УДК 372.851

М.К. Ільєнко, канд. фіз.-мат. наук
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна
Л.А. Руновська, ст. викладач
Чернігівський національний технологічний університет, м. Чернігів, Україна

КВАТЕРНІОНИ ЯК МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ: МЕТОДОЛОГІЧНІ АСПЕКТИ

М.К. Ильенко, канд. физ.-мат. наук
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина
Л.А. Руновская, ст. преподаватель
Черниговский национальный технологический университет, г. Чернигов, Украина

КВАТЕРНИОНЫ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ: МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Maryna Ilienko, PhD in Physical and Mathematical Sciences
National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic institute", Kyiv, Ukraine
Liudmyla Runovska, senior teacher
Chernihiv National University of Technology, Chernihiv, Ukraine

QUATERNIONS AS MATHEMATICAL TOOLS IN COMPUTER GRAPHICS: METHODOLOGICAL ASPECTS

Запропоновано тему «Кватерніони» для розгляду на факультативному занятті з вищої математики зі студентами ВНЗ, які навчаються за спеціальністю «Програмування». Стисло згадуючи історичні факти виникнення кватерніонів, акцентовано увагу на застосуваннях теорії кватерніонів у сучасній науці. Зокрема, обґрунтовано, як операція обертання у тривимірному просторі може бути описана за допомогою кватерніонів, що у свою чергу активно застосовується у комп'ютерній графіці. Наведено відповідний математичний апарат в обсязі, який автори вважають достатнім для зацікавлення майбутніх спеціалістів. А саме, введено формальне математичне поняття кватерніона, розглянуто різні форми його представлення та введено відповідні операції над кватерніонами. Стаття методичного характеру.

Ключові слова: *кватерніони, обертання у тривимірному просторі, методика викладання вищої математики, програмування ігор.*

Предложена тема «Кватернионы» для рассмотрения на факультативном занятии по высшей математике со студентами ВУЗов, которые учатся на специальности «Программирование». Кратко упоминая исторические факты возникновения кватернионов, акцентировано внимание на приложениях теории кватернионов в современной науке. В частности, обосновано, как вращение в трёхмерном пространстве можно описать с помощью кватернионов, что в свою очередь активно используется в компьютерной графике. Приведен соответствующий математический аппарат в объеме, который авторы считают достаточным для того, чтобы заинтересовать будущих специалистов. А именно, введено формальное понятие кватерниона, рассмотрены различные его представления и операции над кватернионами. Статья носит методический характер.

Ключевые слова: *кватернионы, вращение в трёхмерном пространстве, методика преподавания высшей математики, программирование игр.*

In the paper, we propose the topic "Quaternions" to be taught at the lesson on the optional course of higher mathematics to university students who study programming. Briefly following historical facts about invention of quaternions we mention some applications of them in modern science. In particular, we explain how the rotation in three-dimensional space can be described by means of quaternions. This is widely used in computer graphics. The appropriate mathematical background is given to the extent which, on authors' opinion, is sufficient to make interest for future specialists. In the main part of the paper we give formal mathematical definition of quaternion, consider its various interpretations, and introduce operations with quaternions. The article has a methodological nature.

Key words: *quaternions, rotation in three-dimensional space, methods of teaching higher math, games programming.*

Винахід кватерніонів – крок вперед
до розуміння величин, пов'язаних з простором;
він рівний за своїм значенням
з винаходом Декарта системи координат.
Дж. Максвелл

Це була революція в арифметиці, подібна тій,
яку вчинив Лобачевський у геометрії.
А. Пуанкаре

Вступ. Разом із неймовірно стрімким розвитком інформаційних технологій та проникненням комп'ютерної техніки у всі сфери людського життя, однією з найбільш популярних та затребуваних професій у світі, і в Україні зокрема, стає професія програміста. Ця професія передбачає постійний розвиток, самоосвіту та підвищення кваліфікації як уже дипломованих та кваліфікованих програмістів, так і викладачів вищих навчальних закладів, які випускають майбутніх фахівців. Зустрічаючи у своїй професійній діяльності цілеспрямованого та допитливого студента, викладач чи то загальноосвітньої чи то спеціальної дисципліни має бути готовим відповісти на будь-які запитання свого профілю. Одне з таких запитань студента-програміста I курсу надихнуло авторів статті запропонувати для факультативного заняття з вищої математики тему «Кватерніони».

