DOI: 10.25140/2411-5363-2023-2(32)-107-116
УДК 539.3

Олексій Манжос[1], Андрій Пожуєв[2], Олена Міхайлуца[3]

[1]аспірант кафедри фундаментальної та прикладної математики
Запорізький національний університет (Запоріжжя, Україна)
E-mail: ojiekca1996@gmail.com

[2]кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри фундаментальної та прикладної математики
Запорізький національний університет (Запоріжжя, Україна)
E-mail: scorpio6828@gmail.com. **ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-4083-5139
ResearcherID: AAE-6507-2019. **Scopus Author ID:** 6506407054

[3]кандидат технічних наук, доцент кафедри електроніки, інформаційних систем та програмного забезпечення
Запорізький національний університет (Запоріжжя, Україна)
E-mail: elenamikhaylutsa7@gmail.com. **ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-2935-7997.
ResearcherID: ААФ-4942-2019. **Scopus Author ID:** 16407827200

НЕСТАЦІОНАРНА РЕАКЦІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПРУЖНИМ ШАРОМ НА ДІЮ РУХОМОГО РАДІАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Для нескінченно довгої циліндричної оболонки з м'яким невагомим пружним шаром розглянуто перехідні процеси, що виникають у момент прикладання навантаження та в наступні безпосередньо після цього моменту проміжки часу. Досліджено випадки руху радіального осесиметричного навантаження як із постійною, так і зі змінною швидкістю. Для аналізу несталих процесів запропоновано алгоритм, що ґрунтується на застосуванні інтегрального перетворення Фур'є за осьовою координатою. Для інтегрування в просторі зображень перетворених диференціальних рівнянь руху оболонки використано чисельний метод Рунге-Кутта. Розглянуто випадки руху навантаження з різною за величиною швидкістю, а також отримано результати для рівносповільненого руху хвилі тиску.

Ключові слова: *нестаціонарна реакція; циліндрична оболонка; перехідні процеси; інтегральне перетворення Фур'є.*
Рис.: 3. Бібл.: 11.

Актуальність теми дослідження. Конструкції у вигляді пластин та оболонок широко використовуються в сучасній техніці, поєднуючи в собі малу вагу та високу жорсткість. Тонкостінні оболонки знаходять застосування в різних галузях, включаючи кораблебудування, авіабудування, ракетобудування, машинобудування, а також будівництво споруд. У процесі експлуатації складові конструкції піддаються динамічним навантаженням, які викликають у них коливання та нестаціонарні хвильові процеси. У зв'язку зі збільшенням вимог до точності розрахунків зростає роль динамічного моделювання роботи конструкцій, а також урахування перехідних процесів, що виникають у моменти часу, які йдуть за початком навантаження.

Постановка проблеми. Вивченню питань, пов'язаних з нестаціонарними реакціями пластин та оболонок, присвячені останні роботи авторів [4-8]. В представленій статті нескінченно довгі циліндричні оболонки з м'яким невагомим пружним заповнювачем розглянуті в аспекті вивчення перехідних процесів, що виникають як у момент прикладання навантаження, так і в наступні, безпосередньо після цього моменту, проміжки часу. Досліджено випадки руху радіального осесиметричного навантаження як з постійною, так і зі змінною швидкістю.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питанням аналізу нестаціонарних динамічних процесів в складних оболонках присвячено достатню кількість наукових праць [1-5]. Зокрема авторами публікації [5] отримано розв'язок нестаціонарної задачі для циліндричної оболонки у тривимірному пружному інерційному напівпросторі з вільною поверхнею. Акцент зроблено на випадок, коли до внутрішньої поверхні оболонки прикладаються врівноважені імпульсивні нормальні навантаження. Досліджено вплив нестаціонарної деформації оболонки на напружено-деформований стан напівпростору та на переміщення поверхні напівпростору. Для аналізу динамічного напружено-деформованого стану такої системи застосовано метод скінченних елементів. Картину нестаціонарної деформації нескінченої тришарової циліндричної оболонки під дією навантаження, яке прикладається в початковий момент часу до внутрішньої оболонки, а потім рухається зі сталою швидкістю в осьовому напрямку, вивчено авторами у статті [4]. Побудована

© Олексій Манжос, Андрій Пожуєв, Олена Міхайлуца, 2023

математична модель тришарової циліндричної оболонки із заповнювачем, яка занурена в ідеальну рідину. Запропонований підхід розширює математичні методи розв'язку початково-крайових задач механіки, у яких застосовуються інтегральні перетворення. Досліджено час встановлення процесу та перехід до стаціонарної задачі. Отримані результати можливо використовувати у якості еталонних для побудови моделей тонкостінних елементів конструкцій під дією навантажень.

У роботі [1] розглянуто задачу визначення напружено-деформованого стану циліндричних оболонок, підсилених вертикальними ребрами жорсткості під дією несиметричного квазірівномірного навантаження відповідно до моментної теорії. Припускаючи, що відсутній зсув в серединній поверхні оболонки, а також той факт, що оболонка є нерозтяжною в кільцевому напрямку, авторами розв'язана задача пошуку функції для визначення зусиль і переміщень корпусу циліндричної ємності при дії квазірівномірного навантаження, розрахунок проведено при заданих величинах коефіцієнта реакції та безрозмірної висоти. Розроблені спеціальні номограми, які дають змогу знаходити значення функцій складових напружено-деформованого стану за заданими величинами коефіцієнта реакції та безрозмірної висоти.

