

## УНИВЕРСАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КРИВЫХ НАМАГНИЧИВАНИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ СТАЛЕЙ

Пентегов И.В., д.т.н., проф.  
Институт электросварки им. Е.О.Патона НАН Украины  
Украина, 03680, Киев-150, ул. Боженко, 11  
тел. +38(044) 287-23-88, E-mail: penteg@i.com.ua

Красножон А.В.  
Черниговский государственный технологический университет  
Украина, Чернигов, ул. Шевченко, 95  
тел. +38(04622) 3-22-99, E-mail: red\_john@ngs.ru

*Запропоновано нову універсальну апроксимацію кривих намагнічування електротехнічних сталей у вигляді неперервної кривої на всьому діапазоні зміни напруженості магнітного поля. Апроксимація зручна для використання в аналітичних розрахунках, забезпечує високу точність відтворення кривих намагнічування.*

*Предложена новая универсальная аппроксимация кривых намагничивания электротехнических сталей в виде гладкой кривой на всем интервале изменения напряженности магнитного поля. Аппроксимация удобна для использования в аналитических приложениях, дает высокую точность воспроизведения кривых намагничивания.*

### ВЕДЕНИЕ

Практическое использование ферромагнитных электротехнических материалов тесно связано со знанием их параметров и характеристик. Часто бывает необходимо произвести расчет потерь мощности, возникающих в сердечниках электромагнитных устройств, стальных несущих конструкциях, различных ферромагнитных телах или же возникают задачи, связанные с нахождением распределения магнитного поля и вихревых токов внутри объекта из ферромагнитного материала и корректного выбора режима работы данного объекта. Решение проблем такого класса невозможно без учета существенной нелинейности любого ферромагнитного материала. В частности, на практике для проведения расчетов необходимо знать кривую намагничивания используемой электротехнической стали. Однако, далеко не всегда есть возможность найти в соответствующей справочной литературе нужную кривую, да и проведение расчетов по имеющейся кривой в графоаналитической форме либо при помощи численных методов представляет определенную сложность и приводит к большим затратам времени. Кроме того, такой подход совершенно неудобен при построении автоматизированных расчетов различных электромагнитных устройств, например, трансформаторов. Поэтому до сих пор актуальной является проблема построения аналитических аппроксимаций кривых намагничивания для различных ферромагнитных материалов.

### АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Проблеме аппроксимирования кривых намагничивания различных электротехнических сталей посвящено достаточно большое количество специализированной литературы. Рассмотрим основные подходы.

К одной из наиболее важных и достаточно удачных можно отнести аппроксимацию кривой намагничивания при помощи гиперболического синуса [1].

Дальнейшее развитие этот подход получил в работах [2, 3], в которых предлагается аппроксимировать кривую намагничивания формулой:

$$H(B) = \alpha_c \cdot \operatorname{sh}(\beta_c \cdot B) + \chi_c \cdot B, \quad (1)$$

где  $\alpha_c$ ,  $\beta_c$ ,  $\chi_c$  - коэффициенты аппроксимации.

Данная аппроксимация обеспечивает хорошее совпадение с кривой намагничивания в диапазоне (1,3–1,8 Тл), однако не учитывает имеющегося на начальном участке кривой намагничивания перегиба [3]. При использовании данной формулы необходимо для каждой стали знать величины трех коэффициентов аппроксимации (для наиболее распространенных электротехнических сталей эти коэффициенты приведены в виде таблицы в работе [3]).

Другой способ аппроксимирования предложен в [4]. В этой работе для описания технической кривой намагничивания (ограниченный участок общей кривой намагничивания, в пределах которого лежит режим работы большинства электромагнитных устройств) применяется формула:

$$\frac{dB}{dH} = \mu_k \cdot \left( 1 - \rho \cdot \frac{1 - a \cdot Z + Z^2}{a + b \cdot Z + Z^2} \right), \quad (2)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $\rho$  - постоянные, подлежащие определению по реальной кривой намагничивания;

$$Z = \frac{H}{H_r \cdot H_k},$$

где  $H_r$ ,  $H_k$  - значения напряженности магнитного поля в определенных точках кривой намагничивания.

Такая аппроксимация дает хорошее совпадение с реальными кривыми, однако требует нахождения трех постоянных для каждой стали и справедлива не во всем диапазоне возможных значений напряженности. В работе [5] эти же авторы приводят еще более сложную аппроксимационную зависимость, справедливую для более широкого диапазона напряженностей, но требующую определения еще большего количества

нетабулированных постоянных.