Як відомо, у програмуванні ігор важливим завданням є поворот об'єкта у тривимірному просторі. Порівняно з використанням матриць перетворень для обертання об'єкта кватерніони дозволяють вирішувати це завдання більш зручним способом, оскільки безпосередньо задають вісь та кут обертання. Для того, щоб показати, яким чином задається операція обертання у тривимірному просторі, пропонується розглянути зі студентами на додатковому занятті кватерніони як математичне поняття. Зацікавлені молоді люди без проблем зможуть знайти додаткову інформацію стосовно відповідних команд для програмування повороту об'єкта, зокрема у мережі Інтернет.

У цій статті не будемо зупинятися на множині комплексних чисел та її властивостях. Лише нагадаємо, що комплексне число, тобто пара дійсних чисел, задає обертання на площині. Дійсно, якщо помножити комплексне число z на комплексне число $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, модуль якого дорівнює одиниці, то отримаємо число $ze^{i\varphi}$, яке має однаковий із z модуль, але повернуто на кут φ відносно початку координат. Таким чином, роль комплексних чисел у геометрії площини величезна. Впродовж багатьох років учені, натхненні «корисними» властивостями комплексних чисел, намагалися ввести алгебру «гіперкомплексних чисел», які б забезпечували аналогічну операцію обертання у тривимірному просторі. Так, введення поняття кватерніона належить ірландському математику Вільяму Гамільтону, який упродовж декількох років також намагався узагальнити множину комплексних чисел до множини «трійок». Проте у 1843 році він запропонував новий вид чисел – «четвірки», що містили у своєму записі не дві, як очікувалося, а три уявні одиниці. Пізніше німецьким математиком Фробеніусом було доведено, що розширити множину комплексних чисел неможливо до множини чисел, які містять у своєму записі дві уявні одиниці.

Незважаючи на те, що порівняно із комплексними числами кватерніони втратили властивість комутативності, досить швидко з'ясувалося, що така модель є корисною у деяких прикладних галузях. У сучасній науці кватерніони знайшли своє застосування у комп'ютерній графіці та програмуванні ігор [3], обчислювальній механіці [2; 4], інерційній навігації та теорії управління [5].

У цій роботі розглянемо поняття кватерніона з математичного погляду в тому обсязі, який вважаємо достатнім для одного факультативного заняття з вищої математики зі студентами-програмістами. Зміст статті буде корисним для викладачів математики як основа додаткового заняття із запропонованої теми, яка за бажанням може бути розширена додатковими відомостями, результатами та застосуваннями.

Поняття кватерніона та різні форми його запису. ***Кватерніоном*** (наприклад, [1; 6; 7]) є впорядкована четвірка дійсних чисел (s, a, b, c), які пов'язані з чотирма базисними елементами $\mathbf{1},\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$, що задовольняють такі властивості:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}_2 = -1, \tag{1}$$

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k},\ \mathbf{jk} = \mathbf{i},\ \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \tag{2}$$

$$\mathbf{ji} = \mathbf{-k},\ \mathbf{kj} = \mathbf{-i},\ \mathbf{ik} = -\mathbf{j}. \tag{3}$$

Зауважимо, що базисні елементи (уявні одиниці) $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ можна інтерпретувати як базисні вектори декартової системи координат у тривимірному просторі. Підкреслимо також, що множення базисних елементів здійснюється як векторне множення векторів тривимірного простору за винятком правила (1). Таким чином, будь-який кватерніон можна записати у вигляді:

$$Q = s + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

У такому записі кватерніона виділяють скалярну частину S та векторну частину $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, тобто

$$Q = s + \mathbf{v}.$$

Зокрема, якщо $s = 0$, то кватерніон інтерпретується як вектор $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ у тривимірному просторі.

