МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Чернігівський державний технологічний університет

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
З РОЗДІЛУ ДИСЦИПЛІНИ „ВИЩА МАТЕМАТИКА”
ДЛЯ СТУДЕНТІВ УСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Затверджено
на засіданні кафедри вищої і прикладної математики,
протокол № 6 від 03.01.2007 р.

Чернігів ЧДТУ 2007

Операційне числення. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з розділу дисципліни „Вища математика” для студентів усіх спеціальностей./ Укл.: О. О. Мурач, М. А. Синенко — Чернігів: ЧДТУ, 2007. — 30 с.

Укладачі: Мурач Олександр Олександрович, кандидат фізико-математичних наук, старший викладач
Синенко Марина Анатоліївна, кандидат фізико-математичних наук, старший викладач

Відповідальний за випуск: Костарчук Юрій Вікторович, завідувач кафедри вищої і прикладної математики, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: Лось Валерій Миколайович, кандидат фізико-математичних наук, доцент Чернігівського державного технологічного університету

Кафедра вищої і прикладної математики

Зміст

Вступ

Ці методичні вказівки укладені у відповідності з розділом "Операційне числення" чинної Навчальної програми з вищої математики для технічних, технологічних та природничих спеціальностей вищих навчальних закладів.

Операційне числення широко застосовується як в прикладній математиці, так і в різних інженерних дисциплінах. Воно є зручним апаратом для розв'язання важливих класів диференціальних та інтегральних рівнянь, до яких зводиться багато задач з механіки, електротехніки, теорії автоматичного керування тощо.

Мета цих методичних вказівок – надати студентам теоретичну та практичну допомогу в самостійній роботі по вивченню розділу "Операційне числення" дисципліни "Вища математика". Методичні вказівки містять теоретичний матеріал, необхідний для самостійного виконання студентами індивідуальних домашніх завдань. Наведені приклади розв'язання основних стандартних задач.

В розділі "Завдання до самостійної роботи" наведено 30 варіантів індивідуальних завдань. Завдання охоплюють в цілому матеріал розділу, який в тому чи іншому обсязі вивчається студентами ЧДТУ механіко-технологічного факультету і факультету електронних та інформаційних технологій усіх спеціальностей.

Методичні вказівки можуть бути використані під час аудиторнтх занять як довідковий матеріал та в якості задачника при проведенні самостійних та модульно-тестових робіт.

1 Методичні вказівки

Операційне числення як метод розв'язання задач Коші для лінійних диференціальних рівнянь та їх систем широко застосовується в механіці, електротехніці, автоматиці та інших дисциплінах. Ідея цього методу полягає в наступному. Розгядається досить широкий клас функцій, які називаються *оригіналами*. За допомогою деякого правила кожному оригіналу ставлять у відповідність іншу функцію — *зображення* оригіналу. Це правило, яке називають *перетворенням Лапласа*, має чудову властивість: задача Коші для лінійного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами відносно функції-оригіналу еквівалентна деякому алгебраїчному рівнянню відносно зображення цього оригіналу. Розв'язок останнього рівняння легко знаходиться засобами алгебри. Зробивши зворотний перехід від розв'язку-зображення до оригіналу, отримують розв'язок задачі Коші.

Дійсна функція $f(t)$ аргументу $t \ge 0$ називається оригіналом, якщо виконуються наступні дві умови:

а) функція $f(t)$ кусково-неперервна, тобто вона неперервна на кожному відрізку $[0, b]$ за виключенням, можливо, скінченої множини точок відрізка, де функція має розриви першого роду;

б) існують такі числа $c \ge 0$ і $m \ge 0$, що $|f(t)| \le c\,\mathrm{e}^{mt}$ для довільного $t \ge 0$.

Клас оригіналів достатньо широкий для розв'язання практичних задач. Так, обмежені функції, многочлени, експоненціальні функції є оригіналами.

Зображенням оригіналу $f(t)$ називається функція

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

дійсного аргументу $p > m$ або комплексного аргументу *p*, де $\operatorname{Re} p > m$.

Як бачимо, зображення означається за допомогою невласного інтеграла першого роду, який залежить від параметра *p*. Цей інтеграл абсолютно збігається для вказаних значень параметра *p*, причому $F(p) \to 0$ при $p \to +\infty$ або $\operatorname{Re} p \to +\infty$.

Перетворенням Лапласа називається правило, за яким кожному оригіналу $f(t)$ ставиться у відповідність його зображення $F(p)$. Це правило позначатимемо через L і будемо писати $L[f] = F$, або $f \mapsto F$.

Для перетворення Лапласа справедлива *теорема єдиності*: якщо два неперервних оригінала мають однакові зображення, то ці оригінали співпадають.

Приклад 1. Знайти зображення одиничної функції $\chi(t) = 1$.

► За означенням зображення, маємо:

$$L[\chi](p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\chi(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\,dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} \mathrm{e}^{-pt}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{\mathrm{e}^{-pt}}{-p}\right|_{t=0}^{t=b} =$$

$$= -\frac{1}{p}\left(\lim_{b\to+\infty} \mathrm{e}^{-pb} - 1\right) = -\frac{1}{p}\,(0-1) = \frac{1}{p} \text{ при } p>0. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Знайти зображення функції f, графік якої подано на рисун-ку 1.

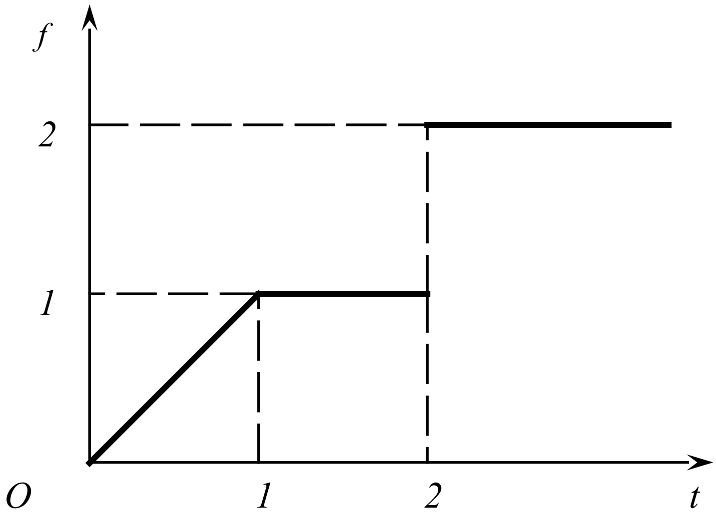

Рисунок 1.1

► З рисунку 1.1 бачимо, що

$$f(t) = \begin{cases} t \text{ при } 0 \le t \le 1, \\ 1 \text{ при } 1 \le t < 2, \\ 2 \text{ при } t > 2 \end{cases}$$

(значення оригіналу $f(t)$ в точці розриву $t=2$ не можна знайти з рисунку; втім, воно не впливає на зображення оригіналу). Тому, згідно означення зображення, напишемо

$$F(p) = L[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-pt}\,t\,dt + \int_1^2 e^{-pt}\cdot 1\,dt + \int_2^{+\infty} e^{-pt}\cdot 2\,dt.$$

