Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

# ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання розрахункової роботи з дисципліни "Вища математика "для студентів всіх спеціальностей

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри вищої
та прикладної математики
Протокол № 6
від 17. 01. 2012

Чернігів ЧДТУ 2012

Функції багатьх змінних. Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи з дисципліни "Вища математика"для студентів всіх спеціальностей/Укл.:Казнадій С.П., Мурашковська В.П., Руновська Л.А. - Чернігів: ЧДТУ, 2012.-

Укладачі: Казнадій Світлана Петрівна, старший викладач
Мурашковська Віра Петрівна, старший викладач
Руновська Людмила Анатоліївна,старший викладач

Відповідальний за випуск: Лось Валерій Миколайович, завідувач кафедри вищої та прикладної математики кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: Корнієнко Світлана Петрівна, кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики Чернігівського державного технологічного університету

# ЗМІСТ

# ВСТУП

Мета методичних вказівок — допомогти студентам оволодіти знаннями з розділу функцій кількох змінних, навчитися розв'язувати типові задачі з даної теми та застосовувати їх при вивченні інших дисциплін.

Методичні вказівки "Функції багатьох змінних" містять основні поняття про функції багатьох змінних, що викладаються студентам у рамках даної теми, приклади розв'язання типових стандартних задач, а також 30 різних варіантів індивідуальних завдань.

Методичні вказівки складаються з двох розділів. В першому розділі наведені основні теоретичні поняття та приклади розв'язання задач. Другий розділ вміщує 30 варіантів індивідуальних завдань. На думку укладачів найбільшого успіху в оволодінні предметом студенти можуть досягти при сумісному використанні підручника [1-2] та методичних вказівок.

# ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

**1 Поняття функції багатьох змінних. Область визначення.** Нехай задано множину $D$ впорядкованих пар $(x, y)$ з $\mathbb{R}^2$. Якщо кожній парі чисел $(x, y)$ за певним законом відповідає єдине число $z$, то кажуть, що на множині $D$ визначено функцію двох змінних $x$ і $y$, і записують $z = f(x, y)$. Змінні $x$ та $y$ називають незалежними змінними. Множину пар $(x, y)$ значень $x$ та $y$, для яких функція $z = f(x, y)$ існує, називають областю визначення функції і позначають $D$ або $D(z)$.

**Приклад 1.** *Знайти область визначення $D$ функції $z = \sqrt[4]{2x - x^2 - y^2 - 4y - 1}$.*

<u>*Розв'язання.*</u> *Функція визначена в тих точках площини де виконується нерівність $2x - x^2 - y^2 - 4y - 1 \geq 0$. Для того, щоб визначити область $D$ геометрично, знайдемо її межу:*

$$2x - x^2 - y^2 - 4y - 1 = 0, \quad \textit{або} \quad x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0.$$

*Виділивши повні квадрати, отримаємо, що останнє рівняння еквівалентне наступному*

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 4 = 0, \quad \textit{тобто} \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4.$$

*Це рівняння визначає на площині $Oxy$ коло радіуса 2 з центром в точці $(1; -2)$. Дане коло ділить всю площину на дві частини. Щоб визначити, яка з частин є областю визначення даної функції, тобто задовольняє умову $2x - x^2 - y^2 - 4y - 1 \geq 0$, достатньо перевірити цю умову для довільної точки, яка не лежить на колі. Наприклад, розглянемо точку $(1; 1)$, яка розташована зовні кола. Підставивши її в нерівність, отримаємо $2 - 1 - 1 - 4 - 1 \geq 0$. Ця нерівність є невірною. Отже, областю визначення є внутрішність кола включаючи границю.*

<u>*Відповідь:*</u> $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 4\}$.

Поняття функції двох змінних можна узагальнити на випадок більшої кількості змінних. Якщо задано множину $D$ упорядкованих систем $(x_1; x_2; ...; x_n)$ з $\mathbb{R}^n$, і кожній точці $(x_1; x_2; ...; x_n)$ з $\mathbb{R}^n$ за певним законом відповідає єдине значення $z$, то кажуть, що на множині $D$ визначено функцію $z$ від $n$ змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, і записують $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. При цьому множина $D$ називається областю визначення функції $z$[1].

**2 Границя функції багатьох змінних. Частинні похідні.**

Введемо означення границі функції для функції двох змінних. Множина всіх точок $M(x; y)$, координати яких задовольняють нерівність

$$\rho(M; M_0) < \delta,$$

де $\rho(M; M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ — відстань від точки $M(x; y)$ до точки $M_0(x_0; y_0)$, називається $\delta$-околом точки $M_0(x_0; y_0)$.

Число $A$ називається границею функції $z = f(x, y)$ в точці $M$, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $M(x; y) \in D$, які задовольняють умову $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x; y)$. Надамо змінній $x$ приросту $\triangle x$, залишаючи змінну $y$ незмінною, так, щоб точка $M(x + \triangle x; y)$ належала заданому околу. Величина

$$\triangle_x z = f(x + \triangle x, y) - f(x, y)$$

називається частинним приростом функції $z$ по змінній $x$. Аналогічно вводиться частинний приріст $\triangle_y z$ функції $z$ по змінній $y$, а саме

$$\triangle_y z = f(x, y + \triangle y) - f(x, y).$$

Якщо існує границя

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle_x z}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x, y) - f(x, y)}{\triangle x},$$

то вона називається частинною похідною функції $z = f(x; y)$ в точці $M(x; y)$ по змінній $x$, і позначається $z'_x$ або $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Аналогічно, якщо існує границя

$$\lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle_y z}{\triangle y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y)}{\triangle y},$$

то вона називається частинною похідною функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$ по змінній $y$, і позначається $z'_y$ або $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Згідно з означенням, при знаходженні частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$ обчислюють звичайну похідну функції однієї змінної $x$, вважаючи змінну $y$ сталою, а при знаходженні похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$ сталою вважається змінна $x$. Тому частинні похідні знаходяться за формулами і правилами обчислення похідних функцій однієї змінної. Для функції $n$ змінних $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна знайти $n$ частинних похідних:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial z}{\partial x_2}; \quad ... \quad ; \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Щоб знайти частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x_i}$, $\ i = 1, ..., n$, треба взяти звичайну похідну від функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по змінній $x_i$, вважаючи решту змінних сталими.

Розглянемо приклад.

**Приклад 2.** *Обчислити частинні похідні* $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ *функцій:*

$$а)\ \ z = 3x^7y^2 + 2\cos(4x+6) + \frac{x^2}{5y+4}; \qquad б)\ \ z = (\ln(2x+7))^{4y^2+5}.$$

*Розв'язання.*

*а)*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 21x^6y^2 - 2\sin(4x+6)\cdot 4 + \frac{2x}{5y+4}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^7\cdot 2y - \frac{5x^2}{(5y+4)^2}.$$

*б)*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (4y^2+5)(\ln(2x+7))^{4y^2+4}\cdot\frac{2}{2x+7}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = (\ln(2x+7))^{4y^2+5}\cdot\ln(\ln(2x+7))8y.$$

**3 Похідна складеної функції.**

Нехай $z = f(x,y)$ є функцією двох змінних, кожна з яких, в свою чергу є функцією незалежної змінної $t : x = x(t), y = y(t)$. Таким чином, функцію $z = f(x,y)$ можна подати у вигляді $z = f(x,y) = f(x(t),y(t))$. Тому функція $z = f(x;y)$ є складеною функцією змінної $t$. Похідну цієї функції знаходять за формулою:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \qquad (1)$$

**Приклад 3.** *Знайти* $\frac{dz}{dt}$ *від функції*

$$z = \ln(x^2+e^{4y}), \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \frac{1}{4}\ln t.$$

*Розв'язання. Обчислимо окремо частинні похідні*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+e^{4y}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4e^{4y}}{x^2+e^{4y}}; \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}; \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{4t}.$$

*Підставивши в формулу* (1), *отримаємо*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x}{x^2+e^{4y}}\cdot\frac{1}{1+t^2} + \frac{4e^{4y}}{x^2+e^{4y}}\cdot\frac{1}{4t} = \frac{1}{\operatorname{arctg}^2 t + t}\cdot\left(\frac{2\operatorname{arctg} t}{1+t^2}+1\right).$$