Враховуючи співвідношення (1)–(3), довільний кватерніон можна також представити у вигляді пари комплексних чисел

$$Q = (s + a\mathbf{i}) + (b + c\mathbf{i})\mathbf{j},$$

або $Q = z_1 + z_2\mathbf{j}$, де $z_1 = (s + a\mathbf{i})$ та $z_2 = (b + c\mathbf{i})$ – комплексні числа.

Множину кватерніонів, як правило, позначають літерою H та записують

$$H = \{s + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k},\ s, a, b, c \in R\}.$$

Підкреслимо, що підмножиною множини кватерніонів H є множина чисел виду $(s, 0, 0, 0)$, тобто множина дійсних чисел R; множина чисел виду $(s, a, 0, 0)$, тобто множина комплексних чисел C; та множина векторів $(0, a, b, c)$ тривимірного простору R^3.

Дії над кватерніонами. Нехай задано два кватерніони $Q_1 = s_1 + a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k} = s_1 + \mathbf{v}_1$ та $Q_2 = s_2 + a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k} = s_2 + \mathbf{v}_2$. Для них вводяться такі операції (наприклад, [1]).

1) *Додавання.* Під час додавання кватерніонів окремо додаються його скалярна та векторна компоненти:

$$Q_1 + Q_2 = (s_1 + s_2) + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2).$$

2) *Множення кватерніона на скаляр.* Під час множення кватерніона на число λ, кожна його компонента множиться на це число:

$$\lambda Q_1 = \lambda s_1 + \lambda a_1\mathbf{i} + \lambda b_1\mathbf{j} + \lambda c_1\mathbf{k} = \lambda s_1 + \lambda\mathbf{v}_1.$$

3) *Добуток кватерніонів.* Добуток двох кватерніонів вводиться за допомогою звичайних дистрибутивних законів з урахуванням співвідношень (1)–(3), і визначається таким чином:

$$\begin{aligned} Q_1Q_2 &= (s_1 + a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k})(s_2 + a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}) = s_1s_2 + s_1a_2\mathbf{i} + s_1b_2\mathbf{j} + s_1c_2\mathbf{k} + a_1s_2\mathbf{i} - \\ &- a_1a_2 + a_1b_2\mathbf{k} - a_1c_2\mathbf{j} + b_1s_2\mathbf{j} - b_1a_2\mathbf{k} - b_1b_2 + b_1c_2\mathbf{i} + c_1s_2\mathbf{k} + c_1a_2\mathbf{j} - c_1b_2\mathbf{i} - c_1c_2 = \\ &= s_1s_2 + s_2\mathbf{v}_1 + s_1\mathbf{v}_2 - a_1a_2 + a_1b_2\mathbf{k} - a_1c_2\mathbf{j} - b_1a_2\mathbf{k} - b_1b_2 + b_1c_2\mathbf{i} + c_1a_2\mathbf{j} - c_1b_2\mathbf{i} - c_1c_2 = \\ &= s_1s_2 + s_2\mathbf{v}_1 + s_1\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \end{aligned}$$

де $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ та $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ є звичайними операціями скалярного та векторного добутку векторів відповідно. Таким чином, добуток двох кватерніонів є також кватерніоном. При цьому операція множення не є комутативною, тобто в загальному випадку $Q_1Q_2 \neq Q_2Q_1$.