Обчислюємо окремо кожен з трьох останніх інтегралів при фіксованому $p>0$. Перший інтеграл беремо частинами:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-pt}\, t\, dt = \frac{1}{-p}\int\limits_0^1 t\, d\left(\mathrm{e}^{-pt}\right) = \frac{1}{-p}\left(t\,\mathrm{e}^{-pt}\Big|_{t=0}^{t=1} - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-pt}\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{-p}\left(\mathrm{e}^{-p} - 0 - \frac{\mathrm{e}^{-pt}}{-p}\Big|_{t=0}^{t=1} \right) = \frac{1}{-p}\left(\mathrm{e}^{-p} - \frac{\mathrm{e}^{-p}}{-p} + \frac{1}{-p} \right) = \frac{1-\mathrm{e}^{-p} - p\mathrm{e}^{-p}}{p^2}.$$

Другий та третій інтеграли обчислюємо безпосередньо:

$$\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{-pt}\cdot 1 dt = \frac{\mathrm{e}^{-pt}}{-p}\Big|_{t=1}^{t=2} = \frac{\mathrm{e}^{-2p}}{-p} - \frac{\mathrm{e}^{-p}}{-p} = \frac{\mathrm{e}^{-p} - \mathrm{e}^{-2p}}{p},$$

$$\int\limits_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\cdot 2dt = \lim_{b\to+\infty} 2\int\limits_2^b \mathrm{e}^{-pt} dt = 2\lim_{b\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-pt}}{-p}\Big|_{t=2}^{t=b} =$$

$$= 2\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-bp}}{-p} - \frac{\mathrm{e}^{-2p}}{-p} \right) = 2\left(0 - \frac{\mathrm{e}^{-2p}}{-p} \right) = \frac{2\,\mathrm{e}^{-2p}}{p}.$$

Тепер, додавши значення трьох інтегралів, дістаємо зображення

$$F(p) = \frac{1-e^{-p} - pe^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-p} - e^{-2p}}{p} + \frac{2e^{-2p}}{p} = \frac{1-e^{-p} + pe^{-2p}}{p^2}. \blacktriangleleft$$

Широко застосовуються наступні *табличні зображення*:

$$\chi(t) = 1 \mapsto \frac{1}{p}, \qquad \sin\omega t \mapsto \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \qquad \cos\omega t \mapsto \frac{p}{p^2+\omega^2}, \qquad \mathrm{e}^{-\alpha t} \mapsto \frac{1}{p+\alpha},$$

$$e^{-\alpha t}\sin\omega t \mapsto \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}, \qquad e^{-\alpha t}\cos\omega t \mapsto \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2},$$

$$t\sin\omega t \mapsto \frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}, \qquad t\cos\omega t \mapsto \frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}, \qquad t^n e^{-\alpha t} \mapsto \frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}},$$

$$\frac{1}{2\omega^3}\left(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t\right) \mapsto \frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2};$$

тут $\omega > 0$ та α — дійсні параметри.

Приклад 3. Знайти зображення оригіналів $\sin 3t,\ e^{5t}\cos 2t,\ t^2 e^{-4t}$. Скористатися табличними зображеннями.

► В табличному зображенні оригіналу $\sin\omega t$ покладаємо $\omega = 3$; маємо

$$\sin 3t \mapsto \frac{3}{p^2+3^2} = \frac{3}{p^2+9}.$$

Далі, в табличному зображенні оригіналу $e^{-\alpha t}\cos\omega t$ покладаємо $\alpha=-5,\ \omega=2$; дістаємо

$$e^{5t}\cos 2t \mapsto \frac{p-5}{(p-5)^2+2^2} = \frac{p-5}{p^2-10p+29}.$$

Нарешті, в табличному зображенні оригіналу $t^n e^{-\alpha t}$ покладаємо $n=2,\ \alpha=4$; напишемо

$$t^2 e^{-4t} \mapsto \frac{2!}{(p+4)^{2+1}} = \frac{2}{(p+4)^3}.$$ ◄

Для знаходження зображень широко застосовуються наступні властивості перетворення Лапласа.

1. Лінійна властивість. Нехай f, g — оригінали, а λ, μ — числа; тоді

$$L[\lambda f + \mu g] = \lambda L[f] + \mu L[g].$$

Нехай далі f — оригінал, а $F = L[f]$ — його зображення.

2. Властивість подібності. Для кожного параметра $\omega > 0$ справедлива формула

$$f(\omega t) \mapsto \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right).$$

3. Властивість зсуву. Для кожного дійсного параметра α справедлива формула

$$e^{-\alpha t} f(t) \mapsto F(p+\alpha).$$

4. Властивість похідної зображення. Для кожного цілого параметра $n > 0$ справедлива формула

$$t^n f(t) \mapsto (-1)^n F^{(n)}(p);\ \text{зокрема,}\ t f(t) \mapsto -F'(p).$$

Приклад 4. Знайти зображення оригіналів $\cos 3t\,\cos 5t,\ t e^{2t}\sin 4t,\ t^2\cos t$.

► Застосувавши формулу добутку косінусів, лінійність перетворення Лапласа та табличне зображення для $\cos\omega t$, знаходимо зображення першого оригіналу:

$$L[\cos 3t\,\cos 5t] = L\left[\frac{1}{2}\left(\cos(3t+5t)+\cos(3t-5t)\right)\right] = L\left[\frac{1}{2}\cos 8t + \frac{1}{2}\cos 2t\right] =$$

$$= \frac{1}{2}L[\cos 8t] + \frac{1}{2}L[\cos 2t] = \frac{1}{2}\,\frac{p}{p^2+8^2} + \frac{1}{2}\,\frac{p}{p^2+2^2} = \frac{p^3+34p}{p^4+68p^2+256}.$$

Зображення другого оригіналу дістаємо з властивості зсуву, в якій беремо $\alpha=-2$, та з табличного зображення для $t\sin\omega t$, в якому покладаємо $\omega=4$. Маємо

$$L\left[t\,e^{2t}\sin 4t\right](p) = L\left[e^{2t}t\sin 4t\right](p) = L[t\sin 4t]\,(p-2) =$$

$$\frac{2\cdot 4\,(p-2)}{\left((p-2)^2+4^2\right)^2} = \frac{8p-16}{\left(p^2-4p+20\right)^2}.$$

Зображення третього оригіналу знаходимо за допомогою властивості похідної табличного зображення для $t\cos\omega t$, де $\omega=1$. Пишемо

$$L\left[t^2\cos t\right](p) = L[t\cdot t\cos t]\,(p) = -\left(L[t\cos t]\right)'(p) =$$

$$-\left(\frac{p^2-1^2}{\left(p^2+1^2\right)^2}\right)' = -\frac{2p\left(p^2+1\right)^2-\left(p^2-1\right)\cdot 2\left(p^2+1\right)\cdot 2p}{\left(p^2+1\right)^4} = \frac{2p^3-6p}{\left(p^2+1\right)^3}. \quad ◄$$

При застосуванні операційного числення часто доводиться знаходити оригінал по зображенню, що є *правильним раціональним дробом*.

