DOI: 10.25140/2411-5363-2024-1(35)-346-356
УДК 528.2

Андрій Согор[1], Дмитро Марченко[2], Христина Крива[3]

[1]кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри картографії та геопросторового моделювання
Національний університет «Львівська політехніка» (Львів, Україна)
E-mail: andrii.r.sohor@lpnu.ua. **ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-0084-9552
ResearcherID: ABI-6288-2020. **Scopus Author ID:** 57224950613

[2]кандидат технічних наук, завідувач кафедри картографії та геопросторового моделювання
Національний університет «Львівська політехніка» (Львів, Україна)
E-mail: dmytro.o.marchenko@lpnu.ua. **ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-5321-0189
ResearcherID: HJI-7657-2023. **Scopus Author ID:** 57203153570

[3]аспірант кафедри картографії та геопросторового моделювання
Національний університет «Львівська політехніка» (Львів, Україна)
E-mail: khrystyna.o.kryva@lpnu.ua. **ORCID:** https://orcid.org/0009-0000-1564-1511. **ResearcherID:** KBC-7973-2024

СПОСОБИ ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РЕФЕРЕНЦ-ЕЛІПСОЇДА ЗА ДАНИМИ РЕГІОНАЛЬНОГО ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ

У цій роботі отримані параметри референц-еліпсоїда за даними регіонального гравітаційного поля Землі та виконані відповідні дослідження на прикладі території України. За результатами одержаних способів обчислень можна зауважити наступне. Визначення всіх п'яти параметрів референц-еліпсоїда за даними на територію України призводить до сильної функціональної залежності параметрів між собою. Ця залежність (кореляція) досить добре демонструється на значеннях середніх квадратичних похибок, які співрозмірні з отриманими параметрами і навіть перевищують останні. Беручи до уваги ці зауваження, можна зробити висновок, що спільне обчислення всіх п'яти параметрів методом найменших квадратів на територію України не дає нам очікуваних хороших результатів. Це добре видно з обчислень за даними висот геоїда, представлених у вигляді сфероїдальної трапеції, яка описує територію України. На відміну від такого розв'язку, дослідження з визначення тільки параметрів внутрішнього орієнтування референц-еліпсоїда при заданих його великій півосі та стисненні, дають можливість досить добре підібрати такий земний еліпсоїд, який би найкращим чином представляв геоїд, побудований для певного регіону, наприклад, на територію України.

Ключові слова: *велика піввісь еліпсоїда; геоїд; гравітаційне поле Землі; земний еліпсоїд; параметри референц-еліпсоїда; стиснення еліпсоїда.*

Табл.: 1. Бібл.: 9.

Актуальність теми дослідження. Незважаючи на високу точність глобальних геодезичних референцних систем та їх широке використання в GPS-вимірюваннях, все більш широко починають застосовуватись регіональні (локальні) геодезичні системи. Наприклад, Світова геодезична система 1984 (WGS 84) налічує 83 такі локальні системи. Поява останніх спричинена появою нових задач фізичної геодезії. Це так звані регіональні задачі, які дають можливість більш детально вивчати як геометричні, так і гравіметричні (фізичні) властивості досліджуваного регіону (території). Дедалі більшої актуальності набувають, наприклад, задачі побудови високоточного регіонального геоїда, регіонального еліпсоїда, визначення регіональної нормальної формули сили тяжіння та інші.

Саме тому в теперішній час для обробки геодезичних даних в регіональних масштабах (наприклад, для якоїсь конкретної країни) приймаються як національні, так і регіональні референц-еліпсоїди, а для глобальних досліджень – земний референц-еліпсоїд GRS 80 або, при обробці даних GPS – земний референц-еліпсоїд WGS 84.

Загалом, для обробки геодезичної інформації можна застосовувати будь-який референц-еліпсоїд, який з відповідною точністю представляє узагальнену фігуру Землі. За відхиленнями геоїда від такого еліпсоїда можна визначити поправки, які повинні бути введені в результати геодезичних вимірювань для приведення останніх до поверхні цього еліпсоїда.

Однак при великих відхиленнях геоїда від референц-еліпсоїда мають місце великі відповідні їм редукції геодезичних вимірювань, які є обтяжені значними похибками внаслідок лінеаризації основної задачі геодезії і, як наслідок, задачі приведення геодезичних вимірювань на еліпсоїд. Отже, з практичного погляду, для зменшення впливу згаданих похибок лінеаризації та одержання методологічно оптимальних результатів опрацювання геодезичних даних доцільно й навіть необхідно використовувати такий референц-еліпсоїд, який найкращим чином описує узагальнену поверхню геоїда в регіоні конкретних геодезичних робіт.

Враховуючи вище сказане, виникло питання про національну референц-систему координат, оскільки така система має деякі переваги перед загальноземною системою в процесі практичної обробки масових геодезичних вимірювань, особливо лінійних. У зв'язку з цим питання побудови національної референц-системи, а саме, визначення параметрів регіонального еліпсоїда, є досить важливі і актуальні.

Постановка проблеми. Як відомо, результати геодезичних вимірювань, які проводяться на земній поверхні для визначення взаємного положення пунктів, тобто кути і відстані між цими пунктами, першочергово відносяться до різних рівневих поверхонь Землі. Те ж саме можна сказати і щодо результатів спостережень в різних точках поверхні Землі, а саме: знаходження їх астрономічної широти, довготи й азимута, які дають напрям лінії важка, як нормалі до рівневих поверхонь в цих пунктах. Тому вказані результати геодезичних та астрономічних визначень повинні бути приведені до однієї рівневої поверхні Землі, тобто до поверхні геоїда [1; 5; 8].