4) *Спряження.* Кватерніон $\bar{Q} = s - (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})$ називають спряженим до кватерніона $Q = s + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. При цьому неважко переконатися, що

$$Q\bar{Q} = s^2 + a^2 + b^2 + c^2. \tag{4}$$

Величину $\sqrt{Q\bar{Q}} = \sqrt{s^2 + a^2 + b^2 + c^2}$ називають *модулем* кватерніона і позначають $|Q|$. Якщо модуль кватерніона дорівнює одиниці, кватерніон називають одиничним.

5) *Обернення.* Оберненим до кватерніона Q називається кватерніон Q^{-1} такий, що

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = 1.$$

З (4) випливає, що $Q^{-1} = \dfrac{\bar{Q}}{|Q|^2}$.

Зауваження 1. Цікавим є те, що кожному кватерніону $Q = s + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ можна однозначно поставити у відповідність дійснозначну квадратну матрицю

$$\begin{pmatrix} s & -a & -b & -c \\ a & s & -c & b \\ b & c & s & -a \\ c & -b & a & s \end{pmatrix}.$$

При цьому сумі кватерніонів, їх добутку та спряженому кватерніону будуть відповідати сума матриць, їх добуток та транспонована матриця.

Операція обертання в тривимірному просторі. Розглянемо уявний (це означає $s = 0$) одиничний кватерніон

$$U = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

тобто довільний одиничний вектор (x, y, z) з R^3. Тоді для будь-якого кута φ

$$\cos\varphi + U\sin\varphi$$

також одиничний кватерніон, який за аналогією з формулою Ейлера можна записати у вигляді $e^{U\varphi}$.

Теорема 1. (наприклад, [6; 7]) Якщо $U = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – одиничний вектор (одиничний уявний кватерніон), а $\boldsymbol{V}$ – довільний вектор з R^3, то вираз

$$e^{U\varphi}\boldsymbol{V}e^{-U\varphi}$$

задає обертання вектора $\boldsymbol{V}$ навколо осі, напрямленої за вектором U, на кут 2φ.

Доведення. Розкриємо дужки у виразі

$$e^{U\varphi}\boldsymbol{V}e^{-U\varphi} = (\cos\varphi + U\sin\varphi)\boldsymbol{V}(\cos\varphi - U\sin\varphi)$$

за правилом множення кватерніонів. Отримаємо, що

$$e^{U\varphi}\boldsymbol{V}e^{-U\varphi} = (\cos^2\varphi)\boldsymbol{V} + (\sin\varphi\cos\varphi)(U\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}U) - (\sin^2\varphi)U\boldsymbol{V}U.$$

Далі окремо знаходимо, що

$$U\boldsymbol{V} = U \times \boldsymbol{V} - U \cdot \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{V}U = -U \times \boldsymbol{V} - U \cdot \boldsymbol{V},$$

$$U\boldsymbol{V}U = -2(U \cdot \boldsymbol{V})U + \boldsymbol{V}(U \cdot U),$$

де символами $\times$ та $\cdot$ позначено відповідно векторний та скалярний добуток векторів. Отже,

$$\begin{aligned}
e^{U\varphi}\boldsymbol{V}e^{-U\varphi} &= (\cos^2\varphi)\boldsymbol{V} + 2(\sin\varphi\cos\varphi)(U\times\boldsymbol{V}) + 2(\sin^2\varphi)(U\cdot\boldsymbol{V})U - \boldsymbol{V}(U\cdot U)(\sin^2\varphi) = \\
&= (\cos 2\varphi)\boldsymbol{V} + (\sin 2\varphi)(U\times\boldsymbol{V}) + U(U\cdot\boldsymbol{V})(1-\cos 2\varphi) = \\
&= (\cos 2\varphi)\left(\boldsymbol{V} - U(U\cdot\boldsymbol{V})\right) + (\sin 2\varphi)(U\times\boldsymbol{V}) + U(U\cdot\boldsymbol{V}) = \\
&= (\cos 2\varphi)\boldsymbol{V}_\perp + (\sin 2\varphi)(U\times\boldsymbol{V}) + \boldsymbol{V}_\parallel,
\end{aligned}$$