Аналогічно можна обчислити похідну складеної функції, кожна із незалежних змінних якої є функцією декількох змінних. Розглянемо випадок функції двох незалежних змінних, кожна з яких залежить також від двох змінних. Нехай задано функцію двох змінних $z = f(x,y)$, причому незалежні змінні $x$ та $y$ є функціями змінних $u$ і $v$, тобто $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Таким чином, формально функція $z = f(x, y)$ є функцією двох змінних $u$ і $v$, тобто $z = f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v))$. Тоді від функції $z = f(x, y)$ можна знайти дві частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u}$ та $\frac{\partial z}{\partial v}$, які обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{2}$$

та

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \tag{3}$$

**Приклад 4.** *Знайти частинні похідні* $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ *від функції*

$$z = \ln\cos\frac{x^2}{y}, \quad x = u^2 v, \quad y = v\ln u.$$

*Розв'язання.* *Функцію можна записати в вигляді:* $z = f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v))$, *тому у функції існують частинні похідні* $\frac{\partial z}{\partial u}$ *та* $\frac{\partial z}{\partial v}$, *які обчислюються за формулами* (2) *та* (3). *Обчислимо окремо частинні похідні:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\cos\frac{x^2}{y}}\cdot\sin\frac{x^2}{y}\cdot\frac{2x}{y} = -\operatorname{tg}\frac{x^2}{y}\cdot\frac{2x}{y}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\cos\frac{x^2}{y}}\cdot\sin\frac{x^2}{y}\cdot\left(\frac{-x^2}{y^2}\right) = \operatorname{tg}\frac{x^2}{y}\cdot\frac{x^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2uv; \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = u^2; \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{v}{u}; \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \ln u$$

*Підставивши їх відповідно в формули* (2) *та* (3) *будемо мати:*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\operatorname{tg}\frac{x^2}{y}\cdot\frac{2x}{y}2uv + \operatorname{tg}\frac{x^2}{y}\cdot\frac{x^2}{y^2}\frac{v}{u} = \operatorname{tg}\frac{u^4 v}{\ln u}\cdot\left(-\frac{4u^3 v}{\ln u} + \frac{u^3 v}{\ln^2 u}\right) = \operatorname{tg}\frac{u^4 v}{\ln u}\cdot\frac{u^3 v}{\ln u}\left(\frac{1}{\ln u} - 4\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\operatorname{tg}\frac{x^2}{y}\cdot\frac{2x}{y}u^2 + \operatorname{tg}\frac{x^2}{y}\cdot\frac{x^2}{y^2}\ln u = \operatorname{tg}\frac{u^4 v}{\ln u}\left(-\frac{2u^4}{\ln u} + \frac{u^4}{\ln u}\right) = -\operatorname{tg}\frac{u^4 v}{\ln u}\cdot\frac{u^4}{\ln u}$$

*Відповідь:* $\frac{\partial z}{\partial u} = \operatorname{tg}\frac{u^4 v}{\ln u}\cdot\frac{u^3 v}{\ln u}\left(\frac{1}{\ln u} - 4\right)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -\operatorname{tg}\frac{u^4 v}{\ln u}\cdot\frac{u^4}{\ln u}$.

### 4 Частинні похідні вищого порядку.

Якщо функція $z = f(x, y)$ задана в області $D$ і має частинні похідні $z'_x, z'_y$ в усіх точках $(x : y) \in D$, то ці похідні можна розглядати як нові функції, задані в області $D$. Тому якщо існує частинна похідна по $x$ від $\frac{\partial z}{\partial x}$ , то її називають частинною похідною другого порядку по змінній $x$ від функції

$f(x, y)$ і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ або $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ або $f''_{xx}$. Аналогічно $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ або $f''_{yy}$. Крім того, якщо існує частинна похідна від функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ по змінній $y$, то таку похідну називають мішаною частинною похідною другого порядку і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ або $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ або $z''_{xy}$. Аналогічно визначається мішана похідна $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

**Приклад 5.** *Знайти* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *для функції* $z = \operatorname{arctg}(4x - 3y)$.
*Розв'язання.* *Знайдемо частинні похідні першого порядку:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4}{1 + (4x - 3y)^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3}{1 + (4x - 3y)^2}.$$

*Диференціюючи їх ще раз, отримаємо похідні другого порядку:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{32(4x - 3y)}{(1 + (4x - 3y)^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{18(4x - 3y)}{(1 + (4x - 3y)^2)^2};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{24(4x - 3y)}{(1 + (4x - 3y)^2)^2}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{24(4x - 3y)}{(1 + (4x - 3y)^2)^2}.$$

## 5 Похідна неявно заданої функції.

Розглянемо рівняння

$$F(x, y, z) = 0.$$

Якщо кожній парі чисел $x$ та $y$ з деякої множини відповідає єдине значення $z$, яке разом з $x$ та $y$ задовольняє рівняння $F(x, y, z) = 0$, то це рівняння задає неявну функцію $z = f(x, y)$[2]. Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявної функції $z$ від $x$ та $y$ обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{5}$$

**Приклад 6.** *Знайти* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *для функції* $F(x, y, z) = 0$, *якщо*

$$4x^3y^2 - \ln\frac{y^2}{z} + 3e^{x^2}y - 5z = 6.$$

*Розв'язання.* *Спочатку запишемо функцію* $F(x, y, z)$. *В нашому випадку* $F(x, y, z) = 4x^3y^2 - \ln\frac{y^2}{z} + 3e^{x^2}y - 5z - 6 = 0$ *або* $F(x, y, z) = 4x^3y^2 - 2\ln y + \ln z + 3e^{x^2}y - 5z - 6 = 0$.

*Знайдемо частинні похідні.*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 12x^2y^2 + 3e^{x^2} \cdot 2xy; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 8x^3y - \frac{2}{y} + 3e^{x^2}; \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{z} - 5.$$

*Скориставшись формулами* (4) *і* (5), *дістанемо:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{12x^2y^2 + 3e^{x^2} \cdot 2xy}{\frac{1}{z} - 5}; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{8x^3y - \frac{2}{y} + 3e^{x^2}}{\frac{1}{z} - 5}.$$

**6 Похідна за напрямком.**

Розглянемо трьохвимірний простір. Нехай задано диференційовну функцію $u(x, y, z)$. Виберемо в цьому просторі точку $M(x; y; z)$ і проведемо з цієї точки вектор $\overrightarrow{l}$ який визначається напрямними косинусами: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, де $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – кути, які утворює вектор $\overrightarrow{l}$ з осями координат $Ox, Oy, Oz$. Похідна функції $u(x, y, z)$ за напрямком $\overrightarrow{l}$ визначається формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos\gamma. \tag{6}$$

Похідна за напрямком $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}$ визначає швидкість зміни функції $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $\overrightarrow{l}$ [3].

**Приклад 7.** *Знайти похідну скалярного поля* $u(x, y, z)$ *в точці* $M$ *за напрямком* $l$, *якщо*

$$u = x\ln(2 + y^2) - 2\,\mathrm{arcctg}\, z, \quad \overrightarrow{l} = -4\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}, \quad M(3, 1, 1).$$

<u>*Розв'язання.*</u> *Знайдемо частинні похідні:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ln(2 + y^2); \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{2 + y^2}; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2}{1 + z^2}.$$

*Обчислимо їх значення в точці* $M$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,|_M = \ln 3; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\,|_M = 2; \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\,|_M = 1.$$

*Напрямок визначається вектором* $\overrightarrow{l} = (0, -4, 3)$, *отже напрямні косинуси:*

$$\cos\alpha = 0; \qquad \cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{-4}{5}; \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}$$

*Скориставшись формулою (6), дістанемо:*

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}} = \ln 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-\frac{4}{5}) + 1 \cdot \frac{3}{5} = -1.$$

*Відповідь:* $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}} = -1.$

**7 Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні.**

Нехай задано поверхню $F(x, y, z) = 0$. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить цій поверхні і функція $F(x, y, z)$ диференційовна в точці $M_0$, причому не всі частинні похідні функції $F(x, y, z)$ в точці дорівнюють нулю. Рівняння дотичної площини до поверхні в точці має вигляд

