необхідно й достатньо щоб ранг її матриці A дорівнював рангу її розширеної матриці B*:

$$rang\ A = rang\ B.$$

Доведення:

Необхідність. Нехай система (27) сумісна і ($\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n$) її розв’язок. Тоді правильна кожна з рівностей:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\alpha_1 & + & a_{12}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\alpha_n & = & b_1, \\ a_{21}\alpha_1 & + & a_{22}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\alpha_n & = & b_2, \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{m1}\alpha_1 & + & a_{m2}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{mn}\alpha_n & = & b_m. \end{array}$$

Звідси бачимо, що $(n+1)$–й стовпець розширеної матриці B (стовпець вільних членів системи) є лінійною комбінацією її стовпців, тобто стовпців матриці A. Тому $rangB \le rangA$. Але з іншого боку, як зазначали вище, завжди $rangA \le rangB$. Отже, $rangA = rangB$.

Достатність. Нехай $rang\ A = rang\ B$. Покажемо, що СЛАР сумісна. Візьмемо розширену матрицю B системи (27) і елементарними перетвореннями будемо зводити її до східчастого вигляду (елементарні перетворення не змінюють рангу). При вивченні методу Гауса ми бачили, що СЛАР несумісна лише в одному випадку: в розширеній матриці дістали рядок в якому всі елементи зліва від вертикальної риски дорівнюють нулю, а елемент, що стоїть справа, відмінний від нуля:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b''_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a'''_{mn} & b'''_m \end{array}\right).$$

В цьому випадку кількість ненульових рядків матриці коефіцієнтів системи A буде меншою (принаймні на один рядок) ніж кількість ненульових рядків розширеної матриці B, тобто, $rangA < rangB$. Проте, за умовою, $rangA = rangB$. Значить вище згаданий випадок неможливий.

Отже, якщо $rangA = rangB$, то система сумісна.

Теорема доведена.

Зауваження. Нехай СЛАР сумісна. Тоді, якщо $rangA$ дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв’язок, який можна знайти методом Гауса, за формулами Крамера або за допомогою оберненої матриці. Якщо ж $rangA$ менше кількості невідомих, то система має безліч розв’язків. Її можна розв’язати методом Гауса, причому кількість головних невідомих буде дорівнювати $rangA$.

Приклад. Перевірити на сумісність систему і у випадку сумісності розв'язати її.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Перевіримо виконання рівності $rangA = rangB$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином, $rangA = rangB$=2. Отже, за теоремою Кронекера-Капеллі, система сумісна. Останній матриці відповідає система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ \quad -5x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 17. \end{cases}$$

Оскільки ранг матриці системи ($rangA = 2$) менший кількості невідомих, то система не визначена (має безліч розв'язків). Змінні x_1 та x_2 тут є головними, а x_3 та x_4 - вільними. Як бачимо, система має трапецієподібну форму. Для знаходження її розв'язків виразимо x_1 та x_2 через x_3 та x_4:

$$x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4, \qquad x_2 = \frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4.$$

Надаючи вільним змінним довільних числових значень ($x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $c_1 \in R$, $c_2 \in R$) одержимо множину розв'язків нашої системи:

$$\left\{ \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2; \quad \frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2; \quad c_1; \quad c_2 \,\middle|\, \quad c_1, c_2 \in R \right\}.$$

III
Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Для даних матриць A,B,C,D знайти A+B, 2B-D; A+C (якщо це можливо).

$$A=\begin{bmatrix}3&-4&0&6\\2&0&9&5\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}3&1&-1\\4&0&8\\-2&0&-1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}-5&1&0&2\\4&7&-11&-8\end{bmatrix};\ D=\begin{bmatrix}-3&1&-7\\8&4&-2\\-1&-5&1\end{bmatrix}.$$