Интересный способ аппроксимирования предложен в [6]. Автор предлагает пользоваться так называемой универсальной кривой намагничивания, справедливой для большого количества ферромагнитных материалов. Суть данного подхода заключается в следующем. Поскольку природа гистерезисных явлений во всех ферромагнитных материалах одинакова, то предлагается пользоваться безразмерной относительной нормированной зависимостью магнитной проницаемости от напряженности магнитного поля  $\mu = f(H)$ . От нее впоследствии можно легко перейти как к реальной зависимости магнитной проницаемости от напряженности поля  $\mu = f(H)$  для заданного материала, так и к соответствующей кривой намагничивания  $B = f(H)$ . Важной особенностью в этом подходе является то, что безразмерная универсальная зависимость  $\mu = f(H)$  является нормированной. При этом величина  $\mu_{-}$  (ось ординат графика) нормируется на единицу в точке максимума (при максимальном значении относительной магнитной проницаемости  $\mu_{от} = \mu_{mот}$ ). Таким образом, для перехода к реальным значениям магнитной проницаемости нужно пользоваться соотношением:

$$\mu = \mu_{-} \cdot \mu_0 \cdot \mu_{mот}, \quad (3)$$

где магнитная постоянная  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

Для нормировки по оси абсцисс (напряженность магнитного поля) выбирается определенным образом некоторая точка в области сильных полей (после максимума зависимости  $\mu = f(H)$ ), для которой определяется значение реальной напряженности  $H_1$ . Эта точка соответствует  $H_{-} = 1$  на универсальной аппроксимации. Таким образом, для перехода от аппроксимации к реальным значениям напряженности следует пользоваться формулой:

$$H = H_{-} \cdot H_1. \quad (4)$$

Данный подход имеет ряд преимуществ по сравнению с остальными. Самым главным из них является сам принцип использования на основе теории подобия универсальной аппроксимации  $\mu = f(H)$ , справедливой для большого количества ферромагнитных материалов, что сразу устраняет проблемы, связанные с определением большого количества произвольных постоянных для подгонки теоретической и экспериментальной кривых для каждой из марок стали. На основе универсальной аппроксимации получение реальных значений  $\mu$  и  $H$  сводится к простому умножению координат точек универсальной кривой на  $\mu_0 \cdot \mu_{mот}$  и  $H_1$  (см. формулы (3) и (4)).

Работает универсальная аппроксимация в широком диапазоне напряженностей магнитного поля. Однако, данная универсальная аппроксимация имеет и некоторые недостатки. Во-первых, сама универсальная зависимость  $\mu_{-} = f(H_{-})$  является кусочной и состоит из большого числа "склеиваемых" полиномов, что, конечно, способствует повышению точности, но отнюдь

не приводит к простоте пользования такой аппроксимацией. При этом производные полученной функции имеют разрывы первого и второго рода, что делает невозможным использование аналитических методов расчета, связанных с дифференцированием. Во-вторых, нормировка значений напряженности поля  $H$  производится по некоторому значению  $H_1$ , которое определяется достаточно произвольно.

Из всего изложенного выше можно сделать вывод, что задача получения достаточно простой и удобной универсальной аппроксимации, опирающейся на характерные параметры самого ферромагнитного материала (табулируемые параметры) и не требующей определения большого количества произвольных постоянных, до сих пор окончательно не решена.

## МЕТОДИКА УНИВЕРСАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Принцип использования теории подобия, описанный в [6], является наиболее перспективным, поскольку применение универсальной аппроксимационной зависимости позволяет значительно упростить и ускорить расчет электромагнитных процессов в элементах со сталью, а также дает возможность автоматизировать такие расчеты.

Такой подход был взят за основу авторами данной статьи при построении универсальной аппроксимации кривой намагничивания электротехнических сталей. Аппроксимационная зависимость строится в нормированной безразмерной форме, в виде гладкой функции  $\mu_{-} = f(H_{-})$  без сшивки на всем диапазоне изменения напряженности магнитного поля.

Однако нормировка универсальной аппроксимационной зависимости выполняется несколько по-другому, по сравнению с методикой [6].