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \tag{7}$$

Нормаллю до поверхні в точці називають пряму, що проходить через точку перпендикулярно до дотичної площини в цій точці. Рівняння нормалі має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \tag{8}$$

**Приклад 8.** *Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо*

$$S : x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4x - 8 = 0, \quad M(1, 0, 1).$$

*Розв'язання. Обчислимо частинні похідні функції $S(x, y, z)$ в точці $M$.*

$$\frac{\partial S}{\partial x} \mid_M = (2x - 4) \mid_M = -2; \qquad \frac{\partial S}{\partial y} \mid_M = (2y + 6) \mid_M = 6; \qquad \frac{\partial S}{\partial z} \mid_M = (2z) \mid_M = 2.$$

*За формулою (7) маємо:*

$$-2(x - 1) + 6(y - 0) + 2(z - 1) = 0.$$

*Отже, рівняння дотичної площини має вигляд:*

$$-2x + 6y + 2z = 0.$$

*Скориставшись формулою (8), отримаємо рівняння нормалі:*

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 0}{6} = \frac{z - 1}{2}.$$

**8 Екстремум функції кількох змінних.**

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області $D$, а точка $M_0(x_0, y_0) \in D$. Якщо існує окіл точки $M_0$, який належить області $D$ і для всіх відмінних від $M_0$ точок $M$ цього околу виконується нерівність

$$f(M) < f(M_0) \quad (f(M) > f(M_0)),$$

то точку $M_0$ називають точкою локального мінімуму(максимуму)[1]. Точки мінімуму і максимуму функції називаються точками екстремуму.

*Необхідні умови існування екстремуму.* Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $(x_0, y_0)$ локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку по змінних $x$ та $y$ дорівнюють нулю або не існують.

*Достатні умови існування екстремуму.* Нехай в точці $M_0(x_0, y_0)$ частинні похідні функції по $x$ і по $y$ дорівнюють нулю. Функція має неперервні частинні похідні другого порядку в самій точці $M_0$ і деякому її околі. Якщо

$$\triangle(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

то функція має в точці $(x_0, y_0)$ екстремум, причому максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$. Якщо $\triangle(x_0, y_0) < 0$, то в точці $(x_0, y_0)$ функція екстремуму не має.

Алгоритм знаходження екстремуму:

1) знайти стаціонарні точки функції із системи рівнянь:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0;$$

2) у кожній точці обчислити вираз

$$\triangle(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2,$$

і скориставшись достатніми умовами існування екстремуму, зробити висновок.

**Приклад 9.** *Знайти екстремум функції $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.*

<u>*Розв'язання.*</u> *Знайдемо частинні похідні функції:*

$$z'_x = 3x^2 - 6y; \qquad z'_y = 24y^2 - 6x$$

*і прирівнявши їх до нуля, отримаємо систему*

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 24y^2 - 6x = 0, \end{cases}$$

*або*

$$\begin{cases} x^2 = 2y, \\ 4y^2 = x. \end{cases}$$

*Підставляючи* $x = 4y^2$ *в рівняння* $x^2 = 2y$, *дістанемо*

$$16y^4 - 2y = 0,$$

*звідки* $y_1 = 0, \ \ y_2 = \frac{1}{2}$, *тоді* $x_1 = 0, \ \ x_2 = 1$. *Отже функція має дві стаціонарні точки:* $M_1(0,0), \ \ M_2(1, \frac{1}{2})$. *Знайдемо величину* $\triangle(x,y)$. *Оскільки*

$$f''_{xx} = 6x; \qquad f''_{yy} = 24y; \qquad f''_{xy} = -6,$$

*то*

$$\triangle(x,y) = 6x \cdot 24y - (-6)^2 = 144xy - 36.$$

*Обчислимо величину* $\triangle(x,y)$ *в кожній стаціонарній точці. Розглянемо точку* $M_1 : \triangle(0,0) = -36$, *користуючись достатніми умовами, можемо зробити висновок, що в точці* $M_1$ *функція екстремуму не має. Підставимо координати точки* $M_2$ *в* $\triangle(x,y)$ :

$$\triangle(1, \frac{1}{2}) = 26 > 0, \qquad f''_{xx}(1, \frac{1}{2}) = 6 > 0,$$

*отже точка* $M_2$ *є точкою мінімуму. Обчислимо значення функції в цій точці:*

$$z(1, \frac{1}{2}) = 1 + 8 \cdot (\frac{1}{2})^3 - 6 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0.$$

*Відповідь:* $x = 1, y = \frac{1}{2}, z_{min} = 0$.

*Зауваження.* Для того щоб знайти найбільше та найменше значення функції в замкненій області, треба знайти максимуми і мінімуми, які належать області а також найбільше і найменше значення на границі області. Найбільше серед усіх цих чисел - буде найбільшим значенням, а найменше - найменшим [4].

**9 Умовний екстремум функції кількох змінних.**

Умовним екстремумом функції $z = f(x,y)$ називається екстремум, що набуває функція за умови, що змінні $x$ і $y$ пов'язані рівнянням $\varphi(x,y) = 0$.[1] Нехай потрібно знайти екстремальні значення функції $z = f(x,y)$, якщо на незалежні змінні накладено додаткові обмеження задані у вигляді рівняння $\varphi(x,y) = 0$.

Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda) = z(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y).$$

Знайдемо екстремум цієї функції, розглядаючи $x, y$ і $\lambda$ як аргументи. Необхідні умови екстремуму в точці $(x, y, \lambda)$ функції $L(x, y, \lambda)$:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0.$$

Розв'язуючи отриману систему, дістанемо точки, в яких може бути екстремум.

Характер точки екстремуму визначаємо за допомогою достатніх умов існування "звичайного"екстремуму, застосовуючи до функції $L = f(x, y, \lambda)$.

**Приклад 10.** *Визначити екстремальне значення функції* $z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10$, *якщо* $2x - 2y = 7$.

*Розв'язання.*

*Запишемо обмеження в вигляді:* $2x - 2y - 7 = 0$. *Складемо функцію Лагранжа*

$$L = (x-2)^2 + 2y^2 - 10 + \lambda(2x - 2y - 7).$$

*Знайдемо частинні похідні функції* $L(x, y, \lambda)$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-2) + 2\lambda, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 4y - 2\lambda,$$

*і прирівняємо їх до нуля. Дістанемо систему рівнянь:*

$$\begin{cases} 2x - 4 + 2\lambda = 0, \\ 4y - 2\lambda = 0, \\ 2x - 2y - 7 = 0. \end{cases}$$

*Звідки* $x = 3, y = -\frac{1}{2}, \lambda = -1$. *Маємо точку яка "підозрюється"на екстремум.*

*Обчислимо*

$$L''_{xx} = 2, \qquad L''_{yy} = 4, \qquad L''_{xy} = 0$$

*Оскільки*

$$\triangle(x, y) = 8, \qquad z''_{xx} = 2 > 0,$$

*то користуючись достатніми умовами існування екстремуму функції, робимо висновок що в точці* $x = 3, y = -\frac{1}{2}$ *функція має умовний мінімум. Обчислимо* $z(3, -\frac{1}{2}) = -8.5$

*Відповідь:* $x = 3, y = -\frac{1}{2}, z_{min} = -8.5$.

## 10 ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

### Варіант 1

**1.** Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

$$\text{а)}\ \ z = \arcsin(x - 2y); \qquad \text{б)}\ \ z = \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{2x - x^2 - y^2}}.$$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

$$\text{а)}\ \ z = 5x^2y^4 + 7y^5 + 9; \qquad \text{б)}\ \ z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5};$$

$$\text{в)}\ \ z = (\cos x)^{y^3}; \qquad \text{г)}\ \ z = x^{y^2 x}.$$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = \mathrm{arctg}(5x + 2x^4 - 2y)$, $x = \frac{6}{t^3}$, $y = \cos t$;

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = \arccos^2(x + 5y)$, $x = 3v^2 + u$, $y = \ln v + 4u$.