Задачу визначення напружено-деформованого стану тонкостінної циліндричної оболонки під дією зовнішнього тиску розглянуто в статті [3]. Отримано рівняння для окружних, поздовжніх і осьових переміщень в залежності від геометричних розмірів і пружних властивостей складових, не висуваючи при цьому гіпотезу про негерметичність оболонки в окружному напрямку та не приймаючи відсутність зміщення. Такі умови значно наближають розрахункову схему до реальних умов експлуатації циліндричної оболонки.

З розвитком рівня техніки зростає складність застосовуваних конструкцій та вимога до їхньої міцності та надійності. Поряд з експериментальними дослідженнями, елементи таких конструкцій слід піддавати ретельному теоретичному аналізу та розрахунковому обґрунтуванню міцності та стійкості. Застосування аналітичних методів обмежено рамками грубої ідеалізації, тому ефективне вирішення прикладних завдань динамічного деформування оболонок в умовах інтенсивного навантаження можливе лише із залученням чисельних методів. Авторами праці [2] для вивчення динамічного відгуку герметичної тонкостінної круглої трубчастої конструкції, підданої підводному вибуху в ближньому полі, проводились випробування на деформацію та пошкодження герметичної циліндричної трубчастої оболонки з різними внутрішніми тисками. Для виконання відповідного чисельного моделювання для дослідження було використано програмне забезпечення кінцевих елементів LS-DYNA. Однак, при розрахунку конструкцій, необхідно враховувати геометричну та фізичну нелінійність задачі; різні умови закріплення та навантаження, що робить чисельне моделювання нетривіальним та трудомістким завданням. В наукових дослідженнях [9-10] приділено увагу оберненим задачам механіки деформівного твердого тіла для циліндричної оболонки. Представлена в роботі [10] методика дозволяє ефективно ідентифікувати невідоме нестаціонарне навантаження, а її використання дозволяє побудувати теоретичну базу для реалізації управління параметрами пружно-деформівного стану елементів конструкцій у вигляді циліндричних оболонок. В публікації [9] наведено розв'язок граничної оберненої задачі для циліндричної оболонки під дією нерівномірного зовнішнього тиску. Запропонована постановка задачі пов'язана з відновленням напружено-деформованого стану системи за наявності недоступної для спостереження її частини.

Аналіз проведеного огляду показав, що завдання знаходження динамічних характеристик накладають обмеження на використовувані методи дослідження. Деякі з них виявляються практично не застосовними для конкретних прикладних задач. Тому для більш повного врахування всіх явищ застосовуються аналітичні, експериментальні, чисельні методи розрахунку та їх комбінації. Отже, проблема отримання доступних для огляду аналітичних формул, що дозволяють спрощувати чисельні схеми дослідження залишається актуальною.

Виділення недосліджених частин загальної проблеми. Проведений аналіз останніх досліджень і публікацій показав, що питанням дослідження перехідних процесів у елементах складених конструкцій приділено недостатньо уваги. При цьому корисним є порівняння результатів досліджень у випадках, коли елементи конструкції описуються різними за складністю моделями, що дозволить визначити межі достовірності отриманих результатів для кожної з них. Крім того, для побудованих моделей практично важливо побудувати картини деформації для різних типів поведінки навантаження, що прикладається.

Метою статті є розробка аналітичного методу розрахунку циліндричних оболонок з м'яким невагомим пружним шаром під дією рухомого радіального навантаження. Розглянуто випадки руху навантаження з різною за величиною швидкістю, а також рівносповільнений рух хвилі тиску. Для аналізу таких несталих процесів поставлена задача розробки алгоритму, що ґрунтується на застосуванні інтегрального перетворення Фур'є за осьовою координатою, а також використанні чисельного методу Рунге-Кутта для інтегрування в просторі зображень перетворених диференціальних рівнянь руху оболонки.

Виклад основного матеріалу.

1. Рух оболонки описується рівняннями, заснованими на гіпотезі Кірхгофа-Лява:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial x}=\rho\frac{1-\nu}{2G}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2};\qquad(1.1)$$

$$\frac{\nu}{R}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{w}{R^2}=-\rho\frac{1-\nu}{2G}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{1-\nu}{2Gh}(q_c-\rho),$$

де q_c – реакція з боку шару; ρ – інтенсивність заданого радіального навантаження; h, R – товщина та радіус серединної поверхні оболонки.

При записі рівнянь (1.1) враховано, що контакт між оболонкою і пружним шаром ковзкий, а зв'язок – двосторонній.

