

## РАСЧЕТ УДЕЛЬНЫХ ПОТЕРЬ В ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛАХ ПРИ ПОВЫШЕННЫХ ЧАСТОТАХ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАГНИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДЫ

Пентегов И.В., д.т.н., проф., Рымар С.В., к.т.н., с.н.с.  
Институт электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины  
Украина, 03680, Киев-150, ул. Боженко, 11, ИЭС им. Е.О.Патона  
тел. (044) 227-23-88, E-mail: elmag@paton.kiev.ua

Красножон А.В.  
Черниговский государственный технологический университет  
Украина, 14000, Чернигов, ул. Шевченко, 95, ЧГТУ  
тел. (04622) 3-22-99, E-mail: red\_john@ngs.ru

*На основі ВКБ-методу отримала подальший розвиток методика розрахунку питомих втрат у ферромагнітних матеріалах при підвищених частотах з урахуванням їх нелінійних магнітних характеристик. В якості приклада показані залежності приведеного активного опору від амплітудного значення напруженості магнітного поля для конструкційної сталі Ст. 3. Методика буде корисна фахівцям в галузі теоретичної електротехніки, електротермії, електрометалургії та зварювання.*

*На основе ВКБ-метода получила дальнейшее развитие методика расчета удельных потерь в ферромагнитных материалах при повышенных частотах с учетом их нелинейных магнитных характеристик. В качестве примера показаны зависимости приведенного активного сопротивления от амплитудного значения напряженности магнитного поля для конструкционной стали Ст. 3. Методика будет полезна специалистам в области теоретической электротехники, электротермии, электрометаллургии и сварки.*

### ВВЕДЕНИЕ

В ряде задач электротехники, электротермии, электрометаллургии и сварки возникает необходимость расчета удельных потерь, возникающих в ферромагнитных материалах под действием электромагнитного поля. Так, сварочные технологии часто требуют производить последующую термическую обработку металла сварного шва и околошовной зоны для снятия остаточных напряжений и улучшения свойств металла [1]. Одним из наиболее перспективных методов такого нагрева является индукционный нагрев [2, 3]. Также индукционный нагрев применяют непосредственно при сварке металлических изделий. Нагрев и расплавление металлов посредством электромагнитного поля повышенной частоты широко распространен в электрометаллургии. Для всех этих и подобных технологических процессов необходимо знать, какую мощность нужно вкладывать в нагреваемый металл для их обеспечения. Поэтому совершенствование методик расчета мощности удельных потерь в ферромагнитных материалах с учетом нелинейности среды при воздействии электромагнитного поля повышенной частоты является актуальной задачей.

В данной статье рассматривается методика расчета мощности удельных потерь в ферромагнитной среде с учетом нелинейности на основе ВКБ-метода.

### СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОТЕРЬ В ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛАХ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

В настоящее время при расчете потерь в ферромагнитных материалах можно выделить четыре основных направления: численные методы расчетов, метод Розенберга, метод Неймана, ВКБ-метод. Рассмотрим кратко суть этих методов.

**Численные методы.** В настоящее время существует большое количество численных методов, позволяющих решать нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие электромагнитные процессы в среде, что, в свою очередь, позволяет рассчитать потери в ферромагнитных материалах. Один из подобных способов анализа, опирающийся на численное определение потерь по семейству симметричных статических петель гистерезиса, описан в работе [4]. Из последних публикаций, затрагивающих численные методы расчета, вызывает интерес работа [5], в которой петли гистерезиса аппроксимируются семейством ромбов.

К бесспорным достоинствам численных методов следует отнести возможность получения решения с достаточно высокой степенью точности. Однако, несмотря на это, численные методы не находят достаточно широкого применения, поскольку их результаты плохо интерпретируемы и мало что дают с точки зрения аналитического исследования поверхностного эффекта, а для их использования необходимо наличие экспериментального семейства характеристик применяемого материала, что далеко не всегда возможно.