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \mathrm{tg}\,\frac{2x}{y}.$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$3x^2y + \ln\frac{x}{z} + 4y = 5.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}, \quad \overrightarrow{l} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}, \quad M(1, -1, 1).$$

**7.**Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4z - 8 = 0, \quad M(2, 1, -1).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = 6x - x^2 - xy - y^2$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 5x^2 - 3xy + y^2$

в області $D$ :

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1.$$

**10.** Дослідити функцію $z = xy$ на екстремум за умови $x^2 + y^2 = 2$.

## Варіант 2

**1.** Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

$$\text{а)} \quad z = \ln(3x - 6y); \qquad \text{б)} \quad z = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2 - 2y + y^2}}.$$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

$$\text{а)} \quad z = 8y^2x^4 + 3y^5 + \ln 9x; \qquad \text{б)} \quad z = \frac{y+x}{x^2+4y^2};$$

$$\text{в)} \quad z = (\sin x)^{y^2}; \qquad \text{г)} \quad z = y^{x^2y}.$$

**3.** Знайти
а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \arcsin(x^2 - 2y), \quad x = \frac{3}{t^2}, \quad y = \cos 5t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = \cos^2(4x + y), \quad x = \ln(v^2 + u), \quad y = 3v + 4u.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \arccos(x - 4y).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$6x^3y + \cos(3x + 5y) + \frac{y}{z} = 3.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = (x^3 + y^2 + z^2)^2, \quad \overrightarrow{l} = 2\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \quad M(1, 0, 1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2z - 8 = 0, \quad M(1,2,1).$$

**8.** Дослідити на екстремум функцію $z = 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.
**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції: $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в області $D$ :

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 2.$$

**10.** Дослідити функцію $z = x^2 + y^2$ на екстремум за умови $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

## Варіант 3

**1.** Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

$$\text{а)} \;\; z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}; \qquad \text{б)} \;\; z = \arcsin \frac{x + y}{x}.$$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

$$\text{а)} \;\; z = 7y^5x^3 + 3x^5 + \sin 6x; \qquad \text{б)} \;\; z = \ln\cos\left(x^2 + 4xy^2 + 9\right);$$

$$\text{в)} \;\; z = (\cos(3x + 5))^{y^2}; \qquad \text{г)} \;\; z = (\ln y)^{3xy}.$$

**3.** Знайти
а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \arccos(x^3 + 6y), \quad x = 3t^2, \quad y = \ln 5t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = \mathrm{tg}(4xy + y^3), \quad x = v^2 + u, \quad y = 3\cos v + 4u.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \arcsin(y^2 - x).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$7y^3x^2 + \ln\frac{x}{y} + x\cos z = 5.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = x^2 + \mathrm{arctg}(y + z), \quad \overrightarrow{l} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \quad M(1,0,1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S: x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 6x - 2z - 8 = 0, \quad M(-1, 1, -1).$$

**8.** Дослідити на екстремум функцію $z = 9x - x^2 - xy - y^2$.
**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 - 3xy + y^3$ в області $D$ :

$$x = 0, \quad x = 2, \quad y = -1, \quad y = 2.$$

**10.** Дослідити функцію $u = x^2 + y^2 + 2z^2$ на екстремум за умови $x - y + z = 1$.

## Варіант 4

**1.** Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

$$\text{а)} \quad z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}; \qquad \text{б)} \quad z = \arccos \frac{x}{y+1}.$$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

$$\text{а)} \quad z = 5y^2x^3 + 3x^4 + \operatorname{tg} 6x; \qquad \text{б)} \quad z = \ln (5x^4 + 4xy^2 + 9\sqrt{x});$$

$$\text{в)} \quad z = (\cos (3y + 4))^{x^3}; \qquad \text{г)} \quad z = (\operatorname{arctg} y)^{3xy}.$$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \ln \frac{3x}{x^2 + 6y}, \quad x = t^3, \quad y = t \ln 5t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = \arccos(y^2 x), \quad x = v^2 + \ln u, \quad y = 3 \cos(\frac{v}{4u}).$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \ln \frac{x}{3y}.$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x,y,z)=0$:

$$x^2z^3+\arcsin\frac{y}{x}-\cos 2z=4.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u=x^2+\ln(3y+z),\quad \overrightarrow{l}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k},\quad M(1,1,0).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S: x^2+y^2+z^2-8y-2x-4=0,\quad M(-1,-1,0).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z=2x^3-6xy+2y^3+9$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z=xy(4-x-y)$ в області $D$ :

$$x=0,\quad y=0,\quad y+x=6.$$

**10.** Дослідити функцію $u=2x^2+y^2+z^2$ на екстремум за умови $2x-y+z=1$.

## Варіант 5

**1.** Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y}$;  б) $z=\arccos\frac{x}{2}+\ln xy$.

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

а) $z=7y^4x^2+3y^2+\ln 6x$;  б) $z=\sqrt{5x^4+4xy^2}+\arcsin y$;

в) $z=(x\operatorname{tg} y)^u$;  г) $z=(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^{xy}$.

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z=\frac{3x^2}{x+6y},\quad x=\cos t^2,\quad y=\ln 4t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z=x^3\operatorname{arctg} y+y^2x,\quad x=u^2+\ln v,\quad y=\frac{v+1}{4u}.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$\sin(3xy^2) + z^3 x + z \ln y = 7.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = z^2 + \ln(3yx + x^2), \quad \overrightarrow{l} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}, \quad M(1, 1, 1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 6y - 4x - 4 = 0, \quad M(1, 1, 3).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = x^3 - 3xy + y^3$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в області $D$ :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y + x = -3.$$

**10.** Дослідити функцію $u = x^3 + y^2 - z^3 + 5$ на екстремум за умови $x + y - z = 0$.

## Варіант 6

**1.** Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z = \arcsin(x - 2) + \ln y$; б) $z = \sqrt{2x - x^2 - y^2} + \ln x - 1$.

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = 3y^2 x^3 + 3x^2 + \operatorname{ctg} 6x$; б) $z = \ln(6x^4 + 4y^2) + (\arcsin y)^2$;

в) $z = (2y \operatorname{tg} y)^{3x}$; г) $z = (\arccos x^3)^{xy}$.

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = x^2 \ln xy + \operatorname{arctg} 3x, \quad x = \cos 2t, \quad y = \ln 5t + 3;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = \arccos(x^2 + y) + y^2, \quad x = 3u^2 + \ln v, \quad y = 5v + 1 + \ln 4u.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = e^{\frac{y}{x}}.$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$\cos(3y)x^2 + z^3 + \ln(3y + x)z^2 = 5.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = z^2 xy + \ln(y^2 + x^2), \quad \overrightarrow{l} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}, \quad M(1, -1, 1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S: -x^2 - y^2 + z^2 + 3y - x - 4 = 0, \quad M(1, -1, 2).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = -4x^2 - 6y - y^2 + 16x + 3$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ в області $D$ :

$$x = 1, \quad y = 1, \quad y + x = -4.$$

**10.** Дослідити функцію $z = 2xy$ на екстремум за умови $2x^2 + y^2 = 4$.

## Варіант 7

**1.** Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z = \sqrt{x - 2} + \ln y + 3$; б) $z = \sqrt[6]{2x + 6y - x^2 - y^2 - 6} + \ln(x - 1)$.

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

а) $z = 10y^2x^3 + 3y^5 + \ln 6xy + 3$; б) $z = 5 \arccos y \cdot x^2 + e^{4yu^2}$;

в) $z = (\operatorname{ctg} 5x)^{\ln 3y}$; г) $z = (\sin 3x)^{xy}$.

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \arccos \frac{x^2}{\sqrt{y}}, \quad x = e^{t^2}, \quad y = \ln 4t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = 4\cos(x^2+3y)y^3 \quad x = 5u^3 + \ln v, \quad y = \ln \frac{v+1}{u}.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \arccos(4y - x).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$z^2 \ln(x+2y) - \frac{y}{z} + x^2 y = 7.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = 2\sqrt{x+y} + y \operatorname{arctg} z, \quad \overrightarrow{l} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{k}, \quad M(3, -2, 1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : x^2 + 3y^2 + 3z - 8yz - 2x - 4 = 0, \quad M(1, 1, 1).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = x^3 + 3xy + y^3 + 9$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$ в області $D$ :

$$0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 2.$$

**10.** Дослідити функцію $z = 2xy$ на екстремум за умови $x^2 + y^2 = 1$.

## Варіант 8

**1.** Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z = \arcsin(y-2) + \sqrt{x}$; б) $z = \sqrt[4]{\dfrac{4 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2}}$.