Приклад 5. Знайти оригінал, зображенням якого є дріб

$$\frac{5p-2}{p^2+3p+4}.$$

► Оскільки дискримінант квадратного тричлена від'ємний: $D=3^2-4\cdot 4=-7$, то заданий дріб елементарний і не розкладається в суму простіших дійсних дробів. Тому виділяємо в знаменнику повний квадрат і зводимо дріб до табличних зображень:

$$\frac{5p-2}{p^2+3p+4} = \frac{5p-2}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+4} = \frac{5\left(p+\frac{3}{2}\right)-\frac{15}{2}-2}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \frac{5\left(p+\frac{3}{2}\right)-\frac{19}{2}}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} =$$

$$= 5\,\frac{p+\frac{3}{2}}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} - \frac{19}{2}\,\frac{2}{\sqrt{7}}\,\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}.$$

Скористаємося тепер табличними зображеннями для $\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega t$ та $\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t$, де $\alpha=\frac{3}{2}$, $\omega=\frac{\sqrt{7}}{2}$. Маємо:

$$\mathrm{e}^{-3t/2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t \;\mapsto\; \frac{p+\frac{3}{2}}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2},$$

$$\mathrm{e}^{-3t/2}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t \;\mapsto\; \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}.$$

Звідси, в силу лінійної властивості, остаточно напишемо

$$5\mathrm{e}^{-3t/2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t - \frac{19}{\sqrt{7}}\,\mathrm{e}^{-3t/2}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t \;\mapsto\; \frac{5p-2}{p^2+3p+4}. \quad ◄$$

Приклад 6. Знайти оригінал, зображенням якого є дріб

$$\frac{6p^2+3p-2}{p^3+2p^2}.$$

► Розкладаємо знаменник в добуток найпростіших дійсних множників:

$$p^3+2p^2=p^2\,(p+2).$$

Звідси пишемо такий розклад заданого дробу в суму елементарних дробів:

$$\frac{6p^2+3p-2}{p^3+2p^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+2}.$$

Тут $A,\ B,\ C$ — параметри, значення яких знаходимо наступним чином. Спочатку зводимо суму елементарних дробів до спільного знаменника:

$$\frac{6p^2+3p-2}{p^3+2p^2} = \frac{Ap(p+2)+B(p+2)+Cp^2}{p^2\,(p+2)} = \frac{(A+C)p^2+(2A+B)p+2B}{p^3+2p^2}.$$

Звідси випливає рівність чисельників крайніх дробів:

$$(A+C)p^2+(2A+B)p+2B=6p^2+3p-2.$$

Далі прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях змінної *p*. Дістаємо таку систему відносно невідомих *A, B, C* :

$$\begin{cases} A \quad\quad +C = \ \ 6, \\ 2A+B \quad\ \ = \ \ 3, \\ \quad\ 2B \quad\ \ = -2. \end{cases}$$

Розв'язавши її, маємо: $A=2,\ B=-1,\ C=4$. Підставляємо ці значення пара-метрів в розклад заданого дробу на елементарні дроби:

$$\frac{6p^2+3p-2}{p^3+2p^2}=\frac{2}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{4}{p+2}.$$

Тепер скористаємося табличними зображеннями

$$1 \mapsto \frac{1}{p},\quad t \mapsto \frac{1}{p^2},\quad e^{-2t} \mapsto \frac{1}{p+2}.$$

Звідси, в силу лінійної властивості, остаточно напишемо

$$2-t+4e^{-2t} \mapsto \frac{6p^2+3p-2}{p^3+2p^2}. \quad ◄$$

Застосування операційного числення до розв'язання лінійних диферен-ціальних рівнянь грунтується на такій властивості перетворення Лапласа.

Теорема про зображення похідних. Нехай функція $x(t)$ — оригінал, а $X(p)=L[x](p)$ — його зображення. Тоді похідні функції $x(t)$, якщо вони є оригіналами, мають наступні зображення:

$$x'(t) \mapsto pX(p)-x(0),$$

$$x''(t) \mapsto p^2X(p)-p\,x(0)-x'(0),$$

$$x'''(t) \mapsto p^3X(p)-p^2x(0)-p\,x'(0)-x''(0),\ldots .$$

Взагалі, для довільного $n=1,2,3,4,\ldots$ справедливо

$$x^{(n)}(t) \mapsto p^nX(p)-p^{n-1}x(0)-p^{n-2}x'(0)-\ldots-p\,x^{(n-2)}(0)-x^{(n-1)}(0)=$$

$$= p^n X(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} x^{(k-1)}(0).$$

Зокрема, якщо $x(0) = x'(0) = x''(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0,$ то $x^{(n)}(t) \mapsto p^n X(p).$

Приклад 7. Розв'язати операційним методом задачу Коші

$$2x' + 3x = \sin t, \quad x(0) = 4.$$

► Припускаємо, що розв'язок $x(t)$ задачі Коші є оригіналом. Нехай $x(t) \mapsto X(p) = L[x](p)$. Застосуємо перетворення Лапласа до обох частин диференціального рівняння та скористаємося лінійною властивістю. Послідовно маємо

$$L[2x' + 3x] = L[\sin t], \quad 2L[x'] + 3L[x] = L[\sin t].$$

Далі в лівій частині останнього рівняння перепишемо $L[x']$ згідно теореми про зображення похідних, а в правій частині напишемо табличне зображення. Дістаємо

$$2(pX(p) - x(0)) + 3X(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Тепер підставляємо початкову умову $x(0) = 4$:

$$2(pX(p) - 4) + 3X(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Отримали алгебраїчне рівняння відносно зображення $X(p)$ шуканого розв'язку $x(t)$ задачі Коші. Це рівняння називається *зображенням задачі Коші*. Розв'язуємо його відносно $X(p)$. Послідовно маємо:

$$2pX(p) + 3X(p) = \frac{1}{p^2+1} + 8, \qquad (2p+3)X(p) = \frac{8p^2+9}{p^2+1},$$

$$X(p) = \frac{8p^2+9}{\left(p^2+1\right)(2p+3)}.$$

Залишається знайти оригінал $x(t)$, зображенням якого є останній дріб. Для цього розкладемо дріб на елементарні дроби

$$X(p) = \frac{8p^2+9}{\left(p^2+1\right)(2p+3)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{C}{2p+3}.$$

Знайдемо значення параметрів *A, B, C*, звівши суму елементарних дробів до спільного знаменника і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях змінної p в чисельниках. Послідовно пишемо:

$$\frac{8p^2+9}{\left(p^2+1\right)(2p+3)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{C}{2p+3} = \frac{(Ap+B)(2p+3)+C\left(p^2+1\right)}{\left(p^2+1\right)(2p+3)},$$

$$(Ap+B)(2p+3)+C\left(p^2+1\right)=8p^2+9,$$

$$2Ap^2+3Ap+2Bp+3B+Cp^2+C=8p^2+9,$$

$$(2A+C)p^2+(3A+2B)p+3B+C=8p^2+9,$$

$$\begin{cases} 2A \qquad +C = 8, \\ 3A+2B \qquad = 0, \\ \qquad 3B+C = 9. \end{cases}$$

Розв'завши систему, маємо

$$A=-\frac{2}{13},\; B=\frac{3}{13},\; C=\frac{108}{13}.$$

Підставляємо ці значення параметрів в розклад зображення $X(p)$ в суму елементарних дробів. Напишемо

$$X(p) = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{C}{p+3} = \frac{-\frac{2}{13}p+\frac{3}{13}}{p^2+1} + \frac{\frac{108}{13}}{2p+3} =$$

$$= -\frac{2}{13}\cdot\frac{p}{p^2+1} + \frac{3}{13}\cdot\frac{1}{p^2+1} + \frac{54}{13}\cdot\frac{1}{p+3/2}.$$

