

В.Ю. Грицюк, канд. техн. наук

Чернігівський державний технологічний університет, м. Чернігів, Україна

ВДОСКОНАЛЕННЯ МОДЕЛІ РОЗРАХУНКУ БАЛКИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ НА ПОПЕРЕЧНИЙ УДАР

По балці, що лежить на пружній основі, відбувається поперечний удар тілом. Розглянуті дві моделі розподілення напруження у пружній основі.

Вступ

Модель С.П. Тимошенка розрахунку балок на поперечний удар [1] враховує загальні деформації конструкції і місцеві деформації у зоні взаємодії тіла, що ударає, і балки. Реалізація задачі виконується чисельно; вона досить трудомістка. Подальші дослідження були спрямовані у двох напрямках: вдосконалення методів розрахунку і застосування моделі для більш складних конструкцій. У праці “Колебания в инженерном деле” розглядається поперечний удар тілом по шарнірно опертій на кінцях балці, яка лежить на шарі пружної основи (рис. 1), яка моделюється за допомогою одного з варіантів, запропонованого Власовим В.З. [3] Цей варіант враховує лінійний закон розподілення по товщині шару основи нормальних напружень і сталі дотичні напруження по товщині шару основи. Така наближена модель може застосовуватися, якщо шар основи – малої товщини. У даній роботі розглянуто більш досконалий варіант моделі основи, при якому напруження затухають за нелінійним законом при заглибленні в основу.

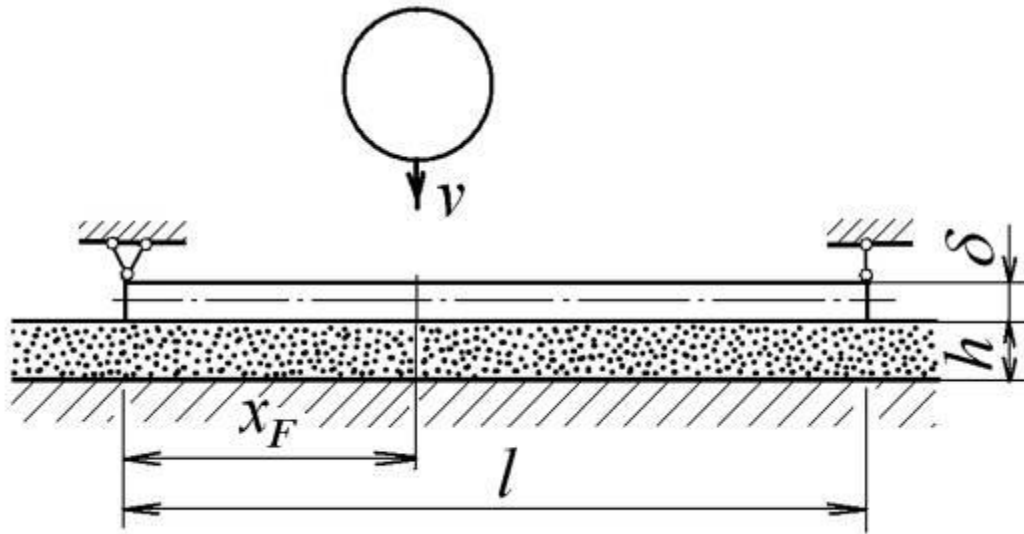


Рис. 1. Розрахункова схема

Математична модель

Силу контактної взаємодії $F(t)$ тіла і балки можна знайти з рівняння:

$$d(F) = \alpha(F) + w_F(x_F, F), \quad (1)$$

де d – вертикальні переміщення тіла;

α – вертикальні переміщення тіла, викликані контактними деформаціями у місці взаємодії тіл (тіла і балки);

w_F – вертикальні переміщення балки, що лежить на пружній основі, у місці знаходження тіла;

x_F – горизонтальна координата цього місця;

t – час.

Рівняння (1) є узагальненням відомого рівняння поперечного удару, запропонованого С.П. Тимошенком [1].

Переміщення тіла d можна визначити за допомогою формули:

$$d = d_0 + d_0 t + g \frac{t^2}{2} - \frac{1}{M} \int_0^t F dt, \quad (2)$$

де d_0 , \dot{d}_0 – початкові переміщення і швидкість тіла;

g – прискорення земного тяжіння;

M – маса тіла.

Переміщення α можна визначити за допомогою статичної контактної задачі Герця.