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

а) $z = 12y^3x^6 + 3x^2 + \cos(6y+5)$; б) $z = \ln\sqrt{5x^4 + xy} + \arcsin y$;

в) $z = (\ln y + 1)^{ux^2}$; г) $z = (\arccos\sqrt{x})^{xy}$.

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = e^{(3x^2+6y)}, \quad x = \arccos 2t, \quad y = \ln 4t^3;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = \ln\sin\frac{x}{3y}, \quad x = u^2\cos v, \quad y = \sin v + 14u.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x,y)$ :

$$z = \operatorname{ctg}(4y + x).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x,y,z) = 0$:

$$\frac{x}{z} + \ln y + 3x + z^3 = 6.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = \ln(3 + x^2) + xy^2z, \quad \overrightarrow{l} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}, \quad M(1,3,2).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 4y - x - 3 = 0, \quad M(-1,-1,2).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = 3x^3 - 9xy + 3y^3 + 9$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ в області $D$ :

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y + x \leq 4.$$

**10.** Дослідити функцію $z = 2x^2 + y^2$ на екстремум за умови $3x + 2y = 4$.

## Варіант 9

**1.** Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

$$\text{а)}\ \ z = 5\arcsin(x-2) + \ln(2-y); \qquad \text{б)}\ \ z = \sqrt[10]{\frac{x^2+y^2-2y}{2-x}}.$$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

$$\text{а)}\ \ z = 6y^2\sqrt[4]{x^3} + 3y^5 + \ln 7x; \qquad \text{б)}\ \ z = \ln\cos(x^4 + 4xy^2) + \arcsin 4y;$$

$$\text{в)}\ \ z = x^7(\operatorname{tg} 4y)^u; \qquad \text{г)}\ \ z = (\sqrt{x})^{y\ln x}.$$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = y^2 \ln\frac{3x^2}{y}, \quad x = \arccos t, \quad y = e^{4t};$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = \operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{y+1}}, \quad x = u^2 + \ln v, \quad y = v^2 + \ln 4u.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x,y)$ :

$$z = \arcsin(7x - 3y).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x,y,z) = 0$:

$$x^2y + 4e^{yz} - xz^3 = 8.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = \ln(y + \sqrt{x^2+z^2}), \quad \overrightarrow{l} = -\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \quad M(-3,1,4).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 2x - 4 = 0, \quad M(-1,-1,0).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = x^2 + xy + y^2 + x - y$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = (x-1)^2 + 2y^2$ в області $D$ :

$$0 \le x \le 3, \quad -1 \le y \le 1.$$

**10.** Дослідити функцію $z = 4xy$ на екстремум за умови $x^2 + 2y^2 = 1$.

## Варіант 10

**1.** Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

$$\text{а)} \quad z = \sqrt{(4-x^2)} + \ln(y+1); \qquad \text{б)} \quad z = \sqrt[4]{\frac{2x+4y-x^2-y^2-1}{x^2-2x+y^2}}.$$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

$$\text{а)} \quad z = 6x^3\sqrt[7]{y^4} + 3y^5 + \arcsin 7x; \qquad \text{б)} \quad z = \arcsin\frac{x^3}{y} - 4\ln x;$$

$$\text{в)} \quad z = (x\cos 2y)^u; \qquad \text{г)} \quad z = (\sqrt[3]{x})^{y\arccos x}.$$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = y^4 + \ln(3y^2 - e^{3x}), \quad x = \arccos t, \quad y = e^{4t};$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = \operatorname{ctg} 2xy^3 + \sqrt{y+1}, \quad x = u^3 + \ln v, \quad y = v^2 + \cos 4u.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x,y)$ :

$$z = x^2 \operatorname{arctg}\sqrt{y}.$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x,y,z) = 0$:

$$xy^2 + 5\ln(z^3 + x^2) + xz = 8.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = \ln(x^2 + z^2) + y, \quad \overrightarrow{l} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \quad M(1,2,1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо
$$S : x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x - 8 = 0, \quad M(-1, 1, 2).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = 6x - 3x^2 - 6y - 3y^2 + 9$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ в області $D$ :
$$0 \le x \le 3, \quad -1 \le y \le 2.$$

**10.** Дослідити функцію $z = x^2 + 4xy + 5y^2$ на екстремум за умови $x + y = 2$.

## Варіант 11

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z = \arccos(x+1) + \sqrt{(y-2)}$; б) $z = \sqrt{(6x - x^2 - y^2)} + \ln(x+1)$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

а) $z = 4x^6y^7 + 3y^5 + e^{6x+5}$; б) $z = \ln\cos(x^4 + 5xy^2) + \arcsin 4y$;

в) $z = x^7(\operatorname{tg} 3y)^u$; г) $z = (\sqrt{x})^{(y \ln x)}$.

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо
$$z = y^2 \ln x + \operatorname{arctg}\frac{x^2}{y}, \quad x = \arccos 3t, \quad y = t^2 + 5;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо
$$z = \operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3y+1}}, \quad x = 2u + \ln v, \quad y = v^3 + \cos 4u.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :
$$z = \ln\frac{x^2+1}{3y}.$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x,y,z)=0$:

$$x^3\ln y+\frac{z^2}{y}-\operatorname{arctg} z=8.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+xz,\quad \overrightarrow{l}=-\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k},\quad M(2,2,-1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S:2x^2-y^2+z^2-4z+y-13=0,\quad M(2,1,-1).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z=8x-2x^2-8y-2y^2+9$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^3+y^3-3yx$ в області $D$ :

$$x=0,\quad x=2,\quad y=3,\quad y=0.$$

**10.** Дослідити функцію $z=x^2+xy+y^2-2x-y$ на екстремум за умови $2x-y=2$.

## Варіант 12

**1.** Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z=\arccos(x+1-y)$; б) $z=\sqrt{(4x-x^2-y^2)}+\ln(y-x+2)$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

а) $z=4\arcsin x+3y^5x^3+\ln 6xy$; б) $z=\ln(5x^4\sqrt{y}+\frac{x}{y+1})$;

в) $z=(3y+1)^{x\cos u}$; г) $z=(x\operatorname{ctg} y)^y$.

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z=\arcsin\frac{x+3}{y^2},\quad x=3t^2+4,\quad y=\ln t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z=y^4\arcsin(9x+3)+\frac{x}{y+1},\quad x=2u^2+\ln v,\quad y=\cos 4u+5v.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \frac{x^3}{3y} + x^2 y^4.$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$y^2 \ln x + \frac{x^2}{z} - \arccos z = 7.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}, \quad \overrightarrow{l} = 4\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \quad M(1, -2, 4).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 2x - 4 = 0, \quad M(-1, -1, 0).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - y$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3yx$ в області $D$ :

$$x = 0, \quad x = 2, \quad y = 3, \quad y = 0.$$

**10.** Дослідити функцію $z = xy$ на екстремум за умови $2x + 3y = 5$.

## Варіант 13

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z = \sqrt{(x - y)} + \ln(1 - x)$; б) $z = \sqrt{\dfrac{2x + x^2 + y^2 - 4y + 1}{x^2 + y^2 + 2x}}$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

а) $z = 5y^7 \arcsin 2x + x^3 + \ln 4xy^3$; б) $z = \sqrt{(y + 1)}\dfrac{x^2}{y}$;

в) $z = (\sqrt{u} \cos x)^{3y}$; г) $z = (x \sin y)^y$.

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \arcsin(x+3)y^2 + e^{3x^2+y}, \quad x = 3\cos t, \quad y = \ln 4t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = \ln\sin\frac{x+3}{2y+1}, \quad x = 2\cos u + 3v^2, \quad y = \sin 5u + v.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \ln(7x^3 - 4y).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$y^2 \ln(x+1) + zx^2 - \arccos z = 7.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z, \quad \overrightarrow{l} = 2\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}, \quad M(1, 3, 2).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : x^2 + z^2 - 5yz + 3y - 46 = 0, \quad M(-1, -1, 0).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = x^2 - 6x + 2y^2 - 9$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y(4 - x - y)$ в області $D$ :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y + x = 6.$$

**10.** Дослідити функцію $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ на екстремум за умови $x + y = 2$.

## Варіант 14

**1.** Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z = \arcsin(x-2) + \ln y + 2;$ б) $z = \sqrt[6]{(16 - x^2 - y^2)} + \ln(y - x + 2).$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

а) $z = 4x^3 y + \arccos 4x;$ б) $z = \ln(5x^4 \sqrt[5]{y^3}) + \arcsin x^2;$

в) $z=(\cos 4y)^{x\ln u}$; г) $z=(y\sin x)^{y}$.