Тепер для знаходження оригінала $x(t)$ залишається скористатися табличними зображеннями

$$\cos t \mapsto \frac{p}{p^2+1},\quad \sin t \mapsto \frac{1}{p^2+1},\quad \mathrm{e}^{-3t/2} \mapsto \frac{1}{p+3/2}$$

та лінійною властивістю. Маємо

$$x(t)=-\frac{2}{13}\cos t+\frac{3}{13}\sin t+\frac{54}{13}\,\mathrm{e}^{-3t/2}. \quad ◀$$

Приклад 8. Розв'язати операційним методом задачу Коші

$$x'' + 2x' - 3x = 4t, \quad x(0) = 1\,,\ x'(0) = -3.$$

► Припускаємо, що розв'язок $x(t)$ задачі Коші є оригіналом. Нехай $x(t) \mapsto X(p) = L[x](p)$. Застосуємо перетворення Лапласа до обох частин диференціального рівняння та скористаємося лінійною властивістю, теоремою про зображення похідних, а також табличним зображенням $t \mapsto \dfrac{1}{p^2}$. Послідовно маємо:

$$L[x'' + 2x' - 3x] = L[4t], \quad L[x''] + 2L[x'] - 3L[x] = 4L[t],$$

$$p^2 X(p) - p\,x(0) - x'(0) + 2(\,p\,X(p) - x(0)\,) - 3X(p) = \frac{4}{p^2}.$$

Тепер підставляємо початкові умови $x(0) = 1,\ x'(0) = -3.$ Напишемо

$$p^2 X(p) - p \cdot 1 - (-3) + 2\left(\,p\,X(p) - 1\right) - 3X(p) = \frac{4}{p^2}.$$

Отримали зображення задачі Коші. Розв'язуємо його відносно $X(p)$. Послідовно маємо:

$$p^2 X(p) + 2p\,X(p) - 3X(p) - p + 1 = \frac{4}{p^2},$$

$$\left(p^2 + 2p - 3\right) X(p) = \frac{4}{p^2} + p - 1, \qquad \left(p^2 + 2p - 3\right) X(p) = \frac{4 + p^3 - p^2}{p^2},$$

$$X(p) = \frac{p^3 - p^2 + 4}{\left(p^2 + 2p - 3\right)p^2}.$$

Тепер для того, щоб відновити по зображенню $X(p)$ оригінал $x(t)$, розкладемо $X(p)$ в суму елементарних дробів. Напишемо

$$X(p) = \frac{p^3 - p^2 + 4}{(p-1)(p+3)\,p^2} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p} + \frac{D}{p^2} =$$

$$\frac{A(p+3)p^2 + B(p-1)p^2 + C(p-1)(p+3)p + D(p-1)(p+3)}{(p-1)(p+3)\,p^2}.$$

Звідси дістаємо рівність чисельників крайніх дробів:

$$A(p+3)p^2 + B(p-1)p^2 + C\left(p-1\right)(p+3)p + D(p-1)(p+3) = p^3 - p^2 + 4.$$

В лівій частині розкриємо дужки та зведемо подібні члени:

$$(A+B+C)p^3+(3A-B+2C+D)p^2+(-3C+2D)p-3D=p^3-p^2+4.$$

Далі прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях змінної p. Дістаємо систему

$$\begin{cases} A+B+C=1, \\ 3A-B+2C+D=-1, \\ -3C+2D=0, \\ -3D=4. \end{cases}$$

Знаходимо її розв'язок

$$A=1,\ B=\frac{8}{9},\ C=-\frac{8}{9},\ D=-\frac{4}{3}$$

та підставляємо його в розклад. Пишемо

$$X(p)=\frac{1}{p-1}+\frac{8/9}{p+3}-\frac{8/9}{p}-\frac{4/3}{p^2}.$$

Тепер вже легко за допомогою табличних зображень та лінійної властивості відновити оригінал $x(t)$. Маємо

$$x(t)=e^t+\frac{8}{9}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{8}{9}-\frac{4}{3}t. \quad ◄$$

Аналогічно застосовується операційне числення до розв'язання задачі Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами. Зображенням такої задачі Коші буде система лінійних алгебраїчних рівнянь.

Приклад 9. Розв'язати операційним методом задачу Коші

$$\begin{cases} x'=x+y+e^t, \\ y'=2x+2y; \end{cases} \quad x(0)=0,\ y(0)=1.$$

► Припускаємо, що розв'язок $x(t),\ y(t)$ задачі Коші утворений оригіналами. Нехай

$$x(t) \mapsto X(p)=L[x(t)], \quad y(t) \mapsto Y(p)=L[y(t)].$$

Застосуємо перетворення Лапласа до обох частин кожного рівняння системи та скористаємося лінійною властивістю, теоремою про зображення похідних, а також табличним зображенням функції e^t. Послідовно маємо:

$$\begin{cases} L[x'] = L\left[x + y + e^t\right], \\ L[y'] = L[2x + 2y]; \end{cases} \qquad \begin{cases} L[x'] = L[x] + L[y] + L\left[e^t\right], \\ L[y'] = 2L[x] + 2L[y]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = X(p) + Y(p) + \dfrac{1}{p-1}, \\ pY(p) - y(0) = 2X(p) + 2Y(p). \end{cases}$$

Підставляємо початкові умови $x(0) = 0$, $y(0) = 1$:

$$\begin{cases} pX(p) - 0 = X(p) + Y(p) + \dfrac{1}{p-1}, \\ pY(p) - 1 = 2X(p) + 2Y(p). \end{cases}$$

Отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $X(p)$, $Y(p)$, яка є зображенням задачі Коші. Розв'яжемо цю систему, наприклад, за формулами Крамера. Попередньо перенесемо невідомі в ліві частини рівнянь, а вільні члени — в праві частини, та зведемо подібні доданки. Напишемо

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - Y(p) = \dfrac{1}{p-1}, \\ -2X(p) + (p-2)Y(p) = 1. \end{cases}$$

За формулами Крамера обчислюємо:

$$X(p)=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{p-1} & -1\\ 1 & p-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}p-1 & -1\\ -2 & p-2\end{vmatrix}}=\frac{\frac{p-2}{p-1}+1}{(p-1)(p-2)-2}=\frac{\frac{2p-3}{p-1}}{p^2-3p}=\frac{2p-3}{p(p-1)(p-3)},$$

$$Y(p)=\frac{\begin{vmatrix}p-1 & \frac{1}{p-1}\\ -2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}p-1 & -1\\ -2 & p-2\end{vmatrix}}=\frac{p-1+\frac{2}{p-1}}{(p-1)(p-2)-2}=\frac{\frac{p^2-2p+3}{p-1}}{p^2-3p}=\frac{p^2-2p+3}{p(p-1)(p-3)}.$$

Тепер, розклавши зображення $X(p),\ Y(p)$ на елементарні дроби, знайдемо їх оригінали. Для $X(p)$ маємо

$$X(p)=\frac{2p-3}{p(p-1)(p-3)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p-3}=$$
$$=\frac{A(p-1)(p-3)+Bp(p-3)+Cp(p-1)}{p(p-1)(p-3)}.$$