Однак дана поверхня геоїда має досить складну форму. Зрозуміло, що складна поверхня не може служити координатною поверхнею для знаходження взаємного положення геодезичних пунктів. При математичному опрацюванні результатів астрономо-геодезичних вимірювань поверхня геоїда, як правило, заміняється відомою і більш простою поверхнею відносності, а саме: поверхнею деякого еліпсоїда, який має відповідні розміри та займає певне положення в тілі Землі. Такий еліпсоїд обертання прийнято називати референц-еліпсоїдом. Розміри референц-еліпсоїда та його положення або орієнтування в тілі Землі повинні бути встановлені таким чином, щоби його поверхня тою чи іншою мірою була близькою до поверхні геоїда [4].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженнями з визначення параметрів загального земного еліпсоїда займалися такі вчені, як Д. В. Загребін [2], Г. О. Мещеряков [3], М. С. Молоденський [4], Г. Моріц [5, 8]. Однак питання з обчислення параметрів регіонального референц-еліпсоїда, який би найкраще за принципом найменших квадратів підходив для поверхні території України, залишається відкритим.

Виділення недосліджених частин загальної проблеми. Розміри референц-еліпсоїда характеризуються, як правило, величинами його великої півосі й полярного стиснення, а положення його в тілі Землі переважно визначається складовими відхилення важка в площині меридіана та першого вертикала від нормалі до його поверхні і висотою геоїда в якій-небудь одній точці, яка приймається за вихідний (початковий) пункт геодезичних вимірів. При цьому напрям лінії важка у вихідному пункті відносно основних координатних площин (тобто площин земного екватора й початкового меридіана) встановлюється шляхом астрономічних визначень його широти та довготи. Шляхом виправлення астрономічної широти і довготи вихідного пункту за відхилення лінії важка від нормалі до поверхні референц-еліпсоїда в цьому ж пункті визначаються його геодезична широта і довгота, які разом із висотою геоїда в даному вихідному пункті служать так званими вихідними геодезичними датами для обробки геодезичних вимірювань на поверхні прийнятого референц-еліпсоїда [1; 3; 4].

Методологія такого наукового дослідження полягає в тому, що задача визначення регіонального еліпсоїда практично зводиться до знаходження деяких поправок $\Delta a, \Delta\alpha, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ до відомого, прийнятого нами, загального земного еліпсоїда GRS 80. Регіональний еліпсоїд для території України повинен бути таким, який би найкраще представляв геоїд (квазігеоїд) даного регіону. Тобто висоти геоїда відносно регіонального еліпсоїда в межах території України повинні бути якомога менші.

Мета статті. Виходячи із зазначеного вище, мета наших досліджень полягає у виконанні обчислень параметрів референц-еліпсоїда за даними регіонального гравітаційного поля Землі на прикладі геодезичних вимірювань висот геоїда, проведених на території України.

Для досягнення цієї мети в цій науковій роботі поставлені та вирішені такі *завдання*:

- Визначення лінійних елементів орієнтування еліпсоїда $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.
- Обчислення параметрів референц-еліпсоїда $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta a$.
- Знаходження величин регіонального еліпсоїда $\Delta x, \Delta y$.
- Обчислення невідомих параметрів референц-еліпсоїда Δx та Δa.
- Знаходження величин регіонального еліпсоїда Δy та Δa.
- Визначення параметрів еліпсоїда $\Delta z, \Delta a$.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо задачу визначення параметрів референц-еліпсоїда відносно земного еліпсоїда GRS 80 на базі відомих в геодезії формул параметричного методу зрівноваження вимірюваних величин.

Під визначенням референц-еліпсоїда тут будемо розуміти знаходження його параметрів: великої півосі a, полярного стиснення α та прямокутних координат його центра в тілі Землі: x_0, y_0, z_0. Зв'язок цих величин можна зобразити у вигляді скороченої формули перетворення Молоденського для геодезичної висоти [4]

$$\Delta H = \Delta x \cos \overline{B} \cos \overline{L} + \Delta y \cos \overline{B} \sin \overline{L} + \Delta z \sin \overline{B} + \left(\overline{a}\Delta\alpha + \overline{\alpha}\Delta a\right)\sin^2 \overline{B} + \Delta a .$$

Формула Молоденського, як неважко зауважити, дає зв'язок не самих параметрів, а деяких зміщень параметрів $\Delta a, \Delta\alpha, \Delta x, \Delta y, \Delta z$, тобто поправок, які представляють різниці параметрів деяких двох еліпсоїдів. У цій формулі: ΔH – різниця геодезичних висот деякої точки на поверхні Землі відносно кожного з двох еліпсоїдів. Практично, ця величина може бути записана як [2]

$$\Delta H = N - \overline{N} ,$$

де N і $\overline{N}$ – висоти геоїда відносно кожного з еліпсоїдів.

Отже, щоби знайти необхідні параметри a, α, x_0, y_0, z_0 деякого еліпсоїда E, потрібно вже мати якийсь еліпсоїд $\overline{E}$ із відомими параметрами $\overline{a}, \overline{\alpha}, \overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0$.

Тоді

$$\left.\begin{aligned} a &= \overline{a} + \Delta a ; \\ \alpha &= \overline{\alpha} + \Delta\alpha ; \\ x_0 &= \overline{x}_0 + \Delta x ; \\ y_0 &= \overline{y}_0 + \Delta y ; \\ z_0 &= \overline{z}_0 + \Delta z . \end{aligned}\right\}$$

Загалом можна використовувати будь-який відомий еліпсоїд $\overline{E}\left(\overline{a}, \overline{\alpha}, \overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0\right)$. Але, як ми побачимо нижче, найкраще прийняти саме геоцентричний еліпсоїд. Таким еліпсоїдом може бути, наприклад, земний еліпсоїд GRS 80 або земний еліпсоїд WGS 84 [7].