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z=x^3\arcsin^2\sqrt{y},\quad x=\ln\ln t,\quad y=\operatorname{arctg} t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z=\ln\left(x^2+e^{xy^2}\right),\quad x=2u+\ln v^3,\quad y=\sin 4u+5v^2.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ для функції $z=z(x,y)$ :

$$z=\arccos\frac{\sqrt{y}}{x}.$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x,y,z)=0$:

$$x^2\ln y+\frac{z^2}{x}-y\arccos z=7.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u=x^2+2\operatorname{arctg}(z-y),\quad \overrightarrow{l}=-2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\quad M(1,2,-1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S: x^2+y^2-xz-zy-4=0,\quad M(0,3,3).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z=-2x^2+2xy-4y^2+8$.
**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$ в області $D$ :

$$0\le x\le 3,\quad 0\le y\le 2.$$

**10.** Дослідити функцію $u=x-2y+2z$ на екстремум за умови $x^2+y^2+z^2=9$.

## Варіант 15

**1.** Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z=\arcsin(x+y)+\ln(y-2)$; б) $z=\sqrt[4]{(9-x^2-y^2)}+\ln(y-x)$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

а) $z = 4x^5y^3 + \arcsin 3x + 7;$ б) $z = \sqrt[7]{y^3} + e^{xy^2} \arcsin x;$

в) $z = u^4 (\sin 3y)^x;$ г) $z = (\operatorname{arctg}\sqrt{x})^{xy}.$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \arccos\frac{y}{2x}, \quad x = (\ln t)^2, \quad y = \operatorname{arcctg} t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = 2\ln\sqrt{(x^2 + 4xy^2)}, \quad x = v^2 \cos u, \quad y = 4v \sin u.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \arcsin\frac{2x}{y}.$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$y^3 \cos x + \frac{x}{y - 4} + z^2 + \arccos z = 7.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = y\ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} z, \quad \overrightarrow{l} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}, \quad M(0, 1, 1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : x^2 + y^2 - z^2 + 2zy - x - 4 = 0, \quad M(-1, -1, 0).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = -x^3 + 2xy - y^3 + x^2 + y^2 + 4$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2xy - 3x^2 + 10 - 2y^2$ в області $D$ :

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -2 \leq y \leq 0.$$

**10.** Дослідити функцію $z = 2xy$ на екстремум за умови $x^2 + y^2 = 4$.

## Варіант 16

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z = \ln(x+y-3) + \ln(y-x+3)$; б) $z = \sqrt{4x - x^2 - y^2 - 4y - 4} + \ln(x^2-1)$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = 3x^4y^5 + \operatorname{arcctg} 3y + 7$; б) $z = \ln(\sin y^2 + 3x^4y^3) + e^{2x}$;

в) $z = (\sin 3x)^{y^2}$; г) $z = (\cos 3x + 5)^{yx}$.

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \arccos\sqrt{2x - y}, \quad x = 2t^2 + 3, \quad y = \sqrt{3t+1};$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = 2y^3 \ln xy, \quad x = \cos u + 4v, \quad y = v + \sin 5u.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \ln(3x^2 - 3y^2).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$y^2 \ln(xz) + z^2 + \arccos x^2 = 7.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{(x^2 + z^2)}, \quad \overrightarrow{l} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \quad M(1, 1, 0).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : x^2 + y^2 - z^2 - 2xz + 2x - z = 0, \quad M(1, 1, 1).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = 3x^3 - 6xy + 3y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 8$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ в області $D$ :

$$x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = 2.$$

**10.** Дослідити функцію $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ на екстремум за умови $x + y = 1$.

## Варіант 17

**1.** Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z = \arcsin(x + y - 3)$; б) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + \ln(x - y)$.

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = x^3 y^5 + \arccos 3y + 7x$; б) $z = y^2 \arccos x + e^{2xy}$;

в) $z = (\operatorname{ctg} 5x)^{y^2}$; г) $z = (y^2 + 1)^{y \cos x}$.

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \arccos \frac{2x + y}{x + 3y}, \quad x = 2t^2 + 3, \quad y = \ln 3t + 1;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = \ln(x^3 y + y^5 - \sqrt{x}), \quad x = u^3 + 4v, \quad y = \ln(5u + v^2).$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \operatorname{tg}(xy^2).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$y^2 \ln(xz) + z^2 + \arccos x^2 = 7.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}, \quad \overrightarrow{l} = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \quad M(1, 1, 0).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : x^2 + y^2 + 3z^2 - y - 5x - 4 = 0, \quad M(1, 1, 0).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = 6x - 2y + 3x^2 + y^2 + 4$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = xy(4 - x - y)$ в області $D$ :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y + x = 6.$$

**10.** Дослідити функцію $z = x^2 + 12xy + 2y^2$ на екстремум за умови $4x^2 + y^2 = 25$.

## Варіант 18

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

$$\text{а)}\quad z=\ln\frac{x+y}{y};\qquad \text{б)}\quad z=\sqrt{4-x^2}+\ln\left(2y-y^2\right).$$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

$$\text{а)}\quad z=3x^2y^4+\arccos 3x+7\ln y;\qquad \text{б)}\quad z=x(\sin y)^2+\ln\left(3x^3y+4x\right);$$

$$\text{в)}\quad z=(y\sin 3x)^u;\qquad \text{г)}\quad z=\left(\sqrt[3]{y+1}\right)^{y\arcsin x}.$$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z=y^2\arcsin\sqrt{2x-1},\quad x=e^{t^2+3},\quad y=\ln\left(3t+1\right);$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z=\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{x+1}}{y^2},\quad x=\ln u+v^2,\quad y=v^2+\cos 5u.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ для функції $z=z(x,y)$ :

$$z=\arcsin\left(y^2-4x\right).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x,y,z)=0$:

$$x^2\cos\left(xz\right)+y^4z^2+\arccos y^2=7.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u=\sqrt{xyz}+\sin\left(z+2y\right),\quad \overrightarrow{l}=-3\overrightarrow{j}-4\overrightarrow{k},\quad M(1,1,0).$$

**7.**Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S: x^2-y^2+z^2+y-5x-4=0,\quad M(1,2,0).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z=x^3-3x-2y^3+6y+4$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2-y^2+3y-1$ в області $D$ :

$$x=0,\quad y=0,\quad y+x=3.$$

**10.** Дослідити функцію $z=x^2-xy+y^2$ на екстремум за умови $x+y=2$.

## Варіант 19

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

$$\text{а)}\ \ z=\frac{5}{9-x^2-y^2};\qquad \text{б)}\ \ z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\frac{x}{(x-y)}.$$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

$$\text{а)}\ \ z=\sqrt[7]{y^4}+y^3\operatorname{arctg}4x+7\ln x;\qquad \text{б)}\ \ z=\arccos\left(5xy^3+x^4\right);$$

$$\text{в)}\ \ z=(\ln x+2)^{\cos y};\qquad \text{г)}\ \ z=(\operatorname{ctg}3x)^{y\ln x}.$$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z=\arccos\frac{y}{\sqrt{x}},\quad x=e^{t^2},\quad y=\ln 2t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z=y^3\ln\frac{x}{y},\quad x=u^2+4v,\quad y=\arccos u+v^3.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ для функції $z=z(x,y)$ :

$$z=\cos\left(4xy-5\right).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x,y,z)=0$:

$$e^{yx}\cos z+z^2y+\ln\frac{x}{y}=7.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u=z(\ln y-\operatorname{arctg}x),\quad \overrightarrow{l}=4\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k},\quad M(-1,1,-2).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S: x^2+4y^2+3z^2-6y+4z-3=0,\quad M(1,1,1).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z=2x^2+y^2+4x-6y+4$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^3+y^3-9xy+27$ в області $D$ :