Звідси

$$A(p-1)(p-3)+Bp(p-3)+Cp(p-1)=2p-3.$$

Тут невідомі коефіцієнти $A,\ B,\ C$ легко знайти методом *окремих значень*. А саме, помічаємо, що для кожного з трьох окремих значень $p=0,\ p=1$ та $p=3$ лише один член лівої частини останньої рівності відмінний від 0. Підставляючи ці значення в рівність, зразу знаходимо $A,\ B,\ C$:

$$p=0\ \Rightarrow\ A(0-1)(0-3)=2\cdot 0-3\ \Rightarrow\ 3A=-3\ \Rightarrow\ A=-1\,;$$

$$p=1\ \Rightarrow\ B\cdot 1\cdot(1-3)=2\cdot 1-3\ \Rightarrow\ -2B=-1\ \Rightarrow\ B=\frac{1}{2}\,;$$

$$p=3\ \Rightarrow\ C\cdot 3(3-1)=2\cdot 3-3\ \Rightarrow\ 6C=3\ \Rightarrow\ C=\frac{1}{2}\,.$$

Отже,

$$X(p)=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p-3}=-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-3}\,.$$

Тепер згідно табличних зображень та лінійної властивості пишемо оригінал

$$x(t) = -1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3t}.$$

Аналогічно знаходимо по зображенню $Y(p)$ оригінал $y(t)$. Маємо

$$Y(p) = \frac{p^2 - 2p + 3}{p(p-1)(p-3)} = \frac{D}{p} + \frac{E}{p-1} + \frac{F}{p-3} =$$

$$= \frac{D(p-1)(p-3) + Ep(p-3) + Fp(p-1)}{p(p-1)(p-3)}.$$

Звідси

$$D(p-1)(p-3) + Ep(p-3) + Fp(p-1) = p^2 - 2p + 3.$$

Знаходимо невідомі коефіцієнти D, E, F методом окремих значень:

$$p = 0 \Rightarrow 3D = 3 \Rightarrow D = 1; \quad p = 1 \Rightarrow -2E = 2 \Rightarrow E = -1; \quad p = 3 \Rightarrow 6F = 6 \Rightarrow F = 1.$$

Отже,

$$Y(p) = \frac{D}{p} + \frac{E}{p-1} + \frac{F}{p-3} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-3}.$$

Цьому зображенню відповідає оригінал $y(t) = 1 - \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{3t}$. Таким чином, задача Коші має розв'язок

$$\begin{cases} x(t) = -1 + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3t}, \\ y(t) = 1 - \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{3t}. \end{cases}$$

Зауважимо тут, що після того, як операційним методом знайдено одну невідому $x(t)$, іншу невідому $y(t)$ легко обчислити з першого рівняння системи за формулою $y = x' - x - e^{t}$. ◀

В розглянутих прикладах задач Коші початкові умови поставлено в точці $t = 0$. Це трапляється для переважної більшості задач, оскільки в застосуваннях, як правило, t — час.

Загальний випадок початкових умов, поставлених в довільнії фіксованій точці $t = t_0$, зводиться до розглянутого випадку $t = 0$ наступним чином. Нехай треба розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння

$$Ax \equiv a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = f(t)$$

та деяких початкових умов, поставлених в точці $t = t_0$. Тут $x(t)$ — шуканий розв'язок. Зсунувши аргумент t на величину t_0, введемо новий розв'язок $\tilde{x}(t) = x(t + t_0)$ та розглянемо відносно нього задачу Коші для рівняння $A\tilde{x} = f(t + t_0)$ і тих же самих початкових умов, але поставлених в точці $t = 0$. Зазначені задачі Коші рівносильні. Отже, знайшовши операційним методом розв'язок $\tilde{x}(t)$ другої задачі, напишемо розв'язок першої задачі за формулою $x(t) = \tilde{x}(t - t_0)$. Аналогічно і для систем.

Приклад 10. Розв'язати задачу Коші

$$2x' + 3x = -\cos t, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.$$

► Покладаємо $\tilde{x}(t) = x\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ та розглянемо таку задачу Коші, рівносильну заданій:

$$2\tilde{x}' + 3\tilde{x} = -\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \quad \tilde{x}(0) = 4.$$

Оскільки права частина диференціального рівняння дорівнює $\sin t$, то ця задача розв'язана в прикладі 7:

$$\tilde{x}(t) = -\frac{2}{13}\cos t + \frac{3}{13}\sin t + \frac{54}{13}\mathrm{e}^{-3t/2}.$$

Звідси маємо

$$x(t) = \tilde{x}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{13}\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{13}\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{54}{13}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)},$$

тобто

$$x(t) = -\frac{2}{13}\sin t - \frac{3}{13}\cos t + \frac{54}{13}\mathrm{e}^{3\pi/4}\mathrm{e}^{-3t/2}. \quad ◄$$

2 Завдання до самостійної роботи

Завдання 1. Графік оригіналу $f(t)$ складається з двох відрізків *AB* і *CD* та одного проміня, який має початок в точці *M* і проходить через точку *N*. Координати точок *A*, *B*, *C*, *D*, *M, N* задані нижче. Зобразити графік оригіналу, задати оригінал в аналітичній формі та знайти його зображення.

1.1. $A(0,-2)$, $B(1,-2)$, $C(1,-2)$, $D(4,6)$, $M(4,4)$, $N(8,4)$.

1.2. $A(0,0)$, $B(1,3)$, $C(1,3)$, $D(2,0)$, $M(2,2)$, $N(5,2)$.

1.3. $A(0,4)$, $B(2,0)$, $C(2,0)$, $D(6,0)$, $M(6,-6)$, $N(12,0)$.

1.4. $A(0,5)$, $B(5,5)$, $C(5,1)$, $D(10,-3)$, $M(10,-3)$, $N(12,-3)$.

1.5. $A(0,0)$, $B(2,8)$, $C(2,4)$, $D(9,4)$, $M(9,-1)$, $N(10,-1)$.

1.6. $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$, $D(8,-2)$, $M(8,-2)$, $N(16,-4)$.

1.7. $A(0,1)$, $B(5,1)$, $C(5,-1)$, $D(6,-1)$, $M(6,-1)$, $N(8,5)$.

1.8. $A(0,10)$, $B(2,0)$, $C(2,-2)$, $D(4,-2)$, $M(4,-2)$, $N(12,0)$.

1.9. $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(3,0)$, $D(6,-6)$, $M(6,0)$, $N(9,-6)$.

1.10. $A(0,-2)$, $B(2,0)$, $C(2,0)$, $D(3,0)$, $M(3,-8)$, $N(4,-8)$.

1.11. $A(0,3)$, $B(3,3)$, $C(3,1)$, $D(6,1)$, $M(6,1)$, $N(8,0)$.

1.12. $A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(2,0)$, $D(4,1)$, $M(4,1)$, $N(6,1)$.

1.13. $A(0,-1)$, $B(1,-2)$, $C(1,-2)$, $D(2,-1)$, $M(2,-1)$, $N(10,-1)$.

1.14. $A(0,5)$, $B(3,5)$, $C(3,5)$, $D(8,0)$, $M(8,10)$, $N(10,10)$.

1.15. $A(0,0)$, $B(2,4)$, $C(2,6)$, $D(6,6)$, $M(6,4)$, $N(7,4)$.

1.16. $A(0,2)$, $B(3,2)$, $C(3,-2)$, $D(6,-2)$, $M(6,-2)$, $N(8,-8)$.

1.17. $A(0,1)$, $B(5,1)$, $C(5,0)$, $D(7,3)$, $M(7,3)$, $N(8,3)$.