Зовнішній пружний шар приймається невагомим. Таке припущення є досить обґрунтованим для шару з великою жорсткістю або малою густиною. Для визначення реакції такого середовища застосовні три підходи. По-перше, можна використовувати рівняння теорії пружності, які в переміщеннях мають вигляд:

$$\begin{aligned}&(\lambda_c+2\mu_c)\frac{\partial\theta}{\partial z}+2\mu_c\frac{\partial w_\varphi}{\partial x}=0\\&(\lambda_c+2\mu_c)\frac{\partial\theta}{\partial x}+2\mu_c\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}(rw_\varphi)=0\\&\theta=\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}(zU_z)+\frac{\partial U_x}{\partial x};\quad 2w_\varphi=\frac{\partial U_z}{\partial x}-\frac{\partial Ux}{\partial z}\end{aligned}\qquad(1.2)$$

Пружний шар можна представити наближеною моделлю, у якій ураховується тільки радіальне переміщення. Можливість застосування подібних наближених моделей для розв'язання задач про радіальні коливання такої складеної конструкції аналізувалася раніше в роботах [4; 5], а для задачі про рухоме навантаження подібний підхід використовувався в [11]. При цьому радіальні переміщення пружного шару задовольняють рівнянню:

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial U_z}{\partial z}-\frac{U_z}{z^2}+\frac{\mu_c}{\lambda_c+2\mu_c}-\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2}=0.\qquad(1.3)$$

Рівняння (1.3) ще раз спроститься, якщо уявити пружний шар моделлю, складеною з «дисків», не пов'язаних за координатою. Для такої моделі замість (1.3) маємо таке рівняння:

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial U_z}{\partial z}-\frac{U_z}{z^2}=0\qquad(1.4)$$

Пружний шар має скінчені розміри із ненавантаженою зовнішньою поверхнею. Тоді граничні умови на його бічних поверхнях мають вигляд:
при використанні рівнянь (1.2)

$$\text{при } z = R \quad \sigma_{zx} = 0; \quad \sigma_{zz} = -q_c; \quad U_z = w;$$

$$\text{при } z = b \quad \sigma_{zx} = 0; \quad \sigma_{zz} = 0. \tag{1.5}$$

У разі використання рівнянь (1.3) або (1.4) необхідно в (5) відкинути умови для дотичних напружень.

Початкові умови при для рівнянь (1) мають вигляд:

$$U = w = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \tag{1.6}$$

Необхідно проінтегрувати систему (1.1) при початкових умовах (1.6), попередньо визначивши з (1.2)–(1.5) реакцію з боку пружного шару.

2. Визначимо залежність радіальних переміщень оболонки від реакції пружного шару для кожної з трьох моделей. Переходячи до безрозмірних змінних і застосовуючи перетворення Фур'є за x', загальний розв'язок перетворених рівнянь (2.1) у просторі зображень запишемо у вигляді:

$$U_r' = \frac{1}{\beta}\{C_1[\zeta r' I_0(\xi r') - 4(1-\nu_c) I_1(\xi r')] + C_2 I_1(\xi r') +$$
$$+ C_3[\xi r' K_0(\xi r') - 4(1-\nu_c) K_1(\xi r')] - C_4 K_1(\xi r')\}; \tag{2.1}$$
$$U_x' = \frac{1}{\beta}\{C_1 \zeta r' I_1(\xi r') + C_2 I_0(\xi r') - C_3 \zeta r' K_1(\xi r') + C_4 K_0(\xi r')\},$$

де $\beta = \frac{h}{R}$; $\{U_r', U_x'\} = \frac{1}{h}\{\overline{U}_r, \overline{U}_x\}$; ξ – параметр перетворення Фур'є, $I_n(x)$, $K_n(x)$ – функції Беселя від уявного аргументу першого та другого роду, а функції $C_k(\xi)$ визначаються з граничних умов (1.5).

Закон Гука, переписаний з використанням співвідношень Коші, у просторі зображень має вигляд:

$$\frac{\sigma_{rr}}{\beta\mu_r} = \frac{2\nu_c}{1-2\nu_c}\left(i\xi U_x' + \frac{U_r'}{r'}\right) + \frac{2(1-\nu_c)}{1-2\nu_c} \cdot \frac{dU_r'}{dr'}; \tag{2.2}$$

$$\frac{\overline{\sigma}_{rx}}{\beta\mu_c} = \frac{dU_x'}{dr'} + i\xi U_r'. \tag{2.3}$$

Підставляючи (2.1) (2.2) – (2.3), отримуємо вирази для трансформант напружень через бесселеві функції. Задовольняючи потім перетвореним граничним умовам (1.5), отримуємо аналогічно до роботи [11] вираз трансформанти нормальної реакції пружного шару через трансформанту радіального переміщення оболонки. Цей вираз має громіздкий вигляд [11] і тут не виписується. Якщо пружний шар нескінчений, то (2.1) необхідно покласти $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, і тоді зазначена вище залежність реакція-переміщення оболонки набуде вигляду:

$$q_c = -\mu_c f(\xi)\overline{\omega}; \tag{2.4}$$

$$f(\xi) = \frac{\xi^2}{2(1-\nu_c^2)}\left[\frac{I_0^2(\xi)}{I_1^2(\xi)} - 1\right] - \frac{1}{1+\nu_c}. \tag{2.5}$$

При використанні рівнянь (1.3) у випадку нескінченого пружного шару функцію *f(ξ)* в (2.4) необхідно обчислити за формулою

$$f(\xi)=\frac{1}{\nu_1^2}\left[\nu_1\xi\frac{I_0(\nu_1\xi)}{I_1(\nu_1\xi)}-2\nu_1^2\right];\ \nu_1^2=\frac{1-2\nu_c}{2(1-\nu_c)}. \tag{2.6}$$

Для моделі (1.4) у разі пружного шару скінченого розміру залежність реакція-переміщення оболонки має вигляд:

$$q_c=-\beta\mu_c\frac{2\left(1-\varepsilon^2\right)}{\left(1+\varepsilon^2-2\nu_c\right)}\omega;\ \varepsilon=\frac{b}{R} \tag{2.7}$$

У разі нескінченого пружного шару тут необхідно покласти $\varepsilon = 0$. Для всіх моделей після отримання залежності пружний шар – переміщення оболонки подальший розв'язок зводиться до розгляду у просторі зображень диференціальних рівнянь руху оболонки. Опишемо одержання остаточного розв'язку при використанні зв'язку у формі (2.7). Для співвідношень (2.4) – (2.6) алгоритм аналогічний.