$$0\le x\le 4,\quad 0\le y\le 4.$$

**10.** Дослідити функцію $z=x^2+xy+y^2$ на екстремум за умови $x-y=-4$.

## Варіант 20

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

$$\text{а)}\ \ z = \frac{\sqrt{1-x-y}}{4-x^2-y^2}; \qquad \text{б)}\ \ z = \sqrt{4-y^2} + \sqrt{2x-x^2}.$$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

$$\text{а)}\ \ z = y^4 + x^3 \arcsin 4y + 7\ln x; \qquad \text{б)}\ \ z = x^2 \arccos xy;$$

$$\text{в)}\ \ z = (\sin x)^{\sqrt{y}}; \qquad \text{г)}\ \ z = (y^2+1)^{y\cos x}.$$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \ln\sqrt{x^3+4y^2}, \quad x = \exp t, \quad y = \sin 2t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = \arcsin\sqrt{yx} + x^2, \quad x = u^2+4v, \quad y = \ln 2u + v^3.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x,y)$ :

$$z = \arccos(4x-5y).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x,y,z) = 0$:

$$e^z - xyz + y + \ln 2x = 7.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = x^2 y - 4\sqrt{x^2+5z^2}, \quad \overrightarrow{l} = \overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \quad M(-4,1,2).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : z = 2x^2 - y^2 - 8xy - 2x - 4y, \quad M(-1,1,1).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = 2x^3 - 6x - 4y^3 + 3y + 4$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4$ в області $D$ :

$$1 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 3.$$

**10.** Дослідити функцію $z = 0.5x^2 - xy$ на екстремум за умови $2x + y = 5$.

## Варіант 21

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

$$\text{а)}\quad z = \frac{4}{\sqrt{x^2 - y^2}}; \qquad \text{б)}\quad z = \sqrt{4y - x^2 - y^2} + \ln\left(x^2 - 1\right)$$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

$$\text{а)}\quad z = \sqrt[3]{x^5}y^6 + \ln\left(4xy^3 + 6\right) + 7\arccos x; \qquad \text{б)}\quad z = y^3 e^{4xy} + \ln\left(7x^2 + y\right);$$

$$\text{в)}\quad z = u^7(\cos y)^x; \qquad \text{г)}\quad z = (\arccos\sqrt{y})^{yx^2}.$$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \sqrt{x}y^5 + \frac{x + 2y}{x^2 + 4}, \quad x = \cos t, \quad y = \arcsin 2t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = y^5 \ln\frac{x^2}{y}, \quad x = \ln u + 4v, \quad y = \operatorname{arctg} u + v^3.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \ln\left(\sqrt{x}(y + 1)\right).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$\ln\left(4y^2\right)\cos x + z^2 y + \frac{x}{z} = 7.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = xy - z\operatorname{arctg} x, \quad \overrightarrow{l} = 4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}, \quad M(-1, 1, -2).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : x^2 - 2y^2 + z^2 - 4y + zx - 13 = 0, \quad M(3, 1, 2).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = x^2 - 3x - y^2 - 6y + 4 + xy$.
**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області $D$ :

$$-1 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 3.$$

**10.** Дослідити функцію $z = x^2 - 6x + y^2 + 4y + 2$ на екстремум за умови $2x + 3y = 0$.

## Варіант 22

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

$$\text{а)} \quad z = \ln(y+4) + \ln(x-2); \qquad \text{б)} \quad z = \sqrt{2x - x^2 - y^2} + \ln x$$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

$$\text{а)} \quad z = 2x^3y^5 + \frac{x}{y^4} + \arcsin 2x; \qquad \text{б)} \quad z = \ln\cos\frac{x}{y} + e^{3x+2};$$

$$\text{в)} \quad z = (y \operatorname{ctg} x)^{u^2}; \qquad \text{г)} \quad z = (\ln(1+y^2))^{yx}.$$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \sqrt{x}y^5 + \frac{x+2y}{x^2+4}, \quad x = \cos t, \quad y = \arcsin 2t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = y^5 \ln\frac{x^2}{y}, \quad x = u^2 + 4v, \quad y = \operatorname{arctg} u + v^3.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = y\cos\sqrt{x}.$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$e^{yx^2}\sin z + x^2y + \ln\frac{x}{z} = 7.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = x\ln(1+y^2) - \operatorname{arctg} z, \quad \overrightarrow{l} = -3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}, \quad M(0,1,1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S: 4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z - 9 = 0, \quad M(1,-2,1).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = x^3 - 6xy + 8y^3 + 2$.
**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3$ в області $D$ :

$$-1 \le x \le 3, \quad -2 \le y \le 0.$$

**10.** Дослідити функцію $z = x + 2y$ на екстремум за умови $x^2 + y^2 = 5$.

## Варіант 23

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z = \ln(1-y) + \arcsin(x-y)$; б) $z = \sqrt{\dfrac{2x - x^2 - y^2}{1 - x^2 - y^2}}$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

а) $z = 2x^4y^3 + \ln x + 3y^2 + \operatorname{arctg} 2x$; б) $z = x \cdot \arcsin(yx^3) + \ln y$;

в) $z = (\ln x)^{u^2}$; г) $z = (\operatorname{arctg} xy)^y$.

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \sqrt[3]{y}x^5 + \ln(x^2+4) + \sin(3y+4), \quad x = t^2, \quad y = \arccos 2t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = y^2 \operatorname{arctg}\sqrt{x}, \quad x = u^2\cos v \quad y = \ln u + v^3.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x,y)$ :

$$z = \sin(xy).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x,y,z)=0$:

$$x\sin y + \operatorname{arctg} z - y\arcsin x = 6.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = x\ln(1+y^2) - \operatorname{arctg} z, \quad \overrightarrow{l} = -3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}, \quad M(0,1,1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S: z = x^2 + y^2 + 8xy - 2x - 4y - 3, \quad M(1,-1,1).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + yx^2 + y^2 + 1$ в області $D$ :

$$-1 \le x \le 1, \quad -2 \le y \le 1.$$

**10.** Дослідити функцію $z = x^2 + y^2$ на екстремум за умови $4x + 3y = 12$.

## Варіант 24

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

$$\text{а)} \ \ z = \ln(9 - x^2 - y^2); \qquad \text{б)} \ \ z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + \ln(y-1).$$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

$$\text{а)} \ \ z = 2y^4 + \frac{x}{y^2} + \ln(2x+3); \qquad \text{б)} \ \ z = x^2 \arccos y + e^{3xy+2};$$

$$\text{в)} \ \ z = (y\cos x)^{u^2}; \qquad \text{г)} \ \ z = (\sin 2y)^{yx}.$$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \ln\frac{1}{x^2+y^2}, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(x^2 y), \quad x = v^2 + 3u, \quad y = \cos u + v^2.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \ln \sqrt{x^2 + 4y}.$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$x^2 \cos y + z^2 \ln x - \frac{x}{z} = 3.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = 2\ln(x^2 - 5) + 4zxy, \quad \overrightarrow{l} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}, \quad M(1, 1, 1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці , якщо

$$S : 3x^2 + y^2 - z^2 - 6y - 2z - 4 = 0, \quad M(1, 1, 0).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$ в області $D$ :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y + x = 3.$$

**10.** Дослідити функцію $z = 2x + y$ на екстремум за умови $x^2 + y^2 = 20$.

## Варіант 25

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z = \arcsin x - y$; б) $z = \sqrt{6x - x^2 - y^2} + \ln(x - 3)$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = 2x^3y^5 + \dfrac{x-3}{y^4} + \arccos 2x$; б) $z = e^{3xy+2} + \ln(x^2 + 4y^3)$;

в) $z = (x^2 + 1)^y$; г) $z = (x \sin y)^y$.