1.18. $A(0,-3)$, $B(6,-3)$, $C(6,0)$, $D(8,-2)$, $M(8,-2)$, $N(10,0)$.

1.19. $A(0,0)$, $B(3,6)$, $C(3,4)$, $D(5,4)$, $M(5,4)$, $N(9,0)$.

1.20. $A(0,4)$, $B(3,4)$, $C(3,4)$, $D(6,3)$, $M(6,1)$, $N(7,1)$.

1.21. $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,-1)$, $D(4,-1)$, $M(4,-2)$, $N(5,1)$.

1.22. $A(0,1)$, $B(3,0)$, $C(3,0)$, $D(4,-1)$, $M(4,1)$, $N(5,1)$.

1.23. $A(0,0)$, $B(3,2)$, $C(3,2)$, $D(5,2)$, $M(5,-1)$, $N(10,-1)$.

1.24. $A(0,-2)$, $B(2,0)$, $C(2,0)$, $D(3,0)$, $M(3,-1)$, $N(4,-5)$.

1.25. $A(0,1)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$, $D(6,-1)$, $M(6,-1)$, $N(9,-1)$.

1.26. $A(0,3)$, $B(3,3)$, $C(3,1)$, $D(5,1)$, $M(5,1)$, $N(7,4)$.

1.27. $A(0,0)$, $B(2,-5)$, $C(2,-5)$, $D(5,-5)$, $M(5,-6)$, $N(6,-6)$.

1.28. $A(0,2)$, $B(3,2)$, $C(3,2)$, $D(6,3)$, $M(6,0)$, $N(12,6)$.

1.29. $A(0,-3)$, $B(3,-3)$, $C(3,-3)$, $D(6,0)$, $M(6,0)$, $N(9,3)$.

1.30. $A(0,0)$, $B(5,-4)$, $C(5,-4)$, $D(7,-4)$, $M(7,-7)$, $N(11,-7)$.

Завдання 2. Знайти зображення оригіналу. Застосувати табличні зображення та властивості перетворення Лапласа.

2.1.	а)	$\cos 2t \sin t$;	б)	$t\,e^{-3t} \sin 2t$;	в)	$t^2 \sin 5t$.
2.2.	а)	$\cos 6t \cos 4t$;	б)	$t^3 \operatorname{sh} 8t$;	в)	$t^2 \cos 3t$.
2.3.	а)	$\sin^2 9t$;	б)	$t\,e^{5t} \cos 7t$;	в)	$t^3 \sin t$.
2.4.	а)	$\sin t \sin 5t$;	б)	$t^5 \operatorname{ch} 3t$;	в)	$t^2 \sin 2t$.
2.5.	а)	$\cos^2 7t$;	б)	$t\,e^{t/3} \sin 8t$;	в)	$t^2 \cos 6t$.
2.6.	а)	$\operatorname{sh} 5t \operatorname{ch} 6t$;	б)	$t\,e^{-t} \cos 4t$;	в)	$t^2 \sin 10t$.
2.7.	а)	$\sin 3t \cos 6t$;	б)	$t \operatorname{ch} 2t \sin t$;	в)	$t^2 \cos \frac{t}{3}$.
2.8.	а)	$\sin^2 2t$;	б)	$t\,e^{2t/3} \cos 4t$;	в)	$t^3 \sin 3t$.
2.9.	а)	$\cos 9t \cos 2t$;	б)	$t^2 \operatorname{sh} 3t$;	в)	$t^2 \sin \frac{2t}{7}$.
2.10.	а)	$\operatorname{ch}^2 3t$;	б)	$t\,e^{6t} \sin 5t$;	в)	$t^2 \cos 4t$.
2.11.	а)	$\sin 9t \sin 3t$;	б)	$t\,e^{-2t} \cos t$;	в)	$t^3 \cos t$.
2.12.	а)	$\operatorname{ch} 4t \operatorname{ch} 2t$;	б)	$t\,e^{-9t} \sin 8t$;	в)	$t^2 \sin 3t$.
2.13.	а)	$\sin \frac{t}{2} \cos 4t$;	б)	$t^3 \operatorname{ch} 5t$;	в)	$t^2 \cos 7t$.
2.14.	а)	$\cos^2 2t$;	б)	$t \operatorname{sh} t \sin t$;	в)	$t^2 \sin \frac{t}{3}$.
2.15.	а)	$\operatorname{sh} 4t \operatorname{ch} t$;	б)	$t\,e^{t/3} \cos 6t$;	в)	$t^3 \sin 2t$.
2.16.	а)	$\cos \frac{t}{4} \sin \frac{t}{2}$;	б)	$t^6 \operatorname{sh} t$;	в)	$t^2 \cos 5t$.
2.17.	а)	$\sin^2 6t$;	б)	$t\,e^{-t/5} \cos \frac{t}{3}$;	в)	$t^2 \sin t$.
2.18.	а)	$\cos 3t \cos 4t$;	б)	$t\,e^{2t} \sin 5t$;	в)	$t^3 \cos 2t$.
2.19.	а)	$\operatorname{sh}^2 9t$;	б)	$t\,e^{3t/2} \cos 2t$;	в)	$t^2 \sin 8t$.
2.20.	а)	$\sin 3t \sin 7t$;	б)	$t^4 \operatorname{ch} \frac{t}{2}$;	в)	$t^2 \cos 10t$.
2.21.	а)	$\cos^2 3t$;	б)	$t\,e^{8t} \sin \frac{3t}{5}$;	в)	$t^2 \sin 6t$.
2.22.	а)	$\operatorname{sh} 3t \operatorname{sh} 7t$;	б)	$t\,e^{-6t} \cos 4t$;	в)	$t^3 \cos 3t$.
2.23.	а)	$\cos 3t \sin \frac{2t}{5}$;	б)	$t \operatorname{sh} t \cos 4t$;	в)	$t^2 \sin \frac{3t}{2}$.
2.24.	а)	$\sin^2 t$;	б)	$t\,e^{t/3} \sin 9t$;	в)	$t^2 \cos \frac{t}{2}$.
2.25.	а)	$\operatorname{ch}^2 \frac{t}{4}$;	б)	$t\,e^{5t} \cos 7t$;	в)	$t^3 \sin 4t$.
2.26.	а)	$\cos 2t \cos 5t$;	б)	$t^5 \operatorname{sh} 3t$;	в)	$t^2 \cos \frac{4t}{3}$.
2.27.	а)	$\operatorname{ch} \frac{t}{3} \operatorname{sh} 2t$;	б)	$t\,e^{-9t} \sin 5t$;	в)	$t^2 \sin 7t$.
2.28.	а)	$\sin 8t \sin t$;	б)	$t\,e^{-t/4} \cos 2t$;	в)	$t^3 \sin \frac{t}{2}$.
2.29.	а)	$\cos^2 \frac{2t}{5}$;	б)	$t^2 \operatorname{sh} 4t$;	в)	$t^2 \cos \frac{t}{4}$.
2.30.	а)	$\operatorname{ch} 6t \operatorname{ch} t$;	б)	$t\,e^{2t/7} \sin 2t$;	в)	$t^2 \sin \frac{5t}{2}$.

Завдання 3. Знайти оригінал, зображенням якого є заданий дріб. При цьму скористатися табличнимі зображеннями.