Додавати та віднімати можна матриці тільки однакових розмірностей. Матриця A має розмірність 2×4; матриця B-3×3; C-2×4; D-3×3, тому A+B –знайти неможливо, оскільки розмірність матриць A і B різна. 2B-D –можна знайти оскільки матриці B і D – однакової розмірності. Маємо:

$$2B-D=2\begin{bmatrix}3&1&-1\\4&0&8\\-2&0&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3&1&-7\\8&4&-2\\-1&-5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot3&2\cdot1&2\cdot(-1)\\2\cdot4&2\cdot0&2\cdot8\\2\cdot(-2)&2\cdot0&2\cdot(-1)\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}-3&1&-7\\8&4&-2\\-1&-5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2&-2\\8&0&16\\-4&0&-2\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}3&-1&7\\-8&-4&2\\1&5&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6+3&2+(-1)&-2+7\\8+(-8)&0+(-4)&16+2\\-4+1&0+5&-2+(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&1&5\\0&-4&18\\-3&5&-3\end{bmatrix}, \text{ отже } 2B-D=\begin{bmatrix}9&1&5\\0&-4&18\\-3&5&-3\end{bmatrix}.$$

A+C знайти можна, оскільки матриці A і C однакової розмірності. Маємо:

$$A+C=\begin{bmatrix}3&-4&0&6\\2&0&9&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5&1&0&2\\4&7&-11&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+(-5)&-4+1&0&6+2\\2+4&0+7&9+(-11)&5+(-8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-3&0&8\\6&7&-2&-3\end{bmatrix} \text{ отже,}$$

$$A+C=\begin{bmatrix}-2&-3&0&8\\6&7&-2&-3\end{bmatrix}.$$

Приклад 2. Для матриць A і B знайти $A\cdot B$ і $B\cdot A$.

а) $A=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&2&1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}2&3\\0&2\\3&1\end{bmatrix}$, за правилом добутку матриць можна записати:

$A_{2\times3}\cdot B_{3\times2}=C_{2\times2}$. Виконуємо множення:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&3\\0&2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot2+3\cdot0+4\cdot3&2\cdot3+3\cdot2+4\cdot1\\0\cdot2+2\cdot0+1\cdot3&0\cdot3+2\cdot2+1\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+12&6+6+4\\3&4+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16&16\\3&5\end{bmatrix};$$

Отже $A\cdot B$=C; $C=\begin{bmatrix}16&16\\3&5\end{bmatrix}$;

Перевіримо, чи можна знайти $B\cdot A$. $B_{3\times2}\cdot A_{2\times3}=D_{3\times3}$, отже:

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}2&3\\0&2\\3&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&3&4\\0&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot2+3\cdot0&2\cdot3+3\cdot2&2\cdot4+3\cdot1\\0\cdot2+2\cdot0&0\cdot3+2\cdot2&0\cdot4+2\cdot1\\3\cdot2+1\cdot0&3\cdot3+1\cdot2&3\cdot4+1\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&12&11\\0&4&2\\6&11&13\end{bmatrix},$$

тобто $B\cdot A$=D, $D=\begin{bmatrix}4&12&11\\0&4&2\\6&11&13\end{bmatrix}$.

б) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $A_{2\times3}\cdot B_{3\times4}=C_{2\times4}$:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot0+(-1)\cdot(-1)+3\cdot1 & 1\cdot1+(-1)\cdot2+3\cdot2 & 1\cdot2+(-1)\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot0+(-1)\cdot0+3\cdot0\\ 2\cdot0+0\cdot(-1)+2\cdot1 & 2\cdot1+0\cdot2+2\cdot2 & 2\cdot2+0\cdot0+2\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot0+2\cdot0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1+3+3 & 1-2+6 & 2+0+3 & 0+0+0\\ 0+0+2 & 2+0+4 & 4+0+2 & 0+0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5 & 5 & 0\\ 2 & 6 & 6 & 0\end{bmatrix}.$$ Отже, $A\cdot B=C;\quad C=\begin{bmatrix}4 & 5 & 5 & 0\\ 2 & 6 & 6 & 0\end{bmatrix}$.