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \arcsin\frac{x+y}{y}, \quad x = t^3 + t, \quad y = \sin t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = \ln(x^2 + 3y^2 + x) + \exp\cos x, \quad x = vu, \quad y = u + v^2.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \operatorname{arcctg}\frac{x}{y}.$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$x^2 \operatorname{ctg} y + \frac{y}{z^2} - x \operatorname{ctg} y = 5.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = y\sqrt{x} - (z + x)\sqrt{y}, \quad \overrightarrow{l} = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}, \quad M(1, 1, -2).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : 4x^2 + 3y^2 + z^2 - 5z - 2y - 4 = 0, \quad M(1, 1, 2).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = -x^2 + 2x - y^2 + 6y + 4$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$ в області $D$ :

$$x = -1, \quad y = 0, \quad y + x = 3.$$

**10.** Дослідити функцію $z = xy$ на екстремум за умови $2x + 3y = 5$.

## Варіант 26

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

$$\text{а)} \quad z = \sqrt{6 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 - 2y}; \qquad \text{б)} \quad z = \arcsin\frac{x + y}{y}.$$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

$$\text{а)} \quad z = 2x^2y^6 + \frac{y - 3}{x^2} + \arccos\sqrt{x}; \qquad \text{б)} \quad z = \sqrt{y + 2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$

$$\text{в)} \quad z = (y\cos u)^x; \qquad \text{г)} \quad z = (x \arcsin y)^y.$$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = 2\ln\sqrt{x^3+4xy}, \quad x=\cos t, \quad y=\sin t^2;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = \arccos\sqrt{x}\cdot 2y, \quad x=vu^2, \quad y=u+v^2.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ для функції $z=z(x,y)$ :

$$z = \ln\frac{x^2}{y}.$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x,y,z)=0$:

$$y^2\arcsin x + \frac{x}{z^2} - x\ln y = 5.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = 2\,\mathrm{arctg}(z-x)+y^2, \quad \overrightarrow{l} = -2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}, \quad M(-1,1,2).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S: -x^2+y^2+z^2-3y-2x-4=0, \quad M(1,-1,2).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z=-3x^2+2xy-2y^2+10$.
**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$ в області $D$ :

$$x=0, \quad y=0, \quad x=1, \quad y=2.$$

**10.** Дослідити функцію $z=xy$ на екстремум за умови $x^2+y^2=12$.

## Варіант 27

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z=\sqrt{2x-x^2}+\ln(y+1)$;  б) $z=\sqrt{x^2-y+2}+\ln(2-x)$

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

$$\text{а)}\quad z = 2x^2y^3 + \frac{\sqrt{x-3}}{y^4} + \operatorname{arctg} 2x; \qquad \text{б)}\quad z = x^2e^{3xy+2} + \ln(x+4y);$$

$$\text{в)}\quad z = (\operatorname{arctg} x)^y; \qquad \text{г)}\quad z = (\arcsin y)^{yx}.$$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \ln\frac{x^2+y}{y}, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = \arcsin\sqrt{(x-y)}, \quad x = v^2 + u, \quad y = u + v^2.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \sqrt{y}\cos x.$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$x^2 \operatorname{ctg} z + \frac{x+1}{z^2} - z\ln y = 5.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = 4\sqrt{x+y} + 2y \operatorname{arctg} z, \quad \overrightarrow{l} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{k}, \quad M(3, -2, 1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : -x^2 - y^2 + 2z^2 + 6y - 2x - 7 = 0, \quad M(1, 1, 2).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = x^2 - xy + y^2 - 2y + 3x + 1$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ в області $D$ :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad y = 2.$$

**10.** Дослідити функцію $z = 2x + 4y$ на екстремум за умови $x^2 + y^2 = 20$.

## Варіант 28

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z=\sqrt{y+1}+\arccos(y-x)$;  б) $z=\ln(y^2-4x+4)+\sqrt{x^2-2x+y^2-8}$.

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

$$\text{а)}\ \ z=\frac{\sqrt[4]{x-3}}{y^4}+\ln(yx^2+4);\qquad \text{б)}\ \ z=\ln(y+\sqrt{x^2+y^2});$$

$$\text{в)}\ \ z=(\frac{x}{y})^u;\qquad \text{г)}\ \ z=(\operatorname{arctg} x)^{yx}.$$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z=x^4\arccos\sqrt{y},\quad x=\ln t,\quad y=t^2;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z=\arcsin\frac{x}{\sqrt{y}},\quad x=\cos v+u,\quad y=uv.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ для функції $z=z(x,y)$ :

$$z=\ln(5x^2-4y^2).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x,y,z)=0$:

$$x^3\operatorname{ctg} y+\frac{y+1}{z^2}-z\arccos x=78.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+xz,\quad \overrightarrow{l}=4\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{k},\quad M(3,-2,1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S: x^2+y^2+z^2-8y-2x-4=0,\quad M(-1,-1,0).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z=x^2+xy+y^2-6y-9x$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z=4(x-y)-x^2-y^2$ в області $D$ :

$$x=0,\quad y=-3,\quad x=3,\quad y=0.$$

**10.** Дослідити функцію $z=\frac{x}{2}+\frac{y}{4}$ на екстремум за умови $x^2+y^2=4$.

## Варіант 29

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z = \sqrt{y+2} + \ln y - x$;  б) $z = \ln(9 - y^2 - x^2) + \sqrt{x^2 - y - 1}$.

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

$$\text{а)}\ \ z = \frac{\sqrt[5]{x+5}}{y^4} + y \arccos 2x; \qquad \text{б)}\ \ z = \ln(y + \ln(x^2 + y^2));$$

$$\text{в)}\ \ z = (x \sin y)^u; \qquad \text{г)}\ \ z = (\arcsin 2x)^{yx}.$$

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = x^4 \ln(y + \sqrt{x+3}), \quad x = t + 2, \quad y = t^2;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = 4 \arcsin \frac{2y}{\sqrt{x}}, \quad x = \ln v + u, \quad y = uv^2.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \operatorname{arctg}(5x - 4y).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$x^2 \cos y + \frac{y-1}{z^2} - z \ln(3x + 4) = -4.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = \ln(yx + z) + z^2, \quad \overrightarrow{l} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}, \quad M(1, 1, 1).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : 4x^2 + 3y^2 - z^2 - 6y - 2z - 4 = 0, \quad M(1, 1, 0).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = 8 - x^2 + 6x - y^2 - 6y$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = (x-1)^2 + 3y^2$ в області $D$ :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y + x = -2.$$

**10.** Дослідити функцію $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ на екстремум за умови $x + y = 1$.

## Варіант 30

**1.**Знайти область визначення функції і зобразити її на координатній площині:

а) $z = \sqrt{x-2} + \ln(y+2x)$; б) $z = \ln(4 - y^2 - x^2) + \sqrt{(y - x^2 - 2)}$.

**2.** Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ функцій:

а) $z = \dfrac{\sqrt{y+5}}{x} + y^2 \arccos 2x + 6$; б) $z = x^2 y^3 + \ln(y + \ln x)$;

в) $z = (y \cos x)^u$; г) $z = (\arccos 2x)^{yx}$.

**3.** Знайти

а) $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = \ln \frac{\sqrt{x}+5}{x+y^2}, \quad x = 4t+2, \quad y = 3t^2;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо

$$z = 4 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + x^2 \ln y, \quad x = v^2 + u, \quad y = u + v^2.$$

**4.** Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = z(x, y)$ :

$$z = \ln(y + e^{-3x}).$$

**5.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ для функції, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$z^3 \sin y + \frac{x-1}{z^2} - y \ln(3x+4) = -8.$$

**6.** Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M$ за напрямком $l$, якщо

$$u = y(\ln x + \operatorname{arctg} z), \quad \overrightarrow{l} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}, \quad M(1, 1, 0).$$

**7.** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S$ в точці $M$, якщо

$$S : 2x^2 + 6y^2 - z^2 - y - 3x - 4 = 0, \quad M(1, 1, 0).$$

**8.** Знайти екстремум функції $z = x^3 - 12x - 2y^3 + 6y + 4$.

**9.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в області $D$ :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y + x = 4.$$

**10.** Дослідити функцію $z = x^2 + 4yx - 2y^2$ на екстремум за умови $x^2 + y^2 = 1$.

## Перелік посилань

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. — К: Вища школа, 1993. — 648 с.
2. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. — К.: Техніка, 2003. — 600 с. — Ч.1.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.— М.: Высш.Шк.,1980.— 320 с. — Ч.1.
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: под общ. ред. А.П. Рябушко. — Мн.: Высш.Шк.,1991. — 352 с. — Ч.2.