3.1. а) $\dfrac{6p-1}{p^2-3p+7}$; б) $\dfrac{8p^3+p-9}{p^4-1}$.

3.2. а) $\dfrac{3p+4}{p^2+2p+2}$; б) $\dfrac{6}{p^3+5p^2+4p}$.

3.3. а) $\dfrac{7-p}{p^2+p+3}$; б) $\dfrac{12p^2+1}{p^3+5p^2-p-5}$.

3.4. а) $\dfrac{11p+2}{p^2-4p+9}$; б) $\dfrac{18}{p^4-p^3}$.

3.5. а) $\dfrac{-7p+10}{p^2+6p+10}$; б) $\dfrac{p^2+2p}{p^3-2p^2+3p-6}$.

3.6. а) $\dfrac{p-6}{p^2+3p+7}$; б) $\dfrac{12p+4}{p^3-1}$.

3.7. а) $\dfrac{8p+1}{p^2-10p+30}$; б) $\dfrac{2}{p^3+9p^2+8p-60}$.

3.8. а) $\dfrac{-p-6}{p^2+9p+21}$; б) $\dfrac{4p^2+8}{p^3-13p^2+42p}$.

3.9. а) $\dfrac{7p+2}{p^2+13p+44}$; б) $\dfrac{9p}{p^3+3p^2+3p+1}$.

3.10. а) $\dfrac{-10p+8}{p^2-p+1}$; б) $\dfrac{-6p^3+2p^2}{p^4-81}$.

3.11. а) $\dfrac{4-3p}{p^2+8p+17}$; б) $\dfrac{p^2}{p^3-4p^2-17p+60}$.

3.12. а) $\dfrac{10p+2}{p^2-11p+33}$; б) $\dfrac{-16p+4}{p^3+8}$.

3.13. а) $\dfrac{2p-5}{p^2-5p+8}$; б) $\dfrac{-2}{p^4-4p^2}$.

3.14. а) $\dfrac{-p-8}{p^2+4p+7}$; б) $\dfrac{6p^2+2}{p^3+10p}$.

3.15. а) $\dfrac{8p+1}{p^2-12p+40}$; б) $\dfrac{16}{p^3+p^2-4p-4}$.

3.16. а) $\dfrac{-p+3}{p^2+15p+60}$; б) $\dfrac{2p^3+p^2-8}{p^4+p^2}$.

3.17. а) $\dfrac{6p-9}{p^2-7p+14}$; б) $\dfrac{2p+4}{p^3-6p^2+12p-8}$.

3.18. а) $\dfrac{p+6}{p^2+5p+9}$; б) $\dfrac{12p^2-5}{p^3-9p}$.

3.19. а) $\dfrac{3-11p}{p^2+14p+50}$; б) $\dfrac{-6}{p^4+2p^2}$.

3.20. а) $\dfrac{-10p-8}{p^2-6p+13}$; б) $\dfrac{3}{p^3+5p^2+2p-8}$.

3.21. а) $\dfrac{2p+2}{p^2-15p+59}$; б) $\dfrac{p^2-p+6}{p^3+3p^2}$.

3.22. а) $\dfrac{-7p+1}{p^2+10p+31}$; б) $\dfrac{2p^2-3}{p^4+p^3}$.

3.23. а) $\dfrac{5-8p}{p^2-2p+11}$; б) $\dfrac{2}{p^3+6p^2+12p+8}$.

3.24. а) $\dfrac{4p+7}{p^2+12p+41}$; б) $\dfrac{p^3-3}{p^4-16}$.

3.25. а) $\dfrac{14p-10}{p^2-8p+20}$; б) $\dfrac{p^2+5}{p^3-8p^2+15p}$.

3.26. а) $\dfrac{-p-2}{p^2-14p+51}$; б) $\dfrac{6}{p^3-3p^2+3p-1}$.

3.27. а) $\dfrac{4p+1}{p^2+11p+34}$; б) $\dfrac{2p-5}{p^4-2p^3}$.

3.28. а) $\dfrac{6p-4}{p^2-13p+44}$; б) $\dfrac{-3p^2+4}{p^3+5p}$.

3.29. а) $\dfrac{-7p-9}{p^2-9p+22}$; б) $\dfrac{10}{p^3+2p^2-9p-18}$.

3.30. а) $\dfrac{8p+1}{p^2+7p+14}$; б) $\dfrac{2-p}{p^4+p^3-2p^2}$.

Завдання 4. Розв’язати операційним методом задачу Коші для рівняння 1-го порядку. Зробити перевірку.

4.1. $x'-4x=3\sin t,\ x(0)=-2.$ **4.2.** $2x'+5x=\cos t,\ x(0)=1.$

4.3. $3x'-x=\sin 3t,\ x(0)=4.$ **4.4.** $x'-8x=2te^{-3t},\ x(0)=-3.$

4.5. $2x'+3x=\operatorname{ch} t,\ x(0)=-1.$ **4.6.** $3x'+2x=te^{t},\ x(0)=5.$

4.7. $x'-7x=\cos 4t,\ x(0)=3.$ **4.8.** $2x'+x=-4t,\ x(0)=-7.$

4.9. $3x'-4x=\operatorname{sh} t,\ x(0)=6.$ **4.10.** $x'-3x=te^{2t},\ x(0)=-4.$

4.11. $2x'-3x=\operatorname{ch} 2t,\ x(0)=-5.$ **4.12.** $3x'+x=\sin 2t,\ x(0)=2.$

4.13. $x'+x=-t^2$, $x(0)=0$.

4.14. $2x'-7x=\cos 2t$, $x(0)=-3$.

4.15. $3x'-2x=te^{-t}$, $x(0)=1$.

4.16. $x'+3x=2\,\text{sh}\,4t$, $x(0)=4$.

4.17. $2x'-x=-te^{3t}$, $x(0)=-6$.

4.18. $3x'+4x=\cos 5t$, $x(0)=-1$.

4.19. $x'+2x=4\sin 5t$, $x(0)=3$.

4.20. $2x'+5x=-\text{ch}\,4t$, $x(0)=-2$.

4.21. $4x'-x=2\cos 3t$, $x(0)=2$.

4.22. $x'-6x=-\text{sh}\,3t$, $x(0)=5$.

4.23. $2x'+7x=te^{-2t}$, $x(0)=-4$.

4.24. $3x'-5x=t^2e^t$, $x(0)=-1$.

4.25. $x'-x=-\sin 4t$, $x(0)=-2$.

4.26. $2x'+9x=-\cos 6t$, $x(0)=1$.

4.27. $3x'+5x=2\,\text{sh}\,2t$, $x(0)=-5$.

4.28. $x'-2x=5te^{4t}$, $x(0)=-3$.

4.29. $4x'+x=-2\sin 6t$, $x(0)=4$.

4.30. $x'+5x=-2\,\text{ch}\,3t$, $x(0)=-1$.

Завдання 5. Розв’язати операційним методом задачу Коші для рівняння 2-го порядку. Зробити перевірку.

5.1. $x''+4x'+13x=2e^{3t}$, $x(0)=2$, $x'(0)=-1$.

5.2. $x''+16x=te^{-t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

5.3. $x''-x'-12x=e^{4t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=3$.

5.4. $x''-2x'+5x=\cos 2t$, $x(0)=-2$, $x'(0)=1$.

5.5. $x''-3x'+2x=-2\sin t$, $x(0)=-1$, $x'(0)=2$.