Нормируются на 1 все координаты точки максимума магнитной проницаемости. По оси ординат точка  $\mu_{-} = 1$  соответствует на реальной кривой  $\mu = f(H)$  точке, в которой относительная магнитная проницаемость максимальна ( $\mu_{от} = \mu_{mот}$ ). По оси абсцисс точка  $H_{-} = 1$  соответствует на реальной кривой  $\mu = f(H)$  такой напряженности магнитного поля, при которой  $\mu_{от} = \mu_{mот}$ , т.е. при  $H = H_{\mu m}$ . Тогда, применяя теорию подобия, можно от известной универсальной аппроксимационной зависимости  $\mu_{-} = f(H_{-})$  перейти к реальной зависимости  $\mu = f(H)$  в параметрической форме записи по следующим соотношениям:

$$\mu = \mu_{-}(H_{-}) \cdot \mu_0 \cdot \mu_{mот}, \quad (5)$$

$$H = H_{-} \cdot H_{\mu m}, \quad (6)$$

либо в обычной форме

$$\mu(H) = \mu_{-} \left( \frac{H}{H_{\mu m}} \right) \cdot \mu_0 \cdot \mu_{mот}. \quad (7)$$

Следует заметить, что при вычислениях по формулам (5), (6) и (7) напряженность  $H_{\mu m}$  берется в А/м, а магнитная проницаемость  $\mu$  получается в

Гн/м. Для вычисления нормированных значений индукции следует пользоваться формулой

$$B_{-}(H_{-}) = \mu_{-}(H_{-}) \cdot H_{-}, \quad (8)$$

либо для получения реальных значений магнитной индукции в Тл в обычной форме:

$$\mu_{-}(H_{-}) = \left[ \frac{1}{1 - \frac{1}{\mu_{m\text{от}}}} + \frac{((H_{-}-1))^b}{1 - \mu_{st} - 0,17 \cdot H_{-}^{-1-1,5 \cdot H_{-}} - 1 + \frac{H_{-}^{b-1} \cdot B_s}{k(H_{-}) \cdot B_{\mu m}}} \right]^{-1} + \frac{1}{\mu_{m\text{от}}}, \quad (10)$$

где  $\mu_{m\text{от}}$  - максимальное значение относительной магнитной проницаемости для данного материала (по отношению к  $\mu_0$ );  $k(H_{-})$  - поправочная функция,  $B_s$  - индукция насыщения;  $B_{\mu m}$  - значение индукции, при котором проницаемость  $\mu$  максимальна;  $b$  - безразмерный коэффициент, обусловленный технологическими особенностями процесса прокатки;  $\mu_{st}$  - относительная безразмерная начальная магнитная проницаемость данной электротехнической стали.

Значение индукции  $B_{\mu m}$  рассчитывается по формуле:

$$B_{\mu m} = \mu_0 \cdot \mu_{m\text{от}} \cdot H_{\mu m}. \quad (11)$$

Значение нормированной относительной безразмерной начальной магнитной проницаемости  $\mu_{st}$  рассчитывается по формуле:

$$\mu_{st} = \frac{\mu_{st}}{\mu_0 \cdot \mu_{m\text{от}}}, \quad (12)$$

где  $\mu_{st}$  - начальная магнитная проницаемость. Таким образом, начальная магнитная проницаемость для формулы (10) также нормируется на значение максимальной магнитной проницаемости.

Поправочная функция  $k(H_{-})$ , одинаковая для всех электротехнических сталей и корректирующая кривую в области средних напряженностей магнитного поля после максимума  $\mu_{-}$ , выражается следующей формулой:

$$k(H_{-}) = \left( 1 + 400e^{-9H_{-}^2} \right) \cdot \left[ 1 + \frac{1,2}{2 + H_{-}^{0,4}} \right]^{0,9}. \quad (13)$$

При  $H_{-} \rightarrow \infty$  величина  $k(H_{-}) \rightarrow 1$ .