**Метод Розенберга.** Розенберг исходит из следующих предположений [6]:

– магнитная индукция остается приблизительно постоянной от поверхности ферромагнитного материала до определенной глубины, а затем быстро спадает к нулю при превышении этой глубины;

– плотность вихревого тока уменьшается на том же участке линейно и становится равной нулю на глубине, где магнитная индукция исчезает.

Розенберг также пренебрегает фазовым сдвигом между токами и магнитной индукцией [6, 7].

При этих допущениях удельные потери  $p_s$  на единицу поверхности ферромагнитного материала могут быть рассчитаны по формуле [4, 8, 9]:

$$p_s = k_R \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2 \cdot \gamma}} \cdot \frac{H_m^2}{2} \quad (1)$$

где  $k_R$  – коэффициент увеличения активных потерь, учитывающий нелинейность свойств ферромагнитного материала (при допущениях Розенберга в его работе этот коэффициент получается равным 1,34);  $\omega$  – угловая частота поля;  $\mu$  – магнитная проницаемость на поверхности ферромагнитного материала;  $\gamma$  – удельная электрическая проводимость ферромагнитного материала;  $H_m$  – амплитудное значение напряженности магнитного поля на поверхности ферромагнитного материала.

Достоинство данного метода заключается в его простоте, а существенный недостаток состоит в том, что метод справедлив только при глубоком насыщении ферромагнитного материала, в связи с чем, его область применения существенно ограничена.

**Метод Неймана.** Изложен в работе [9] и является одним из наиболее простых аналитических методов. Л.Р. Нейман рассматривал нелинейную зависимость амплитудного значения магнитной индукции  $B_m$  от амплитудного значения напряженности магнитного поля  $H_m$  на поверхности ферромагнитного материала как функцию  $B_m = f(H_m)$  и величину комплексной магнитной проницаемости по первой гармонике. При этом связь между амплитудами индукции и напряженности магнитного поля учитывается приближенной параболической аппроксимацией [7]:

$$B_m = K \cdot H_m^{1/n} \quad (2)$$

Здесь  $K$  и  $n$  – коэффициенты.

В своих исследованиях Нейман получил для используемого в формуле (1) коэффициента  $k_R$  значение, равное 1,4.

Следует отметить, что примененная Нейманом аппроксимация (2) дает удовлетворительные результаты расчета только при сильных магнитных полях на поверхности ферромагнетика [7], что накладывает ограничения на применение данного метода.

**ВКБ-метод.** В настоящее время одним из наиболее перспективных аналитических методов расчета потерь в случае резкого проявления поверхностного эффекта является ВКБ-метод (Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна). Развитию этого метода применительно к процессам поверхностного эффекта посвящена работа [8]. ВКБ-метод позволяет получать более общие аналитические результаты по сравнению с методами Розенберга и Неймана, открывая новые возможности для аналитического изучения проявлений поверхностного эффекта в ферромагнитных материалах.

В работе [8] анализ процессов ведется по первой гармонике с использованием нелинейной комплексной абсолютной магнитной проницаемости по первой гармонике  $\underline{\mu}_1$ :

$$\underline{\mu}_1(H_{1m}) = \frac{B_{1m}}{H_{1m}} = \mu_1(H_{1m}) \cdot e^{-j \cdot \psi_1(H_{1m})}, \quad (3)$$

где  $H_{1m}$  – амплитудное значение напряженности магнитного поля при первой гармонике;  $B_{1m}$ ,  $H_{1m}$  – ком-

плексные амплитуды первых гармоник соответственно магнитной индукции и напряженности магнитного поля;  $\mu_1(H_{1m})$ ,  $\psi_1(H_{1m})$  – соответственно модуль и аргумент комплексной магнитной проницаемости, являющиеся функциями амплитудного значения  $H_{1m}$ .