Як неважко зауважити, всі величини у формулі Молоденського із рискою зверху повинні бути відомі та віднесені до системи GRS 80, а величини без риски будуть невідомі.

Отже, задача визначення параметрів референц-еліпсоїда практично зводиться до знаходження деяких поправок $\Delta a, \Delta\alpha, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ до відомого, прийнятого нами, земного еліпсоїда GRS 80.

Референц-еліпсоїд для території України повинен бути таким, який би найкраще представляв геоїд даного регіону. Тобто висоти геоїда N відносно референц-еліпсоїда в межах території України повинні бути якомога менші. Враховуючи цю основну вимогу, виконаємо апріорні дослідження з визначення референц-еліпсоїда для України.

Оскільки нам необхідно визначити п'ять невідомих поправок $\Delta a, \Delta\alpha, \Delta x, \Delta y, \Delta z$, то потрібно мати хоча б п'ять точок у межах території України з відомими геодезичними координатами $\overline{B}, \overline{L}, \overline{H}$.

За планові координати $\overline{B}$ і $\overline{L}$ приймемо наближені геодезичні координати вершин сфероїдальної трапеції *ABCD* та її центра О, у яку (трапецію) вписується територія України.

Тобто $A\left(B_A = 52,5^0; L_A = 21,6^0\right)$; $B\left(B_B = 52,5^0; L_B = 40,0^0\right)$; $C\left(B_C = 44,1^0; L_C = 40,0^0\right)$; $D\left(B_D = 44,1^0; L_D = 21,6^0\right)$; $O\left(B_O = 48,3^0; L_O = 30,8^0\right)$.

Зауважимо, що хоча геодезичні координати точок *A, B, C, D, O* даються в системі референц-еліпсоїда Красовського, вони є наближеними, тому їх цілком можна вважати такими, що відомі в системі GRS 80 або WGS 84.

Висоти геоїда $\overline{N}$ відповідних точок території України можна обчислити із розкладу потенціалу сили тяжіння в ряд сферичних функцій. Скориставшись відомою моделлю GEMT1 (із *n* = *m* = 36) [9], отримаємо наступні значення $\overline{N}$:

$$\overline{N}_A = 30,7\ м;\ \overline{N}_B = 9,8\ м;\ \overline{N}_C = 16,5\ м;\ \overline{N}_D = 43,7\ м;\ \overline{N}_O = 25,9\ м.$$

Маючи необхідні вихідні дані та використовуючи формулу Молоденського, у якій невідомі поправки $\Delta a, \Delta\alpha, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ представлені в лінійному вигляді, запишемо наступні параметричні рівняння для описаних п'яти точок (*A, B, C, D, O*):

$$\left.\begin{aligned}
a_A\Delta x + b_A\Delta y + c_A\Delta z + d_A\overline{a}\Delta\alpha + e_A\Delta a + l_A = v_A;\\
a_B\Delta x + b_B\Delta y + c_B\Delta z + d_B\overline{a}\Delta\alpha + e_B\Delta a + l_B = v_B;\\
a_C\Delta x + b_C\Delta y + c_C\Delta z + d_C\overline{a}\Delta\alpha + e_C\Delta a + l_C = v_C;\\
a_D\Delta x + b_D\Delta y + c_D\Delta z + d_D\overline{a}\Delta\alpha + e_D\Delta a + l_D = v_D;\\
a_O\Delta x + b_O\Delta y + c_O\Delta z + d_O\overline{a}\Delta\alpha + e_O\Delta a + l_O = v_O,
\end{aligned}\right\}$$

де

$$\left.\begin{aligned}
a_A = \cos B_A \cos L_A; b_A = \cos B_A \sin L_A; c_A = \sin B_A; d_A = \sin^2 B_A; e_A = 1 - \overline{\alpha}\sin^2 B_A;\\
a_B = \cos B_B \cos L_B; b_B = \cos B_B \sin L_B; c_B = \sin B_B; d_B = \sin^2 B_B; e_B = 1 - \overline{\alpha}\sin^2 B_B;\\
a_C = \cos B_C \cos L_C; b_C = \cos B_C \sin L_C; c_C = \sin B_C; d_C = \sin^2 B_C; e_C = 1 - \overline{\alpha}\sin^2 B_C;\\
a_D = \cos B_D \cos L_D; b_D = \cos B_D \sin L_D; c_D = \sin B_D; d_D = \sin^2 B_D; e_D = 1 - \overline{\alpha}\sin^2 B_D;\\
a_O = \cos B_O \cos L_O; b_O = \cos B_O \sin L_O; c_O = \sin B_O; d_O = \sin^2 B_O; e_O = 1 - \overline{\alpha}\sin^2 B_O
\end{aligned}\right\}$$

та

$$v_A = N_A; v_B = N_B; v_C = N_C; v_D = N_D; v_O = N_O.$$

Праві частини даної системи рівнянь, як можна зауважити, будуть відігравати роль невідомих поправок. Оскільки така система із п'яти рівнянь має десять невідомих величин $\left(\Delta a, \Delta\alpha, \Delta x, \Delta y, \Delta z, v_A, v_B, v_C, v_D, v_O\right)$, то накладемо на неї (систему) додаткову умову методу найменших квадратів:

$$\sum v_i^2 \to \min,\ \text{де}\ i = A, B, C, D, O,$$

щоби одержати єдиний розв'язок.