Перевіримо, чи можна знайти $B\cdot A$? $B_{3\times4}\cdot A_{3\times2}$ - кількість стовпчиків матриці В не дорівнює кількості рядків матриці А, отже добуток $B\cdot A$ знайти неможливо.

<u>Приклад 3</u>. Обчислити визначник за правилом трикутників.

$$\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\cdot4\cdot1+3\cdot0\cdot1+(-2)\cdot2\cdot(-1)-((-1)\cdot4\cdot1+0\cdot2\cdot2+3\cdot(-2)\cdot1)=8+4+4+6=22.$$

<u>Приклад 4.</u> Обчислити визначник, розклавши його за елементами першого стовпчика (j=1).

$$\Delta=\begin{vmatrix}-4 & 1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ -3 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 3\end{vmatrix}$$

<u>Зауваження:</u> Якщо в умові не вказано за яким рядком або стовпчиком розкладати визначник, то на практиці простіше розкладати його за тим рядком (стовпчиком) в якому знаходиться найбільший за модулем елемент. Проте, в нашому випадку обумовлено провести розклад за першим стовпчиком.

$$\Delta=\begin{vmatrix}-4 & 1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ -3 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=(-4)\cdot A_{11}+2\cdot A_{21}+(-3)\cdot A_{31}+2\cdot A_{41}$$

Обчислимо A_{i1}, (i=1,2,3,4) :

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=-3+2-(3+2)=-6$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=-(3+2-(-2))=-7$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=6+6-(-6-6)=24$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{vmatrix}=-(2-(3-2))=-1$$

Отже: $\Delta=(-4)\cdot(-6)+2\cdot(-7)+(-3)\cdot 24+2\cdot(-1)=24-14-72-2=-64$

Відповідь: $\Delta=-64$.

<u>Приклад 5.</u> Обчислити визначник зробивши нулі в 2-му стовпчику (j=2).

$$\Delta=\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{vmatrix}$$

<u>Зауваження:</u> Якщо не сказано в якому рядку або стовпчику робити нулі, то простіше всього обирати той рядок або стовпчик в якому більше всього нульових елементів, тобто це 3-тій рядок. Але за нашою умовою j=2.

Використовуємо елементарні перетворення визначника:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{vmatrix}^{\times(-2)\ \oplus}=\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{vmatrix}^{\times(-1)\ \oplus}=\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{vmatrix}^{\times(-\frac{3}{2})\ \oplus}=$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{\frac{5}{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{7}{2}} & \mathbf{1}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{7} & \mathbf{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 2A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{2}\end{vmatrix}=-(2+20-7-(5+7-8))=-(15-4)=-11$$

Отже, $\Delta=11$.

<u>Приклад 6.</u> Обчислити визначник, звівши його до трикутного вигляду.

$$\Delta=\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3}\end{vmatrix}^{\oplus\ \times(-1)\ \oplus\ \times(-2)\ \oplus}=\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{4}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{vmatrix}$$=[поміняємо 2 і 3 стовпці місцями]=

$$=-\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{4}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{vmatrix}^{-\ +\ (-1)\ +}=-\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{6}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-3}\end{vmatrix}^{\times(-3)\ +}=-\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{6}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-21}\end{vmatrix}=$$

={як відомо визначник трикутного вигляду дорівнює добутку елементів головної діагоналі.}=-($1\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-21)$)=-21

Отже, $\Delta=-21$.

Приклад 7.

Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера і матричним методом.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5; \end{cases}$$

Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 + 2 - 1 - 3 - 4 = -1$$

$\Delta = -1$, тобто $\Delta \neq 0$, отже система сумісна і визначена (має один розв'язок).