3. У просторі зображень, переходячи до безрозмірних величин, рівняння (1.1) перепишемо у вигляді:

$$\frac{d^2U}{d\tau^2}=-\frac{2}{1-\nu}\xi^2\overline{U}+i\frac{2\nu}{1-\nu}\xi\overline{\omega};$$

$$\frac{d^2\overline{\omega}}{d\tau^2}=-i\frac{2}{1-\nu}\xi\overline{U}-\varphi_1(\xi)\overline{\omega}-\frac{1}{G\beta^2}\overline{P}(\xi,\tau); \tag{3.1}$$

$$\varphi_1(\xi)=\frac{2}{1-\nu}\left(1+\frac{\beta^2}{12}\xi^4+\frac{1}{\gamma\beta}\cdot\frac{2\left(1-\varepsilon^2\right)}{\left(1+\varepsilon^2-2\nu_c\right)}\right);\ \gamma=\frac{G}{G_c};$$

$$\tau=\frac{c_St}{R};\ c_S=\sqrt{\frac{G}{\rho}};\ x'=\frac{x}{R};\ \{U,\omega\}=\frac{\{U',\omega'\}}{h}. \tag{3.2}$$

Розглянемо випадок, коли в початковий момент часу $t = 0$ до оболонки раптово прикладається кільцеве осесиметричне навантаження, яке потім переміщується вздовж поверхні оболонки в осьовому напрямку з постійною швидкістю, тоді

$$p(x,t)=p_0\delta(x-ct). \tag{3.3}$$

Переходячи до безрозмірних змінних згідно з (3.2) та застосовуючи перетворення Фур'є, отримуємо

$$\overline{p}(\xi,\tau)=p_0\left[f_1(\xi,\tau)-if_2(\xi,\tau)\right];\ M_s=\frac{c}{c_S}. \tag{3.4}$$

$$f_1(\xi,\tau)=\cos(M_s\xi\tau);\ f_2(\xi,\tau)=\sin(M_s\xi\tau). \tag{3.5}$$

Віднесемо переміщення оболонки до величини $p_0/G\beta^2$ й шукатимемо розв'язок рівнянь (3.1) у вигляді

$$U=U_1+iU_2;\ \omega=\omega_1+i\omega_2 \tag{3.6}$$

Тоді для визначення $\overline{U}_1\div\overline{\omega}_2$ приходимо до наступної задачі Коші:

$$\frac{d^2\overline{U}_1}{d\tau^2}=-\frac{2}{1-\nu}\xi^2\overline{U}_1-\frac{2\nu}{1-\nu}\xi\overline{\omega}_2;$$

$$\frac{d^2\overline{U}_2}{d\tau^2} = -\frac{2}{1-\nu}\xi^2\overline{U}_2 + \frac{2\nu}{1-\nu}\xi\overline{\omega}_1;$$

$$\frac{d^2\omega_1}{d\tau^2} = \frac{2\nu}{1-\nu}\xi\overline{U}_2 - \varphi_1(\xi)\omega_1 - f_1(\xi,\tau); \qquad (3.7)$$

$$\frac{d^2\omega_2}{d\tau^2} = -\frac{2\nu}{1-\nu}\xi\overline{U}_1 - \varphi_1(\xi)\omega_2 + f_2(\xi,\tau);$$

$$\overline{U}_1 = \overline{U}_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0; \quad \frac{dU_1}{d\tau} = \frac{dU_2}{d\tau} = \frac{d\omega_1}{d\tau} = \frac{d\omega_2}{d\tau} = 0; \quad (\tau = 0). \qquad (3.8)$$

Система (3.7) з початковими умовами (3.8) інтегрувалася для усіх необхідних значень параметра перетворення Фур'є ξ на ЕОМ методом Рунге-Кутта. Після цього за формулами обернення знаходилися необхідні величини, наприклад, радіальні переміщення оболонки подаються у вигляді

$$\omega^* = \frac{\omega G}{p_0} = \frac{1}{\pi\beta}\int_0^\infty (\omega_1\cos(\xi x) - \omega_2\sin(\xi x))d\xi\,. \qquad (3.9)$$

Програма розрахунку складена в такий спосіб, при якому з обчислення інтегралів виду (3.9) за методом Файлона система (3.7) інтегрується за всіма ξ у вузлах інтегрування, причому масиви величин для усіх необхідних значень τ запам'ятовуються. Ці масиви потім багаторазово використовуються в методі Файлона для різних значень x', що дозволяє будувати картини розподілу переміщень оболонки за її довжиною в різні моменти часу.

При розрахунках приймали так значення безрозмірних параметрів: $\beta = 0{,}004$; $\varepsilon = 0{,}8$; $\nu = \nu_c = 0{,}3$; $\gamma = 125$. Безрозмірна швидкість руху навантаження M_S, а також безрозмірний час τ, для якого будується картина деформування, змінювалися. Збіжність інтегралів у (3.9), а також точність розв'язання задачі Коші (3.7)–(3.8) контролювалися шляхом чисельних експериментів.