Процесс распространения плоской электромагнитной волны в проводящем ферромагнитном полупространстве с нелинейными свойствами описывается дифференциальным уравнением вида [8]:

$$\frac{dH_{1m}}{dx} - j \cdot \omega \cdot \underline{\mu}_1(H_{1m}) \cdot H_{1m} = 0 \quad (4)$$

Здесь  $x$  – координата, нормальная к поверхности полупространства;  $j = \sqrt{-1}$ ;  $\omega$  – угловая частота первой гармоники магнитного поля.

Отметим, что получение решения уравнения (4) само по себе достаточно сложная задача, поскольку оно содержит нелинейный коэффициент  $\underline{\mu}_1(H_{1m})$ .

В работе [8] показано решение уравнения (4) при помощи математического аппарата ВКБ-метода и найдены выражения для коэффициента  $k_R$ . Опустив проделанные в работе [8] математические выкладки, запишем конечный результат:

$$k_R(H_{1m}) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi_1(H_{1m})}{2}\right) \times \left[ 1 - \left( 1 + 4 \cdot \frac{\mu_1(H_{1m})}{H_{1m} \cdot \frac{d\mu_1(H_{1m})}{dH_{1m}}} \right)^{-1} \right] \quad (5)$$

Как видно из выражения (5), в результате применения ВКБ-метода можно получить коэффициент  $k_R$  как функцию амплитуды напряженности первой гармоники магнитного поля  $H_{1m}$ , что позволяет использовать полученный результат при любых значениях напряженности поля без ограничений, присущих методам Розенберга и Неймана. Кроме того, для нахождения решения при помощи ВКБ-метода, как указано в работе [8], достаточно знать только величину напряженности магнитного поля и параметры материала на поверхности ферромагнитной среды.

В работе [8] была построена зависимость  $k_R(H_{1m})$  для конструкционной стали Ст. 3 на основе приведенных в работе [9] экспериментальных зависимостей модуля  $\mu_1(H_{1m})$  и аргумента  $\psi_1(H_{1m})$  нелинейной комплексной абсолютной магнитной проницаемости по первой гармонике от амплитуды напряженности первой гармоники магнитного поля при частоте 50 Гц.

Изложенный в работе [8] метод расчета коэффициента  $k_R$  получил дальнейшее развитие и логическое продолжение в работе [10]. В этой работе коэффициент  $k_R$  рассчитывается при помощи универсальной аппроксимации модуля  $\mu_1(H_{1m})$  и аргумента  $\psi_1(H_{1m})$  комплексной магнитной проницаемости, справедливой для любой конструкционной стали или магнитомягкого ферромагнетика. Это, в свою очередь, дает возможность применения формулы (5) для большого количества конструкционных сталей и других магнитомягких материалов. Для расчета входящих в выражение (5) величин  $\mu_1(H_{1m})$  и  $\psi_1(H_{1m})$  нужно использовать формулы работы [10].

## ПРИМЕНЕНИЕ ВКБ-МЕТОДА В ЗАДАЧАХ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА

К одной из важных промышленных технологий, где приходится сталкиваться с проявлениями поверхностного эффекта, относятся задачи индукционного нагрева ферромагнитных материалов, решение которых основано на определении необходимой для нагрева мощности. Ввиду существенной нелинейности магнитных свойств конструкционных сталей расчет индукционного нагрева представляет собой достаточно сложную задачу, при решении которой зачастую используются различные эмпирические соотношения.

На практике для индукционного нагрева обычно используются частоты от 400 Гц до 400 кГц, при этом для нагрева массивных конструкций (трубы, рельсы, балки) используются преимущественно частоты в диапазоне 400...3000 Гц.