Для розрахунку балки на пружній основі, товщина якої h , застосуємо модель, запропоновану Власовим В.З. [3]. Диференціальне рівняння руху балки записується у вигляді:

$$a_1 w'''' + a_2 w'' + a_3 w + a_4 \ddot{w} = \frac{1}{b} q(x, t), \quad (3)$$

$$a_1 = \frac{E\delta^3}{12}, \quad a_2 = -2t^*, \quad a_3 = k^*, \quad a_4 = \frac{\gamma\delta}{g} + \frac{\gamma_0 r_{11}}{g}, \quad (4)$$

$$t^* = \frac{E_0 r_{11}}{4(1+\nu_0)}, \quad k^* = \frac{E_0 s_{11}}{1-\nu_0^2}, \quad (5)$$

$$r_{11} = \int_0^h \psi^2(y) b dy, \quad s_{11} = \int_0^h \left(\frac{d\psi}{dy} \right)^2 b dy, \quad (6)$$

де $q(x, t)$ – розподілена сила, що діє по довжині балки;

b і δ – ширина і висота балки;

w – вертикальні переміщення тіла;

E і γ – модуль Юнга і питома вага матеріалу балки;

E_0 , ν_0 і γ_0 – модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона і питома вага матеріалу основи.

У рівнянні (3) штрихами угорі позначено диференціювання за координатою x , а точками – за часом t .

Розподілення напружень в основі залежить від вибору функції $\psi(y)$ [3].

Якщо

$$\psi(y) = \frac{h-y}{h}, \quad (7)$$

то одержуємо перший варіант моделі, описаний у вступі. Цей варіант був розглянутий Грицюком В.Ю. [2].

Якщо

$$\psi(y) = \frac{sh(\eta(h-y))}{sh(\eta h)}, \quad (8)$$

то одержуємо другий варіант моделі, описаний у вступі. Він теж наближений, але більш досконалий. При збільшенні значення коефіцієнта η нерівномірність розподілення напружень збільшується. Якщо η прямує до нуля, то одержуємо перший варіант моделі.

Будемо враховувати розсіяння енергії у матеріалі основи. Для цього пружні характеристики цього матеріалу запишемо у комплексній формі

$$E_o = E_o \pm i\beta E_o, \quad (9)$$

де β – коефіцієнт розсіяння енергії у матеріалі основи.

Розкладаючи переміщення і навантаження у тригонометричні ряди і застосовуючи методи операційного обчислення, одержуємо:

$$w(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} [T_{0m} e^{-\mu_m t} \cos \omega_m t + \frac{\dot{T}_{0m}}{\omega_m} e^{-\mu_m t} \sin \omega_m t +$$

$$+ \frac{2}{a_4 b l} \frac{\sin \alpha_m x_F}{\omega_m} \int_0^t F(t_1) e^{-\mu_m(t-t_1)} \sin \omega_m(t-t_1) dt_1] \sin \alpha_m x,$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{a_1 \alpha_m^4 - a_2 \alpha_m^2 + a_3}{a_4}}, \quad \mu_m = \beta \frac{a_3 - a_2 \alpha_m^2}{2 a_4 \omega_m}, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{l}. \quad (11)$$

Реалізація задачі

Рівняння (1) дозволяє визначити силу $F(t)$. Це робиться чисельно на послідовних малих кроках часу τ . Існують різні алгоритми чисельної реалізації [2]. У даній роботі застосовувалася ступінчаста апроксимація контактної сили. На кожному кроці сила визначається методом послідовних наближень.

Реалізація задачі виконувалася за допомогою математичного пакета MathCAD.

Приклад розрахунку

Розглянемо горизонтальний удар (у формулі (2) $g = 0$) сталеву кулею, радіус якої 1 см, по балці з алюмінію, ширина якої 1 см і товщина 0,1 см. Удар відбувається посередині між шарнірними опорами балки. Балка лежить на основі, виготовленої з пінопласту ПХВ-1. Гризюком В.Ю. [2] розглядалася основа, виготовлена з епоксидного компаунда ЕК-1. Товщина основи 0,9 см. Коефіцієнт розсіяння енергії у матеріалі основи $\beta = 0,3/2\pi$.

Для опису коливань балки враховано 40 гармонік. Сила контактної взаємодії визначалася методом послідовних наближень з точністю до 2%. Крок інтегрування $\tau = 0,0000005$ с.

На рис. 2 наведені результати розрахунку. На рис.2 а-д – для першої моделі основи, на рис.2 е-и – для другої.

Рис. 2 а-б і рис. 2 е-є ілюструють розподілення нормальних і дотичних напружень по товщині основи.

На рис. 2 в і рис. 2 ж наведені осцилограми сили контактної взаємодії кулі і балки (n – кількість кроків часу).

На рис. 2 г і рис. 2 з – осцилограми переміщень кулі і середини балки (переміщення у напрямку удару вважаються додатними).

На рис. 2 д і рис. 2 и представлений вигляд деформованої осі балки при $n = 120$.