На рис. 1 показано розподіл прогинів оболонки за довжиною для різних моментів часу під час руху навантаження з постійною швидкістю, причому $M_S = 0{,}1$. Для кривої 1 – $\tau = 0{,}2$; 2 – $\tau = 0{,}4$; 3 – $\tau = 0{,}8$; 4 – $\tau = 1{,}2$; 5 – $\tau = 2$.

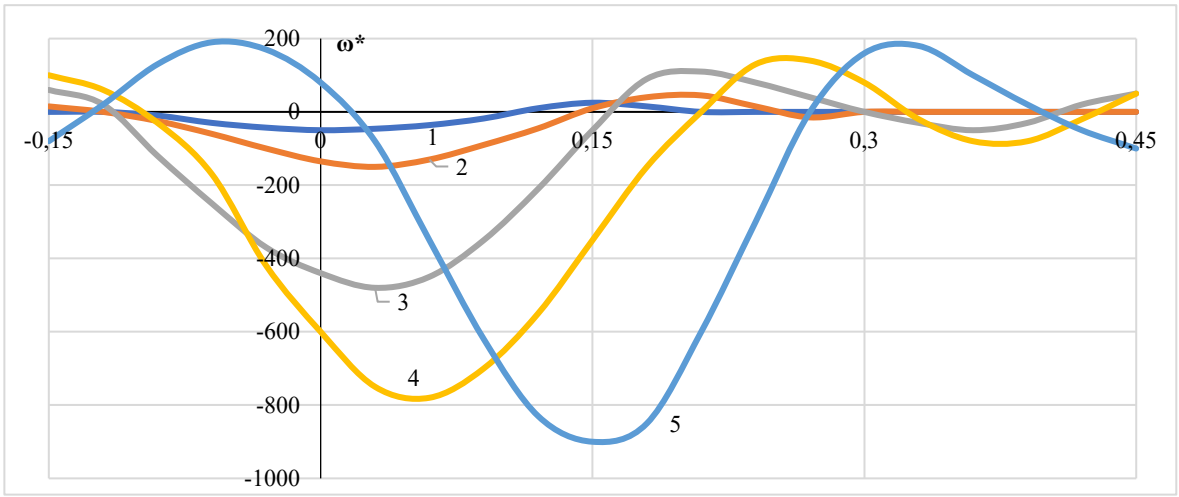

Рис. 1. Розподіл прогинів оболонки за довжиною для різних моментів часу під час руху навантаження зі швидкістю $M_S = 0{,}1$

Як видно з рис. 1, на відміну від стаціонарного розв'язку, симетрія щодо місця застосування кільцевого навантаження тут порушується, причому максимуми прогинів відстають від навантаження і в перші моменти часу після початку руху інтенсивно зростають, проте вже для $\tau = 2$ зростання практично припиняється і при подальшому збільшенні часу прогини

у межах дії навантаження починають зменшуватися, прагнучі до стаціонарних значень. Паралельно з цим максимуми кривої прогинів поступово зміщуються під навантаження, що також вказує на початок встановлення процесу, оскільки при $M_S = 0{,}1$ у відповідній стаціонарній задачі картина деформування для кільцевого навантаження повністю симетрична щодо початку системи координат, яка переміщається разом з навантаженням.

Зазначена вище тенденція до встановлення процесу деформування ще помітніша у разі меншої швидкості руху навантаження. Так, на рис. 2 показано результати прорахунків для $M_S = 0{,}03$, причому тут крива 1 відповідає $\tau = 1{,}0$; 2 – $\tau = 2{,}0$; 3 – $\tau = 5{,}0$.

Розглянуто також випадок рівноуповільненого руху кільцевого навантаження, коли замість (3.3) маємо

$$p(x,t) = p_0\delta\left(x - \left(V_0 t - \frac{at^2}{2}\right)\right). \tag{3.10}$$

Тут V_0 – початкова швидкість; a – сповільнення.