На рис. 1 и рис. 2 по уравнениям (10) и (8) построены безразмерные нормированные кривые  $\mu_{-}$  и  $B_{-}$  как функции  $H_{-}$  для стали 3414 (0,5 мм) с  $\mu_{m\text{от}} = 71620$ ,  $\mu_{st} = 0,064$  и  $H_{\mu m} = 9$  А/м (параметры взяты из справочника [7]).

$$B(H) = \mu(H) \cdot H = \mu_{-} \left( \frac{H}{H_{\mu m}} \right) \cdot \mu_0 \cdot \mu_{m\text{от}} \cdot H. \quad (9)$$

Сама универсальная относительная безразмерная нормированная на 1 аппроксимационная зависимость  $\mu_{-}$  от  $H_{-}$  выражается следующей формулой:

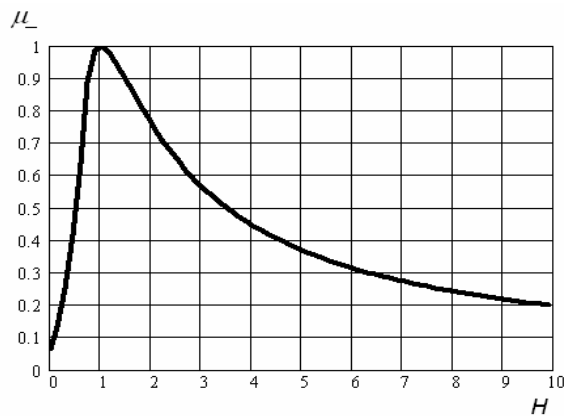


Рис. 1

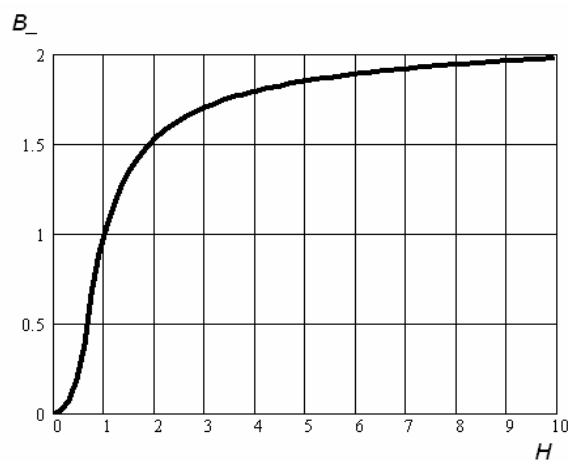


Рис. 2

Из рассмотрения этих рисунков видно, что координаты точки максимума кривой  $\mu_{-}$  нормированы на 1, а в кривой  $B_{-}$  на 1 нормированы координаты точки, соответствующей максимальной магнитной проницаемости.

К важному преимуществу аппроксимационной зависимости (10) следует отнести тот факт, что она построена таким образом, что точно совпадает с реальной зависимостью  $\mu = f(H)$  в следующих областях:

1) при  $H_{-} \rightarrow 0$  с учетом того, что величина  $\mu_{m\text{от}} \gg \mu_{st}$  для любой электротехнической стали, получаем, что  $\mu_{-} \rightarrow \mu_{st}$ , это для реальной кривой  $\mu = f(H)$  будет соответствовать, согласно формулам (5), (6) и (12), начальной точке, т.е.  $\mu = \mu_{st}$  при  $H = 0$ ;

2) в районе  $H_- = 1$  величина  $\mu_- = 1$ , что на реальной кривой соответствует, согласно формулам (5) и (6),  $\mu = \mu_m$  при  $H = H_{\mu m}$ ;

3) при  $H_- \rightarrow \infty$  мы получаем  $\mu_- \rightarrow \frac{1}{\mu_{от}}$  (последнее слагаемое в формуле (10)), что на реальной кривой соответствует  $H \rightarrow \infty$  и  $\mu \rightarrow \mu_0$ ; т.е. в зоне больших напряженностей поля относительная магнитная проницаемость материала стремится к магнитной проницаемости вакуума.

Нетрудно показать, что при больших  $H$  формула (10) вырождается в

$$\mu_-(H_-) = \frac{B_s}{B_{\mu m} \cdot H_-} + \frac{1}{\mu_{от}}, \quad (14)$$

откуда по формуле (5) получаем

$$\mu(H) = \frac{B_s}{H} + \mu_0, \quad (15)$$

отсюда следует, что при больших  $H$  поведение кривой магнитной проницаемости описывается верно.

Формула (10) легко приводится к обычному виду, если заменить в ней  $H_-$  на  $\frac{H}{H_{\mu m}}$  и подставить ее

в (7). Предлагаемая аппроксимационная формула удобна также тем, что требует знания для каждой стали всего 5 параметров:

1) начальную магнитную проницаемость  $\mu_{st}$  либо нормированную безразмерную начальную магнитную проницаемость  $\mu_{-st}$ , определяемую по формуле (12);

2) максимальную относительную магнитную проницаемость данной стали  $\mu_{от}$ ;

3) напряженность  $H_{\mu m}$  магнитного поля, при которой магнитная проницаемость максимальна;

4) индукцию насыщения  $B_s$ ;

5) безразмерный коэффициент  $b$ .