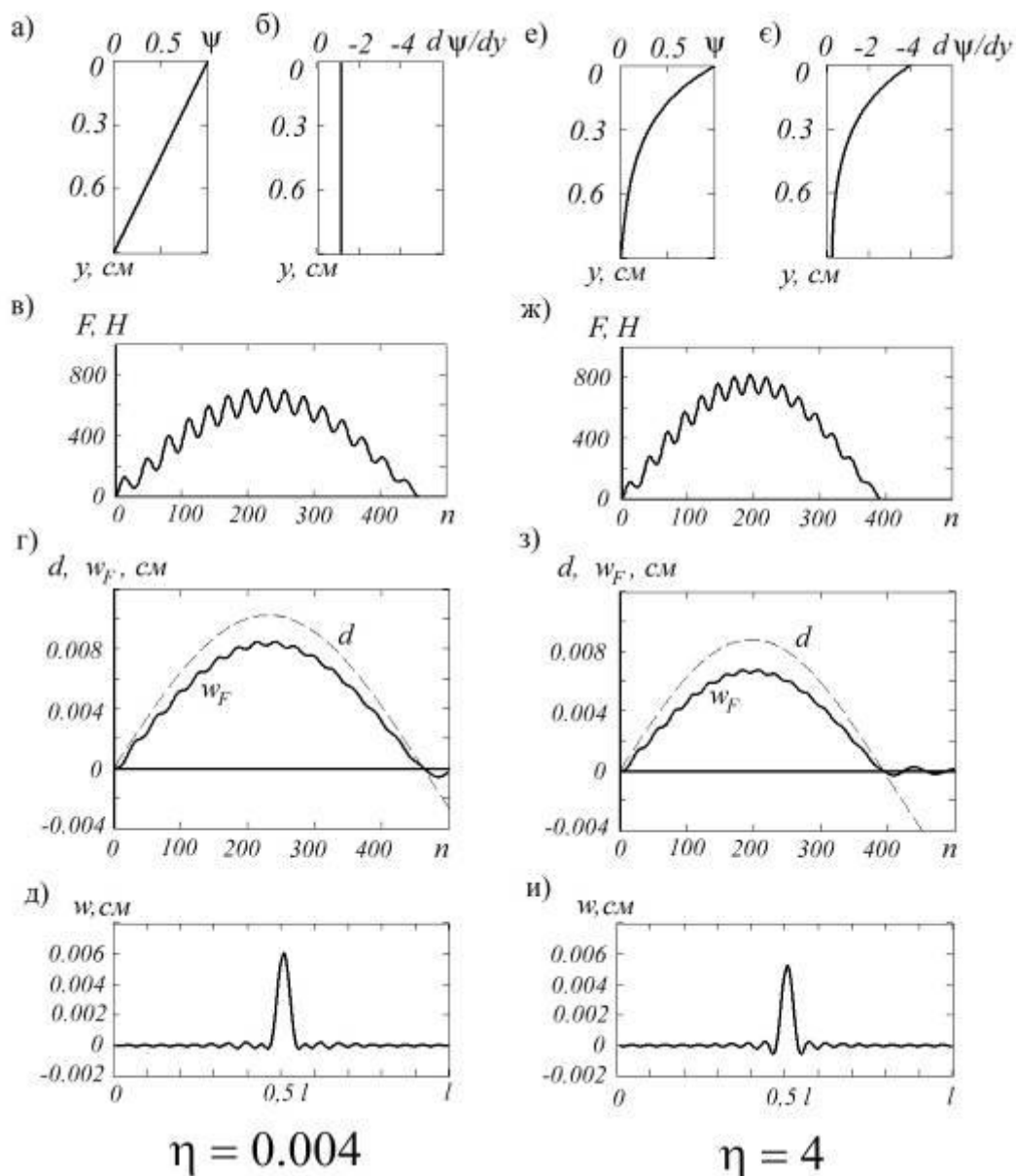


Рис. 2. Результати розрахунку

Висновки

Підтверджені висновки попередньої роботи [2]. Як і очікувалося, принципової різниці в одержаних результатах не виявлено. Якісно картина однотипна, є деяка кількісна різниця. Але це для даного конкретного випадку. Можна розглянути різні товщини основи, різні матеріали основи.

Список використаних джерел

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / Тимошенко С.П. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
2. Грицюк В.Ю. Розрахунок балки на пружній основі на поперечний удар / Грицюк В.Ю. // Вісн. Чернігівського держ. техн. ун-ту. – 2010. – № 42. – С. 17-20.
3. Власов В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / Власов В.З., Леонтьев Н.Н. – М.: Физматгиз, 1960. – 491 с.