а) Для того, щоб розв'язати її за формулами Крамера обчислимо Δ_1, Δ_2, Δ_3. Для цього в головному визначнику системи Δ, стовпчик, який відповідає номеру i (i = 1, 2, 3) замінимо на стовпчик вільних членів.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 10 - 5 - 8 - 12 = -1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 5 + 4 - 4 - 10 - 6 = 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 4 + 4 - 2 - 5 - 8 = -2$$

Звідси маємо:

$X_1 = \dfrac{\Delta 1}{\Delta} = \dfrac{-1}{-1} = 1;$ $X_2 = \dfrac{\Delta 2}{\Delta} = \dfrac{1}{-1} = -1;$ $X_3 = \dfrac{\Delta 3}{\Delta} = \dfrac{-2}{-1} = 2$

Отже: $X_1 = 1$, $X_2 = -1$, $X_3 = 2$.

б) Оскільки $\Delta \neq 0$, то систему можна розв'язати матричним методом. Тобто дану систему рівнянь можна записати у вигляді матричного рівняння $A \cdot X = B$, де

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

A – матриця, складена з коефіцієнтів системи.

B – матриця-стовпчик вільних членів.

X – матриця-стовпчик невідомих.

Отже: $A \cdot X = B;$ $\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B;$ $X = A^{-1} \cdot B$.

Шукаємо A^{-1}. $\det A = \Delta = -1$.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -1;\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -1;\quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1;$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} = -1;\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 2;\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -1;$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1;\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -1;\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 0;$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

$$X = A^{-1}\cdot B;\quad X = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+4-5\\ 2-8+5\\ -2+4+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix};\quad X = \begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix} \Rightarrow\ X_1 = 1;\ X_2 = -1;$$

$X_3 = 2$.

Розв'язавши систему рівнянь двома способами ми одержали $X_1 = 1$, $X_2 = -1$, $X_3 = 2$. Чи задовольняє знайдений розв'язок систему? Зробимо перевірку:

$$\begin{aligned} &1 + (-1) + 2 = 2,\\ &1 + (-1) + 2\cdot 2 = 4,\\ &1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 2 = 5.\end{aligned}$$

Отже знайдені значення X_1, X_2, X_3 задовольняють систему рівнянь.
<u>Відповідь:</u> (1; -1; 2) – розв'язок даної системи рівнянь.

<u>Приклад 8.</u>

Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} X_1 + 5X_2 + 4X_3 + 3X_4 = 1\\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 - X_4 = 0\\ 5X_1 + 3X_2 + 8X_3 + X_4 = 1\end{cases}$

б) $\begin{cases} X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 7X_4 + 9X_5 = 1\\ X_1 - 2X_2 + 3X_3 - 4X_4 + 5X_5 = 2\\ 2X_1 + 11X_2 + 12X_3 + 25X_4 + 22X_5 = 4\end{cases}$

Обидві системи неоднорідні і недовизначені, оскільки кількість рівнянь m=3, а кількість змінних для системи а) n = 4, а для системи б) n=5 ($m<n$); Отже, ні матричним методом, ні за формулами Крамера розв'язувати ці системи ми не можемо.

Розв'яжемо системи методом Гауса (він є загальним методом розв'язування систем рівнянь, і одразу дає відповідь про сумісність (існування розв'язку) системи).

а) Складемо розширену матрицю системи і виконаємо прямий хід:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1\end{array}\right) \text{(опускаємо проміжні обчислення)} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Бачимо, що *rangA*=*rangB*=2. Отже, система сумісна (теорема Кронекера-Капеллі). Останній матриці відповідає наступна система:

$$\begin{cases} X_1 + \frac{14}{11}X_3 - \frac{2}{11}X_4 = \frac{1}{11} \\ -11X_2 - 6X_3 - 7X_4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + \frac{14}{11}X_3 - \frac{2}{11}X_4 = \frac{1}{11} \\ X_2 + \frac{6}{11}X_3 + \frac{7}{11}X_4 = \frac{2}{11} \end{cases}$$

Виражаючи змінні X_1 і X_2 (головні) через змінні X_3 і X_4 (вільні), одержимо:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{11} - \frac{14}{11}X_3 + \frac{2}{11}X_4 \\ X_2 = \frac{2}{11} - \frac{6}{11}X_3 - \frac{7}{11}X_4 \end{cases}$$

Надаючи різних значень вільним змінним X_3, X_4 одержуватимемо значення X_1, X_2. Отже, поклавши $X_3 = U$, $X_4 = V$; $U, V \in$ **R,** одержимо множину розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{11} - \frac{14}{11}U + \frac{2}{11}V \\ X_2 = \frac{2}{11} - \frac{6}{11}U - \frac{7}{11}V \\ X_3 = U, \ U \in R \\ X_4 = V, \ V \in R \end{cases}$$

Це загальний розв'язок системи, з якого бачимо, що система сумісна, невизначена (має безліч розв’язків).