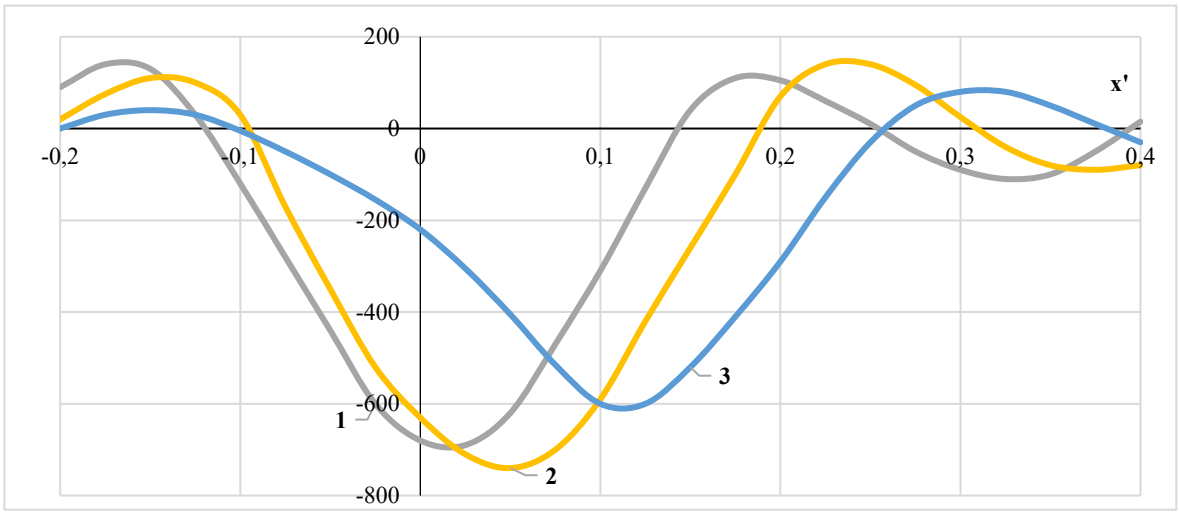

Рис. 2. Розподіл прогинів оболонки за довжиною для різних моментів часу під час руху навантаження зі швидкістю $M_S = 0{,}03$

Переходячи до безрозмірних параметрів та застосовуючи перетворення Фур'є, отримуємо замість (3.5) для функцій f_1 та f_2 наступні уявлення

$$f_1(\xi,\tau) = \cos\left(M_s\tau\left(1 - \frac{1}{2}M_s\omega\tau\right)\xi\right); \quad f_2(\xi,\tau) = \sin\left(M_s\tau\left(1 - \frac{1}{2}M_s\omega\tau\right)\xi\right), \tag{3.11}$$

де ω – безрозмірне уповільнення, що обчислюється за формулою $\omega = aR/V_0^2$. Для такого навантаження викликає інтерес поведінка оболонки на проміжку часу від початку руху до зупинки, причому час зупинки визначається за формулою $\tau_k = 1/M_s\omega$.

На рис. 3 побудовані прогини оболонки для уповільненого руху кільцевого навантаження, причому $M_S = 0{,}1$; $\omega = 5$. Для кривої 1 – $\tau = 0{,}4$; $V = 0{,}8\ V_0$; $x' = 0{,}036$; для кривої 2 – $\tau = 0{,}8$; $V = 0{,}6\ V_0$; $x' = 0{,}064$; для кривої 3 – $\tau = 1{,}2$; $V = 0{,}4\ V_0$; $x' = 0{,}084$; для кривої 4 – $\tau = 1{,}6$; $V = 0{,}2\ V_0$; $x' = 0{,}096$; для кривої 5 – $\tau = 2$; $V = 0$; $x' = 0{,}1$. Як видно з рис. 3 з моменту застосування навантаження прогини спочатку наростають швидко (криві 1, 2, 3), потім за той же проміжок часу зростання стає значно меншим (криві 3 і 4), а з моменту зупинки прогини починають зменшуватися (криві 4 і 5), хоча ще деякий час ефект динамічного застосування навантаження продовжує позначатися.

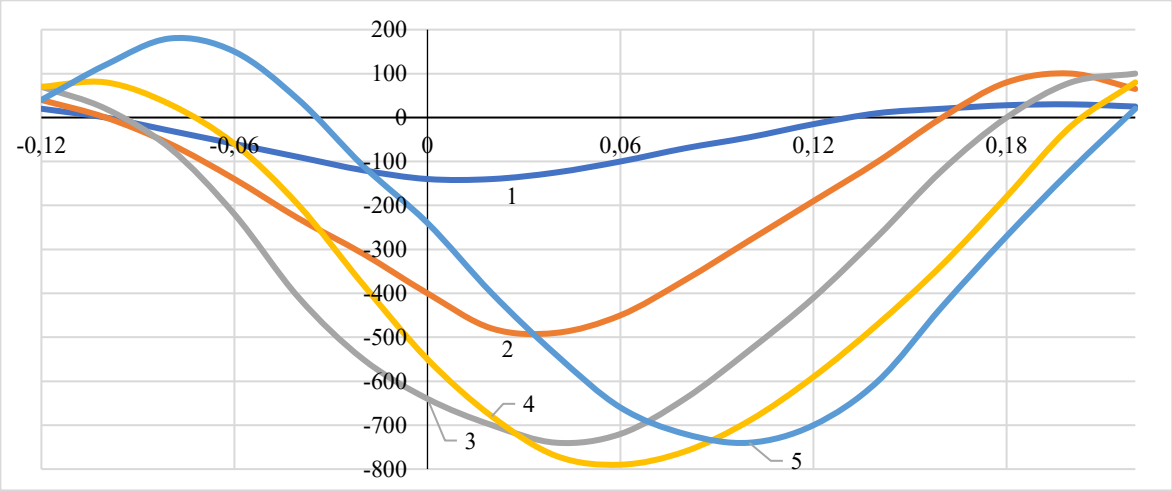

Рис. 3. Розподіл прогинів оболонки при уповільненому русі кільцевого навантаження зі швидкістю $M_S = 0,1$

Аналогічним чином можна отримати результати для прискореного навантаження і, взагалі, навантаження, швидкість якого змінюється у часі довільним чином. При цьому змінюється лише вид функцій f_1 і f_2, що входять до правих частин рівнянь (3.7). Без принципових змін, лише заміною функції (3.2), алгоритм придатний для будь-яких безінерційних моделей пружного шару. При заміні рівнянь руху оболонки (1.1) рівняннями типу Тимошенко зміниться порядок системи (3.1) та відповідно (3.7), проте хід розв'язку залишається таким самим, як і описаний у цій статті.