В работе [11] было проведено экспериментальное исследование поверхностного эффекта в массивных образцах (стержнях, изготовленных путем проката) из конструкционной стали Ст. 3 на звуковых частотах. Результаты исследования представлены в виде кривых зависимости так называемого приведенного активного сопротивления от напряженности первой гармоники магнитного поля (максимальное амплитудное значение напряженности магнитного поля в экспериментах составляло 7500 А/м). Кривые сняты для ряда частот (400...9600 Гц) при постоянной температуре образца, равной 20°C. В качестве приведенного активного сопротивления была использована величина  $r \cdot u / (l \cdot \sqrt{f})$ , в которой  $r$  – активное сопротивление образца;  $u$  и  $l$  – соответственно периметр поперечного сечения и длина образца;  $f$  – частота электромагнитного поля. Применение такого приведенного активного сопротивления обусловлено тем, что оно зависит только от свойств самого материала.

С другой стороны, зависимость приведенного активного сопротивления образца из стали Ст.3 от напряженности первой гармоники магнитного поля для частоты 50 Гц можно получить на основе ВКБ-метода [8, 10]. Как известно, активное сопротивление ферромагнитного тела, имеющего периметр сечения  $u$  и длину  $l$ , может быть найдено по формуле:

$$r = \rho \cdot \frac{l}{u \cdot \Delta}, \quad (6)$$

где  $\rho$  – объемное удельное сопротивление ферромагнитного материала,  $\rho = 1/\gamma$ ;  $\Delta$  – эквивалентная глубина проникновения электромагнитного поля в образец из ферромагнитного материала (рассматривается случай, когда  $\Delta$  меньше толщины нагреваемого изделия).

В нелинейной ферромагнитной среде эквивалентная глубина проникновения уменьшается в  $k_R$  раз по сравнению с линейным случаем и определяется по следующему соотношению:

$$\Delta = \frac{1}{k_R(H_{1m})} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\pi \cdot f \cdot \mu_1(H_{1m})}}. \quad (7)$$

Заметим, что при температуре выше точки Кюри (для стали Ст. 3 эта температура приблизительно равна 770°C) значение  $\mu_1(H_{1m})$  становится равным магнитной постоянной  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м, а значение ко-

эффициента  $k_R(H_{1m})$  становится равным 1, для среды с линейными магнитными характеристиками.

Подставив выражение (7) в формулу (6) и преобразовав, получим уравнение для расчета приведенного активного сопротивления:

$$\frac{r \cdot u}{l \cdot \sqrt{f}} = k_R(H_{1m}) \cdot \sqrt{\pi \cdot \rho \cdot \mu_1(H_{1m})}. \quad (8)$$

Опираясь на имеющуюся аппроксимацию  $\mu_1(H_{1m})$  и полученную на основе ВКБ-метода зависимость  $k_R(H_{1m})$  [10], можно построить график зависимости приведенного активного сопротивления  $r \cdot u / (l \cdot \sqrt{f})$  от амплитуды напряженности первой гармоники магнитного поля  $H_{1m}$  для стали Ст. 3 при частоте 50 Гц. Удельное сопротивление  $\rho$  при 20°C было взято равным  $1,82 \cdot 10^{-7}$  Ом·м [11]. Построенная зависимость (кривая 1) показана на рис. 1 совместно с экспериментальными кривыми 2 – 6 из работы [11].

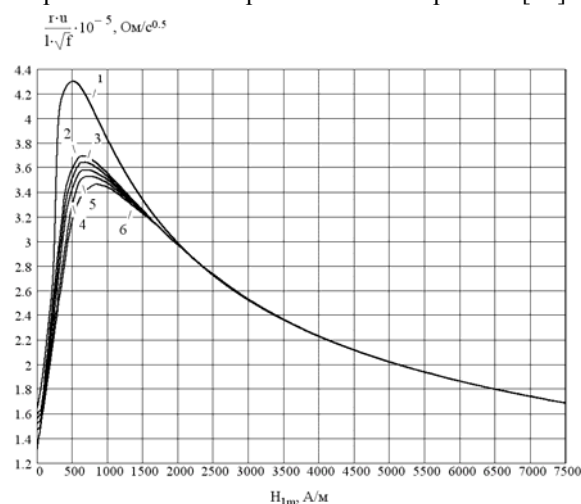


Рис. 1. Зависимости значений приведенного активного сопротивления  $r \cdot u / (l \cdot \sqrt{f})$  от амплитудных значений