б) Складемо розширену матрицю системи і виконаємо прямий хід:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

З останньої матриці бачимо, що *rangA*=2, *rangB*=3, тобто $rangA \neq rangB$. Отже, система несумісна.
Відповідь: система не має розв’язків.

IV
Задачі для аудиторної роботи

1.

Якого розміру матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$? Чому дорівнюють елементи a_{21} та a_{32}? Які індекси має елемент d?

2.

Визначте розмір матриці A, випишіть усі рядки і стовпці матриці й елементи a_{23} та a_{32}:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ -6 & 8 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -1 & 0 \\ -9 & 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$.

3.

Визначте які з матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

є квадратними, і вкажіть порядок кожної квадратної матриці. Які елементи утворюють головну і побічну діагоналі цих матриць?

4.

Визначте, яка з матриць є верхньою трикутною, нижньою трикутною, діагональною:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.

Визначте, до якого типу належать матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 7 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, G = (1 \;\; 2 \;\; 3).$$

6.

Визначте, при яких значеннях x, y та z рівні матриці:

1) $\begin{pmatrix} 5 & x \end{pmatrix} = (y \;\; -3)$;

2) $\begin{pmatrix} 6x \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5y \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & 2x \\ y & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} x-1 & 4 \\ y+3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} x^2 & 1 & z \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & 1 & 4 \\ 2 & y & -1 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ x & 2 & 4 \\ 9 & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ y & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.

Задано матриці $A_{1\times3}, B_{4\times1}, C_{3\times5}$. Чи існують добутки:

1) AB; 2) AC; 3) BA; 4) CA; 5) ABC?

8.

Визначте параметри m та n, якщо:

1) $A + X_{m\times n} = B_{2\times3}$;

2) $A - X_{m\times n} = B_{3\times4}$;

3) $3X_{m\times n} = A_{4\times3}$;

4) $-2X_{m\times n} = A_{2\times2}$;

5) $A_{5\times9}X_{m\times n} = B_{5\times1}$;

6) $A_{5\times m}X_{7\times n} = B_{5\times6}$;

7) $B_{m\times n} = (A_{3\times2})^T$;

8) $B_{5\times n} = \left(A_{4\times m}\right)^T$.

9.

Задано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Знайдіть матрицю X із рівняння:

1) $3A + \frac{1}{2}X = B$; 2) $2A - 5X = B$.

10.

Задано матриці A, B та C. Знайдіть найраціональнішим способом добуток ABC, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -7 \\ 8 & 3 & 11 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, C = (-1 \ \ 9 \ \ 3 \ \ 6)$;

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

11.

Задано многочлен $f(x) = x^2 - 5x - 2$. Знайдіть значення матричного многочлена $f(A)$:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

12.

Задано матрицю A. Обчисліть доповняльні мінори та алгебричні доповнення вказаних елементів:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}, a_{22}, a_{32}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, a_{23}, a_{11}$.

13.
Обчисліть визначник:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & \log_a \frac{1}{b} \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} \log_a b & \log_{a^2} b \\ \log_{b^2} a & \log_b a \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;

14.

Обчисліть визначники розкладанням за символічним рядком:

1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ b & 2 & 5 \\ c & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

15.
Знайдіть матрицю, обернену до матриці (якщо вона існує):

1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

16.

Розв'яжіть матричні рівняння:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$;

17.

Знайдіть ранг матриці:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

18.

Запишіть у матричному вигляді систему лінійних алгебричних рівнянь:

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 6x + 4y = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

19.