Висновки. У представленій роботі вперше побудовано математичну модель нестаціонарної поведінки оболонки із зовнішнім шаром під дією рухомого навантаження. Проведено порівняльний аналіз різних моделей оболонки та побудовано картини деформації як для прискореного, так і для уповільненого руху. Отримано величини коефіцієнтів динамічного перевантаження та час встановлення процесу для різних швидкостей руху, що дозволить встановити межі застосування стаціонарних розв'язків. Отримана методика може бути використана при побудові як інженерних розрахунків складових конструкцій, так і для дослідження перехідних процесів у моделях, які базуються на більш точних рівняннях руху.

Список використаних джерел

1. Махінько Н. О. Розрахунок тонкостінних циліндричних оболонок на асиметричне навантаження за моментною теорією / Н. О. Махінько // Збірник наукових праць УкрДУЗТ. – 2019. – Вип. 184. – С. 51-61.

2. Research on the dynamic response of pressurized cylindrical shell structures subjected to a near-field underwater explosion / W.-s. Mao, M.-s. Zhong, X.-b. Xie, H.-y. Ma, G.-l. Yang, L. Fan // AIP Advances 13, 025046. – 2023. – No. 2(64). – P. 68-71.

3. Deformation of cylindrical shell by external pressure / N. Fidrovska, E. Slepuzhnikov, I. Perevoznik, S. Khursenko // Sciences of Europe. – 2021. – No. 2(64). – P. 68-71.

4. Пожуєв А. В. Нестаціонарна реакція тришарової циліндричної оболонки, яка занурена у рідину / А. В. Пожуєв, О. М. Міхайлуца // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2018. – № 1. – С. 119-123.

5. Пожуєв В. І. Нестаціонарна деформація циліндричної оболонки у пружному півпросторі з вільною поверхнею / В. І. Пожуєв, А. В. Пожуєв, А. В. Фасоляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. –2016. – № 1. – С. 119-126.

6. Антоненко Н. М. Плоска термопружна деформація багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами / Н. М. Антоненко // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2018. – Вип. 39. – С. 4-13.

7. Pozhuev A. V. Action non-stationary load on a two-layer cylindrical shell with an elastic interlayer / A. V. Pozhuev, E. N. Mihaylutsa // Journal of the Sevastopol National Technical University. Series: Mechanics, Power Engineering, Ecology. – 2008. – Vol. 88. – P. 5-12.

8. Пожуєв А. В. Нестаціонарна просторова деформація двошарової пластини скінчених розмірів з неідеальним зв'язком / А. В. Пожуєв, О. М. Міхайлуца // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2011. – № 1. – С. 139-143.

9. Ободан Н. І. Визначення напружено-деформівного стану точок оболонки, спостережної на частині її поверхні / Н. І. Ободан, В. О. Громов // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – 2012. – № 18. – С. 140-147.

10. Воропай О. Дві обернені нестаціонарні задачі осесиметричного деформування пружної циліндричної оболонки скінченної довжини / О. Воропай, С. Поваляєв, А. Шарапата // Автомобільний транспорт. – 2022. – № 51. – С. 74-84.

11. Украинец В. Н. Динамика трехслойной оболочки в упругом полупространстве под воздействием подвижной нагрузки / В. Н. Украинец, С. Р. Гирнис // Наука и техника Казахстана. – 2020. – № 1. – С. 7-20.

References

1. Makhinko, N.A. (2019). Rozrakhunok tonkostinnykh tsylindrychnykh obolonok na asymetrychne navantazhennia za momentnoiu teoriieiu [Calculation of thin-walled cylindrical shells for an asymmetric load according to the moment theory]. *Zbirnyk naukovykh prats UkrDUZT – Collection of scientific works of UkrGUZT*, (184), 51-61.

2. Mao, W.S, Zhong, M. S., Xie, X.B., Ma, H.Y., Yang, G.L, & Fan., L. (2023). Research on the dynamic response of pressurized cylindrical shell structures subjected to a near-field underwater explosion. *AIP Advances*, 2(64), 68–71.

3. Fidrovska, N., Slepuzhnikov, E., Perevoznik, I., & Khursenko, S. (2021). Deformation of cylindrical shell by external pressure. *Sciences of Europe*, 2(64), 68–71.

4. Pozhuyev, A.V., & Mikhaylutsa, O.M. (2018). Nestatsionarna reaktsiia trysharovoi tsylindrychnoi obolonky, yaka zanurena u ridynu [Non-stationary reaction of a three-layer cylindrical shell immersed in a liquid]. *Novi materialy i tekhnolohii v metalurhii ta mashynobuduvanni – New materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering: scientific and technical journal,* (1), 119–123.

5. Pozhuyev, V.I., Pozhuyev, A.V., & Fasolyak, A.V. (2016). Nestatsionarna deformatsiia tsylindrychnoi obolonky u pruzhnomu pivprostori z vilnoiu poverkhneiu [Unsteady deformation of a cylindrical shell in an elastic half-space with a free surface]. *Novi materialy i tekhnolohii v metalurhii ta mashynobuduvanni – New materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering: scientific and technical journal,* (1), 119–126.