Знайдемо спочатку коефіцієнти параметричних рівнянь поправок даної системи. Результати запишемо в таблицю 1.

Вільні члени параметричних рівнянь поправок цієї системи тоді можна записати

$$l_A = \overline{N}_A; l_B = \overline{N}_B; l_C = \overline{N}_C; l_D = \overline{N}_D; l_O = \overline{N}_O.$$

Підставляючи замість висот геоїда $\overline{N}_A, \overline{N}_B, \overline{N}_C, \overline{N}_D, \overline{N}_O$ їх значення, одержимо

$$l_A = 30,7\ м; l_B = 9,8\ м; l_C = 16,5\ м; l_D = 43,7\ м; l_O = 25,9\ м.$$

Таблиця 1 – Обчислення коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок

Назви точок	Величина	Значення	Величина	Значення	Коефіцієнт	Значення
т, A	$\cos B_A$	0,608761	$\cos B_A \cos L_A$	0,5660113	a_A	-0,5660113
	$\cos L_A$	0,929776	$\cos B_A \sin L_A$	0,2241001	b_A	-0,2241001
	$\sin B_A$	0,793353	$\sin^2 B_A$	0,6294089	c_A	-0,793353
	$\sin L_A$	0,368125			d_A	0,6294089
					e_A	-0,9978897
т, B	$\cos B_B$	0,608761	$\cos B_B \cos L_B$	0,4663377	a_B	-0,4663377
	$\cos L_B$	0,766044	$\cos B_B \sin L_B$	0,3913042	b_B	-0,3913042
	$\sin B_B$	0,793353	$\sin^2 B_B$	0,6294089	c_B	-0,793353
	$\sin L_B$	0,642788			d_B	0,6294089
					e_B	-0,9978897
т, C	$\cos B_C$	0,718126	$\cos B_C \cos L_C$	0,5501161	a_C	-0,5501161
	$\cos L_C$	0,766044	$\cos B_C \sin L_C$	0,4616027	b_C	-0,4616027
	$\sin B_C$	0,695913	$\sin^2 B_C$	0,4842949	c_C	-0,695913
	$\sin L_C$	0,642788			d_C	0,4842949
					e_C	-0,9983762
т, D	$\cos B_D$	0,718126	$\cos B_D \cos L_D$	0,6676963	a_D	-0,6676963
	$\cos L_D$	0,929776	$\cos B_D \sin L_D$	0,2643601	b_D	-0,2643601
	$\sin B_D$	0,695913	$\sin^2 B_D$	0,4842949	c_D	-0,6959130
	$\sin L_D$	0,368125			d_D	0,4842949
					e_D	-0,9983762
т, O	$\cos B_O$	0,665230	$\cos B_O \cos L_O$	0,5714059	a_O	-0,5714059
	$\cos L_O$	0,858960	$\cos B_O \sin L_O$	0,3406263	b_O	-0,3406263
	$\sin B_O$	0,746638	$\sin^2 B_O$	0,5574683	c_O	-0,746638
	$\sin L_O$	0,512043			d_O	0,5574683
					e_O	-0,9981309

Отже, приймаючи значення коефіцієнтів із таблиці 1 та значення обчислених вільних членів, розв’яжемо систему параметричних рівнянь поправок під умовою методу найменших квадратів. Тоді одержимо такі шукані параметри та їх середні квадратичні похибки:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x &= \ \ -5 \pm 28 \text{ м}\\
\Delta y &= -136 \pm 17 \text{ м}\\
\Delta z &= \ \ 982 \pm 549 \text{ м}\\
\bar{a}\Delta\alpha &= 783 \pm 393 \text{ м}\\
\Delta a &= -222 \pm 170 \text{ м.}
\end{aligned}\right\}.$$

Одержані апріорні значення параметрів регіонального референц-еліпсоїда та їх похибки вказують на досить сильну залежність (кореляцію) між невідомими величинами. Щоби виявити, які саме величини найбільше корелюють між собою, потрібно виконати деякі додаткові дослідження з обчислення шуканих параметрів. Розглянемо декілька способів.

Спосіб 1. Припустимо, що параметри Δa та $\Delta\alpha$ є відомими. Тоді будемо шукати лише лінійні елементи орієнтування $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ референц-еліпсоїда.

Тобто параметричні рівняння будуть мати вигляд:

$$\left.\begin{aligned}
a_A\Delta x + b_A\Delta y + c_A\Delta z + l_A^{(1)} &= v_A;\\
a_B\Delta x + b_B\Delta y + c_B\Delta z + l_B^{(1)} &= v_B;\\
a_C\Delta x + b_C\Delta y + c_C\Delta z + l_C^{(1)} &= v_C;\\
a_D\Delta x + b_D\Delta y + c_D\Delta z + l_D^{(1)} &= v_D;\\
a_O\Delta x + b_O\Delta y + c_O\Delta z + l_O^{(1)} &= v_O,
\end{aligned}\right\}$$

а вільні члени запишуться таким чином:

$$\left.\begin{aligned}
l_A^{(1)} &= \left(\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a\right)\sin^2 B_A + \Delta a + \bar{N}_A;\\
l_B^{(1)} &= \left(\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a\right)\sin^2 B_B + \Delta a + \bar{N}_B;\\
l_C^{(1)} &= \left(\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a\right)\sin^2 B_C + \Delta a + \bar{N}_C;\\
l_D^{(1)} &= \left(\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a\right)\sin^2 B_D + \Delta a + \bar{N}_D;\\
l_O^{(1)} &= \left(\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a\right)\sin^2 B_O + \Delta a + \bar{N}_O.
\end{aligned}\right\}$$