Розв'яжіть систему:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 5y + z = 1, \\ x + y - z = 2, \\ x - 13y + 5z = -4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2; \end{cases}$

20.

Дослідіть на сумісність і знайдіть, у разі сумісності, загальний розв’язок системи:

1) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7; \end{cases}$

21.

Знайдіть фундаментальну систему розв’язків і загальний розв’язок системи:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$

V

Тестова контрольна робота з вищої математики за темою

„*Матриці, визначники, системи лінійних алгебраїчних рівнянь*".

Варіант № 1.

1. Знайти всі можливі добутки матриць A_{3x3} і B_{3x3} ,якщо:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити значення визначника:

$$\det A=\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$ розклавши його за елементами i=1.

3. Знайти обернену матрицю (A^{-1}), якщо матриця A має вид:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$ зробити перевірку.

4. Розв′язати матричне рівняння:

AX=B, якщо $A_{2x2}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ і $B_{2x2}=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Розв′язати систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}.$$

6. Розв′язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 2 \end{cases}.$$

Варіант № 2.

1. Знайти всі можливі добутки матриць A_{3x3} і B_{3x3} ,якщо:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити значення визначника:

$$\det A=\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$, розклавши його за елементами j=1

3. Знайти обернену матрицю (A^{-1}), якщо матриця А має вид:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$, зробити перевірку.

4. Розв′язати матричне рівняння:

AX=B, якщо $A_{2x2}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ і $B_{2x2}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$.

5. Розв′язати систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = -2 \end{cases}.$$

6. Розв′язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Варіант № 3.

1. Знайти всі можливі добутки матриць A_{3x3} і B_{3x3} ,якщо:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити значення визначника:

$$\det A=\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$ розклавши його за елементами i=4.

3. Знайти обернену матрицю (A^{-1}), якщо матриця A має вид:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$ зробити перевірку.

4. Розв′язати матричне рівняння:

ABX=B, якщо $A_{2x2}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ і $B_{2x2}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$.

5. Розв′язати систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -x_1+7x_2 = -1 \\ x_1+3x_2+x_3 = 1 \\ 2x_1-x_2+2x_3 = 2 \end{cases}.$$

6. Розв′язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3 = -1 \\ x_1+6x_2-4x_3 = 1 \\ 3x_1+x_2-3x_3 = -2 \end{cases}.$$

Варіант № 4.

1. Знайти всі можливі добутки матриць A_{3x3} і B_{3x3} ,якщо:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити значення визначника:

$$\det A=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$ розклавши його за елементами i=1.

3. Знайти обернену матрицю (A^{-1}), якщо матриця А має вид:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$ зробити перевірку.

4I. Розв′язати матричне рівняння:

XB=A, якщо $A_{2x2}=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ і $B_{2x2}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

5. Розв′язати систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1 \end{cases}.$$

6. Розв′язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}.$$

Варіант № 5.

1. Знайти всі можливі добутки матриць A_{3x3} і B_{3x3} ,якщо:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 4\\ 2 & -3 & 0\end{bmatrix}.$$

2. Обчислити значення визначника:

$$\det A=\begin{vmatrix}6 & 4 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3 & 1\end{vmatrix},$$ розклавши його за елементами j=1.

3. Знайти обернену матрицю (A^{-1}), якщо матриця A має вид:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{bmatrix},$$ зробити перевірку.

4. Розв′язати матричне рівняння:

$XBA=B$, якщо $A_{2x2}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 0\end{bmatrix}$ і $B_{2x2}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$.

5. Розв′язати систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3=8\\ 2x_1-3x_2+3x_3=8\\ 4x_1+x_2-6x_3=21\end{cases}.$$

6. Розв′язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases}3x_1+x_2+x_3=3\\ x_1-x_2-3x_3=-2\\ 7x_1-2x_2+3x_3=0\end{cases}.$$

Варіант № 6.