При этом следует заметить, что 4 первых параметра достаточно легко можно найти в справочниках, даже если там не приведена в виде графика либо таблицы значений кривая намагничивания  $B = f(H)$  или же зависимость  $\mu = f(H)$ . Совпадение аппроксимационной и экспериментальной кривых обеспечивается при помощи одного коэффициента  $b$ , величина которого зависит от особенностей технологии прокатки стали.

Следует также отметить, что сама универсальная аппроксимационная зависимость не является кусочной, а выражается единой формулой, поэтому построенная по ней кривая гладкая и производная полученной функции не имеет разрывов первого и второго рода.

Проверка аппроксимационной формулы проводилась на основе экспериментальных данных по кривым намагничивания и статическим зависимостям  $\mu = f(H)$  для холоднокатаных электротехнических сталей из [7]. Для проверки были выбраны следующие марки сталей: сталь 3413 (толщина 0,5 мм), сталь 3414 (толщина 0,5 мм), сталь 3413 (толщина 0,35 мм), сталь 3404 (толщина 0,35 мм), 3405 (толщина 0,35 мм), сталь 3406 (толщина 0,35 мм). При этом кривые из справочника брались для случая намагничивания образцов вдоль направления прокатки стали. Сводные параметры для подстановки в аппроксимационную формулу приведены в табл. 1.

На рис. 3 и рис. 4 показаны экспериментальные [7] (черные жирные линии) и рассчитанные по аппроксимационным формулам (7) и (9) (белые тонкие линии) кривые  $\mu$  и  $B$  для стали 3414 (0,5 мм).

Таблица 1

Аппроксимационные параметры электротехнических сталей

№	марка стали	толщина, мм	$\mu_{от}$	$H_{\mu m}$ , А/м	$\mu_{-st}$	$B_s$ , Тл	$b$
1	3413	0,5	46150	11,5	0,057	2,05	2,2
2	3414	0,5	71620	9	0,064	2,05	1,7
3	3413	0,35	60480	10,5	0,072	2,05	1,6
4	3404	0,35	60480	11	0,086	2,05	1,7
5	3405	0,35	68440	10,5	0,093	2,05	1,65
6	3406	0,35	70820	10	0,079	2,05	1,7

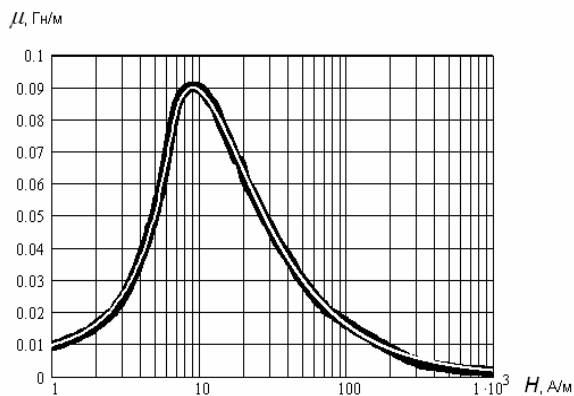


Рис. 3

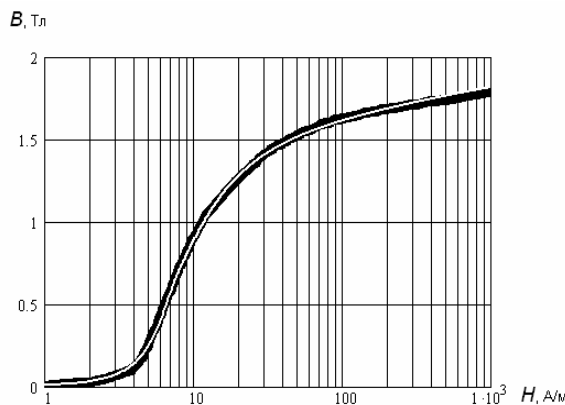


Рис. 4

Как видно из рис. 3 и рис. 4, аппроксимационные формулы дают очень хорошее совпадение с реальными кривыми, полученными из эксперимента.