напряженности магнитного поля  $H_{1m}$  для стали Ст. 3 при 20°C и разных звуковых частотах:

- 1 – при  $f = 50$  Гц (ВКБ-решение); 2 – при  $f = 400$  Гц;
- 3 – при  $f = 1000$  Гц; 4 – при  $f = 2400$  Гц; 5 – при  $f = 4800$  Гц;
- 6 – при  $f = 9600$  Гц (экспериментальные значения)

Как видно из рис. 1, зависимости значений приведенного активного сопротивления от амплитуды напряженности магнитного поля при разных частотах отличаются только в области слабых полей. Начиная с амплитудного значения напряженности примерно 2000 А/м все кривые, в том числе и кривая для 50 Гц, совпадают с высокой степенью точности. Это дает возможность пользоваться аналитическим решением, полученным для частоты 50 Гц на основе ВКБ-метода, в области сильных полей при напряженности  $H_{1m} > 2000$  А/м для частот звукового диапазона. А с учетом того обстоятельства, что индукционный нагрев массивных конструкций осуществляют, как правило, в полях с амплитудным значением напряженности магнитного поля свыше 7500 А/м при частотах в единицы кГц, можно пользоваться имеющимся ВКБ-решением для аналитического расчета мощности, идущей на нагрев поверхности массивного стального тела при заданной величине напряженности магнит-

ного поля. На рис. 2 показан график зависимости приведенного активного сопротивления от амплитудного значения напряженности первой гармоники магнитного поля при 20 °С, построенный по ВКБ методу для диапазона  $H_{1m}$  от 0,01 кА/м до 100 кА/м, что значительно превышает значения величин  $H_{1m}$ , до которой были сняты экспериментальные зависимости в работе [11]. При любой другой температуре ниже точки Кюри для определения приведенного активного сопротивления ординаты кривой на рис. 1 и 2 необходимо умножить на величину  $\sqrt{\rho(T)/\rho(20^\circ\text{C})}$ . Зависимости  $\rho(T)$  для различных сталей можно найти в работе [12].

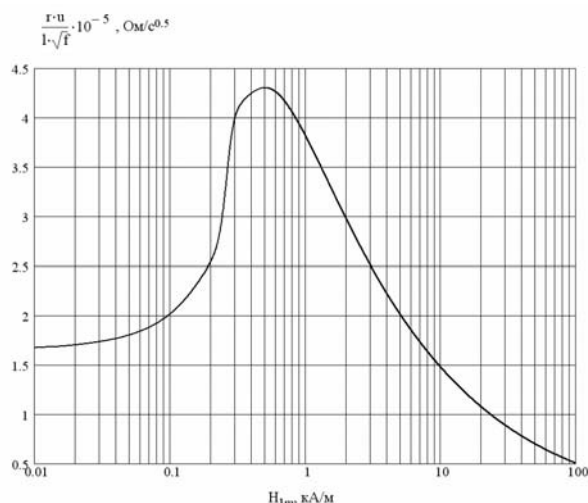


Рис. 2. Зависимость приведенного активного сопротивления  $r \cdot u / (l \cdot \sqrt{f})$  от амплитудных значений напряженности магнитного поля  $H_{1m}$  для стали Ст. 3 при 20 °С (ВКБ-метод)

Как было указано выше, удельные поверхностные потери (мощность нагрева единицы площади) в ферромагнитном полупространстве могут быть найдены по формуле (1). Опираясь на полученное ВКБ-решение, выражение (1) можно переписать в виде:

$$p_s = k_R(H_{1m}) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \mu_1(H_{1m})}{2 \cdot \gamma}} \cdot \frac{H_{1m}^2}{2} = \sqrt{\pi \cdot \rho \cdot f \cdot \mu_1(H_{1m})} \cdot k_R(H_{1m}) \cdot \frac{H_{1m}^2}{2}, \quad (9)$$

в котором значение  $H_{1m}$  берется на поверхности среды.