1. Знайти всі можливі добутки матриць A_{3x3} і B_{3x3} ,якщо:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити значення визначника:

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$ розклавши його за елементами i=4.

3. Знайти обернену матрицю (A^{-1}), якщо матриця А має вид:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$ зробити перевірку.

4. Розв′язати матричне рівняння:

AXA=B, якщо $A_{2x2}=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ і $B_{2x2}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Розв′язати систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}.$$

6. Розв′язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}.$$

VI
Питання для самоконтролю

1. Запишіть загальний вигляд системи ***m*** лінійних алгебраїчних рівнянь з ***n*** невідомими.
2. Дайте означення сумісної, несумісної, визначеної, невизначеної системи лінійних рівнянь.
3. Для яких систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовуються формули Крамера? Чи кожну визначену систему можна розв'язати за формулами Крамера?
4. Для яких систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовується матричний метод розв'язання?
5. У чому полягає метод Гаусса? Чи кожну систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна розв'язати за методом Гаусса?
6. Сформулюйте критерій сумісності системи лінійних рівнянь.
7. Чи може однорідна система лінійних рівнянь бути несумісною? Невизначеною?
8. У якому випадку однорідна система трьох лінійних рівнянь має єдиний розв'язок? Безліч розв'язків? За якими формулами знаходять розв'язок системи?
9. Запишіть співвідношення балансу, необхідні для збалансованого функціонування галузей.
10. У якому випадку матриця прямих витрат є продуктивною? Сформулюйте критерій продуктивності.
11. Що називають визначником другого порядку?
12. Що називають визначником третього порядку?
13. Дайте означення мінора та алгебраїчного доповнення.
14. Сформулюйте теорему про розклад визначника за елементами рядка (стовпця). Як застосовується ця теорема при обчисленні визначників вищих порядків?
15. Назвіть основні властивості визначників.
16. Чому дорівнює сума добутків елементів одного рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення елементів другого рядка (стовпця)?
17. Що називають матрицею?
18. Які існують дії над матрицями і як вони визначаються?
19. Дайте означення оберненої матриці.
20. Як обчислюється обернена матриця?
21. Чому дорівнює добуток матриці А та оберненої матриці A^{-1} ?

Рекомендована література

1. Барабаш О. В., Дзядик С. Ю., Жданова Ю. Д., Омецинська О. Б., Онищенко В. В., Шевченко С. М. Вища математика. Частина 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних. Київ : ДУТ, 2015. – 435 с.
2. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика для економістів: 5-те вид. Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2010.
3. Вища математика : базовий підручник для студентів ВНЗ / [Пономаренко В. С., Малярець Л. М., Бойко А. В. та ін.]; за ред. І. М. Коваль– Харків: Фоліо, 2014. – 667 с.
4. Городнов В. П. Вища математика (популярно, із прикладами) Харків : Вид-во НУА, 2005. 383с.
5. Дубовик В. П. , Юрик І. І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: Видавництво А. С. К., 2003. – 648 с.
6. Лавренчук В.П., Настасієв П.П., Мартинюк О.В., Кондур О.С. Вища математика. Загальний курс. Чернівці : Книги – XXI, 2010. 556с.
7. Лиман Ф. Вища математика : навч. посіб. у 2-х частинах / Ф. Лиман, В.Власенко, С. Петренко. – К.: Вид-во. «Університетська книга», 2018. – 614 с.
8. Ляшенко О. І., Кравець Т. В. та ін. Вища математика для економістів. Підручник за ред. О. І. Ляшенко, О. І. Черняка. – Київ, 2007.
9. Рудницький В.Б., Діхтярук М.М., Рамський А.О. Курс вищої математики для студентів економічного і технологічного напрямків навчання. – Хмельницький, 2017. – 456 с
10. Турчанінова Л.І. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. / Л.І. Турчанінова, О.В. Доля. – К.: Вид-во «Ліра-К», 2018. – 348 с.
11. Соколенко О. І. Вища математика: Підручник. – К.: „Академія", 2002. – 432 с.