Відповідні коефіцієнти системи виберемо з таблиці 1. Для обчислення вільних членів потрібно ввести деякі числові значення для поправок Δa, $\Delta\alpha$, за які можемо прийняти параметри зміщення Європейської геодезичної референцної системи у Світовій геодезичній системі WGS 84 [7]

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta a = 251\,м;\\
&\Delta\alpha = 0{,}14192702\cdot 10^{-4};\\
&\Delta x = -87\ м;\\
&\Delta y = -98\ м;\\
&\Delta z = -121\,м.
\end{aligned}\right\}$$

Приймаючи значення Δa і $\Delta\alpha$ із цього виразу, обчислимо значення вільних членів. Тобто

$$l_A^{(1)} = -162{,}8\ м;\ l_B^{(1)} = -183{,}7\ м;\ l_C^{(1)} = -190{,}3\ м;\ l_D^{(1)} = -163{,}1\,м;\ l_O^{(1)} = -174{,}2\ м.$$

Тоді, маючи відповідні значення коефіцієнтів із таблиці 1 та вільних членів, розв'яжемо систему параметричних рівнянь під умовою методу найменших квадратів. Невідомі величини та їх середні квадратичні похибки набудуть такі значення:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta x = -58 \pm 9\ м;\\
&\Delta y = -167 \pm 8\ м;\\
&\Delta z = -115 \pm 8\ м.
\end{aligned}\right\}$$

Розглянемо тепер наступний спосіб.

<u>*Спосіб 2.*</u> Нехай нам відома тільки величина $\Delta\alpha$. Необхідно знайти параметри $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta a$. Параметричні рівняння в такому випадку набудуть вигляду:

$$\left.\begin{aligned}
a_A\Delta x + b_A\Delta y + c_A\Delta z + e_A\Delta a + l_A^{(2)} &= v_A;\\
a_B\Delta x + b_B\Delta y + c_B\Delta z + e_B\Delta a + l_B^{(2)} &= v_B;\\
a_C\Delta x + b_C\Delta y + c_C\Delta z + e_C\Delta a + l_C^{(2)} &= v_C;\\
a_D\Delta x + b_D\Delta y + c_D\Delta z + e_D\Delta a + l_D^{(2)} &= v_D;\\
a_O\Delta x + b_O\Delta y + c_O\Delta z + e_O\Delta a + l_O^{(2)} &= v_O,
\end{aligned}\right\}$$

а вільні члени рівні

$$\left.\begin{aligned}
l_A^{(2)} &= \bar{a}\sin^2 B_A\Delta\alpha + \bar{N}_A;\\
l_B^{(2)} &= \bar{a}\sin^2 B_B\Delta\alpha + \bar{N}_B;\\
l_C^{(2)} &= \bar{a}\sin^2 B_C\Delta\alpha + \bar{N}_C;\\
l_D^{(2)} &= \bar{a}\sin^2 B_D\Delta\alpha + \bar{N}_D;\\
l_O^{(2)} &= \bar{a}\sin^2 B_O\Delta\alpha + \bar{N}_O.
\end{aligned}\right\}$$

Коефіцієнти такої системи можна взяти з таблиці 1. Тоді вільні члени з врахуванням відомої $\Delta\alpha$, після нескладних обчислень будуть мати значення:

$$l_A^{(2)} = 87,7\ м;\ l_B^{(2)} = 66,8\ м;\ l_C^{(2)} = 60,3\ м;\ l_D^{(2)} = 87,5\ м;\ l_O^{(2)} = 76,4\ м.$$

Таким чином, враховуючи відповідні значення з таблиці 1, розв'яжемо систему параметричних рівнянь поправок під умовою методу найменших квадратів. Тоді одержимо:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= 110 \pm 89\ м; \\ \Delta y &= -67 \pm 53\ м; \\ \Delta z &= 101 \pm 115\ м; \\ \Delta a &= -39 \pm 154\ м. \end{aligned}\right\}$$

<u>Спосіб 3.</u> Нехай відомі величини $\Delta a, \Delta\alpha, \Delta z$. Потрібно знайти величини $\Delta x, \Delta y$. Параметричні рівняння поправок тоді запишуться як:

$$\left.\begin{aligned} a_A\Delta x + b_A\Delta y + l_A^{(3)} &= v_A; \\ a_B\Delta x + b_B\Delta y + l_B^{(3)} &= v_B; \\ a_C\Delta x + b_C\Delta y + l_C^{(3)} &= v_C; \\ a_D\Delta x + b_D\Delta y + l_D^{(3)} &= v_D; \\ a_O\Delta x + b_O\Delta y + l_O^{(3)} &= v_O. \end{aligned}\right\}$$

Коефіцієнти в цих рівняннях також можна вибрати із таблиці 1. Тоді вільні члени такої системи, як неважко зауважити, приймуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned} l_A^{(3)} &= \sin B_A\Delta z + \left(\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a\right)\sin^2 B_A + \Delta a + \bar{N}_A; \\ l_B^{(3)} &= \sin B_B\Delta z + \left(\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a\right)\sin^2 B_B + \Delta a + \bar{N}_B; \\ l_C^{(3)} &= \sin B_C\Delta z + \left(\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a\right)\sin^2 B_C + \Delta a + \bar{N}_C; \\ l_D^{(3)} &= \sin B_D\Delta z + \left(\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a\right)\sin^2 B_D + \Delta a + \bar{N}_D; \\ l_O^{(3)} &= \sin B_O\Delta z + \left(\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a\right)\sin^2 B_O + \Delta a + \bar{N}_O. \end{aligned}\right\}$$