С учетом того, что удельное сопротивление ферромагнитного материала зависит от температуры, получаем окончательное выражение для удельных потерь в ферромагнитном материале:

$$p_s(T, f, H_{1m}) = \sqrt{\pi \cdot \rho(T) \cdot f \cdot \mu_1(H_{1m})} \cdot k_R(H_{1m}) \cdot \frac{H_{1m}^2}{2}. \quad (10)$$

Формула (10) позволяет рассчитывать удельные потери в образце из ферромагнитного материала при воздействии электромагнитного поля, и, соответственно, удельную мощность для нагрева данного образца, что позволяет на этапе расчета индукционных систем определять вкладываемую мощность, необходимую для нагрева.

## ВЫВОДЫ

Получившая на основе ВКБ-метода дальнейшее развитие методика расчета удельных потерь в ферромагнитных материалах с учетом их нелинейных магнитных характеристик позволяет на этапе расчета индукционных систем определять необходимую вкладываемую мощность, требуемую для нагрева ферромагнитного материала в сильных магнитных полях при звуковых частотах. На примере конструкционной стали Ст. 3 показано, что зависимость приведенного активного сопротивления от амплитудного значения напряженности магнитного поля, рассчитанная с использованием ВКБ-метода, очень хорошо совпадают с аналогичными экспериментальными значениями. Методика будет полезна специалистам в области теоретической электротехники, электротермии, электрометаллургии и сварки.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Технология электрической сварки металлов и сплавов плавлением / Под ред. акад. Б. Е. Патона. М.: Машиностроение, 1974.– 768 с.
- [2] Слухоцкий А. Е., Рыскин С. Е. Индукторы для индукционного нагрева.– Л.: Энергия,– 1974.– 264 с.
- [3] Индукционный нагрев для сварки и родственных технологий / А.С. Письменный / Под ред. Б.Е. Патона.– К.: ИЭС им. Е.О. Патона, 2005.– 140 с.
- [4] Кравченко А.Н. Краевые характеристики в задачах электродинамики.– К.: Наук. думка, 1989.– 224 с.
- [5] Математические модели для исследования электромагнитного поля в проводящей среде с учетом гистерезиса / А.Б. Кувалдин, М.Л. Струпинский, Н.Н. Хренков, В.А. Шатов // Электричество.– 2005.– № 11.– С. 56-61.
- [6] Ламмеранер И., Штафль М. Вихревые токи.– М.-Л.: Энергия, 1967.– 208 с.
- [7] Туровский Я. Техническая электродинамика.– М.: Энергия, 1974.– 488 с.
- [8] Пентегов И.В. Возможности использования ВКБ-метода при исследовании поверхностного эффекта в ферромагнитных телах // Изв. АН СССР "Энергетика и транспорт".– 1988.– № 1.
- [9] Нейман Л.Р. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах.– Л.-М.: ГЭИ, 1949.– 190 с.
- [10] Пентегов И.В., Красножон А.В. Влияние параметров ферромагнитной среды на величину составляющих поверхностного импеданса // Электротехника і електромеханіка.– 2007.– № 2.– С. 65-69.
- [11] Петровский В.Н. Методика и некоторые результаты экспериментального исследования поверхностного эффекта в ферромагнитных телах при звуковых частотах // Труды Ленинградского политехнического института им. М.И. Калинина.– 1966.– № 273.– С. 27-33.
- [12] Пентегов И.В., Петриенко О.И. Метод расчета падения напряжения по длине вылета электрода с учетом нелинейности теплофизических параметров // Автоматическая сварка.– 2002.– № 4.– С. 30-33.

Поступила 31.08.2007