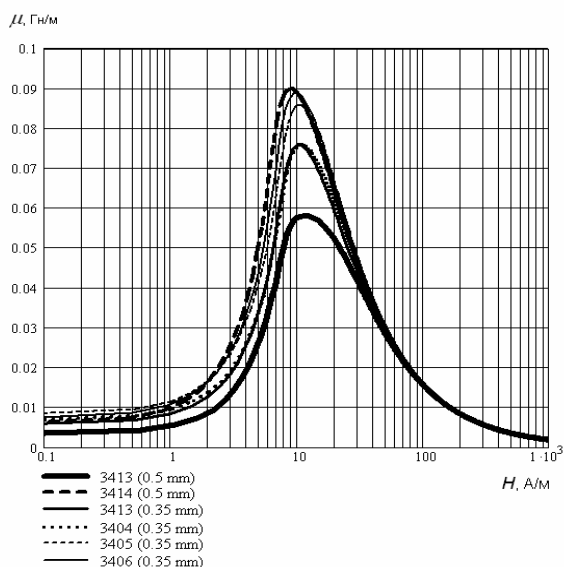


Рис. 5

На рис. 5 и рис. 6 приведены аппроксимационные кривые  $\mu = f(H)$  и  $B = f(H)$  для всех приведенных в табл. 1 сталей. Построенные кривые отражают все особенности зависимостей, полученных из экспериментов, дают хорошее совпадение численных значений и открывают возможность отказаться от использования многочисленных таблиц и графиков, на которых базируются все методики электромагнитных расчетов трансформаторов и реакторов.

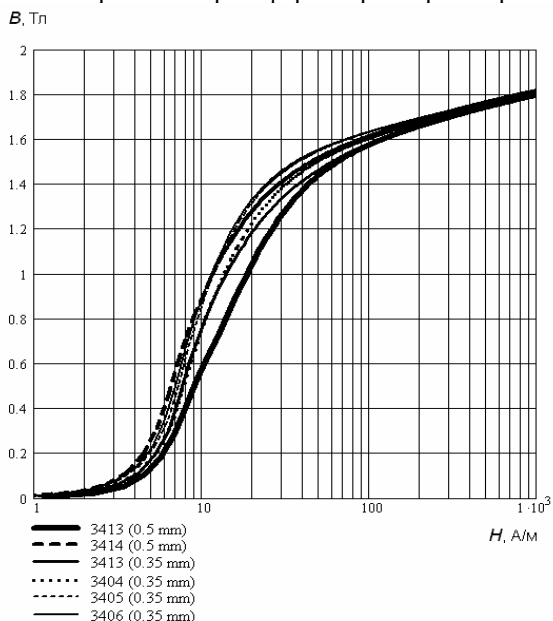


Рис. 6

## ВЫВОДЫ

Предложена универсальная аппроксимация кривых намагничивания электротехнических сталей в виде гладкой кривой, справедливая на всем интервале изменения напряженности магнитного поля.

Аппроксимация удобна для использования в аналитических приложениях, дает высокую точность воспроизведения кривых намагничивания и требует знания всего 5 табличных параметров, 4 из которых можно найти в любом справочнике.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бессонов Л.А. "Нелинейные электрические цепи". – Высшая школа. – 1964. – 430 с.
- [2] Пентегов И.В., Рымар С.В. "Метод определения потерь в стали трансформатора, ориентированный на использование в САПР". – Техническая электродинамика. – 1995. – №6. – С. 35-40.
- [3] Пентегов И.В., Рымар С.В. "Метод расчета тока холостого хода трансформатора, ориентированный на использование в САПР". – Техническая электродинамика. – 1996. – №1. – С. 39-45.
- [4] Мустафаев Р.А., Набиев М.А., Гулиев З.А., Гаджибалаев Н.М. К аппроксимации кривой намагничивания. – Электричество, №5, 2004.
- [5] Набиев М.А., Гулиев З.А., Гаджибалаев Н.М. К решению уравнений Максвелла для ферромагнитной среды. – Электричество, 2002, №3.
- [6] Демирчян К.С. "Моделирование магнитных полей". – Л.: Энергия. – 1974. – 288 с.
- [7] Холоднокатаные электротехнические стали: Справ. изд. Молотиллов Б.В., Миронов Л.В., Петренко А.Г. и др. – М.: Металлургия, 1989, - 168 с.

Поступила 29.08.2005