Якщо прийняти величини $\bar{a}$ та $\bar{\alpha}$ і значення $\Delta a, \Delta\alpha, \Delta z$ відомими, то вільні члени після нескладних обчислень будуть рівні:

$$l_A^{(3)} = -66,8\ м;\ l_B^{(3)} = -87,7\ м;\ l_C^{(3)} = -106,0\ м;\ l_D^{(3)} = -78,8\ м;\ l_O^{(3)} = -83,8\ м.$$

Тоді, розв'язавши такі параметричні рівняння під умовою методу найменших квадратів, одержимо:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= -52 \pm 4\ м; \\ \Delta y &= -164 \pm 6\ м. \end{aligned}\right\}$$

<u>Спосіб 4.</u> Нехай нам задані величини $\Delta y, \Delta z$ і $\Delta\alpha$. Необхідно знайти величини Δx та Δa. Тоді параметричні рівняння поправок будуть мати такий вигляд:

$$\left.\begin{aligned} a_A\Delta x + e_A\Delta a + l_A^{(4)} &= v_A; \\ a_B\Delta x + e_B\Delta a + l_B^{(4)} &= v_B; \\ a_C\Delta x + e_C\Delta a + l_C^{(4)} &= v_C; \\ a_D\Delta x + e_D\Delta a + l_D^{(4)} &= v_D; \\ a_O\Delta x + e_O\Delta a + l_O^{(4)} &= v_O, \end{aligned}\right\}$$

де

$$\left.\begin{aligned}
l_A^{(4)} &= \cos B_A \sin L_A \Delta y + \sin B_A \Delta z + \bar{a}\sin^2 B_A \Delta\alpha + \bar{N}_A;\\
l_B^{(4)} &= \cos B_B \sin L_B \Delta y + \sin B_B \Delta z + \bar{a}\sin^2 B_B \Delta\alpha + \bar{N}_B;\\
l_C^{(4)} &= \cos B_C \sin L_C \Delta y + \sin B_C \Delta z + \bar{a}\sin^2 B_C \Delta\alpha + \bar{N}_C;\\
l_D^{(4)} &= \cos B_D \sin L_D \Delta y + \sin B_D \Delta z + \bar{a}\sin^2 B_D \Delta\alpha + \bar{N}_D;\\
l_O^{(4)} &= \cos B_O \sin L_O \Delta y + \sin B_O \Delta z + \bar{a}\sin^2 B_O \Delta\alpha + \bar{N}_O.
\end{aligned}\right\}$$

Аналогічним чином обчислимо вільні члени цієї системи рівнянь, отримаємо

$$l_A^{(4)} = 205,6\ м;\ l_B^{(4)} = 201,1\ м;\ l_C^{(4)} = 189,8\ м;\ l_D^{(4)} = 197,7\ м;\ l_O^{(4)} = 200,1\ м.$$

Прийнявши коефіцієнти із таблиці 1 та отримані вільні члени, розв'яжемо систему параметричних рівнянь поправок під умовою методу найменших квадратів. Тоді отримаємо:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x &= -10 \pm 47\ м;\\
\Delta a &= 205 \pm 27\ м.
\end{aligned}\right\}$$

Розглянемо наступний спосіб.

<u>Спосіб 5.</u> Припустимо, що нам відомі значення величин $\Delta x, \Delta z$ і $\Delta\alpha$. Знайдемо величини Δy та Δa. У такому випадку, параметричні рівняння поправок приймуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned}
b_A \Delta y + e_A \Delta a + l_A^{(5)} &= v_A;\\
b_B \Delta y + e_B \Delta a + l_B^{(5)} &= v_B;\\
b_C \Delta y + e_C \Delta a + l_C^{(5)} &= v_C;\\
b_D \Delta y + e_D \Delta a + l_D^{(5)} &= v_D;\\
b_O \Delta y + e_O \Delta a + l_O^{(5)} &= v_O,
\end{aligned}\right\}$$

а вільні члени такої системи рівнянь запишуться як

$$\left.\begin{aligned}
l_A^{(5)} &= \cos B_A \cos L_A \Delta x + \sin B_A \Delta z + \bar{a}\sin^2 B_A \Delta\alpha + \bar{N}_A;\\
l_B^{(5)} &= \cos B_B \cos L_B \Delta x + \sin B_B \Delta z + \bar{a}\sin^2 B_B \Delta\alpha + \bar{N}_B;\\
l_C^{(5)} &= \cos B_C \cos L_C \Delta x + \sin B_C \Delta z + \bar{a}\sin^2 B_C \Delta\alpha + \bar{N}_C;\\
l_D^{(5)} &= \cos B_D \cos L_D \Delta x + \sin B_D \Delta z + \bar{a}\sin^2 B_D \Delta\alpha + \bar{N}_D;\\
l_O^{(5)} &= \cos B_O \cos L_O \Delta x + \sin B_O \Delta z + \bar{a}\sin^2 B_O \Delta\alpha + \bar{N}_O.
\end{aligned}\right\}$$

Набуваючи значення $\Delta x, \Delta z$ і $\Delta\alpha$ відомими, будемо мати

$$l_A^{(5)} = 232,9\ м;\ l_B^{(5)} = 203,3\ м;\ l_C^{(5)} = 192,4\ м;\ l_D^{(5)} = 229,8\ м;\ l_O^{(5)} = 216,4\ м.$$

Враховуючи коефіцієнти з таблиці 1 та обчислені вільні члени, розв'яжемо таку систему рівнянь під умовою методу найменших квадратів. Тоді одержимо:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta y &= -179 \pm 12\ м;\\
\Delta a &= 276 \pm 4\ м.
\end{aligned}\right\}$$

Розглянемо останній спосіб.