6. Antonenko, N.M. (2018). Ploska termopruzhna deformatsiia bahatosharovoi plyty z pruzhnymy zviazkamy mizh sharamy [Plane thermoelastic deformation of a multilayer plate with elastic bonds between layers]. *Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetu imeni V. N. Karazina. Seriia: Matematychne modeliuvannia. Informatsiini tekhnolohii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia – Bulletin of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Math modeling. Information Technology. Automated control system,* (39), 4–13.

7. Pozhuyev, A.V., & Mikhaylutsa, O.M. (2008). Action non-stationary load on a two-layer cylindrical shell with an elastic interlayer. *Journal of the Sevastopol National Technical University. Series: Mechanics, Power Engineering, Ecology,* (88), 5–12.

8. Pozhuyev, A.V., & Mikhaylutsa, O.M. (2011). Nestatsionarna prostorova deformatsiia dvosharovoi plastyny skinchenykh rozmiriv z neidealnym zviazkom [Non-stationary spatial deformation of a two-layer plate of finite dimensions with a non-ideal bond]. *Novi materialy i tekhnolohii v metalurhii ta mashynobuduvanni – New materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering: a scientific and technical journal,* (1), 139–143.

9. Obodan, N.I., & Gromov, V.O. (2012). Vyznachennia napruzheno-deformivnoho stanu tochok obolonky, sposterezhnoi na chastyni yii poverkhni [Determination of the stress-strain state of the shell points observed on part of its surface]. *Problemy obchysliuvalnoi mekhaniky i mitsnosti konstruktsii – Problems of Computational Mechanics and Structural Strength: Sat. scientific wash*, (18), 140–147.

10. Voropay, O., Povalyaev, S., & Sharapata, A. (2022). Dvi oberneni nestatsionarni zadachi osesymetrychnoho deformuvannia pruzhnoi tsylindrychnoi obolonky skinchennoi dovzhyny [Two inverse non-stationary problems of axisymmetric deformation of an elastic cylindrical shell of finite length]. *Avtomobilnyi transport – Automobile transport*, (51), 74–84.

11. Ukrainets, V.N., & Girnis, S.R. (2020). Dynamyka trekhsloinoi obolochky v upruhom poluprostranstve pod vozdeistvyem podvyzhnoi nahruzky [Dynamics of a three-layer shell in an elastic half-space under the influence of a moving load]. *Nauka y tekhnyka Kazakhstana – Science and technology of Kazakhstan*, (1), 7-20.

Отримано 24.04.23

UDC 539.3

Oleksiy Manzhos[1], Andriy Pozhuyev[2], Olena Mikhailutsa[3]

[1]Graduate student of the Department of Fundamental and Applied Mathematics
Zaporizhzhia National University (Zaporizhia, Ukraine)
E-mail: ojiekca1996@gmail.com

[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics
Zaporizhzhia National University (Zaporizhia, Ukraine)
E-mail: scorpio6828@gmail.com. **ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-4083-5139
ResearcherID: AAE-6507-2019. **Scopus Author ID:** 6506407054

[3]PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Electronics, Information Systems and Software
Zaporizhzhia National University (Zaporizhia, Ukraine)
E-mail: elenamikhaylutsa7@gmail.com. **ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-2935-7997.
ResearcherID: ААФ-4942-2019. **Scopus Author ID:** 16407827200

NON-STATIONARY REACTION OF A CYLINDRICAL SHELL WITH A SPRING LAYER TO THE ACTION OF A MOVED RADIAL LOAD

An analysis of studies and publications on the issues of determining the stress-strain state of constituent structures has shown that the problems of choosing and modeling the operation of structures in the form of infinitely long cylindrical shells with a soft, weightless elastic layer have not received enough attention in the scientific literature today. The use of modern approaches to the construction of mathematical models and algorithms makes it possible to take into account various kinds of dynamic loads that are transferred to structural elements in the form of cylindrical shells.

The aim of the article is to develop an analytical method for calculating cylindrical shells with a weightless soft elastic layer under the action of a moving radial load.

Based on the principles and approaches to the analysis of non-stationary dynamic processes in complex shells, the paper presents an algorithm based on the application of the integral Fourier transform along the axial coordinate, as well as the use of the Runge-Kutta numerical method for integrating the transformed differential equations of shell motion in the image space. Cases of load movement with different speeds and uniform pressure wave movement are considered. The dependence of the radial displacements of the shell on the reaction of the elastic layer, represented by an approximate model, taking into account only the radial displacement, is determined. The cases of motion of a radial axisymmetric load both with constant and with varying speed are investigated. The distribution of shell deflections along the length is given for different moments of time during the movement of the load at a constant speed, as well as for the slow movement of the ring load.

In this work, for the first time, a mathematical model of the non-stationary behavior of a shell with an outer layer under the action of a moving load is constructed. A comparative analysis of various shell models has been carried out and deformation patterns of both accelerated and slow motion have been constructed. The transient processes that occur at the moment of load application and the subsequent time intervals immediately after this moment are considered. The presented materials can be used for dynamic modeling of the operation of structures in the form of plates and shells.

Keywords: *non-stationary reaction; cylindrical shell; transitional processes; integral Fourier transform.*

Fig.: 3. References: 11.

Манжос О., Пожуєв А., Міхайлуца О. Нестаціонарна реакція циліндричної оболонки з пружним шаром на дію рухомого радіального навантаження. *Технічні науки та технології.* 2023. № 2(32). С. 107-116.