де $\boldsymbol{V}_\parallel = U(U\cdot\boldsymbol{V})$ – компонента вектора $\boldsymbol{V}$, яка паралельна до осі U, а $\boldsymbol{V}_\perp = \boldsymbol{V} - U(U\cdot\boldsymbol{V})$ – компонента вектора $\boldsymbol{V}$, яка перпендикулярна до осі U. В останньому неважко переконатися, якщо взяти скалярний добуток вектора U і $\boldsymbol{V}_\perp = \boldsymbol{V} - U(U\cdot\boldsymbol{V})$. Зауважимо також, що вектор $U\times\boldsymbol{V}$ перпендикулярний до осі U і, крім того, $\boldsymbol{V}_\perp$ і $U\times\boldsymbol{V}$, є перпендикулярними між собою. Таким чином, отримуємо формулу обертання вектора $\boldsymbol{V}$ навколо осі U на кут 2φ відповідно.

Зауваження 2. Щоб повернути вектор $\boldsymbol{V}$ на кут φ, необхідно до вектора $\boldsymbol{V}$ застосувати операцію $e^{U\frac{\varphi}{2}}\boldsymbol{V}e^{-U\frac{\varphi}{2}}$. Для того, щоб послідовно зробити два повороти вектора $\boldsymbol{V}$, наприклад, спочатку на кут α навколо осі, напрямленої за U_1, а потім на кут β навколо осі, напрямленої за U_2, до вектора $\boldsymbol{V}$ потрібно застосувати операцію $e^{U_2\frac{\beta}{2}}e^{U_1\frac{\alpha}{2}}\boldsymbol{V}e^{-U_1\frac{\alpha}{2}}e^{-U_2\frac{\beta}{2}}$.

Підкреслимо, що кватерніони – надзвичайно зручний апарат для програмування обертання об'єкта у тривимірному просторі. Це пов'язано з тим, що кватерніон описує безпосередньо геометричні властивості обертання: вісь обертання та кут обертання. Наприклад, для розв'язання задач скелетної анімації пропонується використовувати комбінований підхід: задавати перетворення набором – кватерніон, коефіцієнти масштабування, перенос, а зберігання і перетворення виконувати у вигляді матриці переходу. За потреби відповідні алгоритми програмування зацікавлені студенти можуть легко знайти у багатьох посібниках з програмування або мережі Інтернет.

Висновки. У статті наведено основні математичні відомості про кватерніони, а саме поняття, різні форми представлення та операції над ними. Окрема увага приділяється описанню операції обертання у тривимірному просторі, що у свою чергу активно застосовується у комп'ютерній графіці.

Список використаних джерел

1. *Ватульян А. О.* Кватернионы / А. О. Ватульян // Соросовский образовательный журнал. – 1999. – № 5. – С. 117–120.
2. *Виттенбург Й.* Динамика систем твёрдых тел / Й. Виттенбург. – М. : Мир, 1980. – 292 с.
3. *Побегайло А. П.* Применение кватернионов в компьютерной геометрии и графике / А. П. Побегайло. – Минск : Изд-во БГУ, 2010. – 216 с.
4. *Погорелов Д. Ю.* Введение в моделирование динамики систем тел / Д. Ю. Погорелов. – Брянск : Изд-во БГТУ, 1997. – 156 с.
5. *Чуб В. Ф.* Уравнения инерциальной навигации и кватернионная теория пространства-времени / В. Ф. Чуб // Гиперкомплексные числа в геометри и физике. – 2007. – Т. 4, № 1(7). – С. 133–140.
6. *Hamilton W. R.* Elements of Quaternions / W. R. Hamilton // Chelsea Publishing Company, third edition. – Vol. I. – 1969.
7. *John H.* Conway On quaternions and octonions: Their geometry, arithmetic, and symmetry / Conway John H., Smith Derek A. – Natick : A K Peters, Ltd. – 2003. – 159 p.