5.6. $x''-9x=\cos 5t$, $x(0)=0$, $x'(0)=4$.

5.7. $x''+4x=te^t$, $x(0)=-3$, $x'(0)=0$.

5.8. $x''+7x'+10x=\sin 3t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

5.9. $x''-2x'=\cos t+\sin t$, $x(0)=2$, $x'(0)=0$.

5.10. $x''+2x'+2x=t$, $x(0)=1$, $x'(0)=-3$.

5.11. $x''-6x'+10x=2\cos t$, $x(0)=-1$, $x'(0)=0$.

5.12. $x''-3x'-4x=e^{2t}$, $x(0)=2$, $x'(0)=-2$.

5.13. $x''+4x'+8x=e^{-3t}$, $x(0)=3$, $x'(0)=0$.

5.14. $x''+x=te^{2t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=-4$.

5.15. $x''-5x'+6x=-\sin 2t$, $x(0)=2$, $x'(0)=0$.

5.16. $x''+x'=3t^2$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

5.17. $x''+6x'+10x=\cos 3t$, $x(0)=-2$, $x'(0)=3$.

5.18. $x''+4x'+4x=-2e^{-t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$.

5.19. $x''+9x=3t-1$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

5.20. $x'' - x' = e^t \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.

5.21. $x'' - 2x' + 10x = -e^{-4t}$, $x(0) = 3$, $x'(0) = 1$.

5.22. $x'' + 4x' + 20x = 3$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -4$.

5.23. $x'' + 2x' = e^t \cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

5.24. $x'' + 2x' + 10x = \sin 4t$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -2$.

5.25. $x'' + x' - 2x = e^{-2t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

5.26. $x'' - 4x' + 5x = te^{3t}$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -1$.

5.27. $x'' - 2x' - 3x = -\cos 4t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -3$.

5.28. $x'' + 3x' = 2 - t^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$.

5.29. $x'' - 2x' + x = e^{5t}$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

5.30. $x'' - 4x' + 8x = \sin 5t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$.

Завдання 6. Розв’язати операційним методом задачу Коші для системи рівнянь. Зробити перевірку.

6.1. $\begin{cases} x' = 2x + y + \cos 2t, \\ y' = 5x - 2y; \end{cases}$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 3.$

6.2. $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = -2x + y + 2t; \end{cases}$

$x(0) = 4, \quad y(0) = 1.$

6.3. $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 13x - y + 1; \end{cases}$

$x(0) = -2, \quad y(0) = -1.$

6.4. $\begin{cases} x' = 3x + 3y, \\ y' = -x - y + te^{-t}; \end{cases}$

$x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

6.5. $\begin{cases} x' = 2x - 5y + t^2, \\ y' = x - 2y; \end{cases}$

$x(0) = -2, \quad y(0) = 0.$

6.6. $\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = -x + y + 2\sin 2t; \end{cases}$

$x(0) = 5, \quad y(0) = 1.$

6.7. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 2x + 4y - e^{2t}; \end{cases}$

$x(0) = 3, \quad y(0) = -1.$

6.8. $\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = 2x - 4y + 3e^{-3t}; \end{cases}$

$x(0) = -1, \quad y(0) = 2.$

6.9. $\begin{cases} x' = 3x - y + \cos t, \\ y' = 5x + y; \end{cases}$

$x(0) = 1, \quad y(0) = -6.$

6.10. $\begin{cases} x' = 4x - 3y, \\ y' = 2x - y + t; \end{cases}$

$x(0) = 0, \quad y(0) = -1.$

6.11. $\begin{cases} x' = 5x + 9y, \\ y' = -2x - 6y + 3; \end{cases}$

$x(0) = 2, \quad y(0) = 2.$

6.12. $\begin{cases} x' = -3x + 5y, \\ y' = -x + y - te^{-t}; \end{cases}$

$x(0) = 0, \quad y(0) = -4.$

6.13. $\begin{cases} x' = 3x - 6y + \cos 3t, \\ y' = 2x - 4y; \end{cases}$

$x(0) = -2, \quad y(0) = 1.$

6.14. $\begin{cases} x' = -4x + y, \\ y' = 2x - 3y - e^{4t}; \end{cases}$

$x(0) = -1, \quad y(0) = -3.$

6.15. $\begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = -x + 5y + \sin t; \end{cases}$

$x(0) = 3, \quad y(0) = 2.$

6.16. $\begin{cases} x' = -3x - 2y, \\ y' = 9x + 3y + \sin 3t; \end{cases}$

$x(0) = -1, \quad y(0) = 1.$

6.17. $\begin{cases} x' = 2x - y + e^{t} \cos t, \\ y' = -4x + 2y; \end{cases}$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

6.18. $\begin{cases} x' = -x + 4y, \\ y' = -2x + 3y + e^{-t}; \end{cases}$

$x(0) = 5, \quad y(0) = -2.$

6.19. $\begin{cases} x' = -5x + 3y, \\ y' = -3x + y - e^{-2t}; \end{cases}$

$x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$

6.20. $\begin{cases} x' = -2x - y + 2\cos t, \\ y' = 4x - 2y; \end{cases}$

$x(0) = 2, \quad y(0) = 2.$

6.21. $\begin{cases} x' = -2x + y + 3t, \\ y' = -6x + 5y; \end{cases}$

$x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

6.22. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -4x - y + e^{3t}; \end{cases}$

$x(0) = -1, \quad y(0) = 3.$

6.23. $\begin{cases} x' = -2x + 5y, \\ y' = -4x + 2y - \sin t; \end{cases}$

$x(0) = -1, \quad y(0) = -1.$

6.24. $\begin{cases} x' = 2x - 4y - \sin 4t, \\ y' = x - 3y; \end{cases}$

$x(0) = 0, \quad y(0) = -2.$

6.25. $\begin{cases} x' = -2x + 9y + 1, \\ y' = -x - 2y; \end{cases}$

$x(0) = -3, \quad y(0) = 2.$

6.26. $\begin{cases} x' = -5x + 10y, \\ y' = -x + 2y + t; \end{cases}$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

6.27. $\begin{cases} x' = 4x + 5y, \\ y' = -4x - 4y - e^{t}\sin t; \end{cases}$

$x(0) = -2, \quad y(0) = 0.$

6.28. $\begin{cases} x' = -4x - 2y + e^{-3t}, \\ y' = 9x + 2y; \end{cases}$

$x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$

6.29. $\begin{cases} x' = 6x + 4y - te^{2t}, \\ y' = -x + y; \end{cases}$

$x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$

6.30. $\begin{cases} x' = 3x + 6y, \\ y' = -2x - 5y - 2t; \end{cases}$

$x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$

Рекомендована література

1. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. — М.: Высш. шк., 1975. — 407 с.
2. *Мантуров О.В.* Курс высшей математики: Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной. Численные методы. Теория вероятностей. — М.: Высш. шк., 1991. — 448 с.
3. *Мартыненко В. С.* Операционное исчисление. – К.: Вища шк., 1990. – 359 с.
4. *Нестеренко Л.І.* Елементи операційного числення. — Ніжин : НДПУ, 2004. — 44 с.
5. *Шостак Р. Я.* Операционное исчисление. — М.: Высш. шк., 1972. — 279 с.
6. *Штокало И. З.* Операционное исчисление. — К.: Наук. думка, 1972. — 303 с.