<u>Спосіб 6.</u> Нехай відомі величини $\Delta x, \Delta y, \Delta\alpha$. Необхідно обчислити значення величин $\Delta z, \Delta a$. Параметричні рівняння поправок тоді запишуться:

$$\left.\begin{aligned}
c_A\Delta z + e_A\Delta a + l_A^{(6)} &= v_A;\\
c_B\Delta z + e_B\Delta a + l_B^{(6)} &= v_B;\\
c_C\Delta z + e_C\Delta a + l_C^{(6)} &= v_C;\\
c_D\Delta z + e_D\Delta a + l_D^{(6)} &= v_D;\\
c_O\Delta z + e_O\Delta a + l_O^{(6)} &= v_O,
\end{aligned}\right\}$$

де

$$\left.\begin{aligned}
l_A^{(6)} &= \cos B_A \cos L_A \Delta x + \cos B_A \sin L_A \Delta y + \bar{a}\sin^2 B_A \Delta\alpha + \bar{N}_A;\\
l_B^{(6)} &= \cos B_B \cos L_B \Delta x + \cos B_B \sin L_B \Delta y + \bar{a}\sin^2 B_B \Delta\alpha + \bar{N}_B;\\
l_C^{(6)} &= \cos B_C \cos L_C \Delta x + \cos B_C \sin L_C \Delta y + \bar{a}\sin^2 B_C \Delta\alpha + \bar{N}_C;\\
l_D^{(6)} &= \cos B_D \cos L_D \Delta x + \cos B_D \sin L_D \Delta y + \bar{a}\sin^2 B_D \Delta\alpha + \bar{N}_D;\\
l_O^{(6)} &= \cos B_O \cos L_O \Delta x + \cos B_O \sin L_O \Delta y + \bar{a}\sin^2 B_O \Delta\alpha + \bar{N}_O.
\end{aligned}\right\}$$

Прийнявши значення величин $\Delta x, \Delta y$ і $\Delta\alpha$ відомими, вільні члени приймуть наступні результати:

$$l_A^{(6)} = 158{,}9\ м;\ l_B^{(6)} = 145{,}7\ м;\ l_C^{(6)} = 153{,}4\ м;\ l_D^{(6)} = 171{,}5\ м;\ l_O^{(6)} = 159{,}5\ м.$$

Врахувавши значення відповідних коефіцієнтів із таблиці 1 та результати обчислених вільних членів, розв'яжемо таку систему параметричних рівнянь під умовою методу найменших квадратів. Тоді будемо мати:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta z &= -103 \pm 94\ м;\\
\Delta a &= 235 \pm 70\ м.
\end{aligned}\right\}$$

Висновки. Таким чином, на основі одержаних результатів вище проведених досліджень можна зауважити наступне.

1. Спільне знаходження всіх п'яти параметрів $\Delta a, \Delta\alpha, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ методом найменших квадратів на територію України не дає нам очікуваних хороших результатів. Це добре видно з обчислень за даними висот геоїда, представлених у вигляді сфероїдальної трапеції, яка описує територію України. Визначення всіх п'яти параметрів референц-еліпсоїда спричинене сильною функціональною залежністю параметрів між собою. Ця залежність (кореляція) досить добре демонструється на значеннях середніх квадратичних похибок, які співрозмірні з отриманими параметрами і навіть перевищують останні.

2. На відміну від такого розв'язку, дослідження з визначення тільки трьох параметрів $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ при заданих Δa та $\Delta\alpha$, що продемонстровані у способі 1, дають можливість досить добре підібрати такий референц-еліпсоїд, який би найкраще представляв геоїд, побудований на територію України.

3. Обчислення за способом 3 лише двох параметрів $\Delta x, \Delta y$ при заданих інших трьох також показало хороші результати знаходження регіонального референц-еліпсоїда.

4. Результати обчислень за способами 2, 4, 5, 6 показали найбільшу кореляцію між такими величинами: а) Δa та Δx; б) Δa та Δy; в) Δa та Δz.

Розв'язок таких задач демонструє нам дуже відмінні між собою результати, що були одержані за одними й тими ж даними на одну і ту ж територію. Це наводить нас на необхідність проведення додаткових досліджень щодо одержання коректних розв'язків так званих погано зумовлених задач [6].

Список використаних джерел

1. Гоффманн-Велленгоф, Б. Физическая геодезия : монография / Б. Гоффманн-Велленгоф, Г. Мориц; под ред. Ю. М. Неймана. – Москва : Изд-во МИИГАиК, 2007. – 426 с.

2. Загребин, Д. В. Теория регуляризированного геоида / Д. В. Загребин // Труды ИТА. – 1952. – № 1. – С. 52-61.

3. Мещеряков, Г.А. Гравитационное поле, фигура и внутреннее строение Марса : монография / Г. А. Мещеряков, А. Л. Церклевич. – Киев : Наукова думка, 1987. – 240 с.

4. Молоденский, М. С. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли / М. С. Молоденский, В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина // Труды ЦНИИГАиК. – 1960. – Вып. 131. – С. 250-251.

5. Мориц, Г. Современная физическая геодезия : монография / Г. Мориц. – Москва : Недра, 1983. – 392 с.

6. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики : учеб. пособ. / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – Москва : Наука, 1966. – 724 с.

7. Boucher, C. ITRS, PZ–90 and WGS–84: Current Realizations and the Related Transformation Parameters / C. Boucher, Z. Altamimi // Journal of Geodesy. – 2001. – Vol. 75. – P. 613-619.

8. Heiskanen, W. Physical Geodesy / W. Heiskanen, H. Moritz. – San Francisco : W. H. Freeman and Company, California, 1967. – 402 p.

9. Lelgemann, D. Spherical Approximation and the Combination of Gravimetric and Satellite Data / D. Lelgemann // Boll. Geold. Sci. Affini. – 1973. –Vol. 32. – Pp. 241-250.

References

1. Hoffmann-Wellenhof, B., Moritz, H. (2007). *Fizicheskaya geodeziya [Physical geodesy]*. Izd-vo MIIGAiK.

2. Zagrebin, D.V. (1952). Teoriya regulyarizirovannogo geoida [Theory of regularized geoid]. *Trudy ITA, 1*, 52-61.

3. Meshcheryakov, G.A., TSerklevich, A.L. (1987). *Gravitacionnoe pole, figura i vnutrennee stroenie Marsa [Gravitational field, figure and internal structure of Mars]*. Kyiv.

4. Molodenskiy, M.S., Eremeyev, V.F., YUrkina, M.I. (1960). Metody izucheniya vneshnego gravitacionnogo polya i figury Zemli [Methods for studying the external gravitational field and the figure of the Earth]. *Trudy TSNIIGAiK, 131,* 250-251.

5. Moritz, H. (1983). *Sovremennaya fizicheskaya geodeziya [Advanced physical geodesy].* Nedra.

6. Tikhonov, A.N., Samarskiy, A.A. (1966). *Uravneniya matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics].* Nauka.

7. Boucher, C., Altamimi, Z. (2001). ITRS, PZ–90 and WGS–84: Current Realizations and the Related Transformation Parameters. *Journal of Geodesy, 75,* 613–619.

8. Heiskanen, W. and Moritz, H. (1967). Physical Geodesy. W.H. Freeman and Company. San Francisco, California.

9. Lelgemann, D. (1973). Spherical Approximation and the Combination of Gravimetric and Satellite Data. *Boll. Geold. Sci. Affini, 32,* 241–250.

Отримано 26.02.2024

UDC 528.2

Andrii Sohor[1], Dmytro Marchenko[2], Khrystyna Kryva[3]

[1]PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Cartography and Geospatial Modelling
Lviv Polytechnic National University (Lviv, Ukraine)
E-mail: andrii.r.sohor@lpnu.ua. **ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-0084-9552
ResearcherID: ABI-6288-2020. **Scopus Author ID:** 57224950613

[2]PhD in Technical Sciences, Head of the Department of Cartography and Geospatial Modelling
Lviv Polytechnic National University (Lviv, Ukraine)
E-mail: dmytro.o.marchenko @lpnu.ua. **ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-5321-0189
ResearcherID: HJI-7657-2023. **Scopus Author ID**: 57203153570

[3] Graduate Student of the Department of Cartography and Geospatial Modelling
Lviv Polytechnic National University (Lviv, Ukraine)
E-mail: khrystyna.o.kryva @lpnu.ua. **ORCID:** https://orcid.org/0009-0000-1564-1511. **ResearcherID:** KBC-7973-2024

METHODS OF CALCULATING THE PARAMETERS OF THE REFERENCE ELLIPSOID ACCORDING TO THE DATA OF THE REGIONAL GRAVITY FIELD OF THE EARTH

The novelty and relevance of scientific solutions lie in the necessity to establish a national reference system, namely the determination of parameters for a regional ellipsoid. The methodology of such scientific research involves the task of defining a regional ellipsoid, which practically reduces to finding corrections to the adopted global ellipsoid GRS80. The regional ellipsoid for the territory of Ukraine should best represent the geoid of this region. In other words, the geoid heights relative to the regional ellipsoid within the territory of Ukraine should be minimized as much as possible.

The purpose of the article is to obtain the parameters of the regional ellipsoid for the territory of Ukraine and investigate the effectiveness of such a reference system in solving certain practical and scientific geodetic tasks.

Thus, based on the results obtained from the conducted research, the following observations can be made. Determining all five parameters of the regional ellipsoid is strongly influenced by the functional dependence of these parameters on each other. This dependence (correlation) is well demonstrated by the values of mean square errors, which are proportional to the obtained parameters and even exceed them. The highest correlation arises between the correction to the major axis of the ellipsoid and the linear elements of its center displacement within the Earth's body. Taking these observations into account, it can be concluded that the simultaneous determination of all five parameters using the least squares method for the territory of Ukraine does not yield the expected good results. This is evident from the calculations of geoid heights presented in the form of a spheroidal trapezoid describing the territory of Ukraine. In contrast, research on determining only three parameters of ellipsoid displacement at given dimensions provides the opportunity to reasonably fit a regional ellipsoid that best represents the geoid constructed on the territory of Ukraine. The solution to these problems has demonstrated very different results obtained under the same data for the same territory. This leads us to the necessity of conducting additional research to obtain correct solutions for so-called ill-conditioned problems.

Keywords: *major axis of ellipsoid; geoid; gravitational field of the Earth; Earth ellipsoid; reference ellipsoid parameters; ellipsoid compression.*

Table: 1. References: 9.

Согор А., Марченко Д., Крива Х. Способи обчислення параметрів референц-еліпсоїда за даними регіонального гравітаційного поля Землі. *Технічні науки та технології.* 2024. № 1(35). С. 346-356.